

Г. Н. САВИН

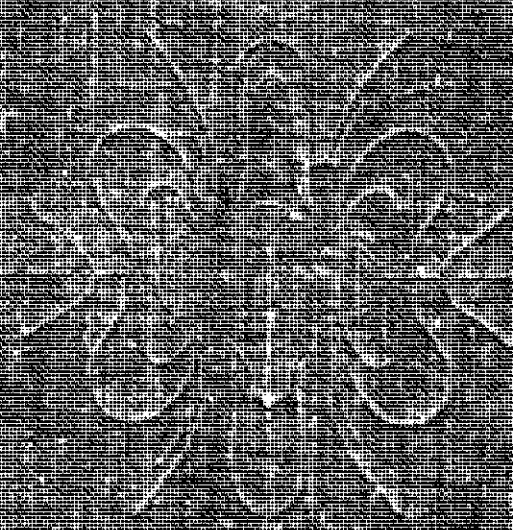
---

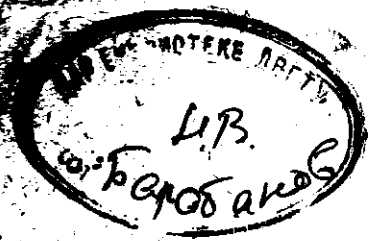
**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ  
НАПРЯЖЕНИЙ  
ОКОЛО  
ОТВЕРСТИЙ**

•

530.3  
C12

THE CABIN





1037036

Дорогому

Ивану Ивановичу

Баратаеву

от автора

24 мая 1968.

С. Савит

Библиотека ДВГУ

АКАДЕМИЯ НАУК  
УКРАИНСКОЙ ССР



ИНСТИТУТ  
МЕХАНИКИ

539.3

531  
C13

1037036

3-1-4  
174-68M

ТИПОГРАФИЯ № 5

к/хр

Библиотека ДВГУ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Монография Г. Н. Савина «Распределение напряжений около отверстий» является значительным развитием его монографии «Концентрация напряжений около отверстий», вышедшей в 1951 г. и высоко оцененной в свое время. Эта монография получила широкое распространение, переведена на несколько иностранных языков.

Несмотря на имеющуюся в настоящее время мощную вычислительную технику, позволяющую численно решать многие задачи, в том числе и задачи теории упругости, важное значение имеет разработка методов приближенных решений для отдельных классов задач, которые давали бы решения в виде некоторых сравнительно простых аналитических выражений.

В настоящей монографии отдается предпочтение построению решений (приближенных) различных классов задач теории упругости, приводящих к простым формулам для вычисления компонентов напряжений и перемещений.

Как известно, первоначально результаты по решению задач плоской теории упругости методами теории функций комплексного переменного, несмотря на их эффективность, носили больше теоретический характер, поэтому возникла насущная необходимость придать этим результатам вид, требуемый инженерной практикой.

Большая заслуга Г. Н. Савина в том, что он своими работами в значительной мере восполнил этот пробел. Результаты исследований, приведенные в настоящей монографии, кроме большого теоретического интереса представляют интерес и в указанном выше смысле. Особенно ценным является выполненное автором сравнение теоретических решений с экспериментальными данными, имеющимися в мировой литературе.

Можно не сомневаться, что монография Г. Н. Савина принесет большую пользу и будет тепло принята читателями, особенно лицами, работающими в области приложений.

Академик Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ

15 июля 1966 г.

Тбилиси

Математический институт АН ГрузССР



Настоящая монография является продолжением и значительным развитием книги «Концентрация напряжений около отверстий», выпущенной Государственным издательством технико-теоретической литературы в 1951 г. За прошедшие 15 лет проблеме концентрации напряжений около отверстий было уделено очень большое внимание: поставлены новые задачи и получены эффективные решения как для новых классов задач (нелинейные задачи, напряжения возле отверстий в оболочках и др.), так и для задач, сформулированных ранее, в частности для многосвязных областей изотропной и анизотропной сред.

Монография включает 12 глав и приложение; она содержит в основном результаты исследований автора и его учеников, выполненных за последние 15 лет, но, как и в предыдущей работе, в нее включено все наиболее важное и интересное, полученное другими авторами в этом направлении.

Монография «Концентрация напряжений около отверстий» состояла из 8 глав. Значительное количество задач решалось единым подходом, а именно сведением к нахождению двух аналитических функций комплексной переменной — комплексных потенциалов Г. В. Колосова — Н. И. Мухелишвили с дальнейшим применением (в большинстве случаев) конформных отображений внешности или внутренности единичного круга на рассматриваемые области и интегралов типа Коши (или формул Шварца), так как исследовались в основном односвязные конечные или бесконечные области.

В связи со значительным расширением классов задач, рассмотренных в настоящей монографии, не удалось выдержать прежней унификации в методах решения приведенных задач. Для решения этих задач пришлось применить три метода:

1) метод комплексных потенциалов Колосова — Мухелишвили и интегралов типа Коши или формулы Шварца; этим методом решены задачи, рассмотренные в гл. II, III, IV (§ 1 и 2), V, VII и VIII;

2) метод возмущения формы границ для изотропной среды (когда задача сводится к решению небигармонического уравнения) и для анизотропной среды (когда отверстие не является эллиптическим); указанным методом решены задачи, составляющие содержание гл. III, IV (§ 3), VI, X и XI;

3) метод, основанный на принципе В. Вольтерра, для решения задач о влиянии вязко-упругих свойств материала на концентрацию напряжений около отверстий (гл. XII).

Из 12 глав настоящей монографии совершенно новыми (по сравнению с предыдущей) являются гл. IV, VI, VII, VIII, IX, X, XI и XII, а гл. II, III и V существенно переработаны.

Книга содержит наиболее важные результаты исследований по концентрации напряжений возле отверстий и трещин в удобной для применения форме и позволяет делать выводы, не углубляясь иногда в сложную теорию. Монография знакомит с методами решения задач о концентрации напряжений возле отверстий, а также с основной литературой по указанной проблеме. Она построена таким образом, чтобы все главы могли быть прочитаны самостоятельно. Многие результаты исследований изложены не с той полнотой, с которой бы их следовало осветить. Основным препятствием этому был и так непомерно разросшийся объем книги. В таких случаях мы старались дать возможно более полную ссылку на оригинальные работы, список которых приложен в алфавитном порядке в конце каждой главы. Наиболее интересные результаты исследований, которые, по нашему мнению, могут найти непосредственное применение в инженерной практике или помочь разобраться в сложной картине напряженного состояния возле рассматриваемого отверстия и установить влияние тех или иных факторов (закругления углов отверстий, расстояния между отверстиями, жесткости подкрепляющего кольца и др.), представлены в виде графиков, таблиц и т. п.

Большую помощь в подборе материала для соответствующих глав настоящей монографии и критическому анализу, проверке решений своих и других авторов и составлению графиков и таблиц оказали мои ученики — доктора техн. наук А. Н. Гузь, Г. А. Ван Фо Фы, А. Г. Угодчиков, Д. В. Грилицкий, В. В. Панасюк, И. А. Прусов, Н. П. Флейшман, Ю. А. Шевляков, Я. С. Подстригач, кандидаты физ.-мат. наук Я. Ф. Каюк, А. А. Каминский, Ю. И. Койфман, В. Д. Кубенко, Ю. Н. Немш, Ю. Н. Подильчук, И. Ю. Хома, Л. П. Хорошун, И. А. Цурпал, за что выражаю им глубокую благодарность.

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность д-ру техн. наук проф. Е. Ф. Бурмистрову, д-ру физ.-мат. наук проф. И. И. Воровичу, д-ру физ.-мат. наук проф. Д. Д. Ивлеву, чл.-корр. АН УССР д-ру техн. наук проф. А. С. Космодамианскому, д-ру физ.-мат. наук проф. Л. А. Толоконникову и канд. физ.-мат. наук доц. В. Г. Громову, высказавшим ряд критических замечаний при чтении соответствующих глав, чем в значительной степени способствовали улучшению книги.

В огромной работе, связанной с подготовкой рукописи к печати, автору была оказана большая помощь инженерами отдела реологии Института механики АН УССР И. О. Губерман, Ц. Б. Пинской, И. Ю. Бабичем, техниками С. С. Кириченко, Н. А. Чайкун, С. Г. Цегельным и другими сотрудниками и аспирантами отдела. Пользуюсь случаем выразить им глубокую признательность за проделанную работу.

25 января 1966 г.

Г. Н. САВИН

Киев

Институт механики АН УССР,

отдел реологии

## ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### § 1. Плоская задача линейной теории упругости изотропной среды\*

Плоская задача теории упругости изотропного тела, как известно, объединяет две физически различные задачи: о плоском напряженном состоянии и о плоской деформации.

Напряженное состояние в любой точке упругого тела для плоской задачи полностью определяется тремя напряжениями —  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , которые при отсутствии объемных сил удовлетворяют двум уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (I.1)$$

и условию совместности

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (I.2)$$

Задача сводится к интегрированию указанных уравнений при определенных граничных условиях.

В зависимости от того, что задается на контуре  $L$  области  $S$ , занятой телом, различают две основные задачи.

Для первой основной задачи, т. е. когда на контуре  $L$  области  $S$  заданы внешние усилия  $X_n$  и  $Y_n$ , граничные условия можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= X_n, \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) &= Y_n. \end{aligned} \quad (I.3)$$

Здесь  $n$  — внешняя нормаль к контуру  $L$ .

Для второй основной задачи, т. е. когда на контуре  $L$  области  $S$  заданы перемещения, граничные условия примут вид

$$u = g_1(s), \quad v = g_2(s), \quad (I.4)$$

где  $g_1(s)$  и  $g_2(s)$  — заданные смещения точек контура  $L$ , представляющие собой заданные функции от дуги  $s$  контура, отсчитываемой от произвольной его точки.

Кроме указанных двух основных задач существуют различные вариации задач смешанного типа. Ниже нам встретится простейшая из этих задач, именуемая обычно третьей задачей, а именно на одной части контура  $L$  области  $S$  заданы напряжения, а на остальной части этого контура — перемещения.

\* Более подробно см. в монографии Н. И. Мусхелишвили [1] (здесь и далее звездочки при словах обозначают сноски, во всех остальных случаях — индексы).

Систему уравнений (I. 1) и (I. 2) можно свести к одному бигармоническому уравнению

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \quad (\text{I.5})$$

если ввести функцию напряжений  $U(x, y)$ , связанную с напряжениями соотношениями

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \quad (\text{I.6})$$

Можно показать при этом, что контурные условия для функции  $U(x, y)$  в случае первой основной задачи принимают вид

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \int_0^s X_n ds + C_1, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\int_0^s Y_n ds + C_2, \quad (\text{I.7})$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — две произвольные вещественные постоянные, которые для односвязной области могут быть положены равными нулю.

Таким образом, плоская задача теории упругости сводится к отысканию бигармонической функции  $U(x, y)$ , удовлетворяющей контурным условиям (I. 4) или (I. 7).

Н. И. Мусхелишвили [1] показал, что решение уравнения (I. 5) можно записать так:

$$U(x, y) = \operatorname{Re} [\bar{z}\varphi_1(z) + \chi_1(z)]. \quad (\text{I.8})$$

Здесь  $\operatorname{Re}$  — символ вещественной части выражения, стоящего в квадратных скобках;  $\varphi_1(z)$  и  $\chi_1(z)$  — некоторые аналитические функции комплексного переменного  $z = x + iy$ .

Следовательно, решение плоской задачи сводится к определению двух аналитических функций  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z) = \frac{d\chi_1}{dz}$ , удовлетворяющих на контуре  $L$  определенным условиям.

Представление решения уравнения (I. 5) в форме (I. 8) дает возможность выразить граничные условия также через две функции  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$ .

Для первой основной задачи условие (I. 7) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} &= \varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = \\ &= i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + C = f_1 + if_2 + \text{const} \quad \text{на } L. \end{aligned} \quad (\text{I.9})$$

Если же заданы перемещения, получаем на контуре  $L$  следующее граничное условие:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} = 2\mu(g_1 + ig_2) \quad \text{на } L, \quad (\text{I.10})$$

где  $\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$  для плоского напряженного состояния и  $\kappa = 3 - 4\nu$  для плоской деформации;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль Юнга;  $\mu = G = E/2(1+\nu)$  — модуль сдвига.

В дальнейшем объединим граничные условия (I.9) и (I.10) и запишем их в виде

$$\kappa_1 \varphi_1(z) + \overline{z \varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = F(z) \quad \text{на } L, \quad (\text{I.11})$$

где

$$\kappa_1 = 1, \quad F = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \text{const}$$

для первой основной задачи;

$$\kappa_1 = -\kappa, \quad F = -2\mu(g_1 + ig_2) \quad (\text{I.12})$$

для второй основной задачи.

Если функции  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  известны, компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  могут быть найдены непосредственно через  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  по формулам Колосова—Мусхелишвили\*

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}] = 4\text{Re } \varphi_1'(z), \quad (\text{I.13})$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\overline{z \varphi_1'(z)} + \psi_1'(z)].$$

Из уравнения (I.13) легко найдем формулы для максимального тангенциального напряжения  $\tau_{\max}$  и главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , выраженных через комплексные потенциалы  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$ :

$$\tau_{\max} = |\overline{z \varphi_1'(z)} + \psi_1'(z)|,$$

$$\sigma_1 = \varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)} + |\overline{z \varphi_1'(z)} + \psi_1'(z)|, \quad (\text{I.14})$$

$$\sigma_2 = \varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)} - |\overline{z \varphi_1'(z)} + \psi_1'(z)|.$$

При решении первой основной задачи иногда удобнее пользоваться граничным условием, полученным из уравнения (I.9) дифференцированием по  $z \equiv t$  (где  $t$  — значение переменной  $z$  на контуре  $L$  области  $S$ ):

$$\Phi_1(t) + \overline{\Phi_1(t)} - e^{-2i\theta} [\overline{t \Phi_1'(t)} + \overline{\Psi_1(t)}] = F'(t) = (X_n + iY_n) e^{-i\theta} = N + iT. \quad (\text{I.15})$$

\* Комплексное представление решения плоской задачи в виде, впервые опубликованном Г. В. Колосовым (1909 г.), как указывают И. Н. Векуа и Н. И. Мусхелишвили [1], было дано еще раньше (1900 г.) С. А. Чаплыгиным [1]. Однако эти работы С. А. Чаплыгина были опубликованы лишь после его смерти (1950 г.).

Здесь и далее в формулах (I.17) — (I.21)  $\Phi_1(z) = \varphi'_1(z)$ ,  $\Psi_1(z) = \psi'_1(z)$ ;  $N$  — проекция напряжения, приложенного к дуге контура, на направление внешней нормали по отношению к телу;  $T$  — проекция того же напряжения на касательную, направленную влево, если смотреть вдоль положительного направления нормали;  $\theta$  — угол между нормалью и осью  $x$ .

Если область ограничена окружностью (круговой диск, плоскость с круговым отверстием, круговое кольцо), то

$$F'(t) = N + iT = \sigma_r + i\tau_{r\theta}, \quad (\text{I.16})$$

где  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$  — соответственно нормальное и тангенциальное напряжение в полярной системе координат ( $z = re^{i\theta}$ ).

Первая, вторая и смешанная задачи плоской теории упругости для многих областей решаются весьма просто и эффективно путем приведения их к граничной задаче Гильберта или к задаче линейного сопряжения. В монографии Н. И. Muskhelishvili [1] можно найти подробное изложение этого вопроса. Здесь мы приведем только несколько формул, которые понадобятся в дальнейшем.

В полярной системе координат ( $r, \theta$ ) формулы (I.13) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 2[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)}], \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2e^{2i\theta} [\overline{z}\Phi'_1(z) + \Psi_1(z)], \\ 2\mu(v_r + iv_\theta) &= [\kappa\Phi(z) - \overline{z}\Phi'(z) - \psi(z)]e^{-i\theta}. \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Из двух первых формул (I.17) следует

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} - e^{2i\theta} [\overline{z}\Phi'_1(z) + \Psi_1(z)]. \quad (\text{I.18})$$

Для области, ограниченной окружностью,

$$\Psi_1(z) = \frac{1}{z^2} \Phi_1(z) + \frac{1}{z^2} \overline{\Phi_1\left(\frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{z} \Phi'_1(z); \quad (\text{I.19})$$

$$\sigma_r + i\tau_{r\theta} = \Phi_1(z) - \Phi_1\left(\frac{1}{z}\right) + \bar{z}\left(\bar{z} - \frac{1}{z}\right) \overline{\Psi_1(z)}; \quad (\text{I.20})$$

$$2\mu\left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + i\frac{\partial v}{\partial \theta}\right) = iz\left[\kappa\Phi_1(z) + \Phi_1\left(\frac{1}{z}\right) - \bar{z}\left(\bar{z} - \frac{1}{z}\right) \overline{\Psi_1(z)}\right]. \quad (\text{I.21})$$

Формулы (I.20) и (I.21) очень удобны для решения многих важных задач плоской теории упругости.

**Решение основных граничных задач для односвязных (бесконечных) областей.** В рассматриваемом случае областью изменения комплексной переменной  $z$  является внешность (включая и бесконечно удаленную точку) некоторого достаточно гладкого контура  $L$ , т. е. бесконечная плоскость с одним отверстием. Помещая начало координат внутри

отверстия (вне области), можно представить функции  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  в виде

$$\varphi_1(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n z^n, \quad (1.22)$$

$$\psi_1(z) = \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \sum_{-\infty}^{+\infty} b'_n z^n.$$

Здесь  $X$  и  $Y$  — компоненты главного вектора всех внешних сил, приложенных к контуру  $L$  отверстия.

Для того чтобы напряжения оставались ограниченными во всей области  $S$ , необходимо в функциях  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  (1.22) все коэффициенты  $a'_n$  и  $b'_n$  для  $n \geq 2$  положить равными нулю. При этих ограничениях

$$\varphi_1(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \Gamma z + \varphi_1^0(z), \quad (1.23)$$

$$\psi_1(z) = \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1 + \kappa)} \ln z + \Gamma' z + \psi_1^0(z).$$

Здесь постоянные  $\Gamma = B + iC$  и  $\Gamma' = B' + iC'$  определяются напряженным состоянием на бесконечности, а  $\varphi_1^0(z)$  и  $\psi_1^0(z)$  — функции, имеющие при достаточно большом  $|z|$  разложения вида

$$\varphi_1^0(z) = a'_0 + \frac{a'_1}{z} + \frac{a'_2}{z^2} + \dots, \quad (1.24)$$

$$\psi_1^0(z) = b'_0 + \frac{b'_1}{z} + \frac{b'_2}{z^2} + \dots$$

Если контур отверстия свободен от внешних усилий, в формуле (1.23) следует положить  $X = Y = 0$ .

Обозначив через  $N_1$  и  $N_2$  значения главных напряжений на бесконечности, получим для постоянных  $\Gamma = B + iC$  и  $\Gamma' = B' + iC'$  следующие выражения:

$$B = \frac{N_1 + N_2}{4}, \quad B' = -\frac{N_1 - N_2}{2} \cos 2\alpha, \quad C' = \frac{N_1 - N_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (1.25)$$

Здесь  $\alpha$  — угол, который составляет усилие  $N_1$  на бесконечности с осью  $Ox$ .

Напряжения на бесконечности

$$\sigma_x^\infty = 2B - B', \quad \sigma_y^\infty = 2B + B', \quad \tau_{xy}^\infty = C'. \quad (1.25 a)$$

Постоянная  $C'$  связана с жестким вращением бесконечно удаленной части плоскости и на распределение напряжений не влияет, а поэтому может быть положена равной нулю.

Отобразим теперь область  $S$  на внутренность (или внешность) единичного круга  $\gamma$  с помощью отображающей функции  $z = \omega(\zeta)$ . Значение переменной  $\zeta$  на единичной окружности обозначим через  $\sigma$ .

Заменой переменной  $z$  на контуре  $L$  области  $S$  через  $\omega(\zeta)$  условие (I.11) приводится к виду

$$\kappa_1 \Phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\Psi(\sigma)} = F(\sigma) \quad \text{на } \gamma, \quad (\text{I.26})$$

где функции  $\Phi(\sigma)$  и  $\Psi(\sigma)$  соответственно равны  $\Phi_1[\omega(\sigma)]$  и  $\Psi_1[\omega(\sigma)]$ .

После замены переменной  $z$  на  $\omega(\zeta)$  формулы (I.13) примут вид

$$\sigma_\varrho + \sigma_\phi = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\zeta)}] = 4\text{Re } \Phi(\zeta), \quad (\text{I.27})$$

$$\sigma_\phi - \sigma_\varrho + 2i\tau_{\phi\phi} = \frac{2\zeta^2}{\varrho^2 \omega'(\zeta)} [\overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi(\zeta)],$$

где

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad (\text{I.28})$$

а  $\sigma_\varrho$ ,  $\sigma_\phi$  и  $\tau_{\phi\phi}$  равны соответственно  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  в подвижной прямоугольной системе координат, у которой начало координат находится в рассматриваемой точке и ось  $Oy$  представляет собой касательную к кривой  $\varrho = \text{const}$ , а ось  $Ox$  направлена по внешней нормали к этой кривой в данной точке.

При решении конкретных задач иногда удобнее в практическом смысле определять функции  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$ , удовлетворяющие на контуре  $\gamma$  условию

$$\kappa_1 \Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \frac{\sigma^{-2}}{\omega'(\sigma)} [\omega(\sigma) \overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\omega'(\sigma)} \overline{\Psi(\sigma)}] = \frac{F'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \quad \text{на } \gamma. \quad (\text{I.29})$$

Условие (I.29) получено из (I.26) путем дифференцирования по  $\sigma$ .

Как показано в работах И. Н. Карцивадзе [1], Е. Ф. Бурмистрова [2], если функция  $\Phi(\zeta)$  определена, то этого уже достаточно для полного решения задачи, поскольку функция  $\Psi(\zeta)$  связана с функцией  $\Phi(\zeta)$  формулой \*

$$\Psi(\zeta) = \frac{\overline{\omega'}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\zeta^2 \omega'(\zeta)} \left[ \kappa_1 \overline{\Phi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \Phi(\zeta) \right] - \frac{1}{\omega'(\zeta)} \left[ \overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi'(\zeta) + \frac{1}{\zeta^2} \overline{F'}\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right]. \quad (\text{I.30})$$

\* Это выражение можно получить из формулы, указанной А. Г. Угодчиковым, простым дифференцированием по  $\zeta$ :

$$\psi = -\kappa_1 \overline{\varphi}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\overline{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \overline{F}\left(\frac{1}{\zeta}\right).$$



Подставляя формулу (I.30) в (I.27), получаем следующие выражения для напряжений на контуре:

$$\begin{aligned}\sigma_{\varrho} &= \operatorname{Re} \left[ (1 - \kappa_1) \Phi(\sigma) + \frac{F'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right], \\ \sigma_{\theta} &= \operatorname{Re} \left[ (3 + \kappa_1) \Phi(\sigma) - \frac{F'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right], \\ \tau_{\varrho\theta} &= \operatorname{Im} \left[ (1 - \kappa_1) \Phi(\sigma) - \frac{F'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right].\end{aligned}\quad (\text{I.31})$$

В частности, если контур свободен от внешних усилий, напряжения находятся по формулам

$$\sigma_{\theta} = 4\operatorname{Re} \Phi(\sigma), \quad \sigma_{\varrho} = \tau_{\varrho\theta} = 0. \quad (\text{I.32})$$

В случае второй основной задачи (в отверстие впамяно абсолютно жесткое кольцо или шайба)

$$\sigma_{\varrho} = \frac{4}{1+\nu} \operatorname{Re} \Phi(\sigma), \quad \sigma_{\theta} = \nu \sigma_{\varrho}, \quad \tau_{\varrho\theta} = \frac{4}{1+\nu} \operatorname{Im} \Phi(\sigma). \quad (\text{I.33})$$

В дальнейшем будем пользоваться отображением как на внешность, так и на внутренность единичного круга, принимая в первом случае отображающую функцию в виде

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \zeta + \sum_{k=0}^n c_k \zeta^{-k} \right) \quad (|\zeta| \geq 1), \quad (\text{I.34})$$

а во втором — в виде

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} + \sum_{k=0}^n c_k \zeta^k \right) \quad (|\zeta| < 1). \quad (\text{I.35})$$

Нетрудно убедиться, что после замены переменной  $z$  на  $\zeta$  с помощью соотношения (I.34) функции (I.23) будут иметь вид

$$\varphi(\zeta) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln \zeta + R(B+iC)\zeta + \Phi_0(\zeta), \quad (\text{I.36})$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)} \ln \zeta + R(B'+iC')\zeta + \Psi_0(\zeta),$$

где  $\Phi_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \zeta^{-k}$  и  $\Psi_0(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \zeta^{-k}$  — две голоморфные при  $\zeta = \infty$  функции.

Подставляя в контурные условия (I.26) функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$  (I.36) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\zeta$  в правой и левой частях, получаем систему алгебраических уравнений. Решив ее, найдем коэффициенты  $a_k$  и  $b_k$ . Этот прием, однако, осуществим лишь в

наиболее простых случаях. Вообще же он чрезвычайно громоздок и неудобен\*.

Н. И. Мусхелишвили [1] показал, что, применяя теорему Гарнака, можно заменить контурные условия (I.11), куда вместо  $z$  должно быть внесено значение отображающей функции на контуре  $z = \omega(\sigma)$  (I.35), двумя равносильными функциональными уравнениями:

$$\begin{aligned} \Phi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \cdot \frac{\overline{\Phi_0'(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma + \bar{b}_0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + if_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma, \\ \Psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \cdot \frac{\Phi_0'(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 - if_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma, \end{aligned} \quad (I.37)$$

где

$$\begin{aligned} f_1^0 + if_2^0 &= f_1 + if_2 - \frac{X + iY}{2\pi} \ln \sigma - \frac{BR}{\sigma} - \\ &- \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \left\{ \frac{X - iY}{2\pi(1 + \kappa)} \sigma - BR\sigma^2 \right\} - (B' - iC')\bar{R}\sigma - \end{aligned} \quad (I.38)$$

приведенные контурные условия для функций  $\Phi_0(z)$  и  $\Psi_0(z)$ , а  $f_1^0 - if_2^0$  — выражение, сопряженное с выражением (I.38).

Аналогичные соотношения получаются и для второй основной задачи. Можно показать\*\*, что если  $z = \omega(\zeta)$  есть рациональная функция, то из первого уравнения системы (I.37) удастся определить функцию  $\Phi_0(\zeta)$ , а затем из второго уравнения системы (I.37) —  $\Psi_0(\zeta)$ . Если  $z = \omega(\zeta)$  не рациональная функция, систему (I.37) можно свести к интегральным уравнениям Фредгольма\*\*\*.

Подставив в выражения (I.36) найденные функции  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$ , получим окончательный вид функций  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  при заданном напряженном состоянии на бесконечности. Внося в формулы (I.27) функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  (I.36), а также соответствующую для данной формы отверстия отображающую функцию  $\omega(\zeta)$  из выражения (I.35) и отделив в них действительные и мнимые части, найдем формулы для компонентов напряжений  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{\rho\theta}$  в криволинейной ортогональной системе координат  $(\rho, \theta)$ , соответствующей отображающей функции  $\omega(\zeta)$  (I.35).

В действительности сравнительно редко приходится иметь дело с неограниченными областями, ослабленными тем или иным отверстием или рядом отверстий. В подавляющем большинстве случаев инженерной практики задача сводится к исследованию концентрации напряжений возле отверстий в плоскостях конечных размеров, превышающих наиболее размеры отверстия в небольшое число (3—5) раз, т. е. приходится иметь дело с многосвязными конечными областями. Применение этих методов к решению конкретных задач можно найти, например,

\* Формулы (I.31) — (I.33) были получены Е. Ф. Бурмистровым [1].

\*\* См. Н. И. Мусхелишвили [1], § 85, стр. 329—333.

\*\*\* См. Н. И. Мусхелишвили [1], § 96—105, стр. 363—386.

в работах Н. Ф. Гурьева [1, 2], М. П. Шереметьева [1], Н. И. Мусхелишвили [1]. Эти методы дают возможность решить любую задачу до конца, однако при этом надо выполнить очень большой объем вычислительной работы, причем полученное решение все же будет приближенным. Естественно, возникает вопрос, особенно для конечных двусвязных областей, при каких соотношениях размеров областей и отверстий в них можно при заданной степени точности окончательных результатов воспользоваться более простыми решениями для односвязных бесконечных областей. Для решения последнего вопроса можно воспользоваться сравнительно простым приближенным решением А. Г. Угодчикова [8] для конечных двусвязных областей, дающим возможность удовлетворить заданным граничным условиям на одном из контуров тождественно, а на другом — с некоторой ошибкой. По величине этой ошибки, по-видимому, можно судить о точности найденного приближенного решения\*.

## § 2. Отображающие функции

Из § 1 следует, что необходимым условием эффективного решения плоской задачи является предварительное построение функций, конформно отображающих внутренность или внешность единичного круга на интересующие нас области.

Будем рассматривать конечные односвязные и двусвязные и бесконечные односвязные области, представляющие собой внешность некоторой кривой.

Примем, что границы наших областей представляют собой простые кусочно-гладкие кривые Жордана в параметрических уравнениях  $x(t)$ ,  $y(t)$ , для которых интервал  $t_1 \leq t \leq t_2$  изменения параметра  $t$  можно разбить на конечное число интервалов так, что в каждом из них функции  $x(t)$  и  $y(t)$  имеют непрерывные производные  $x'(t)$ ,  $y'(t)$ , не обращающиеся одновременно в нуль, — касательная к кривой изменяется непрерывно.

Возникает вопрос, всякую ли область можно конформно отобразить на круг (круговое кольцо). На этот вопрос дает исчерпывающий ответ теорема Римана, формулировка которой приведена в книгах Э. Гурса [2], В. И. Смирнова [1], И. И. Привалова [1], Г. М. Голузина [1].

Если граница (границы) заданной односвязной (двусвязной) области есть гладкая кривая с непрерывно изменяющейся касательной, то конформное преобразование круга (кругового кольца) на заданную односвязную (двусвязную) область существует и (при определенных

\* В гл. II и III будут рассмотрены задачи о концентрации напряжений возле нескольких отверстий, т. е. задачи плоской теории упругости для многосвязных областей как изотропной, так и анизотропной сред; там же будут приведены (в необходимом объеме) и соответствующие методы решения этих задач, поэтому здесь на этих вопросах останавливаться не будем.

условиях нормирования) граница круга (кругового кольца) и граница односвязной (двусвязной) области переходят друг в друга однозначно и непрерывно.

Таким образом, если кривая кусочно-гладкая, то конформность преобразования будет нарушаться в угловых точках. Теорема Римана устанавливает лишь существование функции  $z = \omega(\zeta)$ , осуществляющей конформное преобразование, но не указывает, как построить эту функцию для наперед заданной области. Другими словами, эффективное построение функции, совершающей конформное преобразование, часто представляет собой достаточно сложную задачу. Даже если эта функция «точно» известна, она (за исключением простейших случаев \*) представляется сложным аналитическим выражением, которое приводит на практике к таким вычислительным трудностям и неудобствам, что приходится отказываться от точных выражений для функции  $z = \omega(\zeta)$  и заменять их наиболее удобными выражениями из хорошо изученных функций. К последним следует отнести прежде всего полиномы.

Указанное обстоятельство способствовало созданию удобных приближенных методов построения отображающих функций: аналитических \*\*, графоаналитических — методы П. В. Мелентьева [1], Б. Ф. Шилова [1] и М. Kikukawa [1—4], экспериментально-аналитических \*\*\* и численных \*\*\*\*.

При решении конкретных задач теории упругости можно, конечно, воспользоваться уже известными и имеющими удобный вид отображающими функциями.

*Пример 1.* Бесконечная область с эллиптическим отверстием. Из теории функций комплексного переменного известно, что область  $S$ , представляющая собой внешность эллиптического отверстия, отображается на внутренность единичного круга функцией

$$z = \omega(\zeta) = c \left( \frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) = Re^{i\delta} \left( \frac{1}{\zeta} + m\zeta \right), \quad (1.39)$$

где  $c = Re^{i\delta}$  — комплексная константа, влияющая лишь на размеры и положение отверстия. Постоянная  $|m| < 1$  характеризует эксцентриситет эллипса. Так, при  $m=0$  эллипс обращается в окружность, а при вещественном  $c=R$  ( $\delta=0$ ) и при  $m=+1$  или  $m=-1$  — в прямолинейный разрез длиной  $4R$  соответственно по оси  $Ox$  или  $Oy$ . Придав  $m$  различные значения от  $-1$  до  $+1$ , можем получить эллиптическое отверстие с любым соотношением его осей. Изменением  $R$  можно достичь любых размеров эллиптического отверстия. Изменяя  $\delta$ , поворачиваем на такой же угол (в положительном направлении) большую ось эллиптического отверстия относительно оси  $x$ .

При  $c$  вещественном, т. е. при  $\delta=0$ , уравнение контура отверстия имеет вид \*\*\*\*\*

$$x = R(1+m)\cos\vartheta, \quad y = -R(1-m)\sin\vartheta, \quad (1.40)$$

\* См. ниже пример 2.

\*\* См. Г. Голузин, Л. Канторович и др. [1], Л. В. Канторович и В. И. Крылов [2], В. И. Маховиков [1, 2] и др.

\*\*\* См. Г. Н. Положий [1], О. В. Тозони [1, 2], Ю. Г. Толстов [1, 2], А. Г. Угодчиков [1—4], В. Е. Шаманский [1], П. Ф. Фильчаков [4] и др.

\*\*\*\* См. Ю. В. Благовещенский [1, 2], П. Ф. Фильчаков [1, 6, 7] и др.

\*\*\*\*\* При отображении плоскости с отверстием на внутренность единичного круга обход границы круга против часовой стрелки в силу конформности отображения соответствует обходу контура рассматриваемого отверстия по часовой стрелке.

При этом, если заданы полуоси эллипса  $a$  и  $b$ , то, обозначив через  $k$  отношение полуоси  $b$  эллипса, лежащей на оси  $Oy$ , к полуоси  $a$ , лежащей на оси  $Ox$ , найдем

$$k = \frac{b}{a} = \frac{1-m}{1+m}.$$

Отсюда

$$m = \frac{1-k}{1+k} = \frac{a-b}{a+b}, \quad R = \frac{a+b}{2}. \quad (I.41)$$

Итак, отображающей функции (I.39) при вещественном  $c$  можно придать еще такой вид:

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} + m\zeta \right) = \frac{a+b}{2} \frac{1}{\zeta} + \frac{a-b}{2} \zeta. \quad (I.42)$$

Кроме того, можно поступить следующим образом: взять какую-нибудь функцию  $z = \omega(\zeta)$ , голоморфную и однолиственную внутри единичного круга  $|\zeta| \leq 1$  с границей  $\gamma$ , и посмотреть, какому контуру  $L$  на плоскости  $z$  будет соответствовать окружность  $\gamma$ . Если при этом окажется, что обход контура  $L$  будет совпадать (область остается в обоих случаях слева) с направлением обхода единичной окружности  $\gamma$ , то функция  $z = \omega(\zeta)$  будет давать конформное отображение области  $S$  на область единичного круга и обратно\*.

Например, функция

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{9} \zeta^3 \right) \quad (I.43)$$

дает отображение единичного круга на внешность квадрата с закругленными углами, а функция

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{4} \zeta^2 \right) \quad (I.44)$$

— отображение единичного круга на внешность равностороннего треугольника с закругленными углами. Однако эти приемы удастся использовать исключительно редко, а в большинстве случаев придется, пользуясь тем или иным приближенным методом, строить отображающую функцию. Полученная функция будет давать преобразование единичного круга не на заданную область  $S$  с границей  $L$ , а на область  $S'$  с границей  $L'$ , близкую к заданной. Степень отклонения контуров  $L$  и  $L'$  может служить критерием точности построенной функции.

**Применение интеграла Кристоффеля—Шварца.** Для построения отображающих функций односвязных областей, ограниченных многоугольниками, можно, как известно\*\*, использовать так называемый интеграл Кристоффеля—Шварца. При помощи этого интеграла приближенное значение отображающей функции можно получить в виде полинома или в другой форме, которая дает возможность аппроксимировать заданный контур с необходимой точностью.

Пусть требуется найти отображение внешности единичного круга  $|\zeta| \geq 1$  на внешность многоугольника, т. е. на область, включающую в себя бесконечно удаленную точку и ограниченную контуром интересующего нас вида (прямоугольник, квадрат, треугольник). Интеграл

\* См. Н. И. Мухелишвили [1].

\*\* См. И. И. Привалов [1].

Кристоффеля—Шварца, дающий решение задачи, имеет в этом случае вид

$$z = \omega(\zeta) = c \int_1^{\zeta} (t - a_1)^{\alpha_1 - 1} (t - a_2)^{\alpha_2 - 1} \dots (t - a_n)^{\alpha_n - 1} \frac{dt}{t^2} + d, \quad (I.45)$$

где  $c$  и  $d$  суть, вообще говоря, комплексные постоянные, характеризующие положение многоугольника и его размеры;  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — называемые константы интеграла Кристоффеля—Шварца — точки единичной окружности  $\gamma$  плоскости  $\zeta$ , соответствующие вершинам многоугольника  $A_1, A_2, \dots, A_n$  на плоскости  $z$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  — вещественные положительные постоянные, показывающие, какую часть  $\pi$  составляют внешние углы многоугольника;  $t$  — точка области внешности круга  $|t| > 1$ .

Отображение, осуществляемое функцией Кристоффеля—Шварца (I.45), непрерывно вплоть до контура, за исключением угловых точек  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , где  $\omega'(\zeta)$  обращается в нуль. Следовательно, конформность отображения в этих точках (углах) нарушается. Принимаем во внимание, что  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = n + 2$ , преобразуем подинтегральную функцию в формуле (I.45):

$$\omega(\zeta) = c \int_1^{\zeta} \left(1 - \frac{a_1}{t}\right)^{\alpha_1 - 1} \left(1 - \frac{a_2}{t}\right)^{\alpha_2 - 1} \dots \left(1 - \frac{a_n}{t}\right)^{\alpha_n - 1} dt. \quad (I.46)$$

Поскольку  $|a_n| = 1, |t| > 1$ , то, раскладывая подинтегральную функцию в формуле (I.46) в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки и интегрируя его, получаем

$$\omega(\zeta) = c \left\{ \zeta - [(\alpha_1 - 1)a_1 + (\alpha_2 - 1)a_2 + \dots + (\alpha_n - 1)a_n] \ln \zeta + \frac{e_1}{\zeta} + \frac{e_2}{\zeta^2} + \dots \right\}. \quad (I.47)$$

Для получения отображения однолистной области на однолистную, необходимо и достаточно, чтобы

$$(\alpha_1 - 1)a_1 + (\alpha_2 - 1)a_2 + \dots + (\alpha_n - 1)a_n = 0. \quad (I.48)$$

Из выражения (I.47) следует, что при соблюдении условия (I.48) можно построить функцию  $\omega(\zeta)$ , дающую конформное отображение (на внешность единичного круга) однолистной области  $S'$ , сколь угодно близкой к заданной области  $S$  (бесконечная плоскость с данным отверстием).

*Пример 2.* Область с прямоугольным отверстием\*. Пусть область  $S$  представляет собой плоскость с прямоугольным отверстием, отношение сторон которого  $\frac{A_1 A_4}{A_1 A_2} = \lambda$  (рис. I. 1). Начало координат  $xOy$  возьмем в центре прямоугольника, т. е. вне области  $S$ .

\* Отображение осуществляется при помощи эллиптических функций (см., например, В. И. Смирнов [1], стр. 352).

Точки  $a_1, a_2, a_3, a_4$  на единичной окружности, соответствующие вершинам прямоугольника  $A_1, A_2, A_3$  и  $A_4$ , можно выбрать так, чтобы было сохранено заданное отношение сторон прямоугольника. Три точки из четырех, например  $a_1, a_2, a_3$ , на единичной окружности можно выбрать таким образом, чтобы они были симметрично расположены относительно координатных осей  $\xi O\eta$ , т. е. чтобы точки  $a_1$  и  $a_2$  были симметричны относительно оси  $O\xi$ , а точки  $a_2$  и  $a_3$  — относительно оси  $O\eta$ . Далее, в силу принципа симметрии заключаем, что точка  $a_4$  должна быть симметрична точке  $a_3$  относительно оси  $O\xi$  и точке  $a_1$  относительно оси  $O\eta$ .

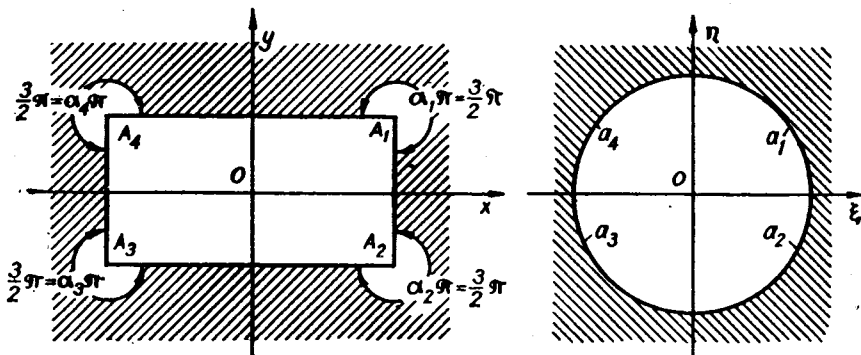


Рис. 1.1.

Если обозначить через  $k$  величину, характеризующую отношение сторон прямоугольного отверстия, то

$$a_1 = e^{k\pi i}, \quad a_2 = e^{(2-k)\pi i}, \quad a_3 = e^{(1+k)\pi i}, \quad a_4 = e^{(1-k)\pi i},$$

при  $k < 1/4$  прямоугольное отверстие будет расположено так, как указано на рис. 1.1, т. е. большие стороны параллельны оси  $Ox$ ; при  $k > 1/4$  большие стороны будут параллельны оси  $Oy$ ; значение  $k = 1/4$  соответствует квадратному отверстию.

В случае прямоугольного отверстия  $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 3/2$ . Подставив найденные значения  $a_1, \dots, a_4$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  в (1.47) и выполнив инверсию (положив  $1/\xi$  вместо  $\zeta$ ), получим функцию  $z = \omega(\xi)$ , отображающую область  $S$ , т. е. плоскость с прямоугольным отверстием\* на внутренность единичного круга:

$$z = \omega(\xi) = c \left\{ \frac{1}{\xi} + \frac{a + \bar{a}}{2} \xi + \frac{(a - \bar{a})^2}{24} \xi^3 + \frac{(a^2 - \bar{a}^2)(a - \bar{a})}{80} \xi^5 + \right. \\ \left. + \frac{5(a^4 + \bar{a}^4) - 4(a^2 + \bar{a}^2) - 2}{896} \xi^7 + \frac{7(a^5 + \bar{a}^5) - 5(a^3 + \bar{a}^3) - 2(a + \bar{a})}{2304} \xi^9 + \right. \\ \left. + \frac{21(a^6 + \bar{a}^6) - 14(a^4 + \bar{a}^4) - 5(a^2 + \bar{a}^2) - 4}{11264} \xi^{11} + \dots \right\}, \quad (1.49)$$

где  $a = e^{2k\pi i}$ ,  $\bar{a} = e^{-2k\pi i}$ .

Ясно, что если в выражении (1.49) взять лишь конечное число членов ряда, то получим отверстие не в форме точного прямоугольника, а некоторый прямоугольник с криволинейными сторонами и с закругленными углами. Так как  $|a|=1$ , то не трудно видеть, что полученный ряд (1.49) в начале сходится довольно быстро, и мы всегда можем выбрать такое число членов этого ряда, чтобы удовлетворить требуемой точности отклонения контура отверстия от прямоугольника. При этом можно заранее задать некоторую величину  $r_0$  и определять то число членов ряда (1.49), которое необходимо для того, чтобы радиус  $r$  закругления углов прямоугольника был меньше, чем

\* См. Г. Н. Савин [1, 2].

$r_0$ . После этого следует еще проверить степень отклонения сторон прямоугольника от прямолинейных и если при этом потребуется увеличить число членов ряда (1.49), то условие  $r < r_0$  будет выполнено.

Полагая в (1.49)  $a = e^{i\pi/2}$  и  $\bar{a} = e^{-i\pi/2}$ , получаем функцию, отображающую область с квадратным отверстием на круг:

$$z = \omega(\zeta) = c \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6} \zeta^3 + \frac{1}{56} \zeta^7 - \frac{1}{176} \zeta^{11} + \frac{1}{384} \zeta^{15} - \frac{7}{4864} \zeta^{19} + \dots \right). \quad (1.50)$$

Полагая в (1.49)  $a = e^{i\pi/3}$ , т. е. принимая  $k = 1/6$ , получаем функцию  $\omega(\zeta)$ , отображающую область с прямоугольным отверстием, отношение сторон которого равно 3,2:1, в виде

$$z = \omega(\zeta) = c \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2} \zeta - \frac{1}{8} \zeta^3 - \frac{3}{80} \zeta^5 - \frac{3}{896} \zeta^7 + \frac{5}{768} \zeta^9 + \frac{57}{11264} \zeta^{11} + \dots \right). \quad (1.51)$$

При  $a = e^{i \frac{10}{36} \pi}$  получим отображающую функцию  $\omega(\zeta)$  для области с прямоугольным отверстием, отношение сторон которого равно 5:1, в виде\*

$$z = \omega(\zeta) = c \left( \frac{1}{\zeta} + 0,643\zeta - 0,098\zeta^3 - 0,038\zeta^5 - 0,011\zeta^7 \right). \quad (1.52)$$

*Пример 3.* Область с отверстием в форме правильного многоугольника. Рассуждения, аналогичные приведенным для случая прямоугольного отверстия, показывают, что точки единичной окружности  $a_1, a_2, \dots, a_n$  на плоскости  $\zeta = \xi + i\eta$ , соответствующие вершинам многоугольника  $A_1, \dots, A_n$  плоскости  $z = x + iy$ , будут делить окружность на равные части. Преобразовывая круг на круг того же радиуса, можем считать, что вершине  $A_1$  соответствует точка  $a_1 = 1$ ; тогда

$$a_1 = 1, a_2 = e^{\frac{2\pi i}{n}}, \dots, a_n = e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}}, a_1 + \dots + a_n = 1 + \frac{2}{n}, \quad (1.53)$$

где  $n$  — число сторон правильного многоугольника.

Подставив в (1.45) вместо  $a_1, \dots, a_n$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  их значения из (1.53), получим (считая, что центру единичного круга соответствует центр тяжести многоугольника)

$$\omega(\zeta) = c \int_1^{\zeta} \left( t - e^{\frac{2\pi i}{n}} \right)^{\frac{2}{n}} \left( t - e^{\frac{4\pi i}{n}} \right)^{\frac{2}{n}} \dots \left( t - e^{\frac{2(n-1)\pi i}{n}} \right)^{\frac{2}{n}} dt.$$

Раскладывая подынтегральную функцию в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки, интегрируя его и выполняя инверсию, получаем функцию, конформно отображающую неограниченную плоскость с отверстием в форме правильного многоугольника на внутренность единичного круга\*\*

$$z = \omega(\zeta) = c \left\{ \frac{1}{\zeta} + \frac{2}{n(n-1)} \zeta^{n-1} + \frac{n-2}{n^2(2n-1)} \zeta^{2n-1} - \frac{(n-2)(2n-2)}{2n^3(3n-1)} \zeta^{3n-1} + \frac{(n-2)(2n-2)(3n-2)}{12n^4(4n-1)} \zeta^{4n-1} - \frac{(n-2)(2n-2)(3n-2)(4n-2)}{60n^5(5n-1)} \zeta^{5n-1} + \dots \right\}, \quad n = 3, 4, 5, \dots \quad (1.54)$$

\* Другие отношения сторон прямоугольника и трапеции при заранее заданных кривизнах в угловых точках указанных фигур рассмотрены в работах В. М. Гурьянова, О. С. Космодамианского [1, 2].

\*\* См. Г. Н. Савин [1, 2].



Чтобы получить параметрическое уравнение контура отверстия, который соответствует отображающей функции (1.49) или (1.54), следует в этих функциях положить  $\zeta = \varrho e^{i\theta}$  при  $\varrho=1$  и отделить действительные и мнимые части.

Полагая в (1.54)  $n=3$ , получаем отображающую функцию  $\omega(\zeta)$  для плоскости с отверстием в форме равностороннего треугольника:

$$\omega(\zeta) = c \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{3} \zeta^2 + \frac{1}{45} \zeta^5 + \frac{1}{162} \zeta^8 + \frac{7}{2673} \zeta^{11} + \dots \right). \quad (1.55)$$

Если положить в (1.54)  $n=4$ , получим отображающую функцию для плоскости с квадратным отверстием (повернутым на угол  $\pi/4$  относительно квадрата, рассмотренного в примере 2):

$$\omega(\zeta) = c \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{6} \zeta^3 + \frac{1}{56} \zeta^7 + \frac{1}{176} \zeta^{11} + \dots \right). \quad (1.56)$$

Для того чтобы получить отображающую функцию для любого положения рассматриваемого отверстия, следует в функциях (1.49) или (1.54) положить  $c = R e^{i\delta}$ , где  $R$  — вещественная постоянная, а  $\delta$  — угол, на который надо повернуть рассматриваемое отверстие из основного положения.

Выполнив в функциях  $\omega(\zeta)$  (1.49) и (1.54) инверсию, т. е. положив  $\zeta = 1/\zeta'$  ( $|\zeta'| \geq 1$ ), получим отображение на внешность единичного круга.

Использование интеграла Кристоффеля—Шварца для приближенного построения отображающих функций, во-первых, затруднено тем, что определение констант интеграла Кристоффеля—Шварца, т. е. точек  $a_1, a_2, \dots, a_n$  единичной окружности, соответствующих вершинам многоугольника, связано, за исключением простейших случаев, с трудоемкими вычислениями\*; во-вторых, когда отображающая функция строится в виде полинома  $z = \omega_n(\zeta)$  для конечных односвязных областей, число членов полиномов приходится выбирать достаточно большим, чтобы получить хорошее совпадение заданной границы  $L$  и границы  $L'$ , получающейся при конформном преобразовании круга с помощью приближенной функции.

Для улучшения сходимости процесса В. И. Маховиков [1, 2] предлагает строить приближенную функцию в виде суммы, состоящей из конечной иррациональной части (главной части интеграла Кристоффеля—Шварца) и быстро сходящегося ряда. С точки зрения конформного преобразования это дает хороший результат, хотя вид функции и менее удобен для решения задач теории упругости. Например, функция, осуществляющая конформное преобразование круга на область, ограниченную квадратом, может быть получена при этом в виде

$$z = \omega(\zeta) = c \left[ -\frac{\zeta}{2} (1 + \zeta^4)^{\frac{1}{2}} + 1,5 \left( \zeta + 0,1\zeta^5 - \frac{1}{72} \zeta^9 + \frac{1}{208} \zeta^{13} - 0,0023\zeta^{17} \right) \right]. \quad (1.57)$$

Соответствующая граница  $L'$  представлена на рис. 1. 2, а.

Если же воспользоваться простым разложением в ряд, то при одиннадцати членах ряда, т. е. при учете членов до  $\zeta^{41}$  включительно

$$z = \omega(\zeta) = c \left( \zeta + \sum_{k=1}^{10} \delta_k \zeta^{4k+1} \right), \quad (1.58)$$

граница  $L'$  получит вид, показанный на рис. 1. 2, б.

**Применение других методов.** В связи с решением прикладных задач возникает необходимость построения приближенных выражений отображающих функций для наперед заданных областей.

\* Работы, посвященные этому вопросу, можно найти в сб. Г. Голузина, Л. Кантовича и др. [1], а также см. Г. Н. Положий [1], П. Ф. Фильчаков [3], И. С. Хара [1].

А. Г. Угодчиковым [1, 2] был предложен метод построения отображающих функций в виде полиномов для наперед заданных односвязных и двусвязных областей, в котором соответствие граничных точек отображаемых областей определялось (в нулевом приближении) при помощи электромоделирования, а для вычисления коэффициентов и построения последовательных приближений использовалась методика П. В. Мелентьева [1, 2] и Б. Ф. Шилова [1]. Этот метод был распространен далее на бесконечные односвязные области\*.

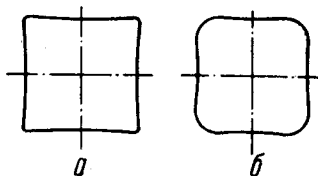


Рис. 1.2.

Следует отметить, что методика вычисления коэффициентов  $C_h$  полинома  $z = \omega_n(\zeta)$  П. В. Мелентьева [1], основанная на формулах тригонометрического интерполирования действительной (или мнимой) части функции  $z/\zeta$ , такова, что полином  $z = \omega_n(\zeta)$  не совпадает с заданным значением отображающей функции даже в узлах интерполяции.

В работе П. Ф. Фильчакова [4] была предложена новая методика построения отображающих функций для односвязных областей, в которой исходные данные предлагалось находить графически или при помощи электромоделирования, а для вычисления коэффициентов полинома  $z = \omega_n(\zeta)$  использовался метод тригонометрической интерполяции, обеспечивающий совпадение полинома и заданных значений отображающей функции в узлах интерполяции. Процесс построения последовательных приближений за счет постепенного удваивания числа узлов и чередования четных и нечетных узлов описан в статье П. Ф. Фильчакова [5].

В работах А. Г. Угодчикова [5, 6] была предложена методика, согласно которой построенный полином  $z = \omega_n(\zeta)$  также совпадает с заданными значениями отображающей функции в узлах интерполяции; уточнение исходных данных осуществляется последовательными приближениями путем чередования основных и промежуточных узлов. В основу этой методики, распространенной А. Г. Угодчиковым на конечные двусвязные области, а также на бесконечные и полубесконечные односвязные области, положены формулы интерполяционных полиномов Лагранжа, которые позволили получить довольно простые выражения для коэффициентов  $C_h$  интерполяционных полиномов  $z = \omega_n(\zeta)$ .

В последующих работах П. Ф. Фильчакова [6, 7] с помощью метода тригонометрической интерполяции были получены для односвязных областей формулы вычисления коэффициентов  $C_h$ , совпадающие с формулами, полученными ранее А. Г. Угодчиковым [5, 6].

Так как отмеченные методы с многочисленными примерами подробно описаны в указанных выше работах и монографиях А. Г. Угодчикова [7] и П. Ф. Фильчакова [6], здесь подробно их излагать не будем, однако отметим, что эти методы дают возможность, применяя

\* См. А. Г. Угодчиков, И. И. Серебренникова [1], А. Г. Угодчиков, А. Я. Крылов [1].

вычислительные машины, построить отображающие функции с наперед заданной точностью совпадения заданной границы  $L$  и границы  $L'$ , соответствующей построенному полиному  $z = \omega_n(\xi)$ .

### § 3. Основные уравнения линейной теории упругости анизотропной среды

Упругую среду называют анизотропной, если ее упругие свойства в рассматриваемой точке различны в разных направлениях. Для упругой характеристики изотропной среды, как известно, необходимы только две упругие постоянные, например постоянные  $\lambda$  и  $\mu$ , или два модуля  $E$  и  $G$ , и др., в то время как для анизотропной среды в общем случае этих постоянных должно быть 21. Отсюда ясно, что основная система уравнений теории упругости анизотропной среды будет отличаться от одноименной системы уравнений для изотропной среды лишь теми уравнениями, которые устанавливают связь между деформациями и напряжениями, т. е. отличие этих систем уравнений будет заключаться в обобщенном законе Гука.

Выпишем основные уравнения статики упругого тела, так как они нам понадобятся в дальнейшем\*.

Уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0, \end{aligned} \quad (I.59)$$

где  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — проекции на оси координат объемной силы, отнесенной к единице объема.

Условия на контуре

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{xz} \cos(n, z), \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) + \tau_{yz} \cos(n, z), \\ Z_n &= \tau_{xz} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) + \sigma_z \cos(n, z). \end{aligned} \quad (I.60)$$

\* Подробный вывод этих уравнений можно найти в любом курсе теории упругости (см., например, Н. И. Мусхелишвили [1], П. Ф. Папкович [1], А. Ляв [1], С. Г. Лехницкий [1, 2]).

## Условия совместности

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}, & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right), \\
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, & 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( -\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{I.61}$$

$$(\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}; \quad \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx}; \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}).$$

## Обобщенный закон Гука

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= A_{11}\varepsilon_x + A_{12}\varepsilon_y + A_{13}\varepsilon_z + A_{14}\gamma_{yz} + A_{15}\gamma_{zx} + A_{16}\gamma_{xy}, \\
\sigma_y &= A_{21}\varepsilon_x + A_{22}\varepsilon_y + A_{23}\varepsilon_z + A_{24}\gamma_{yz} + A_{25}\gamma_{zx} + A_{26}\gamma_{xy}, \\
\sigma_z &= A_{31}\varepsilon_x + \dots + A_{36}\gamma_{xy}, \\
\tau_{yz} &= A_{41}\varepsilon_x + \dots + A_{46}\gamma_{xy}, \\
\tau_{zx} &= A_{51}\varepsilon_x + \dots + A_{56}\gamma_{xy}, \\
\tau_{xy} &= A_{61}\varepsilon_x + \dots + A_{66}\gamma_{xy}
\end{aligned} \tag{I.62}$$

$$A_{ik} = A_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, 6)$$

ИЛИ

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= C_{11}\sigma_x + C_{12}\sigma_y + C_{13}\sigma_z + C_{14}\tau_{yz} + C_{15}\tau_{zx} + C_{16}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_y &= C_{21}\sigma_x + C_{22}\sigma_y + C_{23}\sigma_z + C_{24}\tau_{yz} + C_{25}\tau_{zx} + C_{26}\tau_{xy}, \\
\varepsilon_z &= C_{31}\sigma_x + \dots + C_{36}\tau_{xy}, \\
\gamma_{yz} &= C_{41}\sigma_x + \dots + C_{46}\tau_{xy}, \\
\gamma_{zx} &= C_{51}\sigma_x + \dots + C_{56}\tau_{xy}, \\
\gamma_{xy} &= C_{61}\sigma_x + \dots + C_{66}\tau_{xy}
\end{aligned} \tag{I.63}$$

$$c_{ik} = c_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, 6),$$

т. е. компоненты напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$  и деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \gamma_{xy}$  в данной точке тела — линейные, взаимно однозначные функции.

Величины  $A_{ik} = A_{ki}$  (числом 21) в уравнениях (I.62), а также  $c_{ik} = c_{ki}$  в (I.63) называются упругими постоянными материала в том смысле, что упругие свойства данного тела полностью характеризуются этими величинами и значения этих постоянных не зависят от напряженного или деформированного состояния данного упругого тела.

Если упругие постоянные  $A_{ik}$  будут функциями координат точек упругого тела, рассматриваемое тело называют неоднородным в смысле упругих свойств. Если же  $A_{ik}$  не зависят от координат точек

упругого тела и для фиксированной системы координатных осей будут постоянными величинами, тело называют однородным.

**Обобщенное плоское напряженное состояние.** Допустим, что мы имеем тонкую анизотропную пластинку толщиной  $2h$ . Примем срединную плоскость пластинки за плоскость  $xOy$ ; пусть внешние усилия  $X_n$  и  $Y_n$  приложены к боковой поверхности пластинки так, что результирующая этих усилий по высоте  $2h$  лежит в плоскости  $xOy$ . Остальные грани пластинки — «верхнюю»  $z = +h$  и «нижнюю»  $z = -h$  — будем считать свободными от внешних усилий, т. е.  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$  при  $z = \pm h$ .

Предположим, что толщина пластинки  $2h$  — весьма мала; тогда с большой степенью приближения можем положить  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$  всюду внутри пластинки. Вместо действительных компонентов напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  будем рассматривать средние их значения по высоте:

$$\sigma_x^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} \sigma_x dz; \quad \sigma_y^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} \sigma_y dz; \quad \tau_{xy}^* = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{+h} \tau_{xy} dz.$$

Умножим первые два уравнения равновесия (I.59) на  $\frac{1}{2h} dz$  и проинтегрируем по высоте пластинки от  $-h$  до  $+h$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + X^* &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + Y^* &= 0. \end{aligned} \tag{I.64}$$

Обратимся теперь к закону Гука (I.63) и рассмотрим средние значения компонентов деформации по высоте. Умножим первое, второе и шестое уравнение (I.63) на  $\frac{1}{2h} dz$  и просуммируем их по высоте пластинки:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^* &= c_{11} \sigma_x^* + c_{12} \sigma_y^* + c_{16} \tau_{xy}^*, \\ \epsilon_y^* &= c_{12} \sigma_x^* + c_{22} \sigma_y^* + c_{26} \tau_{xy}^*, \\ \gamma_{xy}^* &= c_{16} \sigma_x^* + c_{26} \sigma_y^* + c_{66} \tau_{xy}^*. \end{aligned} \tag{I.65}$$

Ясно, что средние значения компонентов деформации  $\epsilon_x^*$ ,  $\epsilon_y^*$  и  $\gamma_{xy}^*$  будут функциями только  $x$  и  $y$ .

Применим ту же операцию осреднения к пятому уравнению совместности (I.61), т. е. умножим его на  $\frac{1}{2h} dz$  и проинтегрируем от  $-h$  до  $+h$ :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x^*}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y^*}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^*}{\partial x \partial y}. \tag{I.66}$$

Таким образом, уравнения (I.64) — (I.66) и являются основными уравнениями для обобщенного плоского напряженного состояния.

**Плоская деформация. Условия плоской деформации.** Допустим, что к боковой поверхности анизотропного тела цилиндрической или призматической формы (конечный или бесконечный цилиндр) приложены внешние усилия, удовлетворяющие следующим условиям:

1) внешние усилия (напряжения) перпендикулярны к образующим (или, что то же, к оси этого тела);

2) внешние усилия постоянны вдоль каждой образующей (но, вообще говоря, изменяются при переходе от одной образующей к другой).

Примем ось этого цилиндра за ось  $Oz$ , а какое-либо поперечное сечение его — за плоскость  $xOy$ .

Если бы тело было изотропно, этих условий было бы достаточно для того, чтобы деформация была плоской. В случае анизотропного упругого тела, как следует из обобщенного закона Гука (I.63), напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и  $\sigma_z$  могут вызвать появление деформаций  $\gamma_{xz}$  и  $\gamma_{yz}$ , т. е. искривление поперечных сечений\*. Для того чтобы в этом случае деформация была плоской, коэффициенты упругости  $c_{ik}$  должны удовлетворять некоторым условиям. Последние для общего случая неоднородного анизотропного тела были впервые получены С. Г. Михлиным [1]:

$$\begin{aligned} A_{14}c_{13} + A_{24}c_{23} + A_{34}c_{33} &= 0, \\ A_{14}c_{12} + A_{24}c_{22} + A_{34}c_{23} - A_{15}c_{13} - A_{25}c_{23} - A_{35}c_{33} &= 0, \\ A_{14}c_{11} + A_{24}c_{12} + A_{34}c_{13} - A_{15}c_{12} - A_{25}c_{22} - A_{34}c_{23} &= 0, \\ A_{15}c_{11} + A_{25}c_{12} + A_{35}c_{13} &= 0, \\ \frac{\partial A_{14}}{\partial x} + \frac{\partial A_{15}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial A_{24}}{\partial x} + \frac{\partial A_{25}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial A_{34}}{\partial x} + \frac{\partial A_{35}}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{I.67}$$

Особенно простой случай имеет место, когда

$$A_{46} = A_{14} = A_{24} = A_{34} = A_{15} = A_{25} = A_{35} = A_{56} = 0. \tag{I.68}$$

Равенства (I.68) означают, что поперечные сечения цилиндра, т. е. плоскость  $xOy$  и ей параллельные, являются плоскостями упругой симметрии.

Итак, деформация анизотропного тела будет плоской, если поперечные сечения его (цилиндрической формы) будут плоскостями упругой симметрии.

\* Если анизотропное тело однородно, т. е.  $c_{ik} = \text{const}$  для всех точек этого тела, то, как показал С. Г. Лехницкий [3], задача в общем случае (с 21 упругой постоянной) может быть сведена к плоской в том смысле, что компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{xz}$  и деформаций  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ , ...,  $\gamma_{xz}$  будут функциями только координат  $x$ ,  $y$ . Действительно, в общем случае анизотропии, т. е. для однородного тела с 21 упругой постоянной при действии внешних сил, подчиняющихся первому и второму условиям, деформация не будет плоской и поперечные сечения будут искривляться, но эти искривления в силу однородности тела и постоянства внешней нагрузки вдоль образующих цилиндра будут одинаковыми для всех сечений.

Допустим, что условия плоской деформации выполнены. Примем какое-либо поперечное сечение, достаточно удаленное от концов цилиндра, за плоскость  $xOy$ . Если деформация будет плоской, то  $w=0$ , а компоненты  $u$  и  $v$  будут функциями только  $x, y$ . Отсюда следует, что  $\varepsilon_z=0, \gamma_{xz}=\gamma_{zy}=0$ .

Поскольку  $c_{44}c_{55} - c_{45}^2 \neq 0$ , закон Гука (I.63) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= c_{11}\sigma_x + c_{12}\sigma_y + c_{13}\sigma_z + c_{16}\tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= c_{12}\sigma_x + c_{22}\sigma_y + c_{23}\sigma_z + c_{26}\tau_{xy}, \\ 0 &= c_{13}\sigma_x + c_{23}\sigma_y + c_{33}\sigma_z + c_{36}\tau_{xy}, \\ \gamma_{xy} &= c_{16}\sigma_x + c_{26}\sigma_y + c_{36}\sigma_z + c_{66}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (I.69)$$

либо  $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$  во всех точках тела.

Определив из третьего уравнения (I.69)  $\sigma_z$  и подставив его в остальные уравнения (I.69), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \varepsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \end{aligned} \quad (I.70)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}{c_{33}}, & a_{12} &= \frac{c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}}{c_{33}}, \\ a_{16} &= \frac{c_{16}c_{33} - c_{13}c_{36}}{c_{33}}, & a_{22} &= \frac{c_{22}c_{33} - c_{23}^2}{c_{33}}, \\ a_{26} &= \frac{c_{26}c_{33} - c_{23}c_{36}}{c_{33}}, & a_{66} &= \frac{c_{66}c_{33} - c_{36}^2}{c_{33}}. \end{aligned} \quad (I.71)$$

Первые два уравнения равновесия (I.59) в данном случае будут иметь вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0, \quad (I.72)$$

а третье уравнение (I.59) обратится в  $Z=0$  и, следовательно, при плоской деформации, параллельной плоскости  $Oxy$ , составляющая объемной силы по оси  $Oz$  должна обращаться в нуль.

Пять уравнений совместности (I.61) тождественно удовлетворяются и остается одно уравнение

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (I.73)$$

Итак, для плоской деформации (напомним, что любое поперечное сечение нашего анизотропного тела должно быть плоскостью упругой симметрии) основными будут уравнения (I.70), (I.72) и (I.73). Сравнение их с соответствующими уравнениями для обобщенного плоского напряженного состояния показывает, что по виду они одни и те же, но вместо средних значений компонентов напряжений и деформаций в первом случае (обобщенное плоское напряженное состояние) фигурируют точные значения этих величин во втором случае (плоская деформация). Более существенная разница между ними в том, что если в первом случае в (I.65) входят непосредственно упругие постоянные  $c_{ik}$ , то во втором — в (I.70) входят величины  $a_{ik}$ , определяемые по данным  $c_{ik}$  из формул (I.71).

**Функция напряжений. Комплексное представление общего решения плоской задачи.** Выпишем основные уравнения плоской задачи:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0; \quad (I.74)$$

$$\epsilon_x = a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{16}\tau_{xy},$$

$$\epsilon_y = a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{26}\tau_{xy}, \quad (I.75)$$

$$\gamma_{xy} = a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{66}\tau_{xy};$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (I.76)$$

Напомним, что в случае обобщенного плоского напряженного состояния во все уравнения (I.74) — (I.76) будут входить средние значения компонентов напряжений и деформаций, а в уравнениях (I.75) надо положить  $a_{ik} = c_{ik}$ .

Решение плоской задачи значительно упрощается в случае отсутствия объемных сил. В статических задачах обычно объемными силами бывают силы тяжести. В большинстве задач ими можно просто пренебречь\*, но от них в общем случае, так же, как и для изотропной среды\*\*, можно очень легко избавиться. Для этого необходимо найти какое-либо частное решение основной системы уравнений (I.74) — (I.76).

Допустим, что ось  $Oy$  направлена вертикально вверх; тогда  $X=0$ ,  $Y = -\rho g$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести, а  $\rho$  — плотность, которую считаем постоянной, и уравнения (I.74) примут вид

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad (I.77)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho g.$$

\* Если размеры тела невелики и приложенные внешние силы значительно превосходят вес тела, то, очевидно, массовыми силами  $X$  и  $Y$  (с большой степенью точности) можно пренебречь, так как они не окажут почти никакого влияния на напряженное состояние.

\*\* См. Н. И. Мухелишвили [1].



Очевидно, этим уравнениям мы удовлетворим, если положим

$$\sigma_x = \tau_{xy} = 0 \text{ и } \sigma_y = \rho g y. \quad (I.78)$$

Из уравнений (I.75) и (I.78) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = a_{12} \rho g y, & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = a_{22} \rho g y, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = a_{26} \rho g y. \end{aligned} \quad (I.79)$$

Нетрудно видеть, что значения  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  (I.79) удовлетворяют уравнению (I.76).

Из первых двух уравнений (I.79) имеем

$$\begin{aligned} u &= \int a_{12} \rho g y dx + f_1(y), \\ v &= \int a_{22} \rho g y dy + f_2(x). \end{aligned}$$

Подставив найденные значения  $u$  и  $v$  в последнее уравнение (I.79), получим

$$f_2'(x) + f_1'(y) + a_{12} \rho g x = a_{26} \rho g y.$$

Последнему уравнению можно удовлетворить, полагая, например,

$$f_2(x) = -\frac{1}{2} a_{12} \rho g x^2; \quad f_1(y) = \frac{1}{2} a_{26} \rho g y^2.$$

Таким образом, для смещений

$$\begin{aligned} u &= a_{12} \rho g x y + \frac{1}{2} a_{26} \rho g y^2, \\ v &= \frac{1}{2} a_{22} \rho g y^2 - \frac{1}{2} a_{12} \rho g x^2. \end{aligned} \quad (I.80)$$

Поскольку основная система уравнений (I.74) — (I.76) линейна, то, положив  $\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x'$ ,  $\sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y'$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}'$ , а также  $u = u^0 + u'$ ,  $v = v^0 + v'$ , получим, что  $\sigma_x'$ ,  $\sigma_y'$ ,  $\tau_{xy}'$ ,  $u'$  и  $v'$  будет решением основной системы уравнений (I.74) — (I.76) при отсутствии массовых сил. Через  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$ ,  $u^0$ ,  $v^0$  обозначены соответственно компоненты напряжений (I.78) и перемещений (I.80), т. е. частное решение основной системы уравнений (I.74) — (I.76).

Итак, во всем дальнейшем изложении будем считать, что массовые силы не входят в основные уравнения (I.74) — (I.76) плоской задачи.

Так же, как и в случае изотропной среды, уравнениям равновесия (1.77) можно удовлетворить, если ввести функцию Эри:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \quad (1.81)$$

Подставив в (1.75) вместо  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  их значения, выраженные через функцию напряжений  $U(xy)$ , из уравнения (1.76), получим найденное впервые С. Г. Лехническим [5] основное уравнение плоской задачи теории упругости, которому должна удовлетворять функция напряжений  $U(x, y)$ :

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} - 2a_{26} \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{16} \frac{\partial^4 U}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \quad (1.82)$$

Уравнение (1.82) и является обобщением известного бигармонического уравнения (1.5).

Следует еще раз заметить, что в случае обобщенного плоского напряженного состояния коэффициенты уравнения (1.82)  $a_{ik} = c_{ik}$ , в случае же плоской деформации упругие постоянные  $a_{ik}$  определяются по формулам (1.71).

Если анизотропный материал имеет три плоскости упругой симметрии, уравнение (1.82) упрощается, ибо в этом случае  $c_{36} = c_{16} = c_{26} = 0$ , а следовательно,  $a_{16} = a_{26} = 0$  (см. (1.71)), и уравнение (1.82) принимает вид

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0. \quad (1.83)$$

Общий интеграл уравнения (1.82) зависит от корней характеристического уравнения

$$a_{11}s^4 - 2a_{16}s^3 + (2a_{12} + a_{66})s^2 - 2a_{26}s + a_{22} = 0 \quad (1.84)$$

и в случае неравных \* корней имеет вид

$$U(x, y) = F_1(x + s_1 y) + F_2(x + s_2 y) + F_3(x + s_3 y) + F_4(x + s_4 y). \quad (1.85)$$

Исходя из энергетических соображений, С. Г. Лехницкий [5] доказал, что уравнение (1.84) не может иметь действительных корней.

Обозначим корни уравнения (1.84) через  $s_1, s_2, s_3$  и  $s_4$  (считая их неравными). Пусть

$$s_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \quad s_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \quad (1.86)$$

$$s_3 = \alpha_1 - i\beta_1, \quad s_4 = \alpha_2 - i\beta_2,$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  — вещественные постоянные, причем всегда можно расположиться так, чтобы  $\beta_1 > 0, \beta_2 > 0$ .

\* В случае кратных корней уравнения (1.84) уравнение (1.82) заменой независимой переменной преобразуется в обобщенное бигармоническое, метод решения которого дан С. Г. Михлиным [1]. Но, как будет видно из дальнейшего, случай равных корней очень просто получается из общего случая для всех частных задач, которые нами будут рассмотрены. Поэтому не будем отдельно рассматривать случай равных корней уравнения (1.84).

Будем считать в дальнейшем, что

$$\beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad \beta_1 \neq \beta_2.$$

Поскольку  $U(x, y)$  есть вещественная функция от  $x, y$ , то, обозначив

$$z_1 = x + s_1 y = x + \alpha_1 y + i\beta_1 y, \quad (1.87)$$

$$z_2 = x + s_2 y = x + \alpha_2 y + i\beta_2 y,$$

представим общий интеграл (I.85) в виде

$$U(x, y) = F_1(z_1) + F_2(z_2) + \overline{F_1(z_1)} + \overline{F_2(z_2)}, \quad (1.88)$$

где  $F_1(z_1)$  и  $F_2(z_2)$  — две аналитические\* функции своих аргументов;  $\overline{F_1(z_1)}$  и  $\overline{F_2(z_2)}$  — функции, сопряженные соответственно функциям  $F_1(z_1)$  и  $F_2(z_2)$ .

Обозначим:

$$\frac{dF_1}{dz_1} = \varphi(z_1), \quad \frac{dF_2}{dz_2} = \psi(z_2). \quad (1.89)$$

Тогда, очевидно,

$$\frac{d\overline{F_1}}{d\bar{z}_1} = \overline{\varphi(z_1)}, \quad \frac{d\overline{F_2}}{d\bar{z}_2} = \overline{\psi(z_2)}.$$

Если подставить в (I.81) функцию напряжений  $U(x, y)$  из (I.88) и принять во внимание обозначения (I.89), получим общие выражения для компонентов напряжений через две аналитические функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ :

$$\sigma_x = 2\operatorname{Re} [s_1^2 \varphi'(z_1) + s_2^2 \psi'(z_2)],$$

$$\sigma_y = 2\operatorname{Re} [\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)], \quad (1.90)$$

$$\tau_{xy} = -2\operatorname{Re} [s_1 \varphi'(z_1) + s_2 \psi'(z_2)],$$

где  $\operatorname{Re}$  — символ вещественной части рядом стоящего выражения;

$$\varphi'(z_1) = \frac{d\varphi}{dz_1}, \quad \psi'(z_2) = \frac{d\psi}{dz_2};$$

$s_1$  и  $s_2$  — корни уравнения (I.84).

\* Это непосредственно следует из того, что  $2\operatorname{Re} [F_1(z_1)] = U_1(\xi_1, \eta_1)$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial \eta_1^2} = 0,$$

где  $\xi_1 = x + \alpha_1 y$ ,  $\eta_1 = \beta_1 y$ .

То же относится и к функции  $2\operatorname{Re} [F_2(z_2)] = U_2(\xi_2, \eta_2)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial \eta_2^2} = 0,$$

где

$$\xi_2 = x + \alpha_2 y, \quad \eta_2 = \beta_2 y.$$

Подставляя значения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  из (I.90) в уравнения (I.70) и интегрируя их, получаем общие выражения для компонентов перемещений:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= 2\operatorname{Re} [p_1\Phi(z_1) + p_2\Psi(z_2)] - \gamma_0 y + \alpha_0, \\ v(x, y) &= 2\operatorname{Re} [q_1\Phi(z_1) + q_2\Psi(z_2)] + \gamma_0 x + \beta_0, \end{aligned} \quad (\text{I.91})$$

где для сокращения записи обозначено:

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11}s_1^2 + a_{12} - a_{16}s_1, & p_2 &= a_{11}s_2^2 + a_{12} - a_{16}s_2, \\ q_1 &= \frac{a_{12}s_1^2 + a_{22} - a_{26}s_1}{s_1}, & q_2 &= \frac{a_{12}s_2^2 + a_{22} - a_{26}s_2}{s_2}, \end{aligned} \quad (\text{I.92})$$

а  $\gamma_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$  — произвольные действительные постоянные.

Добавочные слагаемые —  $\gamma_0 y + \alpha_0$  и  $\gamma_0 x + \beta_0$  в (I.91) дают жесткое перемещение тела как целого и при рассмотрении упругого равновесия могут быть отброшены. Уравнения (I.90) и (I.91) впервые были получены С. Г. Лехницким [5].

Напряжения и смещения в полярных координатах:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= 2\operatorname{Re} [(\sin \theta - s_1 \cos \theta)^2 \Phi'(z_1) + (\sin \theta - s_2 \cos \theta)^2 \Psi'(z_2)], \\ \sigma_\theta &= 2\operatorname{Re} [(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^2 \Phi'(z_1) + (\cos \theta + s_2 \sin \theta)^2 \Psi'(z_2)], \\ \tau_{r\theta} &= 2\operatorname{Re} [(\sin \theta - s_1 \cos \theta)(\cos \theta + s_1 \sin \theta) \Phi'(z_1) + \\ &\quad + (\sin \theta - s_2 \cos \theta)(\cos \theta + s_2 \sin \theta) \Psi'(z_2)], \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= 2\operatorname{Re} [(1 + s_1^2) \Phi'(z_1) + (1 + s_2^2) \Psi'(z_2)]; \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.93})$$

$$\begin{aligned} v_r &= 2\operatorname{Re} [(p_1 \cos \theta + q_1 \sin \theta) \Phi(z_1) + (p_2 \cos \theta + q_2 \sin \theta) \Psi(z_2)], \\ v_\theta &= 2\operatorname{Re} [(q_1 \cos \theta - p_1 \sin \theta) \Phi(z_1) + (q_2 \cos \theta - p_2 \sin \theta) \Psi(z_2)]. \end{aligned} \quad (\text{I.94})$$

**Контурные условия для введенных функций  $\Phi(z_1)$  и  $\Psi(z_2)$ .** Кроме основного уравнения (I.82) функция напряжений  $U(x, y)$  должна, в зависимости от условия задач, удовлетворять на контуре рассматриваемой области определенным условиям. Рассмотрим эти условия для каждой основной задачи в отдельности.

**Первая основная задача.** На контуре  $L$  области  $S$  заданы проекции внешних усилий  $X_n$ ,  $Y_n$ , приложенных на оси координат  $xOy$  ( $n$  — положительная нормаль \*).

\* Положительной нормалью к контуру, как обычно, будем считать нормаль к контуру  $L$ , направленную вправо при обходе области в положительном направлении. Положительным направлением обхода области принято такое направление, при котором область остается слева.

Контурные условия в этом случае, как известно, имеют вид

$$X_n = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y),$$

$$Y_n = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y).$$

Принимая во внимание, что

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = -\frac{dx}{ds},$$

и выражая компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  через функцию напряжений  $U(x, y)$  (I.81), получаем

$$X_n = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right),$$

$$Y_n = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \cdot \frac{dx}{ds} = -\frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)$$

или

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\int_0^s Y_n ds + C_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \int_0^s X_n ds + C_2, \quad (\text{I.95})$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — произвольные вещественные постоянные;  $s$  — дуга, отсчитываемая от произвольной точки контура  $L$  области  $S$ .

Подставив функцию  $U(x, y)$  из (I.88) в левые части уравнений (I.95) и приняв во внимание обозначения (I.89), получим окончательные выражения контурных условий для функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ :

$$\varphi(z_1) + \overline{\varphi(z_1)} + \psi(z_2) + \overline{\psi(z_2)} = -\int_0^s Y_n ds + C_1 = f_1, \quad (\text{I.96})$$

$$s_1 \varphi(z_1) + \overline{s_1 \varphi(z_1)} + s_2 \psi(z_2) + \overline{s_2 \psi(z_2)} = \int_0^s X_n ds + C_2 = f_2.$$

Вторая основная задача. На контуре  $L$  области  $S$  заданы компоненты смещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ . Контурные условия для функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  получим непосредственно из уравнений (I.90):

$$p_1 \varphi(z_1) + \overline{p_1 \varphi(z_1)} + \overline{p_2 \psi(z_2)} + p_2 \psi(z_2) = g_1(s), \quad (\text{I.97})$$

$$q_1 \varphi(z_1) + \overline{q_1 \varphi(z_1)} + q_2 \psi(z_2) + \overline{q_2 \psi(z_2)} = g_2(s),$$

где  $g_1(s)$  и  $g_2(s)$  — заданные как функции дуги  $s$  контура  $L$  компоненты смещений на контуре  $L$ , отсчитываемые от произвольной его точки.

Третья основная (смешанная\*) задача. На одной части  $L^{(1)}$  контура  $L$  области  $S$  заданы компоненты смещений  $u$  и  $v$ , а на остальной части  $L^{(2)}$  контура  $L = L^{(1)} + L^{(2)}$  — проекции внешних усилий  $X_n$  и  $Y_n$  на оси координат. Очевидно, в этой задаче контурные условия для функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  на  $L^{(1)}$  будут (I.97), а на  $L^{(2)}$  — (I.96).

Таким образом, решение основных задач сводится к определению функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  по контурным условиям (I.96) и (I.97).

Выражения для главного вектора и главного момента. Нам в дальнейшем понадобятся выражения для главного момента и главного вектора усилий, действующих на профиль  $AB$  со стороны положительной нормали.

Чтобы получить формулу для главного вектора, рассмотрим формулы (I.95).

Главный вектор усилий, приложенных к элементу  $ds$ ,

$$(X_n + iY_n) ds = d \left[ \frac{\partial U}{\partial y} - i \frac{\partial U}{\partial x} \right] = -id \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right].$$

Обозначив главный вектор усилий, приложенных к контуру  $AB$ , через  $X + iY$ , получим

$$X + iY = \int_{AB} (X_n + iY_n) ds = -i \left[ \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} \right]_A^B, \quad (I.98)$$

где  $[\dots]_A^B$  обозначает приращение выражения, стоящего в этих скобках, при перемещении по дуге  $AB$  от  $A$  к  $B$ . Но выражению  $\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y}$  согласно (I.95) и (I.96) можно придать вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial U}{\partial y} = (1 + is_1) \varphi(z_1) + (1 + i\bar{s}_1) \overline{\varphi(z_1)} + (1 + is_2) \psi(z_2) + (1 + i\bar{s}_2) \overline{\psi(z_2)}.$$

Внося это выражение в уравнение (I.98), получим окончательное выражение для главного вектора:

$$\begin{aligned} X + iY &= \int_A^B (X_n + iY_n) ds = \dots \\ &= -i [(1 + is_1) \varphi(z_1) + (1 + i\bar{s}_1) \overline{\varphi(z_1)} + (1 + is_2) \psi(z_2) + (1 + i\bar{s}_2) \overline{\psi(z_2)}]_A^B. \end{aligned} \quad (I.99)$$

\* Представляют не меньший интерес и другие смешанные задачи, в частности, когда на контуре  $L$  или на некоторой его части  $L^{(k)}$  задан один из компонентов напряжений и один из компонентов вектора смещений  $u = u \pm iv$ . Это так называемые смешанные задачи типа «контактной»; некоторые из них будут рассмотрены в гл. III, IV.

Выведем теперь формулу для главного момента  $M$  рассматриваемых усилий, приложенных к элементу  $ds$  контура  $L$ , относительно начала координат:

$$M = \int_{AB} (xY_n - yX_n) ds. \quad (I.100)$$

Подставим вместо  $X_n$  и  $Y_n$  их значения из (I.95):

$$M = - \int_{AB} \left\{ xd \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right) + yd \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right\}.$$

Интегрируя последнее уравнение по частям, получаем

$$M = - \left[ x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} \right]_A^B + \int_{AB} \left( \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right),$$

или

$$M = - \left[ x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} \right]_A^B + [U]_A^B.$$

Поскольку

$$x \frac{\partial U}{\partial x} + y \frac{\partial U}{\partial y} = \operatorname{Re} \left[ z \left( \frac{\partial U}{\partial x} - i \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right],$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой, и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi(z_1) + \overline{\varphi(z_1)} + \psi(z_2) + \overline{\psi(z_2)},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = s_1 \varphi(z_1) + \overline{s_1 \varphi(z_1)} + s_2 \psi(z_2) + \overline{s_2 \psi(z_2)},$$

получаем окончательно:

$$M = 2\operatorname{Re} [F_1(z_1) + F_2(z_2)]_A^B - \operatorname{Re} [z \{ (1 - is_1) \varphi(z_1) + (1 - is_1) \overline{\varphi(z_1)} + (1 - is_2) \psi(z_2) + (1 - is_2) \overline{\psi(z_2)} \}]_A^B. \quad (I.101)$$

В односвязной области (функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  в случае многосвязной области будут рассмотрены ниже) функции  $\varphi(z_1)$ ,  $\psi(z_2)$ ,  $F_1(z_1)$  и  $F_2(z_2)$  однозначны. Если точка  $A$  совпадает с точкой  $B$ , т. е. рассматриваемый профиль  $AB$  — замкнутый контур, то значения всех функций, входящих в формулы (I.99) и (I.101) в точках  $A$  и  $B$  будут совпадать, и мы получим

$$X = Y = M = 0, \quad (I.102)$$

а это и есть условие того, что совокупность всех внешних усилий, приложенных к замкнутому контуру, статически эквивалентна нулю.

Степень определенности функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ . Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (I.89), через которые определяются компоненты как напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  (I.90), так и перемещений  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$  (I.91), были введены как решение основного уравнения (I.82).

С другой стороны, решение основных задач теории упругости было сведено к контурным задачам, т. е. к задачам определения двух аналитических функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  по заданным значениям определенных комбинаций (I.96) и (I.97) этих функций на контуре рассматриваемой области.

Возникает вопрос, однозначно ли определены эти функции? Нет ли таких функций  $\varphi^*(z_1)$  и  $\psi^*(z_2)$ , тождественно не равных нулю, прибавление которых к функциям  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  не изменяет напряженного состояния тела? Каков самый общий вид функций  $\varphi^*(z_1)$  и  $\psi^*(z_2)$ ? Какие условия еще надо наложить на функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ , чтобы они были определены однозначно?

Исходя хотя бы из того, как были введены функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ , можно утверждать\*, что в выборе их имеется некоторый произвол, причем упругое равновесие тела, определяемое этими функциями, одно и то же. Однако естественнее при установлении определенности функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  пойти по другому пути — установить вид функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ , удовлетворяющих контурным условиям (I.96) в случае, когда контур  $L$  области  $S$  свободен от внешних усилий. Согласно теореме единственности в этом случае тело будет находиться в ненапряженном состоянии, т. е. во всех точках тела

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0.$$

Итак, положим в контурных условиях (I.96)  $X_n = Y_n = 0$  и определим вид функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ , удовлетворяющих уравнениям

$$\varphi(z_1) + \overline{\varphi(z_1)} + \psi(z_2) + \overline{\psi(z_2)} = C_1, \quad (I.103)$$

$$s_1\varphi(z_1) + \overline{s_1\varphi(z_1)} + s_2\psi(z_2) + \overline{s_2\psi(z_2)} = C_2,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — две вещественные постоянные.

Возьмем от обеих частей (I.103) оператор

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2}.$$

Принимая во внимание, что

$$z_2 = x + \alpha_2 y + i\beta_2 y = x_2 + iy_2,$$

$$\bar{z}_2 = x + \alpha_1 y + i\beta_1 y = x_1 + iy_1,$$

получим

$$\varphi''(z_1) \left[ 1 + \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2} + i \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^2 \right] + \overline{\varphi''(z_1)} \left[ 1 + \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2} - i \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^2 \right] = 0, \quad (I.104)$$

$$s_1 \left[ 1 + \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2} + i \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^2 \right] \varphi''(z_1) + \overline{s_1} \left[ 1 + \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2} - i \frac{\beta_1}{\beta_2} \right)^2 \right] \overline{\varphi''(z_1)} = 0.$$

\* Это видно из того, что  $\Delta_1 \operatorname{Re} \{F_1(z_1)\} = 0$  и  $\Delta_2 \operatorname{Re} \{F_2(z_2)\} = 0$  (см. сноску к формуле (I.88)).



Детерминант системы (I.104) отличен от нуля (так как  $\beta_1 \neq 0$  и  $\beta_2 = 0$  и, более того, мы условились их выбирать так, чтобы  $\beta_1 > 0$  и  $\beta_2 > 0$ ) и

$$-i2\beta_1 \left\{ 1 + 2 \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2} \right)^2 + 2 \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2} + \left[ \left( \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2} \right)^2 + \frac{\beta_1^2}{\beta_2^2} \right]^2 \right\} \neq 0.$$

Следовательно,

$$\varphi''(z_1) = 0. \quad (\text{I.105})$$

Возьмем теперь оператор

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2}$$

от обоих уравнений (I.103) и, поступая аналогично, получим

$$\psi''(z_2) = 0. \quad (\text{I.106})$$

Из (I.105) и (I.106) следует, что функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  могут быть только вида

$$\varphi(z_1) = A_1 z_1 + B_1, \quad \psi(z_2) = A_2 z_2 + B_2, \quad (\text{I.107})$$

где  $A_1 = A'_1 + iA''_1$ ;  $A_2 = A'_2 + iA''_2$ ;  $B_1 = B'_1 + iB''_1$ ;  $B_2 = B'_2 + iB''_2$  — произвольные комплексные постоянные.

Но функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (I.107) должны удовлетворять системе уравнений (I.103) или (согласно теореме единственности), что то же самое, уравнениям (I.90):

$$\begin{aligned} \varphi'(z_1) + \overline{\varphi'(z_1)} + \psi'(z_2) + \overline{\psi'(z_2)} &= 0, \\ s_1^2 \varphi'(z_1) + \overline{s_1^2 \varphi'(z_1)} + s_2^2 \psi'(z_2) + \overline{s_2^2 \psi'(z_2)} &= 0, \\ s_1 \varphi'(z_1) + \overline{s_1 \varphi'(z_1)} + s_2 \psi'(z_2) + \overline{s_2 \psi'(z_2)} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.108})$$

Подставляя значения функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  из (I.107) в систему уравнений (I.108), получаем

$$\begin{aligned} A'_1 + A'_2 &= 0, \\ \alpha_1 A'_1 + \alpha_2 A'_2 - \beta_1 A'_1 - \beta_2 A'_2 &= 0, \\ (\alpha_1^2 - \beta_1^2) A'_1 - 2\alpha_1 \beta_1 A'_1 + (\alpha_2^2 - \beta_2^2) A'_2 - 2\alpha_2 \beta_2 A'_2 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{I.109})$$

Из системы (I.109) следует, что из четырех постоянных  $A'_1$ ,  $A''_1$ ,  $A'_2$ ,  $A''_2$  одна остается неопределенной и ее можно зафиксировать произвольно. Примем  $A'_1$  за эту неопределенную величину и выразим все остальные через нее. Решив систему уравнений (I.109), получим:

$$\left. \begin{aligned} A'_1 &= \frac{2\beta_1 \beta_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{\beta_2 (\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_2^2) - 2\alpha_2 \beta_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} A'_1, \\ A'_2 &= - \frac{2\beta_1 \beta_2 (\alpha_1 - \alpha_2)}{\beta_2 (\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_2^2) - 2\alpha_2 \beta_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} A'_1, \\ A'_2 &= \frac{2\alpha_1 \beta_1 (\alpha_1 - \alpha_2) - \beta_1 (\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_2^2)}{\beta_2 (\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_2^2) - 2\alpha_2 \beta_2 (\alpha_1 - \alpha_2)} A'_1. \end{aligned} \right\} \quad (\text{I.110})$$

Следовательно,

$$\varphi'(z_1) = A_1^* i \left[ 1 - i \frac{2\beta_1\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{\beta_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_2^2) - 2\alpha_2\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \right] = iA_1^*\alpha,$$

$$\psi'(z_2) = A_1^* i \left[ \frac{\beta_1(\alpha_2^2 - \beta_2^2 - \alpha_1^2 + \beta_1^2) + 2\beta_1(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 + i\beta_2)}{\beta_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2 - \alpha_2^2 + \beta_2^2) - 2\alpha_2\beta_2(\alpha_1 - \alpha_2)} \right] = iA_1^*\beta,$$

где через  $\alpha$  и  $\beta$  обозначены выражения, стоящие в квадратных скобках.

Как будет видно из дальнейшего, для многих материалов  $s_1 = i\beta_1$ ;

$s_2 = i\beta_2$ , т. е.  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , тогда  $\psi'(z_1) = iA_1^*$ , т. е.  $\alpha = 1$ , и  $\psi'(z_2) = -i\frac{\beta_1}{\beta_2}A_1^*$ ,

т. е.  $\beta = -\frac{\beta_1}{\beta_2}$ .

Таким образом, функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (I.107) будут иметь вид

$$\varphi(z_1) = iA_1^*az_1 + B_1, \quad \psi(z_2) = iA_1^*\beta z_2 + B_2. \quad (\text{I.111})$$

Постоянные  $B_1 = B_1' + iB_1''$  и  $B_2 = B_2' + iB_2''$  остаются произвольными.

Итак, в случае первой основной задачи функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  содержат пять произвольных вещественных постоянных —  $A_1^*$ ,  $B_1'$ ,  $B_1''$ ,  $B_2'$  и  $B_2''$  которые мы можем зафиксировать как угодно\*.

Если начало координат находится внутри рассматриваемой области, эти постоянные можно зафиксировать так:

$$\text{Im} \{ \varphi'(0) \} = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad (\text{I.112})$$

где  $\text{Im}$  — символ мнимой части рядом стоящего выражения.

Рассмотрим теперь, сколько остается неопределенных постоянных в функциях  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (I.111) для второй основной задачи. В этом случае контурные условия (I.97) задаются точно, следовательно из пяти величин  $A_1^*$ ,  $B_1'$ ,  $B_1''$ ,  $B_2'$  и  $B_2''$  можем зафиксировать произвольно только три, остальные определяются из самих контурных условий (I.97). Считая, что начало координат находится внутри области, эти постоянные можно записать так:

$$\text{Im} \{ \varphi'(0) \} = 0, \quad (\text{I.113})$$

$$\varphi(0) = 0.$$

Очевидно, что условия (I.112) или (I.113) исключают произвол в выборе функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ .

\* Следует учитывать, что если в контурных условиях (I.96) постоянные  $C_1$  и  $C_2$  будут тем или иным способом зафиксированы, то одну из постоянных  $B_1$  или  $B_2$  фиксировать нельзя, ибо  $B_1$  и  $B_2$  связаны соотношениями  $B_1 + \bar{B}_1 + B_2 + \bar{B}_2 = C_1$  и  $s_1B_1 + \bar{s}_1\bar{B}_1 + s_2B_2 + \bar{s}_2\bar{B}_2 = C_2$ , как это следует из тех же контурных условий (I.103).

**Вид функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  в случае многосвязной области.** Конечная многосвязная область. Допустим, что упругий анизотропный материал занимает не сплошь часть плоскости, а, как показано на рис. 1.3, только заштрихованную ее часть (пластинка с различными отверстиями). В этом случае область  $S$ , занятая телом, многосвязна.

Поместим начало координат внутри области и обозначим через  $L_1, L_2, \dots, L_n, L_{n+1}$  контуры, ограничивающие рассматриваемую область.

Будем считать, что: 1)  $L_1, L_2, \dots, L_n, L_{n+1}$  — замкнутые гладкие\* контуры, не пересекающиеся между собой; 2) контур  $L_{n+1}$  охватывает все предыдущие.

К каждому контуру  $L_n$  приложены внешние усилия, под действием которых тело находится в состоянии упругого равновесия. Обозначим главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру  $L_k$ , через  $X_k + iY_k$ .

Выделим мысленно какую-либо часть области (на рис. 1.3 штриховыми линиями проведены такие контуры  $C^{(1)}$  и  $C^{(2)}$ ) и определим по формуле (I.99) главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру вырезанной части области  $S$ . Если вырезанная таким путем область односвязна (например, на рис. 1.3 область, ограниченная контуром  $C^{(1)}$ ), главный вектор будет равен нулю, так как функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  внутри этой области однозначны. Если же взять область, ограниченную контуром  $C^{(2)}$ , главный вектор приложенных к контуру  $C^{(2)}$  внешних усилий, вообще говоря, будет отличен от нуля и равен  $-(X_k + iY_k)$ . Последнее утверждение непосредственно вытекает из того, что все тело под действием заданных сил находится в равновесии, а следовательно, находится в равновесии и любая его часть. Но так как на контур  $L_k$  действуют внешние усилия, главный вектор которых  $X_k + iY_k$ , то, следовательно, к контуру  $C^{(2)}$  приложены внешние усилия, главный вектор которых равен  $-(X_k + iY_k)$ . Вместо контура  $C^{(2)}$ , очевидно, можно взять любой другой контур  $C^{*(2)}$ , охватывающий  $L_k$ , с тем условием, чтобы он не охватывал и не пересекал других контуров.

Очевидно, что главный вектор внешних усилий, приложенных к контурам  $C^{(2)}$ ,  $C^{*(2)}$  и т. п., будет один и тот же. Отсюда следует, что

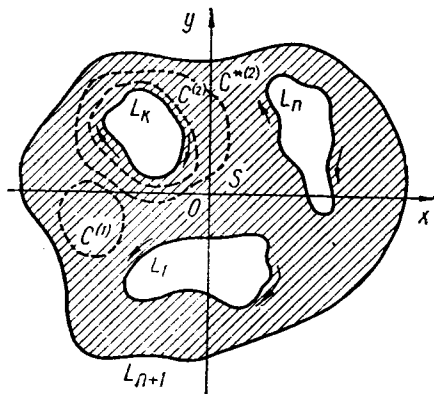


Рис. 1.3.

\* Точнее, будем предполагать, что контуры имеют непрерывно изменяющуюся касательную.

$\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  в случае многосвязной области следует искать в виде

$$\varphi(z_1) = \sum_{k=1}^n A_k \ln(z_1 - z_{1,k}) + \varphi^*(z_1), \quad (I.114)$$

$$\psi(z_2) = \sum_{k=1}^n B_k \ln(z_2 - z_{2,k}) + \psi^*(z_2),$$

где  $z_{1,k}$ ,  $z_{2,k}$  — точки, произвольно фиксированные внутри контуров  $L_k$ ;  $\varphi^*(z_1)$  и  $\psi^*(z_2)$  — однозначные функции в области  $S$ ;  $A_k$  и  $B_k$  — некоторые комплексные постоянные, подлежащие определению.

Постоянные  $A_k$  и  $B_k$ , очевидно, должны быть определены из условий: 1) главный вектор усилий, приложенных к контуру  $C^{(2)}$  (или  $C^{*(2)}$ ), равен  $-(X_k + iY_k)$ ; 2) перемещения  $u$  и  $v$ , определяемые формулами (I.91), однозначны, т. е. из уравнений \*

$$\begin{aligned} (1 + is_1)A_k - (1 + i\bar{s}_1)\bar{A}_k + (1 + is_2)B_k - (1 + i\bar{s}_2)\bar{B}_k &= -\frac{X_k + iY_k}{2\pi}, \\ (p_1 + iq_1)A_k - (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\bar{A}_k + (p_2 + iq_2)B_k - (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\bar{B}_k &= 0. \end{aligned} \quad (I.115)$$

Допишем к этим уравнениям сопряженные им уравнения

$$\begin{aligned} (1 + is_1)A_k - (1 + i\bar{s}_1)\bar{A}_k + (1 + is_2)B_k - (1 + i\bar{s}_2)\bar{B}_k &= -\frac{X_k + iY_k}{2\pi}, \\ (p_1 + iq_1)A_k - (\bar{p}_1 + i\bar{q}_1)\bar{A}_k + (p_2 + iq_2)B_k - (\bar{p}_2 + i\bar{q}_2)\bar{B}_k &= 0, \\ -(1 - is_1)A_k + (1 - i\bar{s}_1)\bar{A}_k - (1 - is_2)B_k + (1 - i\bar{s}_2)\bar{B}_k &= -\frac{X_k - iY_k}{2\pi}, \\ -(p_1 - iq_1)A_k + (\bar{p}_1 - i\bar{q}_1)\bar{A}_k - (p_2 - iq_2)B_k + (\bar{p}_2 - i\bar{q}_2)\bar{B}_k &= 0. \end{aligned} \quad (I.116)$$

Детерминант системы (I.116)

$$D = \frac{16a_{11}a_{22}\beta_1\beta_2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} \{2[(a_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2 - \beta_1)^2](\beta_2 + \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)^4\}, \quad (I.117)$$

очевидно, отличен от нуля.

Для частных значений  $s_1 = i\beta_1$  и  $s_2 = i\beta_2$ , т. е. при  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ .

$$D = \frac{16a_{11}a_{22}}{\beta_1\beta_2} (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2.$$

\* Второе уравнение (I.115) получено из (I.91) и представляет собой приращение выражения  $[u + iv]$  при обходе по контуру  $L_k$ .

Решив систему (I.116), найдем вполне определенные значения  $A_k$  и  $B_k$ . Если главный вектор  $X_k + iY_k$  внешних усилий, приложенных к каждому контуру (см. рис. I.3), будет равен нулю, то, полагая в (I.116)  $X_k = Y_k = 0$ , найдем

$$A_k = B_k = 0.$$

Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (I.114) в этом случае будут регулярными и однозначными функциями в области  $S$ .

Бесконечная многосвязная область. Представляет большой практический интерес\* случай, когда контур  $L_{n+1}$  уходит в бесконечность, т. е. случай бесконечной многосвязной области (рис. I.4).

Проведем мысленно контур  $\Gamma$ , который охватывал бы все контуры  $L_1, L_2, \dots, L_n$ . Для большей наглядности удобно ввести дополнительно еще две плоскости  $z_1$  и  $z_2$  (рис. I.5 и I.6), которые получаются из  $z$  аффинным преобразованием:

$$x_1 = x + \alpha_1 y, \quad y_1 = \beta_1 y, \quad (I.118)$$

$$x_2 = x + \alpha_2 y, \quad y_2 = \beta_2 y.$$

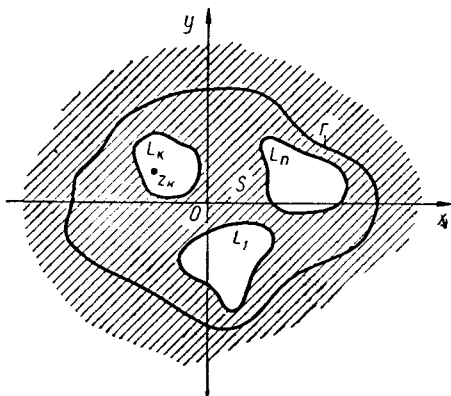


Рис. I.4.

При этом преобразовании область  $S$  (рис. I.4) перейдет в области  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$

той же связности, что и заданная область (рис. I.5 — I.6). Однако направление обхода областей  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  может быть как прямым, так и обратным.

Направление обхода областей  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  сохраняется, если соответствующие функциональные определители\*\*

$$D \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x & y \end{bmatrix} = \beta_1 > 0, \quad D \begin{bmatrix} x_2 & y_2 \\ x & y \end{bmatrix} = \beta_2 > 0. \quad (I.119)$$

Мы так и условились ранее выбирать значения  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , чтобы сохранилось направление обхода областей  $S$ ,  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$ .

Функция  $\varphi(z_1)$  будет функцией простого комплексного переменного  $z_1$  в области  $S^{(1)}$ , а функция  $\psi(z_2)$  — в области  $S^{(2)}$ .

\* К этой задаче может быть сведено очень большое число практических задач о концентрации напряжений. Если размеры отверстий невелики, пластинку конечных размеров можно принять за бесконечную при условии, что эти отверстия не расположены близко к ее краям.

\*\* См. Э. Гурса [2], стр. 288.

Очевидно, для всякой точки  $z$ , находящейся вне  $\Gamma$  (рис. I.4), найдутся соответствующие ей точки  $z_1$  вне  $\Gamma^{(1)}$  (рис. I.5) и  $z_2$  вне  $\Gamma^{(2)}$  (рис. I.6), для которых, очевидно, при  $|z| > |z_k|$ ,  $|z_1| > |z_{1,k}|$  и  $|z_2| > |z_{2,k}|$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), где  $z_{1,k}$ ,  $z_{2,k}$  — точки внутри контуров  $L_k^{(1)}$ ,  $L_k^{(2)}$  (рис. I.5 и I.6) и, следовательно,

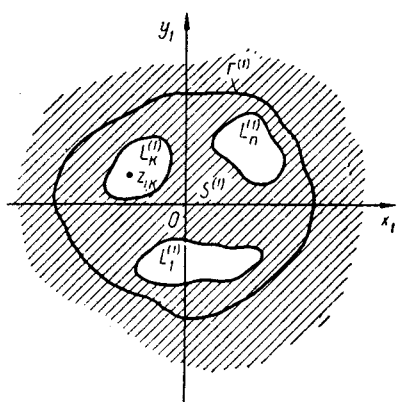


Рис. I.5.

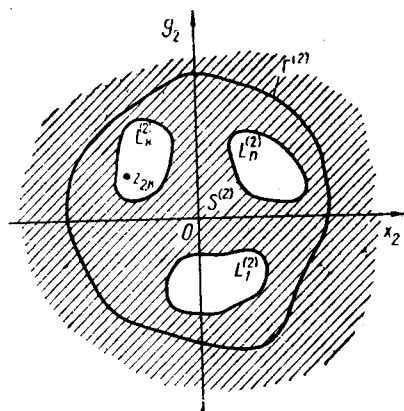


Рис. I.6.

$$\ln(z_1 - z_{1,k}) = \ln z_1 + \ln\left(1 - \frac{z_{1,k}}{z_1}\right) = \ln z_1 - \frac{z_{1,k}}{z_1} -$$

$$- \frac{1}{2} \left(\frac{z_{1,k}}{z_1}\right)^2 - \dots = \ln z_1 + \text{функция, голоморфная вне } \Gamma^{(1)};$$

$$\ln(z_2 - z_{2,k}) = \ln z_2 + \ln\left(1 - \frac{z_{2,k}}{z_2}\right) = \ln z_2 - \frac{z_{2,k}}{z_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{z_{2,k}}{z_2}\right)^2 - \dots = \ln z_2 +$$

$$+ \text{функция, голоморфная вне } \Gamma^{(2)}.$$

Подставив выражения  $\ln(z_1 - z_{1,k})$  и  $\ln(z_2 - z_{2,k})$  в (I.114), получим

$$\varphi(z_1) = A \ln z_1 + \varphi^{**}(z_1),$$

(I.120)

$$\psi(z_2) = B \ln z_2 + \psi^{**}(z_2),$$

где через  $\varphi^{**}(z_1)$  и  $\psi^{**}(z_2)$  обозначены функции, соответственно голоморфные вне  $\Gamma^{(1)}$  и  $\Gamma^{(2)}$ , за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки;  $A = \Sigma A_k$  и  $B = \Sigma B_k$  — постоянные, заключающие в себе, очевидно, главный вектор всех внешних усилий, приложенных к контуру  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$  области  $S$  (рис. I.4).

Функции  $\varphi^{**}(z_1)$  и  $\psi^{**}(z_2)$  вне  $\Gamma^{(1)}$  и  $\Gamma^{(2)}$  можем разложить (каждую в своей плоскости) в ряд Лорана:

$$\varphi^{**}(z_1) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z_1^n, \quad (I.121)$$

$$\psi^{**}(z_2) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n z_2^n.$$

Предположим, что  $\sigma_x^{(\infty)} = \text{const}$ ,  $\sigma_y^{(\infty)} = \text{const}$ ,  $\tau_{xy}^{(\infty)} = \text{const}$ , т. е. введем условие, что компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  остаются ограниченными\* во всей области  $S$ .

Подставив значения функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  из (I.120) в формулы для компонентов напряжений (I.90) и приняв во внимание разложения (I.121), получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{s_1^2 A}{z_1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} s_1^2 n a_n z_1^{n-1} + \frac{\bar{s}_1^2 \bar{A}}{z_1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} n \bar{s}_1^2 \bar{a}_n \bar{z}_1^{n-1} + \\ &+ \frac{s_2^2 B}{z_2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} s_2^2 n a'_n z_2^{n-1} + \frac{\bar{s}_2^2 \bar{B}}{z_2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{s}_2^2 n \bar{a}'_n \bar{z}_2^{n-1}; \\ \sigma_y &= \frac{A}{z_1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} n a_n z_1^{n-1} + \frac{\bar{A}}{z_1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} n \bar{a}_n \bar{z}_1^{n-1} + \\ &+ \frac{B}{z_2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} n a'_n z_2^{n-1} + \frac{\bar{B}}{z_2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} n \bar{a}'_n \bar{z}_2^{n-1}; \\ -\tau_{xy} &= \frac{A s_1}{z_1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} s_1 n a_n z_1^{n-1} + \frac{\bar{A} \bar{s}_1}{z_1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{s}_1 n \bar{a}_n \bar{z}_1^{n-1} + \\ &+ \frac{B s_2}{z_2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} s_2 n a'_n z_2^{n-1} + \frac{\bar{B} \bar{s}_2}{z_2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{s}_2 n \bar{a}'_n \bar{z}_2^{n-1}. \end{aligned} \quad (I.122)$$

Представим  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$  и перепишем предыдущие формулы в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left( \frac{s_1^2 A}{z_1} + \frac{\bar{s}_1^2 \bar{A}}{z_1} \right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} r_1^{n-1} n (s_1^2 a_n e^{i\theta_1(n-1)} + \bar{s}_1^2 \bar{a}_n e^{-i\theta_1(n-1)}) + \\ &+ \left( \frac{s_2^2 B}{z_2} + \frac{\bar{s}_2^2 \bar{B}}{z_2} \right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} r_2^{n-1} n (s_2^2 a'_n e^{i\theta_2(n-1)} + \bar{s}_2^2 \bar{a}'_n e^{-i\theta_2(n-1)}); \end{aligned}$$

\* Более общий случай легко сводится к рассмотренному, например, в § 1 гл. III.

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \left( \frac{A}{z_1} + \frac{\bar{A}}{\bar{z}_1} \right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} n r_1^{n-1} (a_n e^{i\theta_1(n-1)} + \bar{a}_n e^{-i\theta_1(n-1)}) + \\ &+ \left( \frac{B}{z_2} + \frac{\bar{B}}{\bar{z}_2} \right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} n r_2^{n-1} (a'_n e^{i\theta_2(n-1)} + \bar{a}'_n e^{-i\theta_2(n-1)}); \\ -\tau_{xy} &= \left( \frac{s_1 A}{z_1} + \frac{\bar{s}_1 \bar{A}}{\bar{z}_1} \right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} n r_1^{n-1} (s_1 a_n e^{i\theta_1(n-1)} + \bar{s}_1 \bar{a}_n e^{-i\theta_1(n-1)}) + \\ &+ \left( \frac{s_2 B}{z_2} + \frac{\bar{s}_2 \bar{B}}{\bar{z}_2} \right) + \sum_{-\infty}^{+\infty} n r_2^{n-1} (s_2 a'_n e^{i\theta_2(n-1)} + \bar{s}_2 \bar{a}'_n e^{-i\theta_2(n-1)}). \end{aligned}$$

Для того чтобы компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  были ограничены во всей плоскости при любом  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  и  $r_1$ ,  $r_2$ , очевидно, необходимо, чтобы

$$\left. \begin{aligned} s_1^2 a_n = \bar{s}_1^2 \bar{a}_n &\equiv 0, & s_2^2 a'_n = \bar{s}_2^2 \bar{a}'_n &\equiv 0, \\ s_1 a_n = \bar{s}_1 \bar{a}_n &\equiv 0, & s_2 a'_n = \bar{s}_2 \bar{a}'_n &\equiv 0, \\ a_n = \bar{a}_n &\equiv 0, & a'_n = \bar{a}'_n &\equiv 0. \end{aligned} \right\} \text{ при } n \geq 2.$$

Все эти уравнения будут удовлетворены, если

$$a_n = \bar{a}_n \equiv 0, \quad a'_n = \bar{a}'_n \equiv 0 \text{ при } n \geq 2. \quad (\text{I.123})$$

Таким образом, функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (I.120) имеют [вид

$$\varphi(z_1) = A \ln z_1 + (B^* + iC^*) z_1 + \varphi_0(z_1), \quad (\text{I.124})$$

$$\psi(z_2) = B \ln z_2 + (B'^* + iC'^*) z_2 + \psi_0(z_2),$$

где  $a_1 = B^* + iC^*$ ,  $a'_1 = B'^* + iC'^*$ ;  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$  — функции, голоморфные на бесконечности, т. е.

$$\varphi_0(z_1) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z_1} + \frac{a_{-2}}{z_1^2} + \frac{a_{-3}}{z_1^3} + \dots, \quad (\text{I.125})$$

$$\psi_0(z_2) = a'_0 + \frac{a'_{-1}}{z_2} + \frac{a'_{-2}}{z_2^2} + \frac{a'_{-3}}{z_2^3} + \dots$$

Постоянные  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $B'^*$  и  $C'^*$  в (I.124) можно выразить через компоненты напряжений на бесконечности, считая напряженное состояние в бесконечно удаленной части плоскости равномерным.

Пусть на бесконечности заданы напряжения

$$\sigma_x^{(\infty)} = \text{const}, \quad \sigma_y^{(\infty)} = \text{const}, \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = \text{const}. \quad (\text{I.126})$$



Подставив функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (I.124) в уравнения (I.90) и устремляя  $z_1 \rightarrow \infty$  и  $z_2 \rightarrow \infty$ , получим

$$s_1^2(B^* + iC^*) + \bar{s}_1^2(B^* - iC^*) + s_2^2(B'^* + iC'^*) + \bar{s}_2^2(B'^* - iC'^*) = \sigma_x^{(\infty)},$$

$$2B^* + 2B'^* = \sigma_y^{(\infty)}, \quad (\text{I.127})$$

$$s_1(B^* + iC^*) + \bar{s}_1(B^* - iC^*) + s_2(B'^* + iC'^*) + \bar{s}_2(B'^* - iC'^*) = -\tau_{xy}^{(\infty)}.$$

Из (I.127) видим, что одна из величин  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $B'^*$  и  $C'^*$  может быть зафиксирована\* произвольно.

Положим  $C^* = 0$ . Детерминант\*\* системы (I.127)

$$D = -8\beta_2 I (\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2).$$

Решая систему (I.127), получаем

$$B^* = \frac{\sigma_x^{(\infty)} + (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \sigma_y^{(\infty)} + 2\alpha_2 \tau_{xy}^{(\infty)}}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]},$$

$$B'^* = \frac{(\alpha_1^2 - \beta_1^2) \sigma_y^{(\infty)} - 2\alpha_1 \alpha_2 \sigma_y^{(\infty)} - \sigma_x^{(\infty)} - 2\alpha_2 \tau_{xy}^{(\infty)}}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]}, \quad (\text{I.128})$$

$$C'^* = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \sigma_x^{(\infty)} + [\alpha_2 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) - \alpha_1 (\alpha_2^2 - \beta_2^2)] \sigma_y + [(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - (\alpha_2^2 - \beta_2^2)] \tau_{xy}^{(\infty)}}{2\beta_2 [(\alpha_2 - \alpha_1)^2 - (\beta_2^2 - \beta_1^2)]}.$$

Особенно простой вид приобретают формулы (I.128), когда\*\*\*

$$s_1 = i\beta_1, \quad s_2 = i\beta_2.$$

\* Четвертая постоянная может быть связана с вращением бесконечно удаленной части плоскости  $xOy$ . Подставив значения  $u$  и  $v$  из (I.91) в уравнение вращения  $\varepsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$  и устремляя  $x$  и  $y$  к бесконечности, получим недостающее уравнение. Прибавив полученное уравнение к системе (I.127), получим систему из четырех уравнений, детерминант которой при  $s_1 \neq s_2$  отличен от нуля:

$$D = -\frac{16\alpha_2 \beta_1 \beta_2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} [(\alpha_2 - \alpha_1)^4 + (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2 + 2(\alpha_2 - \alpha_1)^2 (\beta_1^2 + \beta_2^2)].$$

Фиксируя значение  $\varepsilon^{(\infty)}$ , из этой системы четырех уравнений получим вполне определенные значения для  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $B'^*$  и  $C'^*$ . Однако с чисто практической точки зрения удобно заранее зафиксировать одну из постоянных  $C^*$  или  $C'^*$ .

\*\*Случай равных корней исключен, следовательно, всегда можно выбрать обозначения так, чтобы  $\beta_2 - \beta_1 > 0$ . Если  $\beta_2 - \beta_1 < 0$ , то, положив в (I.127)  $C'^* = 0$ , получим

$$D = -8\beta_1 [(\alpha_1 - \alpha_2)^2 + (\beta_1^2 - \beta_2^2)].$$

\*\*\* Для большинства материалов с тремя плоскостями упругой симметрии  $s_1$  и  $s_2$  имеют указанный вид, если только осями координат служат прямые пересечения этих плоскостей упругой симметрии.

Полагая в (I.128)  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , получаем

$$B^* = - \frac{\sigma_x^{(\infty)} + \beta_2^2 \sigma_y^{(\infty)}}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)},$$

$$B'^* = \frac{\sigma_x^{(\infty)} + \beta_1^2 \sigma_y^{(\infty)}}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}, \quad (\text{I.129})$$

$$C'^* = \frac{\tau_{xy}^{(\infty)}}{2\beta_2}.$$

Подставив в функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (I.124) найденные значения  $B^*$ ,  $B'^*$ ,  $C'^*$  из (I.128) или (I.129) и  $C^* = 0$ , получим окончательный вид этих функций.

Согласно отмеченному выше, всегда можем считать, что  $a_0 = 0$  и  $a'_0 = 0$ , т. е.  $\varphi_0(\infty) = \psi_0(\infty) = 0$ , и, кроме того, как принято ранее,  $C^* = 0$ .

Бесконечная односвязная область. Допустим, что рассматриваемая бесконечная область не многосвязная, а односвязная, иными словами, бесконечная пластинка с одним отверстием. Очевидно, что если выберем начало координат вне нашей области, т. е. внутри отверстия, то все сказанное выше относительно функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  остается справедливым, если считать, что роль контура  $\Gamma$  (рис. I.4) выполняет контур  $L$  отверстия.

Подставим функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (I.124) в формулы для компонентов перемещений (I.91). Для того чтобы перемещения на бесконечности оставались ограниченными, необходимо выполнение таких условий: 1) главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру  $L$  отверстия, должен равняться нулю, т. е.  $X = Y = 0$ ; 2) напряжения и вращения на бесконечности также должны равняться нулю, т. е.  $B^* = B'^* = C^* = C'^* = 0$ .

В дальнейшем потребуются значения коэффициентов  $A$  и  $B$ , определяемых как решения системы уравнений (I.116) для ортотропной пластинки с круговым отверстием.

Направляя оси координат  $x$  и  $y$  по главным направлениям упругости материала пластинки, получаем

$$A = \frac{X}{4\pi} \cdot \frac{\beta_1(a_{22} - a_{12}\beta_2^2)}{a_{22}(\beta_1^2 - \beta_2^2)} + i \frac{Y}{4\pi} \cdot \frac{a_{11}\beta_2^2 - a_{12}}{a_{11}(\beta_1^2 - \beta_2^2)},$$

$$B = \frac{X}{4\pi} \cdot \frac{\beta_2(a_{12}\beta_1^2 - a_{22})}{a_{22}(\beta_1^2 - \beta_2^2)} - i \frac{Y}{4\pi} \cdot \frac{a_{11}\beta_1^2 - a_{12}}{a_{11}(\beta_1^2 - \beta_2^2)}. \quad (\text{I.130})$$

На основании предыдущих формул приведем значения постоянных  $A$  и  $B$  для случая одной сосредоточенной силы  $P$ , приложенной нормально к контуру кругового отверстия в точке, определяемой углом

$\alpha$ , отсчитываемым от положительного направления оси  $Ox$  против часовой стрелки:

$$A = \frac{P \cos \alpha}{4\pi} \cdot \frac{\beta_1 (a_{22} - a_{12}\beta_2^2)}{a_{22} (\beta_1^2 - \beta_2^2)} + i \frac{P \sin \alpha}{4\pi} \cdot \frac{a_{11}\beta_2^2 - a_{12}}{a_{11} (\beta_1^2 - \beta_2^2)},$$

$$B = \frac{P \cos \alpha}{4\pi} \cdot \frac{\beta_2 (a_{12}\beta_1^2 - a_{22})}{a_{22} (\beta_1^2 - \beta_2^2)} + i \frac{P \sin \alpha}{4\pi} \cdot \frac{a_{12} - a_{11}\beta_1^2}{a_{11} (\beta_1^2 - \beta_2^2)}.$$
(I.131)

Выше решение основных контурных задач теории упругости сводилось к определению функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  по контурным условиям (I.96) и (I.97). Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ , вообще говоря, в случае многосвязной области (как конечной, так и бесконечной) неоднозначны. Это вытекало из того, что главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру  $L_k$ , был отличен от нуля. При помощи весьма простого приема можно всегда свести решение поставленной задачи к тому случаю, когда на каждой из границ  $L_k$  в отдельности главный вектор внешних сил равен нулю\*.

Остановимся для определенности на первой основной задаче. Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  для этого случая имеют вид (I.114). Подставим функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (I.114) в уравнения (I.96)

$$\varphi^*(z_1) + \overline{\varphi^*(z_1)} + \psi^*(z_2) + \overline{\psi^*(z_2)} = f_1 - \sum_{k=1}^n A_k \ln(z - z_{1,k}) -$$

$$- \sum_{k=1}^n \overline{A}_k \ln(\overline{z_1} - \overline{z_{1,k}}) - \sum_{k=1}^n [B_k \ln(z_2 - z_{2,k}) + \overline{B}_k \ln(\overline{z_2} - \overline{z_{2,k}})] = f_1^*;$$

(I.132)

$$s_1 \varphi^*(z_1) + \overline{s_1 \varphi^*(z_1)} + s_2 \psi^*(z_2) + \overline{s_2 \psi^*(z_2)} = f_2 - \sum_{k=1}^n [A_k s_1 \ln(z_1 - z_{1,k}) +$$

$$+ \overline{A}_k \overline{s_1} \ln(\overline{z_1} - \overline{z_{1,k}})] - \sum_{k=1}^n [B_k s_2 \ln(z_2 - z_{2,k}) + \overline{B}_k \overline{s_2} \ln(\overline{z_2} - \overline{z_{2,k}})] = f_2^*.$$

где  $\varphi^*(z_1)$  и  $\psi^*(z_2)$  — однозначные функции в области  $S$ .

Теперь уже нетрудно видеть из (I.132), что  $f_1^*$  и  $f_2^*$  — однозначные функции. Действительно, при обходе по контуру  $L_k$  в положительном направлении приращение  $[f_2^*] = X_k - X_k = 0$ ; точно так же приращение  $[f_1^*] = -Y_k + Y_k = 0$ . При обходе по внешнему контуру  $L_{n+1}$  получим  $X = Y = 0$ , т. е. главный вектор всех внешних усилий, приложенных к контуру  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_n$ , равен нулю.

\* А в этом случае, как следует из (I.116), функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  будут регулярными в области  $S$ .

В случае второй основной задачи этот же прием дает возможность свести задачу к определению регулярных в области  $S$  функций  $\varphi^*(z_1)$  и  $\psi^*(z_2)$  по контурным условиям (1.97). В последнем случае необходимо знать главный вектор внешних усилий, приложенных к каждому контуру  $L_h$  в отдельности.

#### § 4. Таблица некоторых интегралов типа Коши

Приведем таблицу интегралов типа Коши (не останавливаясь на методе их вычисления), которые встретятся в последующих главах. Здесь приняты следующие обозначения:

$\gamma$  — окружность единичного радиуса в плоскости комплексного переменного  $\zeta$ ;

$\zeta$  — произвольная точка плоскости комплексного переменного;

$\zeta_0$  — точка приложения сосредоточенной силы или момента;

$\bar{\zeta}_0$  — точка, сопряженная с точкой  $\zeta_0$ ;

$t, \sigma, \sigma_1$  — точки, расположенные на единичной окружности  $\gamma$ .

##### I. При $|\zeta| > 1, |\zeta_0| > 1$

$$1) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln \frac{1-\sigma\bar{\zeta}_0}{\sigma}}{\sigma-\zeta} d\sigma = -\ln \frac{1-\zeta\bar{\zeta}_0}{\zeta} + \ln(-\bar{\zeta}_0);$$

$$2) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{(1-\sigma\bar{\zeta}_0)(\sigma-\zeta)} = -\frac{1}{1-\zeta\bar{\zeta}_0};$$

$$3) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{(\sigma-\zeta_0)(\sigma-\zeta)} = 0;$$

$$4) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(\sigma-\zeta_0)}{\sigma-\zeta} d\sigma = 0;$$

$$5) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma(\sigma-\zeta_0)d\sigma}{(1-\bar{\zeta}_0\sigma)(\sigma-\zeta)} = -\frac{1-\bar{\zeta}_0\zeta_0}{\bar{\zeta}_0^2(1-\bar{\zeta}_0\zeta)};$$

$$6) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{(1-\sigma\bar{\zeta}_0)(\sigma-\zeta)} = -\frac{1}{\bar{\zeta}_0(1-\bar{\zeta}_0\zeta)};$$

$$7) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{(1-\sigma\bar{\zeta}_0)^2(\sigma-\zeta)} = -\frac{1}{(1-\bar{\zeta}_0\zeta)^2};$$

$$8, 9) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{(\sigma-\zeta_0)(\sigma-\zeta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{(\sigma-\zeta_0)(\sigma-\zeta)} = 0.$$

II. При  $|\xi| > 1$ ,  $|\zeta_0| < 1$ 

$$10) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(\sigma - \zeta_0)}{\sigma - \xi} d\sigma = \ln(\xi - \sigma_1) - \ln(\xi - \zeta_0) + \text{const};$$

$$11, 12, 13) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma(\sigma - \zeta_0) d\sigma}{(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)(\sigma - \xi)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)(\sigma - \xi)} = 0;$$

$$14) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma^2 d\sigma}{(\sigma - \zeta_0)(\sigma - \xi)} = -\frac{\zeta_0}{\xi - \zeta_0};$$

$$15) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{(\sigma - \zeta_0)(\sigma - \xi)} = -\frac{\zeta_0}{\xi - \zeta_0}.$$

III. При  $|\xi| < 1$ ,  $|\zeta_0| > 1$ 

$$16) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma}{\sigma}}{\sigma - \xi} d\sigma = \ln(-\bar{\zeta}_0);$$

$$17) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(\sigma - \zeta_0)}{\sigma - \xi} d\sigma = \ln(\xi - \zeta_0);$$

$$18) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta_0)(\sigma - \xi)} = \frac{1}{\xi - \zeta_0};$$

$$19, 20) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)(\sigma - \xi)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{(1 - \bar{\zeta}_0^2 \sigma)(\sigma - \xi)} = 0;$$

$$21) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)(\sigma - \xi)} = -\frac{1}{\bar{\zeta}_0};$$

$$22) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{(\sigma - \zeta_0)(\sigma - \xi)} = \frac{\xi}{\xi - \zeta_0};$$

$$23) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{(\sigma - \zeta_0)(\sigma - \xi)} = \frac{1}{\xi - \zeta_0}.$$

IV. При  $|\xi| < 1, |\zeta_0| < 1$ 

$$24) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(\sigma - \zeta_0)}{\sigma - \xi} d\sigma = \ln(\sigma_1 - \xi);$$

$$25) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)(\sigma - \xi)} = \frac{\xi}{1 - \bar{\zeta}_0 \xi};$$

$$26) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma(\sigma - \zeta_0) d\sigma}{(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)(\sigma - \xi)} = \frac{\xi(\xi - \zeta_0)}{1 - \bar{\zeta}_0 \xi};$$

$$27) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)}{\sigma - \xi} d\sigma = \ln(1 - \bar{\zeta}_0 \xi).$$

V. При  $|\xi| > 1$ 

$$28) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(\sigma - \sigma_1)}{\sigma - \xi} d\sigma = 0;$$

$$29) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma - \xi)} = -\frac{1}{\xi}.$$

VI. При  $|\xi| < 1$ 

$$30) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln \sigma}{\sigma - \xi} d\sigma = \ln(\sigma_1 - \xi);$$

$$31) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma d\sigma}{\sigma - \xi} = \xi;$$

$$32) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(\sigma - \sigma_1)}{\sigma - \xi} d\sigma = \ln(\sigma_1 - \xi) + \text{const.}$$

VII. При  $|\zeta_0| > 1$ 

$$33) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{dt}{(1 - \bar{\zeta}_0 t)(t - \sigma)} = -\frac{1}{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma};$$

$$34) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{t dt}{(1 - \bar{\zeta}_0 t)(t - \sigma)} = -\frac{2 - \bar{\zeta}_0 \sigma}{\bar{\zeta}_0(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)};$$

$$35) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln \frac{1 - \bar{\zeta}_0 t}{t}}{t - \sigma} dt = 2 \ln(-\bar{\zeta}_0) - \ln \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma}{\sigma};$$

$$36) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \ln(t - \zeta_0) \frac{dt}{t - \sigma} = \ln(\sigma - \zeta_0);$$

$$37, 38) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma}{\sigma}}{\sigma^2} d\sigma = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(\bar{\sigma} - \bar{\zeta}_0)}{\sigma^2} d\sigma = 0;$$

$$39, 40) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)} = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma^2(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)} = 0;$$

$$41) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(\sigma - \zeta_0)}{\sigma} d\sigma = \ln(-\zeta_0);$$

$$42, 43) \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(\sigma - \zeta_0)}{\sigma^2} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta_0)} = -\frac{1}{\zeta_0};$$

$$44) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{dt}{(t - \zeta_0)(t - \sigma)} = \frac{1}{\sigma - \zeta_0}.$$

VIII. При  $|\zeta_0| < 1$ 

$$45) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{t(t - \zeta_0) dt}{(1 - \bar{\zeta}_0 t)(t - \sigma)} = \frac{\sigma(\sigma - \zeta_0)}{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma};$$

$$46) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(1 - \bar{\zeta}_0 t) dt}{t - \sigma} = \ln(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma);$$

$$47) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{t^2 dt}{(t - \zeta_0)(t - \sigma)} = \frac{\sigma(\sigma - 2\zeta_0)}{\sigma - \zeta_0};$$

$$48) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(t - \zeta_0)}{t - \sigma} dt = 2 \ln(\sigma - \sigma_1) - \ln(\sigma - \zeta_0);$$

$$49) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1 - \bar{\zeta}_0 t) dt}{t(t - \zeta_0)(t - \sigma)} = -\frac{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma}{\sigma(\sigma - \zeta_0)};$$

$$50) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{t dt}{(1 - \bar{\zeta}_0 t)(t - \sigma)} = \frac{\sigma}{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma};$$

$$51) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{dt}{(t - \zeta_0)(t - \sigma)} = -\frac{1}{\sigma - \zeta_0};$$

$$52) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma) \sigma} = 2;$$

$$53) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\sigma - \zeta_0) d\sigma}{\sigma(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)} = -2\bar{\zeta}_0;$$

$$54) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma)}{\sigma^2} d\sigma = -2\bar{\zeta}_0;$$

$$55) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma) d\sigma}{\sigma^2(\sigma - \zeta_0)} = 0;$$

$$56) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(\sigma - \zeta_0)}{\sigma^2} d\sigma = -\frac{2}{\sigma_1}.$$

### IX. Интегралы вида

$$57) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\sigma}{\sigma} = 2;$$

$$58) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{t dt}{t - \sigma} = \sigma;$$

$$59) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{t^2 dt}{t - \sigma} = \sigma^2;$$

$$60) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{dt}{t(t - \sigma)} = -\frac{1}{\sigma};$$

$$61) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln t dt}{t - \sigma} = 2 \ln(\sigma - \sigma_1) - \ln \sigma;$$

$$62) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(t - \sigma_1)}{t - \sigma} dt = \ln(\sigma - \sigma_1);$$

$$63, 64) \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln \sigma d\sigma}{\sigma^2} = \frac{1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\ln(\sigma - \sigma_1)}{\sigma^2} d\sigma = 2.$$

### ЛИТЕРАТУРА

- Благовещенский Ю. В. [1] О некоторых приближенных методах конформного преобразования.— В кн.: Сб. трудов Института строительной механики АН УССР, 14. Изд-во АН УССР, К., 1950, 145—152.
- [2] Про деякі наближені методи конформного перетворення.— В кн.: Математичний збірник, 4. Вид-во КДУ, 1950, 73—78.
- Бурмистров Е. Ф. [1] О концентрации напряжений около овальных отверстий некоторого вида.— В кн.: Инж. сб., 17. Изд-во АН СССР, М., 1953.



[2] Концентрация напряжений в пластинках с отверстием общего вида.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 8.

Вайнберг Д. В. [1]\* Пластины, диски, балки-стенки (прочность, устойчивость и колебания). Госстройиздат, К., 1959.

[2]\* Напряженное состояние составных дисков и пластин. Изд-во АН УССР, К., 1952.

Векуа И. Н. и Мухелишвили Н. И. [1] Методы теории аналитических функций в теории упругости.— В кн.: Тр. Всесоюз. съезда по теор. и прикл. мех. Изд-во АН СССР, 1962, 310—338.

Голузин Г. М. [1] Геометрическая теория функций комплексного переменного. ГИТТЛ, М.—Л., 1952.

Голузин Г., Канторович Л. и др. [1]\* Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. ОНТИ, М.—Л., 1937.

Гурса Э. [1] Курс мат. анализа. т. I. ОНТИ, М.—Л., 1936.

[2] Курс мат. анализа, т. II. ОНТИ, М.—Л., 1936, 52.

Гурьев Н. Ф. [1]. Розподіл напружень у розтягуюваній ізотропній скінченій прямокутній пластинці, послабленій круговим отвором.— В кн.: Наукові зап. Полтавськ. педінституту, 8, 1955.

[2] Растяжение прямоугольной пластинки, в круговое отверстие которой впаина упругая шайба.— Прикл. мех. 1966, 2, 3.

Гурьянов В. М., Космодамианский О. С. [1] Вплив кривини на напружений стан ізотропної пластинки з криволінійним отвором.— Прикл. мех., 1963, 9, 5, 487—495.

[2] О напряженном состоянии изотропной пластинки, ослабленной криволинейным отверстием.— Инж. журн. 1964, 4, 3.

[3] Растяжение изотропной пластинки с двумя эллиптическими отверстиями.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел, 2. Изд-во Саратовск. ун-та, 1965.

Канторович Л. В., Крылов В. И. [1] Методы приближенного решения уравнений в частных производных. ОНТИ, М.—Л., 1936.

[2] Приближенные методы высшего анализа, изд. 5-е. Физматгиз, М.—Л., 1962.

Карцивадзе И. Н. [1] Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей.— Сообщ. АН ГрузССР, 1946, 7, 8.

Колосов Г. В. [1] Примененне комплексной переменной к теории упругости. СЯТИ, М.—Л., 1935.

Лехницкий С. Г. [1] Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М.—Л., 1950.

[2] Анизотропные пластинки. ГТТИ, М., 1957.

[3] Некоторые случаи упругого равновесия однородного цилиндра с произвольной анизотропией.— Прикл. мат. и мех. 1939, 2, 3.

[4] Некоторые случаи плоской задачи теории упругости анизотропного тела.— В кн.: Сб. трудов Института мат. и мех. ЛФФ. ОНТИ, М.—Л., 1935.

[5] Плоская статистическая задача теории упругости анизотропного тела.— Прикл. мат. и мех. 1937, 1, 1.

Ляв А. [1] Математическая теория упругости. ОНТИ, М.—Л., 1935.

Маховиков В. И. [1] Про наближені конформні відображення і їх застосування в теорії пружності.— Прикл. мех. 1957, 3, 1, 20—37.

[2] Наближені способи конформного відображення двоз'язних областей.— Прикл. мех., 1959, 5, 3, 257—275.

Мелентьев П. В. [1] Приближенное конформное преобразование.— В кн.: Конформное отображение односвязных и многосвязных областей. ОНТИ, М.—Л., 1937, 80—89.

[2] Приближенные вычисления. Физматгиз, М., 1962.

Михлин С. Г. [1] Плоская деформация в анизотропной среде.— В кн.: Труды Сейсм. ин-та АН СССР, 76. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1936.

\* Здесь и далее звездочкой отмечены работы, в которых приведена более подробная библиография как по основному вопросу, так и по ряду смежных с ним.

- Мухелишвили Н. И. [1] \* Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд-во АН СССР, М., Изд. 1-е, 1935; изд. 4-е, 1954.
- [2] Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.
- Положий Г. Н. [1] Эффективное решение задачи о приближенном конформном отображении односвязных и двусвязных областей и определение постоянных Кристоффеля-Шварца при помощи электрогидродинамических аналогий.— УМЖ, 1955, 7, 4, 423—432.
- Папкович П. Ф. [1] Теория упругости. Оборонгиз, М.— Л., 1939.
- Привалов И. И. [1] Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 10-е. Физматгиз, М., 1960.
- Савин Г. Н. [1] Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном каким-либо отверстием.— В кн.: Труды Днепропетр. инж.-строит. ин-та, 10, 1936.
- [2] \* Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М., 1951.
- Смирнов В. И. [1] Курс высшей математики, т. III. ГИТТЛ, М.— Л., 1933.
- Степанов Г. Ю. [1] Гидродинамика решеток турбомашин. Физматгиз, М., 1962.
- Тозони О. В. [1] Обоснование экспериментально-аналитического метода решения задачи Дирихле для односвязной и двусвязной областей.— В кн.: Труды Новочеркасского политехн. ин-та, 43—57. Изд-во НПИ, 1956, 45—64.
- [2] Моделирование функции, бесконечно листно конформно отображающей двусвязную область на полюсу.— Изв. вузов. Электромеханика, 1958, 5.
- Толстов Ю. Г. [1] Конформное преобразование двусвязных областей с помощью электроинтегратора — Изв. АН СССР, ОТН, 1944, 7—8, 447—461.
- [2] Применение электроинтегратора для конформных преобразований односвязных областей.— Изв. АН СССР, ОТН, 1947, 2, 159—164.
- Угодчиков А. Г. [1] Электромоделирование задачи конформного преобразования круга наперед заданную односвязную область.— УМЖ, 1955, 7, 2, 221—230.
- [2] Электромоделирование конформного преобразования кругового кольца на заданную двусвязную область.— УМЖ, 1955, 7, 3, 305—312.
- [3] Про компенсацію похибок при електромоделиванні задачі конформного перетворення на приладі ЕГДА-6.— В кн.: Застосування методу електрогідродинамічних аналогій до розв'язання деяких технічних задач. Вид-во АН УРСР, К., 1959, 154—161.
- [4] Построение конформно отображающих функций при помощи электромоделирования.— В кн.: Докл. IV междуз. конф. по применению физ. и мат. моделирования в различных отраслях техники, 1. Изд-во МЭИ, М., 1962.
- [5] Про побудову функцій конформного перетворення за допомогою електромоделивання та інтерполяційних поліномів Лагранжа.— ДАН УРСР, 1963, 11.
- [6] Применение электромоделирования и интерполяционных полиномов Лагранжа для построения конформно отображающих функций.— В кн.: Матер. научн. семинаров по теор. и прикл. вопросам кибернетики, 5. Изд-во АН УССР, К., 1963.
- [7] Построение конформно отображающих функций при помощи электромоделирования и интерполяционных полиномов Лагранжа.— В кн.: Концентрация напряжений, 2. «Наукова думка», К., 1968.
- [8] К решению обобщенной бигармонической задачи плоской теории упругости для двусвязных областей.— В кн.: «Строительная механика и теория упругости», Горький, ДАН УРСР, 1961, 11.
- Угодчиков А. Г., Крылов А. Я. [1] Электромоделирование конформного отображения полубесконечных областей.— Изв. вузов. Электромеханика, 1960, 11, 31—35.
- Угодчиков А. Г., Серебренникова И. И. [1] Электромоделирования конформного перетворення зовнішності круга на зовнішність заданої кривої.— Прикл. мех. 1957, 3, 269—276.
- Уолш Дж. Л. [1] Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. ИЛ, М., 1961.
- Фильчаков П. Ф. [1] Метод последовательного отображения шпунтов.— ДАН СССР, 1951, 78, 3, 413—416.
- [2] Моделирование задач фильтрации на электропроводной бумаге — ДАН СССР, 1952, 84, 2, 237—240.
- [3] Определение констант интеграла Кристоффеля — Шварца при помощи обобщенных степенных рядов.— В кн.: Некоторые проблемы мат. и механ. К 60-летию акад. М. А. Лаврентьева. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1961, 236—252.

[4] О конформном отображении заданных односвязных однолистных областей при помощи электро моделирования.— В кн.: Докл. IV межвуз. конф. по применению физ. и мат. моделирования в различных отраслях техники, 1. Изд-во МЭИ. М., 1962, 21—43.

[5] Конформное отображение заданных областей при помощи метода тригонометрической интерполяции, I.— УМЖ, 1963, 15, 2.

[6] Приближенные методы конформных отображений. «Наукова думка», К., 1964.

[7] Конформное отображение заданных областей при помощи метода тригонометрической интерполяции, II — УМЖ, 1964, 16, 5.

Хара И. С. [1] Про один з методів наближеного конформного відображення багатокутних областей на одиничний круг.— ДАН УРСР, 1953, 4, 289—293.

Чапльгин С. А. [1] Собр. соч., т. III, ГТТИ, М.— Л., 1950, 306—316.

Шаманский В. Е. [1] К вопросу о конформном отображении при помощи электро моделирования.— УМЖ, 1956, 8, 1, 92—96.

Шереметьев М. П. [1] Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львовск. ун-та, 1960.

Шилов Б. Ф. [1] О приближенном конформном преобразовании двусвязных областей.— В кн.: Труды Военно-мех. ин-та, Л., 1939, 153—187.

Kikukawa M. [1] On plane—stress problems in domains of arbitrary Profiles-1. Proceedings of the second Japan National Congress for Applied Mechanics, 1953, 3.

[2] On plane—stress problems in domains of arbitrary Profiles-2. Proceedings of the third Japan National Congress for Applied Mechanics. 1954, 4, 5—9.

[3] On a Method of Calculating Stress Concentration in an Infinite Plate with a Hole of an Arbitrary Profile Proc. of the 1st Japan Nat. Cong. for Appl. Mech., 1951.

[4] On Applications of the Conformal Mapping in Plane Stress Concentration Problems (JUTAM Symposium, 1963, Tbilisi). Приложение теории функций в механике сплошной среды. В кн.: Труды Межд. симпозиума в Тбилиси 17—23 сент. 1963 г., т. I. «Наука», М., 1965.

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ В ПЛОСКОМ ИЗОТРОПНОМ ПОЛЕ, ОСЛАБЛЕННОМ КАКИМ-ЛИБО ОТВЕРСТИЕМ ИЛИ РЯДОМ ОТВЕРСТИИ

## § 1. Метод решения

**Постановка задачи.** Рассмотрим неограниченную упругую изотропную плоскость, находящуюся в некотором напряженном состоянии (растяжение, сжатие, чистый изгиб, изгиб с постоянной перерезывающей силой и т. п.). Обозначим через  $U_0(x, y)$  функцию напряжений, соответствующую этому напряженному состоянию.

Если в рассматриваемой напряженной плоскости сделать отверстие какой-либо формы (рис. II.1), то изменится распределение напряжений в ней и вместо напряженного состояния  $\sigma_x^0, \sigma_y^0$  и  $\tau_{xy}^0$ , которое было в плоскости, не ослабленной отверстием, будем иметь новое распределение напряжений, характеризующееся новыми значениями компонентов напряжений —  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ .

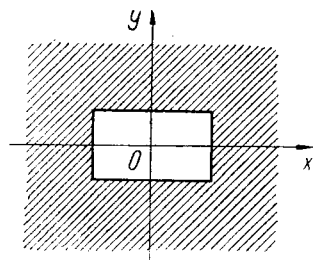


Рис. II. 1.

Поместим начало системы координат  $xOy$  в какой-либо точке внутри отверстия (в случае отверстия правильной формы — в геометрическом центре его) и назовем напряженное состояние в плоскости без отверстия основным.

Новое напряженное состояние в этой же плоскости, но ослабленной каким-либо отверстием, можно представить в виде

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^0 + \sigma_x^*, \\ \sigma_y &= \sigma_y^0 + \sigma_y^*, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^*,\end{aligned}\tag{II.1}$$

где  $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*$  — дополнительные компоненты напряжений, возникающие из-за наличия отверстия.

Для основного напряженного состояния  $\sigma_x^0, \sigma_y^0$  и  $\tau_{xy}^0$ , а также для напряженного состояния  $\sigma_x^*, \sigma_y^*$  и  $\tau_{xy}^*$ , согласно (I.6) и (I.8), можно найти по две функции Н. И. Мусхелишвили [1] комплексного переменного  $z$  —  $\varphi^0(z)$ ,  $\psi^0(z)$  и  $\varphi^*(z)$ ,  $\psi^*(z)$ . Таким образом, функции, соответствующие напряженному состоянию (II.1), будут иметь вид

$$\begin{aligned}\varphi_1(z) &= \varphi^0(z) + \varphi^*(z), \\ \psi_1(z) &= \psi^0(z) + \psi^*(z).\end{aligned}\tag{II.2}$$

Неизвестными здесь являются функции  $\varphi^*(z)$  и  $\psi^*(z)$ , которые и требуется определить.

Как показывают экспериментальные исследования (см. приложение), влияние отверстия на картину напряженного состояния в рассматриваемой плоскости имеет местный характер, т. е. компоненты напряжений  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$ ,  $\tau_{xy}^*$  по мере удаления от отверстия быстро затухают. Отсюда следует, что функции  $\varphi^*(z)$  и  $\psi^*(z)$ , характеризующие это напряженное состояние, суть голоморфные функции в области вне отверстия, т. е. функции вида (I.24).

Вспользуемся конформным отображением внутренности единичного круга  $\gamma$  на рассматриваемую область  $S$  (плоскость вне отверстия). Если перейти к преобразованной области при помощи функции  $\omega(\zeta)$  (I.39), (I.49) или (I.54), то в зависимости от формы рассматриваемого отверстия функции напряжений (II.2) примут вид

$$\begin{aligned}\varphi_1[\omega(\zeta)] &= \varphi^0[\omega(\zeta)] + \varphi^*[\omega(\zeta)], \\ \psi_1[\omega(\zeta)] &= \psi^0[\omega(\zeta)] + \psi^*[\omega(\zeta)].\end{aligned}\quad (\text{II.3})$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\varphi_1[\omega(\zeta)] &= \varphi(\zeta), & \psi_1[\omega(\zeta)] &= \psi(\zeta), \\ \varphi^0[\omega(\zeta)] &= \varphi^1(\zeta), & \psi^0[\omega(\zeta)] &= \psi^1(\zeta), \\ \varphi^*[\omega(\zeta)] &= \varphi_0(\zeta), & \psi^*[\omega(\zeta)] &= \psi_0(\zeta).\end{aligned}$$

Тогда функции (II.3) примут вид

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \varphi^1(\zeta) + \varphi_0(\zeta), \\ \psi(\zeta) &= \psi^1(\zeta) + \psi_0(\zeta),\end{aligned}\quad (\text{II.4})$$

где

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \zeta^n; \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \zeta^n. \quad (\text{II.5})$$

Чтобы найти уравнения для определения искомых функций  $\varphi_0(\zeta)$  и  $\psi_0(\zeta)$ , подставим функции (II.4) в контурные условия (I.26). Умножив теперь обе части условия (I.26) (и сопряженного ему выражения) на  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ , где  $\zeta$  обозначает точку внутри единичного круга  $\gamma$ , и интегрируя по  $\gamma$ , получим два функциональных уравнения\* для определения функций  $\varphi_0(\zeta)$  и  $\psi_0(\zeta)$  (II.5):

\* См. Н. И. Мусхелишвили [1], стр. 246—251.

$$\Phi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\Phi_0'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \bar{\beta}_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + if_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma, \quad (\text{II.6})$$

$$\Psi_0(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \Phi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 - if_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma,$$

где через  $f_1^0 + if_2^0$  обозначены приведенные контурные условия для функции  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$ :

$$f_1^0 + if_2^0 = f_1 + if_2 - \left[ \Phi^1(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\Phi^1(\sigma)} + \overline{\Psi^1(\sigma)} \right], \quad (\text{II.7})$$

а через  $f_1^0 - if_2^0$  — выражение, сопряженное с (II.7).

Определив функции  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$  из функциональных уравнений (II.6) и подставив их в (II.4), найдем окончательный вид функций  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ .

Для определения компонентов напряжений  $\sigma_\varrho$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{\varrho\theta}$  в криволинейной ортогональной (даваемой конформным отображением) системе координат следует подставить значения функций  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  (II.4) в уравнения (I.23) и разделить действительные и мнимые части. Если контур отверстия свободен от внешних усилий, напряжения по контуру отверстия получим из первого уравнения (I.23), полагая  $\sigma_\varrho = 0$  при  $\varrho = 1$ :

$$\sigma_\theta = 4\text{Re} \left[ \frac{\Psi'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \right], \quad (\text{II.8})$$

где  $\sigma = e^{i\theta}$  — значение переменной  $\zeta = \varrho e^{i\theta}$  на контуре отверстия.

**Функции  $\varphi_0(z)$ ,  $\psi_0(z)$  для основного напряженного состояния.** Из уравнения (I.8)

$$\Delta U_0(x, y) = \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 4 \text{Re}[\varphi_0'(z)]. \quad (\text{II.9})$$

Отсюда следует, что действительная часть функции  $\varphi_0'(z)$  определена полностью. Если обозначить  $[\varphi_0'(z)]' = P(x, y) + iQ(x, y)$ , из (II.9) получим

$$\frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = 4P(x, y). \quad (\text{II.10})$$

Мнимую часть  $[\varphi_0'(z)]'$ , т. е. функцию  $Q(x, y)$ , определим из известных дифференциальных соотношений:

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = -\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}. \quad (\text{II.11})$$

Поскольку функция  $Q(x, y)$  определяется из дифференциального уравнения первого порядка, то функция  $[\varphi_0'(z)]'$  определяется с точностью до мнимой постоянной  $iC_1$ . Функция же  $\varphi_0'(z)$  определяется с точностью до выражения вида  $iC_1 z + C_2$ . Но, не изменяя напряженного состояния,

как это следует из (I.13), произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  можно фиксировать произвольно. Мы их в дальнейшем изложении будем принимать равными нулю. Таким образом, функция  $\varphi^0(z)$  определена полностью. Функцию же  $\psi^0(z)$ , или, что то же, функцию  $\chi^0(z)$ , ибо  $\psi^0(z) = [\chi^0(z)]'$ , определяем из уравнения (I.8). Обозначив

$$\chi^0(z) = R(x, y) + iS(x, y),$$

получим

$$R(x, y) = U_0(x, y) - \frac{1}{2} [\bar{z}\varphi^0(z) + z\overline{\varphi^0(z)}]. \quad (\text{II.12})$$

Функция  $S(x, y)$  определяется из соотношений (II.11). Следовательно

$$\chi^0(z) = R(x, y) + iS(x, y) + iC_3, \quad (\text{II.13})$$

т. е. функция  $\chi^0(z)$  определена с точностью до мнимой постоянной.

Итак, для данного основного напряженного состояния  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  обе функции  $\varphi^0(z)$  и  $\psi^0(z)$  определены. В зависимости от вида отверстия при переходе к преобразованной области вместо  $z$  надо ввести в найденные функции  $\varphi^0(z)$  и  $\psi^0(z)$  соответствующую отображающую функцию  $\omega(\zeta)$ ; этим самым определим функции  $\varphi^1(\zeta)$  и  $\psi^1(\zeta)$ , входящие в уравнения (II.4) и (II.7).

Поскольку для рассматриваемых отверстий в форме прямоугольника, квадрата или правильного многоугольника функция  $\omega(\zeta)$  имеет вид бесконечного ряда (см. формулы (I.49) и (I.59)), то, взяв то или иное конечное число членов этого ряда, получим решения для областей, несколько отличных от областей с одноименными точными формами отверстий. Но, как указывалось в § 2 гл. I, всегда можно выбрать такое число членов ряда функции  $\omega(\zeta)$ , чтобы были удовлетворены заранее поставленные условия.

Выбирая различное число членов ряда функции  $\omega(\zeta)$ , можем получить ясную картину влияния закругления углов на распределение напряжений возле отверстия. Изменяя же величину  $\delta$  в выражении  $C = Re^{i\delta}$  (см. формулы (I.39), (I.49), (I.54)), определим влияние положения отверстия на распределение напряжений возле него.

Полученные в этой главе данные могут быть применены с достаточной для практики точностью (см. приложение) к расчету пластин и балок конечных размеров при условии, что размеры ослабляющего их отверстия достаточно малы\* по сравнению с размерами пластинки (балки) и что оно расположено на достаточном расстоянии от ее краев.

При рассмотрении отдельных задач нас будет интересовать возмущение, которое вносит то или иное отверстие в заданное основное напряженное состояние, а также соответствующие коэффициенты концентрации напряжений. Под коэффициентом концентрации будем понимать отношение какого-либо компонента тензора напряжений в какой-либо

\* Отверстие может быть и не малым по сравнению с поперечными размерами балки, достигая, по данным Z. Tuzi [1], 0,6 ее высоты в случае круглого отверстия и  $1/3$  высоты, по данным Г. Н. Савина [13], при любом положении квадратного отверстия в изгибаемой балке (см. приложение).

точке, находящейся в зоне возмущения возле отверстия, к тому же компоненту тензора напряжений в той же точке пластинки, но без отверстия, находящейся под действием той же системы внешних усилий, что и пластинка с рассматриваемым отверстием. Отсюда следует, что для плоской задачи в каждой точке имеем три коэффициента концентрации —  $k_1$  для  $\sigma_r$ ,  $k_2$  для  $\sigma_\phi$  и  $k_3$  для  $\tau_{r\phi}$ . Но так как наибольшие напряжения в зоне концентрации возле отверстия находятся на контуре отверстия, то из трех коэффициентов концентрации остается только один —  $k_2 = k$  для  $\sigma_\phi$ , ибо по контуру отверстия не прикладывается никаких внешних усилий.

Рассмотрим некоторые случаи напряженного состояния плоскости, ослабленной различными отверстиями, считая контур отверстия свободным от внешних усилий, т. е. полагая в (II.7)  $f_1 = f_2 = 0$ .

## § 2. Одноосное растяжение или сжатие \*

При растяжении сплошной пластинки усилиями  $p$  по направлению, составляющему угол  $\alpha$  с осью  $Ox$ , основное напряженное состояние пластинки характеризуется, как известно, компонентами напряжения

$$\begin{aligned}\sigma_x &= p \cos^2 \alpha, \\ \sigma_y &= p \sin^2 \alpha, \\ \tau_{xy} &= p \sin \alpha \cos \alpha,\end{aligned}\tag{II.14}$$

а функция напряжений

$$U_0(x, y) = \frac{p}{2} (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2.\tag{II.15}$$

Определим функции  $\varphi^0(z)$  и  $\psi^0(z)$ . Из (II.15) и (II.10) следует, что  $P(x, y) = \frac{1}{4} p$ , а из (II.11) находим  $Q(x, y) = 0$ . Отсюда

$$\frac{d\varphi^0(z)}{dz} = \frac{1}{4} p.\tag{II.16}$$

Следовательно,

$$\varphi^0(z) = \frac{1}{4} pz.\tag{II.17}$$

Функцию  $\psi^0(z)$  определим из (II.12) (опускаем промежуточные выкладки):

$$\psi^0(z) = -\frac{pe^{-2i\alpha}}{2} z.\tag{II.18}$$

\* Условимся считать положительными напряжения, одноименные с напряжениями в бесконечно удаленной точке. Линии равных напряжений обратного знака указаны на рисунках штрихом.



Если в данной пластинке сделано отверстие, центр которого совпадает с началом координат  $xOy$  и контур которого свободен от внешних усилий, то

$$\varphi_1(z) = \frac{p}{4} z + \varphi^*(z), \quad (II.19)$$

$$\psi_1(z) = -\frac{p}{2} z e^{-2i\alpha} + \psi^*(z).$$

Переходя к преобразованной области по формулам (I.39), (I.49) или (I.54), получим

$$\varphi(\zeta) = \frac{p}{4} [\omega(\zeta)] + \varphi_0(\zeta), \quad (II.20)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{p}{2} [e^{-2i\alpha} \omega(\zeta)] + \psi_0(\zeta).$$

Запишем приведенные контурные условия (II.7) для рассматриваемого случая основного напряженного состояния пластинки:

$$f_2^0 + if_2^0 = -\frac{p}{2} [\omega(\sigma) - e^{-2i\alpha} \overline{\omega(\sigma)}], \quad (II.21)$$

$$f_1^0 - if_1^0 = -\frac{p}{2} [\overline{\omega(\sigma)} - e^{-2i\alpha} \omega(\sigma)].$$

Из (II.6) при (II.21) находим функции напряжений  $\varphi_0(\zeta)$  и  $\psi_0(\zeta)$ . Подставив их в (II.20), найдем функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ , соответствующие растяжению пластинки с данным отверстием. Если функции напряжений  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  (II.20) известны, компоненты напряжений  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\phi$  и  $\tau_{\rho\phi}$  определяются по формулам (I.27). Подсчет компонентов напряжений возле отверстия удобнее вести по координатным линиям  $\rho = \text{const}$ , даваемым конформным отображением.

В рассмотренных ниже примерах были подсчитаны компоненты напряжений  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\phi$  и  $\tau_{\rho\phi}$  при  $\rho$ , равном 1,0; 0,9; 0,8; 0,7; 0,5; 0,3 через 5 или 10°. Затем по известным формулам

$$\sigma_{\max}^{\min} = \frac{\sigma_\rho + \sigma_\phi}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\phi}{2}\right)^2 + \tau_{\rho\phi}^2}, \quad (II.22)$$

$$\tau_{\max} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_\rho - \sigma_\phi}{2}\right)^2 + \tau_{\rho\phi}^2}$$

вычислены значения \*  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  и  $\tau_{\max}$ . По точкам были построены кривые равных главных и касательных напряжений; соответствующие зна-

\* Закон распределения этих напряжений будет приведен ниже (см. рис. II. 3—II.35).

чения напряжений указаны на графиках, причем за единицу принято напряжение в бесконечно удаленной точке. Кроме того, по формуле

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{\theta\phi}}{\sigma_{\theta} - \sigma_{\phi}} \quad (\text{II.23})$$

были построены траектории главных напряжений, т. е. кривые, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением главных площадок в этой точке.

**Квадратное отверстие\*.** Возьмем функцию  $\omega(\zeta)$  (I.56) в виде (рис. II.2)

$$\omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6} \zeta^3 \right). \quad (\text{II.24})$$

Уравнения контура отверстия получим из (II.24) при  $\varrho = 1$ , разделив действительные и мнимые части\*\*:

$$x = R \left( \cos \vartheta - \frac{1}{6} \cos 3\vartheta \right), \quad (\text{II.25})$$

$$y = -R \left( \sin \vartheta + \frac{1}{6} \sin 3\vartheta \right).$$

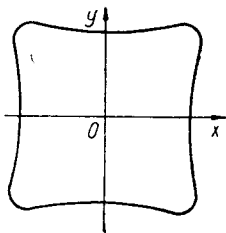


Рис II. 2.

Если выразить  $R$  через длину стороны квадратного отверстия, получим  $R = \frac{3}{5} a$ , где  $a$  — длина стороны криволинейного квадратного отверстия, измеряемая по оси  $Ox$  или  $Oy$ . Радиус закругления углов криволинейного квадратного отверстия (II.25)

$$r_{\vartheta=45^\circ} = \frac{1}{10} R = \frac{3}{50} a.$$

Функции напряжений для этого случая согласно (II.20)

$$\varphi(\zeta) = \frac{\rho R}{4} \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6} \zeta^3 \right) + \varphi_0(\zeta), \quad (\text{II.26})$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{\rho R}{2} \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6} \zeta^3 \right) e^{-2i\alpha} + \psi_0(\zeta).$$

Приведенные контурные условия (II.21)

$$f_1^0 + i f_2^0 = -\frac{\rho R}{2} \left( \frac{1}{\sigma} + \frac{e^{2i\alpha}}{6} \cdot \frac{1}{\sigma^3} - \frac{1}{6} \sigma^3 - e^{2i\alpha} \sigma \right),$$

$$f_1^0 - i f_2^0 = \frac{\rho R}{2} \left( \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sigma^3} + \frac{e^{-2i\alpha}}{\sigma} - \sigma - \frac{e^{-2i\alpha}}{6} \sigma^3 \right).$$

\* Решение для отверстий квадратного, прямоугольного с отношением сторон  $a/b = 5$  и  $a/b = 3,2$  и треугольного было дано Г. Н. Савиным [1]. Несколько иное решение для квадрата и треугольника с закругленными углами получил П. А. Соколов [1]. Решение этой задачи для различных значений коэффициента при  $\zeta^3$  в формуле (II.24) получил Н. Szudek [1].

\*\* Контур на рис. II. 2 построен по уравнениям (II.25).

По данной функции  $\omega(\zeta)$  (II.24) определим выражения

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}},$$

входящие в функциональные уравнения (II.6):

$$\frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} = \frac{1}{6} \sigma - \frac{13\sigma}{6(2\sigma^4 + 1)}, \quad (\text{II.27})$$

$$\frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\sigma} - \frac{13\sigma^3}{6(2 + \sigma^4)}.$$

Найдем значения интегралов, стоящих в правых частях системы (II.6):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 + if_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{\rho R}{2} (\zeta^2 + 6e^{2i\alpha}) \zeta, \quad (\text{II.28})$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0 - if_2^0}{\sigma - \zeta} d\sigma = -\frac{\rho R}{12} (e^{-2i\alpha} \zeta^2 + 6) \zeta.$$

Вычислим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta},$$

в котором функция  $\Phi_0(\zeta)$  имеет вид (II.5):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \left[ \frac{\sigma}{6} - \frac{13\sigma}{2(6\sigma^4 + 3)} \right] \times \\ &\times \left[ \bar{a}_1 + \frac{2\bar{a}_2}{\sigma} + \frac{3\bar{a}_3}{\sigma^2} + \dots \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{\bar{a}_1}{6} \zeta + \frac{\bar{a}_2}{3}. \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

Подставив значения интегралов из (II.28) и (II.29) в первое уравнение (II.6) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $\zeta$ , получим систему уравнений для определения коэффициентов функции  $\Phi_0(\zeta)$ :

$$\alpha_2 = 0,$$

$$\alpha_3 = \frac{\rho R}{12}, \quad (\text{II.30})$$

$$\alpha_1 + \frac{\bar{a}_1}{6} = \frac{\rho R}{2} e^{2i\alpha},$$

откуда

$$\alpha_1 = \rho R \left( \frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right), \quad (\text{II.31})$$

$$\alpha_2 = 0; \quad \alpha_3 = \frac{\rho R}{12}.$$

Следовательно,

$$\varphi_0(\zeta) = \rho R \left[ \left( \frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right) \zeta + \frac{1}{12} \zeta^3 \right]. \quad (\text{II.32})$$

Функцию  $\psi_0(\zeta)$  (II.5) определим из второго уравнения (II.6), подставив соответствующие выражения из (II.27), (II.32) и (II.28). Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательный ее вид:

$$\psi_0(\zeta) = -\frac{\rho R}{12} \left[ e^{2i\alpha} \zeta^3 + \frac{13\zeta - 26 \left( \frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right) \zeta^3}{2 + \zeta^4} \right]. \quad (\text{II.33})$$

Выражения для функций  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  получим из (II.26), подставив найденные значения (II.32) и (II.33):

$$\varphi(\zeta) = \rho R \left[ \frac{1}{4\zeta} + \left( \frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right) \zeta + \frac{1}{24} \zeta^3 \right], \quad (\text{II.34})$$

$$\psi(\zeta) = -\rho R \left[ \frac{e^{-2i\alpha}}{2\zeta} + \frac{13\zeta - 26 \left( \frac{3}{7} \cos 2\alpha + i \frac{3}{5} \sin 2\alpha \right) \zeta^3}{12(2 + \zeta^4)} \right].$$

Функции напряжений (II.34) при  $\alpha = 0$ , т. е. при условии  $\sigma_x^{(\infty)} = \rho$  и  $\sigma_y^{(\infty)} = \tau_{xy}^{(\infty)} = 0$ , будут иметь вид

$$\varphi(\zeta) = \rho R \left[ \frac{1}{4\zeta} + \frac{3}{7} \zeta + \frac{1}{24} \zeta^3 \right], \quad (\text{II.35})$$

$$\psi(\zeta) = -\rho R \left[ \frac{1}{2\zeta} + \frac{91\zeta - 78\zeta^3}{84(\zeta^4 + 2)} \right].$$

Подставив соответствующие значения производных функций  $\omega(\zeta)$  (II.24) и  $\varphi(\zeta)$  (II.35) в формулу (II.8) и положив  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  при  $\rho = 1$ , получим формулу для определения напряжений по контуру квадратного отверстия:

$$\sigma_{\theta} = \frac{8\rho}{5 + 4 \cos 4\theta} \left( \frac{3}{8} - \frac{9}{7} \cos 2\theta \right). \quad (\text{II.36})$$

Придавая  $\theta$  различные значения от 0 до  $360^\circ$  (из-за полной симметрии в данном случае можно ограничиться интервалом  $0 - 90^\circ$ ), по формуле (II.36) подсчитаем напряжения в точках контура данного отверстия.

При  $\alpha = \pi/4$  функции напряжений (II.34)

$$\varphi(\zeta) = \rho R \left( \frac{1}{4\zeta} + i \frac{3}{5} \zeta + \frac{1}{24} \zeta^3 \right), \quad (\text{II.37})$$

$$\psi(\zeta) = \rho R \left( \frac{i}{2\zeta} - \frac{65\zeta - i78\zeta^3}{60(2 + \zeta^4)} \right).$$

Напряжения в точках контура отверстия

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{8\rho}{5 + 4\cos 4\vartheta} \left( \frac{3}{8} - \frac{3}{5} \sin 2\vartheta \right). \quad (\text{II.38})$$

При любом значении  $\alpha$  напряжение

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{8\rho}{5 + 4\cos 4\vartheta} \left( \frac{3}{8} - \frac{9}{7} \cos 2\alpha \cos 2\vartheta - \frac{3}{5} \sin 2\alpha \sin 2\vartheta \right).$$

По функциям  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  (II.35) определяем компоненты напряжений в области пластинки вокруг квадратного отверстия. На рис. II.3 приведены линии равных  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ , на рис. II.4 — линии равных  $\tau_{\max}$ , а на рис. II.5 — траектории главных напряжений.

Запишем теперь функцию  $\omega(\zeta)$  (I.56) в виде (рис. II.6)

$$\omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6} \zeta^3 + \frac{1}{56} \zeta^7 \right). \quad (\text{II.39})$$

Увеличение числа членов функции  $\omega(\zeta)$  дает уменьшение радиуса закругления углов отверстия и меньшее отклонение сторон от прямолинейных (см. рис. II.2 и II.6, где эти контуры построены по их уравнениям). Радиус закругления углов криволинейного квадрата при стороне, равной  $a$ , в этом случае  $r_{\vartheta=45^\circ} = 0,0245 a$ , а функции

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \rho R \left[ \frac{0,25}{\zeta} + (0,426 \cos 2\alpha + i0,608 \sin 2\alpha) \zeta + \right. \\ &\quad \left. + 0,046 \zeta^3 + (0,008 \cos 2\alpha - i0,011 \sin 2\alpha) \zeta^5 - 0,004 \zeta^7 \right]; \\ \psi(\zeta) &= -\rho R \left[ \frac{0,5e^{-2i\alpha}}{\zeta} + \frac{0,548\zeta - (0,457 \cos 2\alpha + i0,672 \sin 2\alpha) \zeta^3}{1 + 0,5\zeta^4 - 0,125\zeta^8} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{0,026\zeta^5 + (0,029 \cos 2\alpha - i0,068 \sin 2\alpha) \zeta^7}{1 + 0,5\zeta^4 - 0,125\zeta^8} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

Функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  (II.40) при  $\alpha = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \rho R \left[ \frac{0,25}{\zeta} + 0,426\zeta + 0,046\zeta^3 + 0,008\zeta^5 - 0,004\zeta^7 \right]; \\ \psi(\zeta) &= -\rho R \left[ \frac{0,5}{\zeta} + \frac{0,548\zeta - 0,457\zeta^3 - 0,026\zeta^5 - 0,029\zeta^7}{1 + 0,5\zeta^4 - 0,125\zeta^8} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.41})$$

При  $\alpha = \pi/4$  функции (II.40)

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \rho R \left[ \frac{0,25}{\zeta} + i0,608\zeta + 0,046\zeta^3 - i0,011\zeta^5 - 0,004\zeta^7 \right]; \\ \psi(\zeta) &= \rho R \left[ \frac{0,5i}{\zeta} - \frac{0,548\zeta - i0,672\zeta^3 - 0,026\zeta^5 + i0,068\zeta^7}{1 + 0,5\zeta^4 - 0,125\zeta^8} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.42})$$

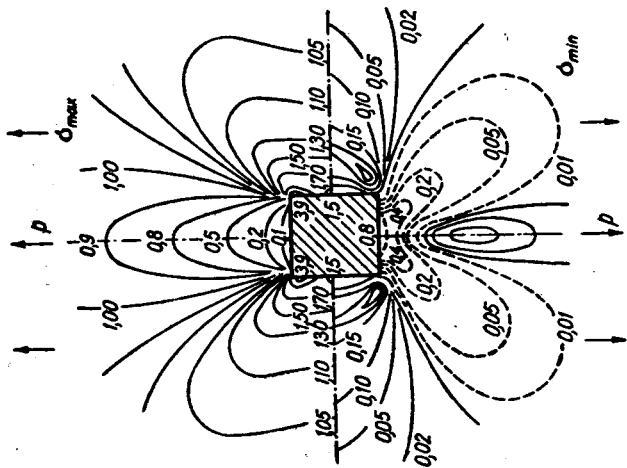


Рис. II. 3.

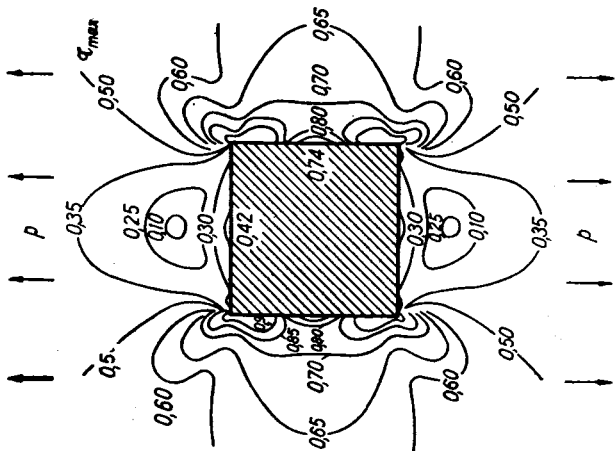


Рис. II. 4.

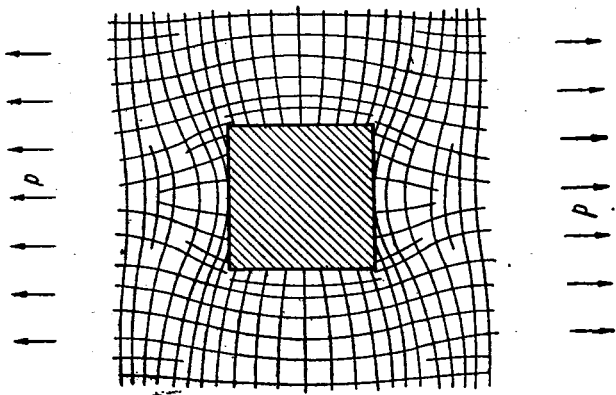


Рис. II. 5.

Для оценки влияния закругления углов на концентрацию напряжений по контуру криволинейного квадратного отверстия приводим в табл. II.1 значения напряжений  $\sigma_\phi$  в долях от  $p$  для двух случаев: 1) для  $\alpha=0$  соответственно функциям (II.35) и (II.41) и 2) для  $\alpha=\pi/4$  соответственно функциям (II.37) и (II.42).

Числовые данные табл. II.1 показывают следующее.

1. Максимальная концентрация напряжений имеет место вблизи углов квадрата.

2. С уменьшением радиуса закругления углов концентрация напряжений возле отверстия значительно увеличится.

3. Если в функции  $\omega(\zeta)$  (I.56) удержать четыре члена, т. е. взять ее в виде (рис. II.7)

$$\omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} - \frac{1}{6} \zeta^3 + \frac{1}{56} \zeta^7 + \frac{1}{176} \zeta^{11} \right), \quad (\text{II.43})$$

то радиус закругления углов криволинейного квадрата  $r_{\phi=45^\circ} = 0,014 a$ .

Функции напряжений  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  при условии  $\alpha = \pi/2$ , т. е. при

$$\sigma_x^{(\infty)} = 0, \quad \sigma_y^{(\infty)} = p, \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = 0,$$

Таблица II.1

$\phi^\circ$	(II. 35)	(II. 41)	(II. 37)	(II. 42)
0	-0,808	-0,936	0,333	0,412
35	-0,268	-0,544	3,880	6,564
40	0,980	0,605	6,223	9,672
45	3,000	4,368	7,800	11,516
50	3,860	4,460	6,223	9,672
55	3,366	2,888	3,880	6,564
90	1,472	1,760	0,333	0,412

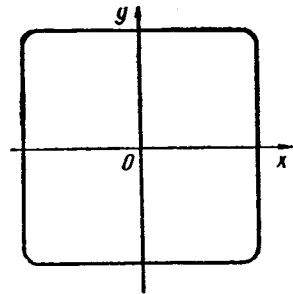


Рис. II. 7.

будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) = pR \left[ \frac{0,25}{\zeta} - 0,4254\zeta + 0,0476\zeta^3 - 0,0086\zeta^5 - \right. \\ \left. - 0,0060\zeta^7 + 0,0024\zeta^9 + 0,0014\zeta^{11} \right]; \\ \psi(\zeta) = pR \left[ \frac{0,5}{\zeta} - \frac{0,479\zeta - 0,457\zeta^3 + 0,269\zeta^5 - 0,037\zeta^7}{1 + 0,5\zeta^4 - 0,125\zeta^8 + 0,063\zeta^{12}} - \right. \\ \left. - \frac{0,073\zeta^9 - 0,017\zeta^{11} - 0,031\zeta^{13}}{1 + 0,5\zeta^4 - 0,124\zeta^8 + 0,063\zeta^{12}} \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.44})$$

Значения напряжений  $\sigma_\phi$  в долях  $p$  по контуру отверстия при  $\alpha = \pi/2$ , соответствующие функциям (II.41), приведены в табл. II.2.

Задачи о напряженном состоянии вблизи квадратного отверстия при различных нагрузках на его контуре и условиях на бесконечности для различного числа членов ряда  $\omega(\zeta)$  (I.56) рассматривались Д. В. Вайнбергом [1], В. М. Гурьяновым и А. С. Космодамианским [2], Barton Cliff Smith [1], H. Czudek [1], I. J. Geerlings [1],

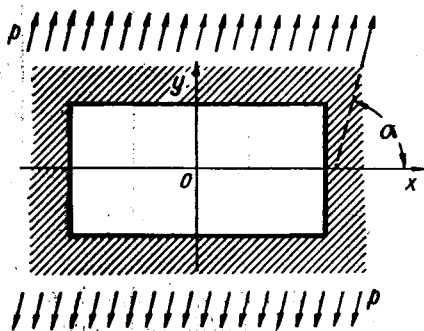


Рис. II. 8.

Таблица II.2

$\phi^\circ$	$\sigma_\phi/p$	$\phi^\circ$	$\sigma_\phi/p$
0	1,616	50	0,265
15	1,802	60	-0,702
30	1,932	75	-0,901
40	4,230	90	-0,871
45	5,763	—	—

H. G. Hahn [1], Isida Makoto [3], Kunert Karlheinz [1], Takeuti Yoitigo, Yurikowa Takasi [1], Villagio Piero [1], Исиды [1] и др.

**Прямоугольное отверстие с отношением сторон  $a/b=5$ .** Ограничимся пятью членами разложения в отображающей функции  $\omega(\zeta)$  (I.49) и примем

$$\omega(\zeta) = R \left[ \frac{1}{\zeta} + 0,643\zeta - 0,098\zeta^3 - 0,038\zeta^5 - 0,011\zeta^7 \right]. \quad (\text{II.45})$$

Опуская все промежуточные выкладки, аналогичные описанным выше, приведем функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  для некоторых значений  $\alpha$  (рис. II.8).

При  $\alpha = \pi/3$

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) = pR \left[ \frac{0,25}{\zeta} - (0,358 - i0,500)\zeta + (0,045 + i0,023)\zeta^3 + \right. \\ \left. + (0,015 + i0,006)\zeta^5 + 0,003\zeta^7 \right]; \end{aligned} \quad (\text{II.46})$$

$$\begin{aligned} \psi(\zeta) = pR \left[ \frac{0,25 + i0,433}{\zeta} + \frac{0,040\zeta^7 + 0,127\zeta^5 - 0,096\zeta^3 - 0,832\zeta}{1 - 0,643\zeta^2 + 0,293\zeta^4 + 0,189\zeta^6 + 0,078\zeta^8} + \right. \\ \left. + i \frac{0,280\zeta + 0,574\zeta^3 + 0,102\zeta^5 + 0,034\zeta^7}{1 - 0,643\zeta^2 + 0,293\zeta^4 + 0,189\zeta^6 + 0,078\zeta^8} \right]. \end{aligned}$$



При  $\alpha = \pi/6$

$$\varphi(\zeta) = pR \left[ \frac{0,25}{\zeta} + (0,090 - i0,500)\zeta + (0,026 - i0,023)\zeta^3 + \right. \\ \left. + (0,011 - i0,006)\zeta^5 + 0,003\zeta^7 \right]; \quad (\text{II.47})$$

$$\psi(\zeta) = pR \left[ -\frac{0,25 + i0,433}{\zeta} - \frac{0,564 - 0,236\zeta^3 + 0,066\zeta^5 - 0,034\zeta^7}{1 - 0,643\zeta^2 + 0,293\zeta^4 + 0,189\zeta^6 + 0,078\zeta^8} + \right. \\ \left. + \frac{i(0,280\zeta + 0,567\zeta^3 + 0,102\zeta^5 + 0,032\zeta^7)}{1 - 0,643\zeta^2 + 0,293\zeta^4 + 0,189\zeta^6 + 0,078\zeta^8} \right].$$

При  $\alpha = 0$ , т. е. при  $\sigma_x^{(\infty)} = p$ ,  $\sigma_y^{(\infty)} = \tau_{xy}^{(\infty)} = 0$

$$\varphi(\zeta) = pR \left[ \frac{0,25}{\zeta} + 0,323\zeta + 0,016\zeta^3 + 0,008\zeta^5 + 0,003\zeta^7 \right]; \quad (\text{II.48})$$

$$\psi(\zeta) = -pR \frac{0,5 + 0,101\zeta^2 + 0,414\zeta^4 + 0,064\zeta^6 + 0,021\zeta^8}{\zeta - 0,643\zeta^3 + 0,293\zeta^5 + 0,189\zeta^7 + 0,078\zeta^9}.$$

При  $\alpha = \pi/2$

$$\varphi(\zeta) = pR \left[ \frac{0,25}{\zeta} - 0,586\zeta + 0,055\zeta^3 + 0,018\zeta^5 + 0,003\zeta^7 \right]; \quad (\text{II.49})$$

$$\psi(\zeta) = pR \frac{0,5 - 1,256\zeta^2 - 0,172\zeta^4 + 0,252\zeta^6 + 0,100\zeta^8}{\zeta - 0,643\zeta^3 + 0,293\zeta^5 + 0,189\zeta^7 + 0,078\zeta^9}.$$

Подставив функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  (II.46) — (II.49) в уравнения (I.27) и разделив действительные и мнимые части, получим компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ .

В табл. II.3 приведены значения напряжения  $\sigma_\theta$ , вычисленные по формуле (II.8), в долях от  $p$  для  $a/b = 5$  по контуру прямоугольного отверстия.

На рис. II.9 — II.11 построены линии равных  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  и  $\tau_{\max}$ , а на рис. II.12 — траектории главных напряжений для случая  $\alpha = \pi/3$ .

На рис. II.13 — II.15 построены линии равных  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  и  $\tau_{\max}$ , а на рис. II.16 — траектории главных напряжений для случая  $\alpha = \pi/6$ .

Таблица II.3

$\theta^\circ$	$\alpha=\pi/3$	$\alpha=\pi/6$	$=0$	$\alpha=\pi/2$
0	1,641	0,033	-0,768	2,420
20	9,070	-0,452	-0,152	8,050
25	12,556	-2,519	2,692	7,030
30	5,541	-2,264	2,812	1,344
40	1,214	-0,278	1,558	-0,644
90	-0,412	0,653	1,192	-0,940
140	-1,889	1,877	1,558	-0,644
150	-2,078	7,466	2,812	1,344
160	2,115	5,096	-0,152	8,050
180	1,641	0,033	-0,768	2,420

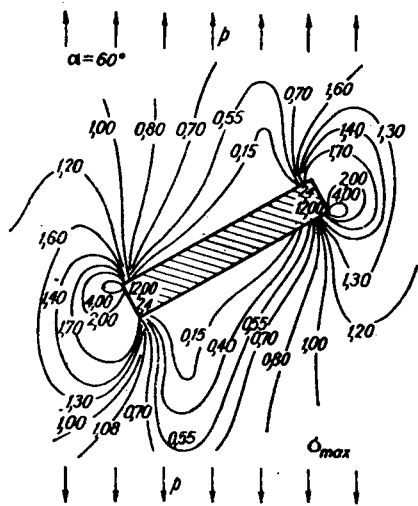


Рис. II. 9.

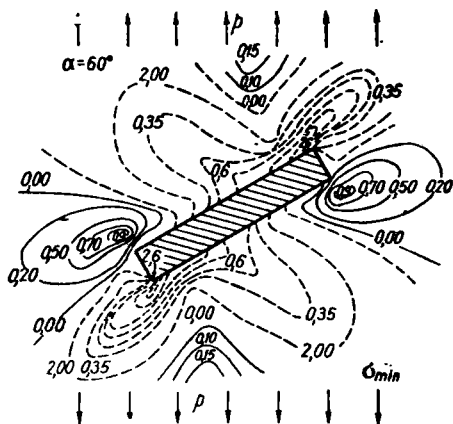


Рис. II. 10.

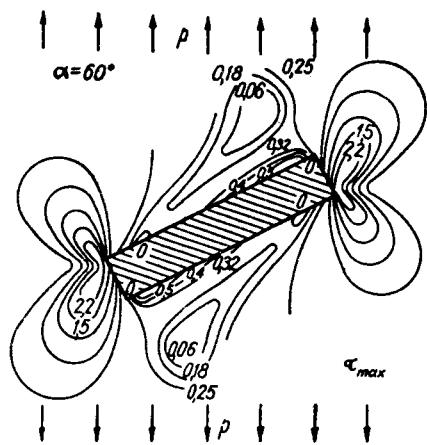


Рис. II. 11.

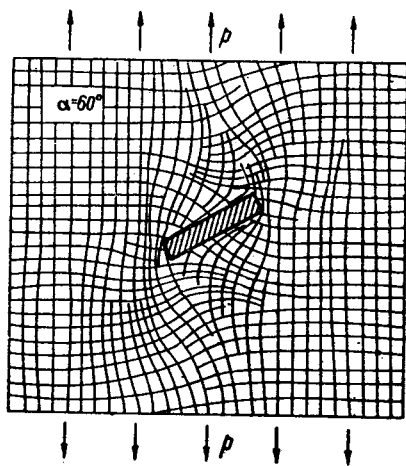


Рис. II. 12.

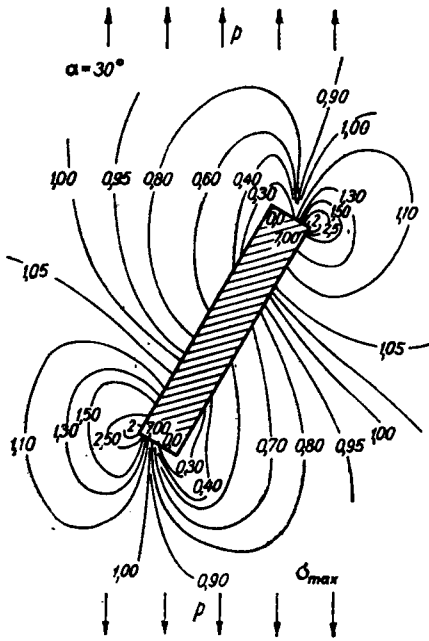


Рис. II. 13.

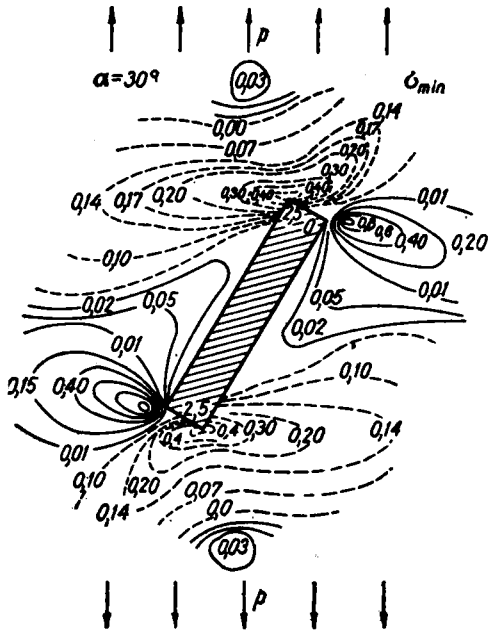


Рис. II. 14.

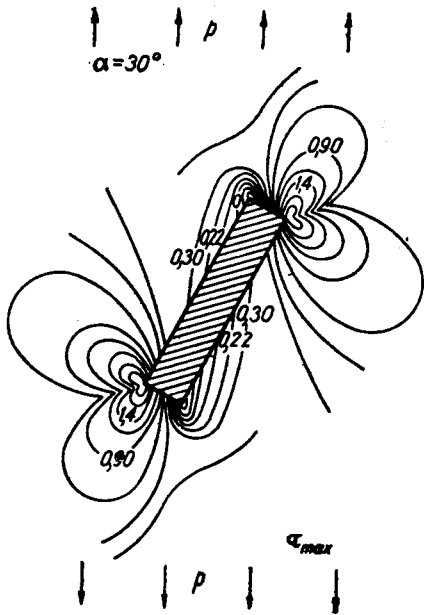


Рис. II. 15.

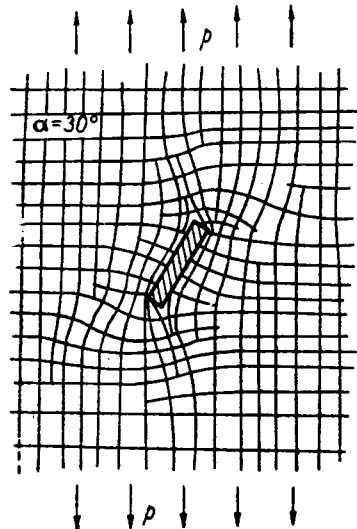


Рис. II. 16.

На рис. II.17 и II.18 построены линии равных  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  и  $\tau_{\max}$  для случая  $\alpha = 0$ .

На рис. II.19 и II.20 построены линии равных  $\sigma_{\max}$ ,  $\sigma_{\min}$  и  $\tau_{\max}$  для случая  $\alpha = \pi/2$ .

Прямоугольное отверстие с отношением сторон  $a/b \approx 3,2$ . Ограничимся четырьмя членами разложения в отображающей функции  $\omega(\zeta)$  (I.49) и примем соответствующую данному соотношению сторон функцию в виде

$$\omega(\zeta) = R \left[ \frac{1}{\zeta} + 0,5\zeta - 0,125\zeta^3 - 0,038\zeta^5 \right]. \quad (\text{II.50})$$

Поступая, как и раньше, получаем функции  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$ .

При  $\alpha = 0$ , т. е. при  $\sigma_x^{(\infty)} = p$ ,  $\sigma_y^{(\infty)} = \tau_{xy}^{(\infty)} = 0$ ,

$$\varphi(\zeta) = pR \left[ \frac{0,25}{\zeta} + 0,338\zeta + 0,023\zeta^3 + 0,0095\zeta^5 \right]; \quad (\text{II.51})$$

$$\psi(\zeta) = -pR \left[ \frac{0,5}{\zeta} + \frac{0,432\zeta - 0,549\zeta^3 - 0,029\zeta^5}{1 - 0,5\zeta^2 + 0,375\zeta^4 + 0,019\zeta^6} \right].$$

На рис. II.21 приведены линии равных  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ , на рис. II.22 — линии равных  $\tau_{\max}$ , а на II.23 — траектории главных напряжений, вычисленных по формулам (II.22) и (II.23) с учетом (II.51).

При  $\alpha = \pi/2$ , т. е. при  $\sigma_y^{(\infty)} = p$ ,  $\sigma_x^{(\infty)} = \tau_{xy}^{(\infty)} = 0$ ,

$$\varphi(\zeta) = pR \left[ \frac{0,25}{\zeta} - 0,538\zeta + 0,038\zeta^3 + 0,0095\zeta^5 \right]; \quad (\text{II.52})$$

$$\psi(\zeta) = pR \left[ \frac{0,5}{\zeta} + \frac{0,826\zeta + 0,360\zeta^3 + 0,510\zeta^5}{1 - 0,5\zeta^2 + 0,375\zeta^4 + 0,190\zeta^6} \right].$$

На рис. II.24 приведены линии равных  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ , на рис. II.25 — линии равных  $\tau_{\max}$ , а на рис. II.26 — траектории главных напряжений, вычисленных с учетом функций (II.52).

В табл. II.4 (см. стр. 78) даны значения напряжений  $\sigma_{\theta}/p$  на контуре прямоугольного отверстия, вычисленные по функциям (II.51) и (II.52) при отсчете  $\theta$  от середины малой стороны прямоугольника.

Е. П. Аникиным [1] рассмотрены задачи о концентрации напряжений в бесконечной пластинке с прямоугольным отверстием при  $a/b = 1 \div 5,15$  в случае растяжения (сжатия) в зависимости от величины отношения радиуса закругления угла отверстия к короткой стороне его. Эта задача также рассматривалась в работах В. М. Гурьянова и А. С. Космодамианского [2], В. Н. Кожевниковой [1], Heller S. R. [1], а также Heller S. R. Jr., Brock S. S., Bart R. [1], Phillips Boyd H., Asce F. and Ira E. Allen [1], Sobey A. I. [1].

Треугольное отверстие. Ограничимся в функции  $\omega(\zeta)$  (I.55) только двумя членами:

$$\omega(\zeta) = R \left[ \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{3}\zeta^2 \right]. \quad (\text{II.53})$$

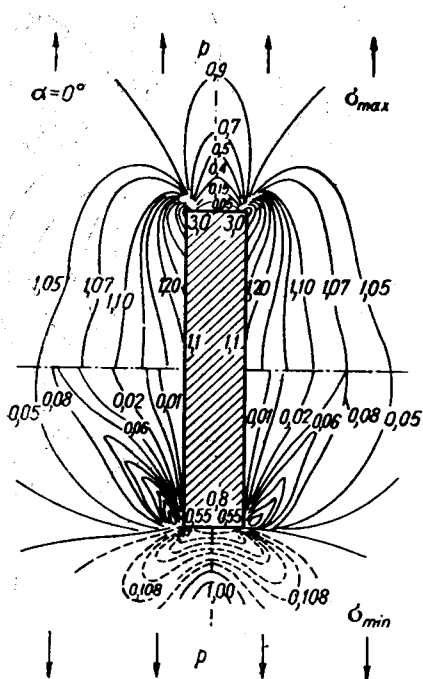


Рис. II. 17.

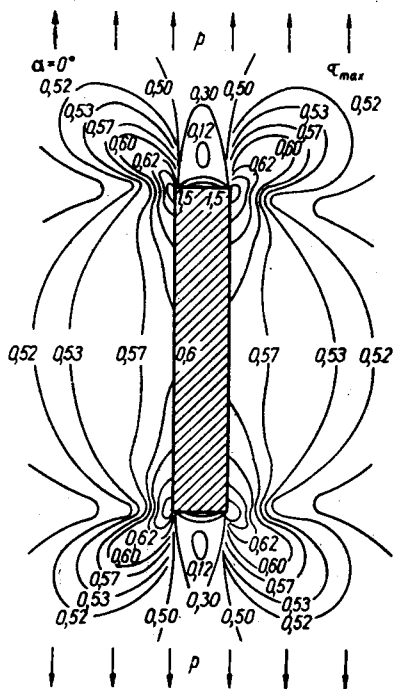


Рис. II. 18.

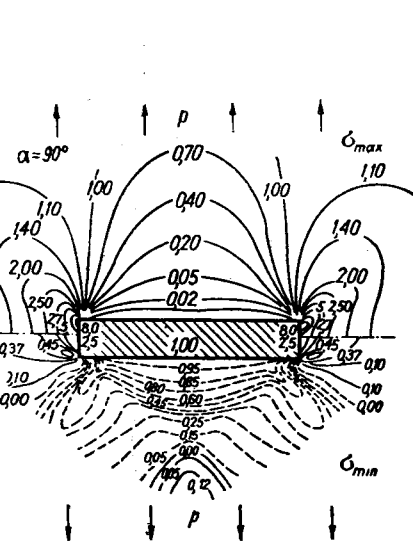


Рис. II. 19.

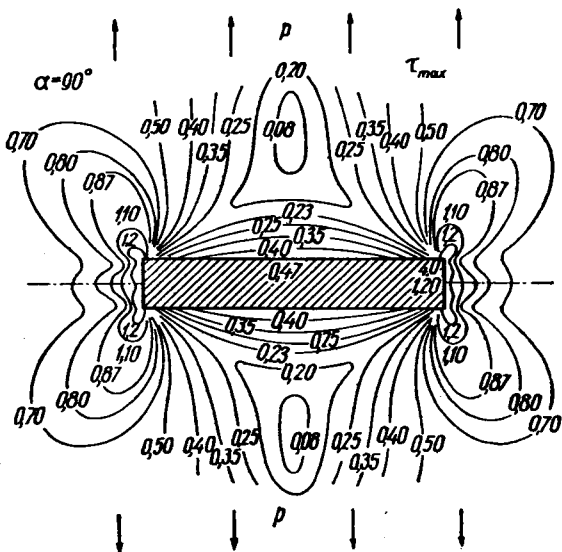


Рис. II. 20.

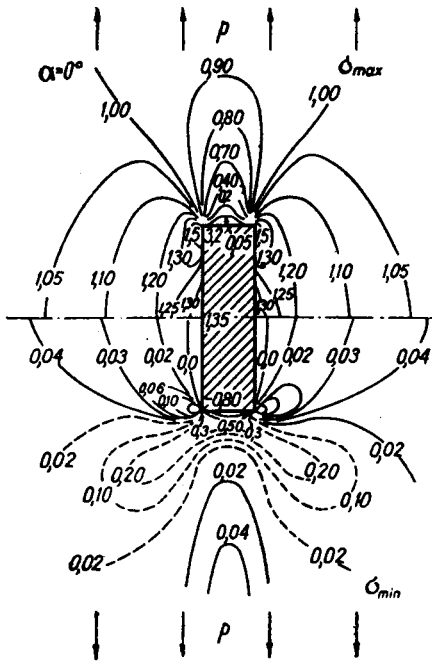


Рис. II. 21.

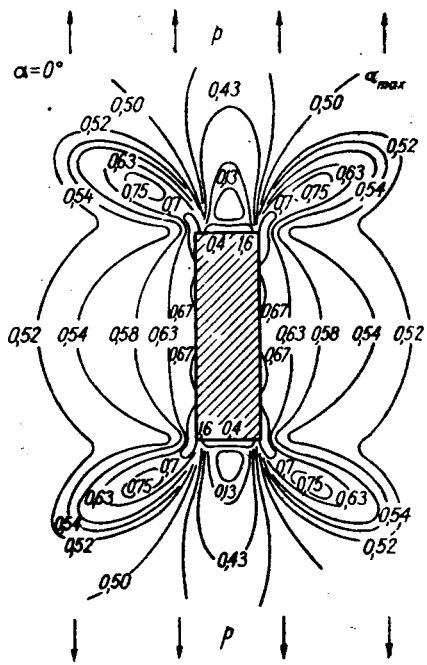


Рис. II. 22.

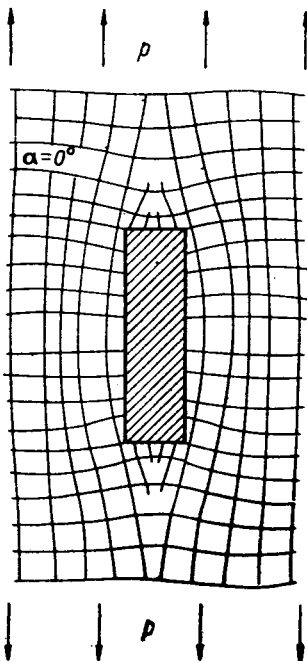


Рис. II. 23.

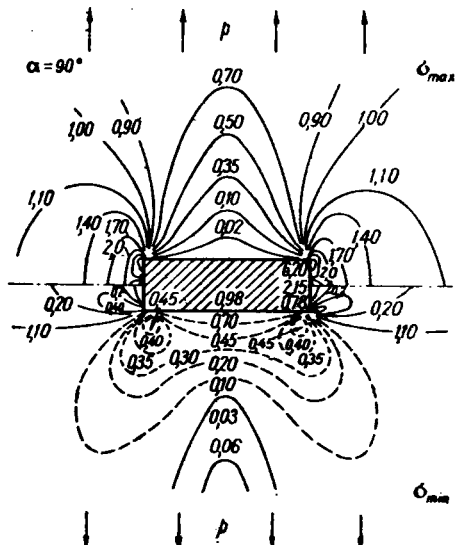


Рис. II. 24.

Уравнение контура рассматриваемого отверстия получим из (II.53), положив  $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$  при  $\rho = 1$  и разделив действительные и мнимые части:

$$\begin{aligned} x &= R \left( \cos \vartheta + \frac{1}{3} \cos 2\vartheta \right), \\ y &= -R \left( \sin \vartheta - \frac{1}{3} \sin 2\vartheta \right). \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

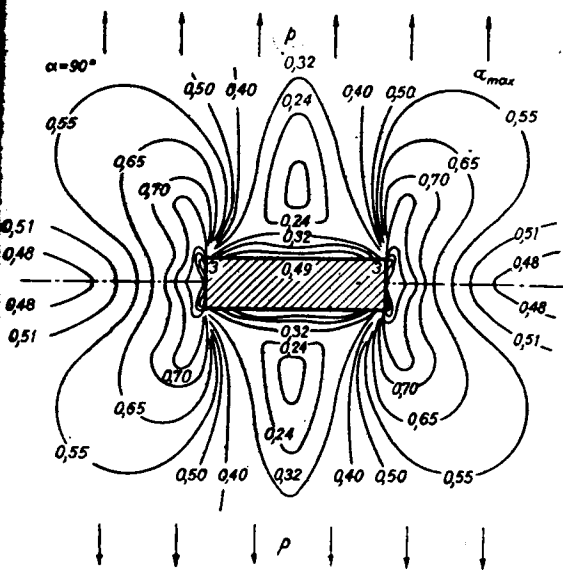


Рис. II. 25.

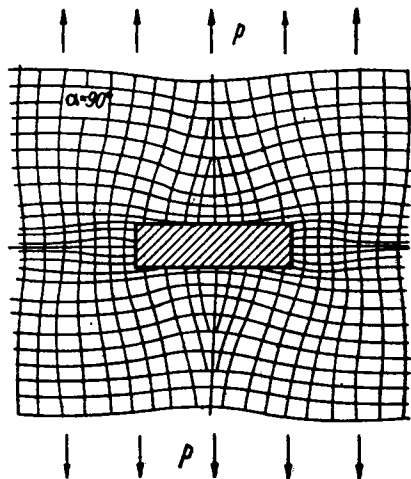


Рис. II. 26.

Радиус кривизны углов рассматриваемого отверстия  $r = \frac{1}{21} R$ . Определяя его через высоту  $H$  треугольного отверстия, получаем  $r = \frac{1}{14} H$ . На рис. II.27 показан контур отверстия, построенный по уравнениям (II.54).

Для этого случая

$$\varphi(\zeta) = pR \left[ \frac{1}{4\zeta} + \frac{e^{2i\alpha}}{2} \zeta - \frac{1}{12} \zeta^2 \right], \quad (\text{II.55})$$

$$\psi(\zeta) = -pR \left( \frac{e^{-2i\alpha}}{2\zeta} + \frac{3e^{2i\alpha} + 9e^{2i\alpha}\zeta^3 - 11\zeta}{12\zeta^3 - 18} \right);$$

в частности, при  $\alpha = 0$

$$\varphi(\zeta) = pR \left[ \frac{1}{2} \zeta - \frac{1}{12} \zeta^2 + \frac{1}{4\zeta} \right], \quad (\text{II.56})$$

$$\psi(\zeta) = -pR \left[ \frac{1}{2\zeta} + \frac{9\zeta^3 - 11\zeta + 3}{12\zeta^3 - 18} \right].$$

Если же  $\alpha = \pi/2$ , то

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \rho R \left( \frac{1}{4\zeta} - \frac{1}{2}\zeta - \frac{1}{12}\zeta^2 \right), \\ \psi(\zeta) &= \rho R \left[ \frac{1}{2\zeta} + \frac{9\zeta^3 + 11\zeta + 3}{12\zeta^3 - 18} \right].\end{aligned}\quad (\text{II.57})$$

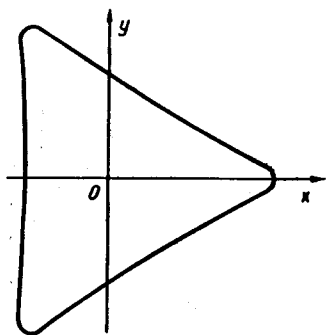


Рис. II. 27.

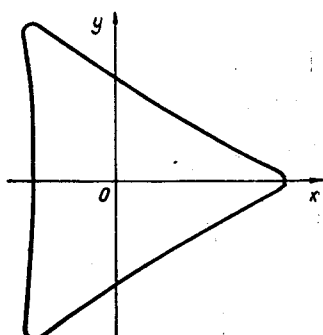


Рис. II. 28.

Таблица II.4

$\alpha^\circ$	$\alpha=0$	$\alpha=\pi/2$
0	-0,770	2,152
10	-0,807	2,520
20	-0,686	4,257
25	—	6,204
30	2,610	5,512
35	3,181	—
40	2,392	-0,193
90	1,342	-0,980

Если в функции  $\omega(\zeta)$  (1.55) удержим не два члена разложения, а три, т. е. примем ее в виде (рис. II.28)

$$\omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{3}\zeta^2 + \frac{1}{45}\zeta^5 \right), \quad (\text{II.58})$$

то функции напряжений при любом одноосном растяжении или сжатии, т. е. при любом  $\alpha$ ,

$$\varphi(\zeta) = \rho R \left( \frac{1}{4\zeta} + \frac{675}{1348} e^{2i\alpha}\zeta - \frac{1}{12}\zeta^2 + \frac{15e^{-2i\alpha}}{1348}\zeta^3 - \frac{1}{180}\zeta^5 \right); \quad (\text{II.59})$$

$$\begin{aligned}\psi(\zeta) &= -\rho R \left[ \frac{e^{-2i\alpha}}{2\zeta} + \frac{112\frac{1}{3}\zeta^7 + 31725e^{2i\alpha}\zeta^6}{181980(\zeta^6 + 6\zeta^3 - 9)} + \right. \\ &\left. + \frac{546675e^{-2i\alpha}\zeta^5 - 31004\zeta^4 + 101475e^{-2i\alpha}\zeta^3 + 19035e^{-2i\alpha}\zeta^2 - 909989\zeta}{181980(\zeta^6 + 6\zeta^3 - 9)} \right].\end{aligned}$$

В табл. II.5 и II.6 приведены значения  $\sigma_\phi/\rho$  по контуру треугольного отверстия, соответствующие функциям (II.56), (II.57), (II.59) при  $\alpha=0$  и  $\alpha=\pi/2$ .

Из сравнения данных табл. II.5 и II.6 видим, что с уменьшением радиуса закругления углов концентрация напряжений в углах треугольника значительно увеличивается. В работе Н. Czudek [1] приведено решение этой задачи для коэффициентов при  $\zeta^2$ , равных  $1/4$ ,  $3/8$ ,  $1/2$ . Эта задача также рассматривалась в работе Villagio Piero [1].



Эллиптическое отверстие\*. Функция, конформно отображающая внутренность единичного круга  $\gamma$  на внешность эллиптического отверстия с полуосями  $a$  и  $b$ , имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} + m\zeta \right), \quad (\text{II.60})$$

где

$$R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-k}{1+k}, \quad k = \frac{b}{a}.$$

Таблица II.5

$\phi^\circ$	(II. 56)	(II. 59)	$\phi^\circ$	(II. 56)	(II. 59)
0	-1,000	-1,600	115	8,160	8,863
10	-0,037	0,056	120	8,000	12,800
15	0,222	0,222	125	3,032	1,628
30	0,492	0,439	135	-0,772	-1,060
90	1,770	1,632	180	-1,000	-1,086

Таблица II.6

$\phi^\circ$	(II. 57)	(II. 59)	$\phi^\circ$	(II. 57)	(II. 59)
0	11,000	17,600	115	-1,064	-2,173
10	3,871	2,543	120	2,000	3,200
30	0,277	0,021	125	4,064	5,062
90	-1,000	-0,912	135	2,987	2,478
100	-1,404	-1,989	180	1,400	1,657

Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательно:

$$\varphi(\zeta) = \frac{\rho R}{4} \left[ \frac{1}{\zeta} + (2e^{2i\alpha} - m)\zeta \right], \quad (\text{II.61})$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{\rho R}{2} \left[ \frac{e^{-2i\alpha}}{\zeta} + \frac{\zeta^3 e^{2i\alpha} + (me^{2i\alpha} - m^2 - 1)\zeta}{m\zeta^2 - 1} \right].$$

Напряжения для точек контура эллиптического отверстия получим из (II.8) в виде

$$\sigma_\theta = \rho R e \left[ \frac{(2e^{2i\alpha} - m)\sigma^2 - 1}{m\sigma^2 - 1} \right] = \rho \frac{1 - m^2 + 2m \cos 2\alpha - 2 \cos 2(\theta + \alpha)}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2}. \quad (\text{II.62})$$

\* Решение дано Н. И. Мухелишвили [4]; см. также решения Г. В. Колосова [1], С. Е. Inglis [1] и Т. Poschl [1].

Заменяя в (II.62)  $m$ , как указано выше, получаем

$$\sigma_{\theta} = \rho \frac{(1+k)^2 \sin^2(\theta + \alpha) - \sin^2 \alpha - k^2 \cos^2 \alpha}{\sin^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta}. \quad (\text{II.63})$$

Подставляя в (II.62) различные значения  $m$ , получаем формулы для напряжений по контуру любого эллиптического отверстия. Положим в (II.62)  $\alpha = 0$ ; тогда

$$\sigma_{\theta} = \rho \frac{1 - m^2 + 2m - 2 \cos 2\theta}{1 - 2m \cos 2\theta + m^2} = \rho \frac{\sin^2 \theta + 2k \sin^2 \theta - k^2 \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta + k^2 \cos^2 \theta}. \quad (\text{II.64})$$

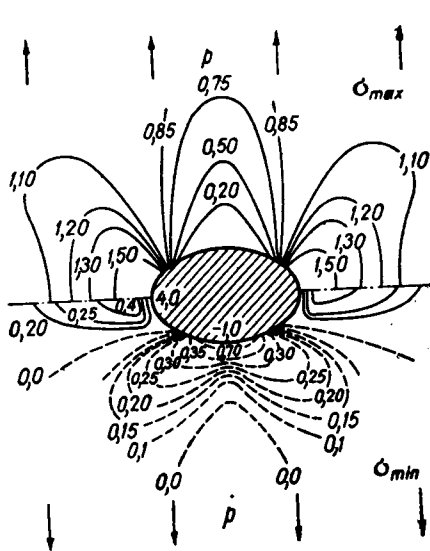


Рис. II. 29.

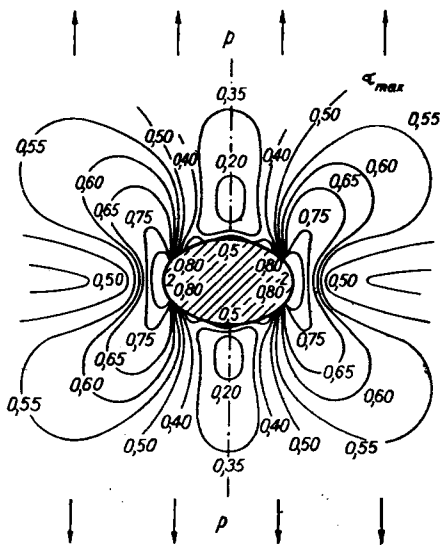


Рис. II. 30.

Наибольшие напряжения на контуре любого эллиптического отверстия, т. е. при любом  $m$ , будут при  $\theta = \pm \pi/2$ :

$$\sigma_{\theta} = \rho \left( 1 + 2 \frac{b}{a} \right), \quad (\text{II.65})$$

где  $a$  — полуось эллипса, лежащая по оси  $Ox$ , а  $b$  — по оси  $Oy$ . Наименьшие напряжения на контуре любого эллиптического отверстия, т. е. при любом  $m$ , будут при  $\theta = 0$ :

$$\sigma_{\theta} = -\rho. \quad (\text{II.66})$$

Если  $b = a$ , т. е.  $m = 0$ , эллипс превращается в окружность, и получаем из (II.65) известный результат:  $\sigma_{\theta} = 3\rho$ .

Для эллипса с отношением полуосей  $k = b/a = 2/3$  по формулам (II.22) и (II.23) на рис. II.29 построены линии равных  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ , на рис. II.30 — линии равных  $\tau_{\max}$ , а на рис. II.31 — траектории главных напряжений.

Для эллипса с отношением полуосей  $k = b/a = 3/2$  на рис. II.32 изображены линии равных  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ , на рис. II.33 — линии равных  $\tau_{\max}$ , а на рис. II.34 — траектории главных напряжений.

Значения напряжений  $\sigma_{\vartheta}$  на контуре эллиптического отверстия при отсчете  $\vartheta$  от конца полуоси, лежащей по оси  $Ox$ , против часовой стрелки приведены в табл. II.7.

Значения  $\sigma_{\vartheta}$  для других  $m$  (II.60) приведены в работах И. И. Воровича и А. С. Космодамианского [1], Н. Czudek [1], К. Hirschfeld [1], Исида [2], Villagio Piero [1].

**Круговое отверстие\*.** Если в (II.61) положить  $m=0$  и  $\alpha=0$ , получим функции напряжений для пластинки с круговым отверстием радиуса  $R$  при растяжении ее вдоль оси  $Ox$  усилиями  $p$ :

$$\varphi(\zeta) = \frac{pR}{4} \left( \frac{1}{\zeta} + 2\zeta \right), \quad (II.67)$$

$$\psi(\zeta) = -\frac{pR}{2} \left( \frac{1}{\zeta} + \zeta - \zeta^3 \right).$$

Напряжения получим из формул (I.27) подстановкой соответствующих значений функций (II.67):

$$\sigma_{\varrho} = \frac{p}{2} [(1 - \varrho^2) + (1 - 4\varrho^2 + 3\varrho^4) \cos 2\vartheta],$$

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{p}{2} [(1 + \varrho^2) - (1 + 3\varrho^4) \cos 2\vartheta], \quad (II.68)$$

$$\tau_{\varrho\vartheta} = \frac{p}{2} (1 + 2\varrho^2 - 3\varrho^4) \sin 2\vartheta.$$

Напряжения по контуру отверстия получим из (II.62) при  $m=0$  или из (II.68) при  $\varrho=1$ :

$$\sigma_{\vartheta} = p(1 - 2 \cos 2\vartheta). \quad (II.69)$$

Из (II.69) видим, что максимальные значения  $\sigma_{\vartheta}$  будут при  $\cos 2\vartheta = -1$ , т. е. при  $\vartheta = \pm \pi/2$

$$(\sigma_{\vartheta})_{\max} = 3p.$$

По формулам (II.22), (II.23) и (II.68) на рис. II.35 построены линии равных  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$ , на рис. II.36 — линии равных  $\tau_{\max}$ , а на рис. II.37 — траектории главных напряжений.

**Узкая щель\*\*.** При рассмотрении концентрации напряжений около узкой щели следует отличать случаи растяжения плоскости со щелью от сжатия, потому что решение для растяжения плоскости со щелью,

\* Решение этой задачи см. в работе G. Kirch [1].

\*\* Исследованию концентрации напряжений возле различно ориентированных прямолинейных и криволинейных щелей (трещин) посвящена гл. VIII.

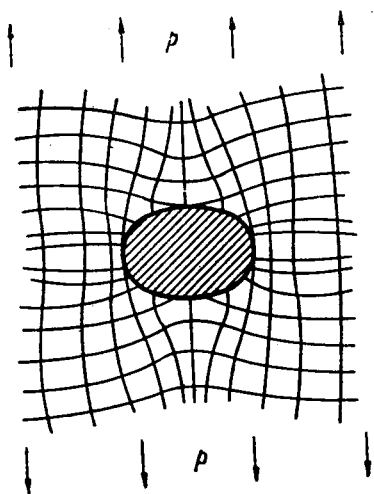


Рис. II. 31.

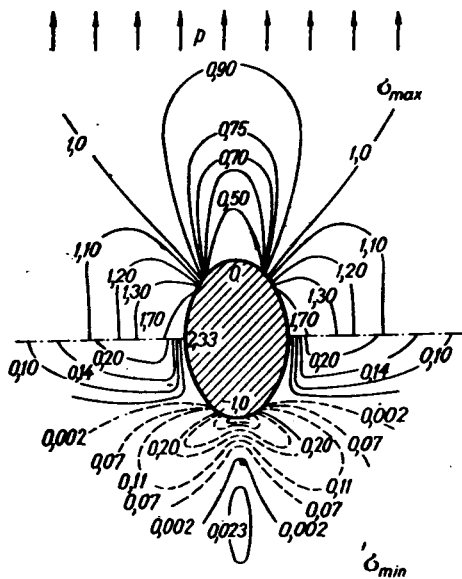


Рис. II. 32.

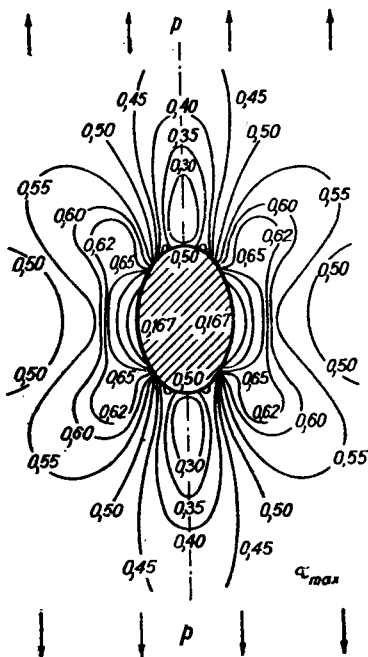


Рис. II. 33.

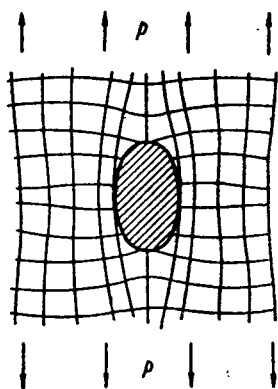


Рис. II. 34.

свободной от внешних усилий, будет несправедливым для сжатия. При сжатии края щели могут придти в соприкосновение и, следовательно, граничные условия (по контуру щели) в этих случаях будут различными. Поэтому в дальнейшем рассматриваются отдельно случаи растяжения и сжатия плоскости со щелью.

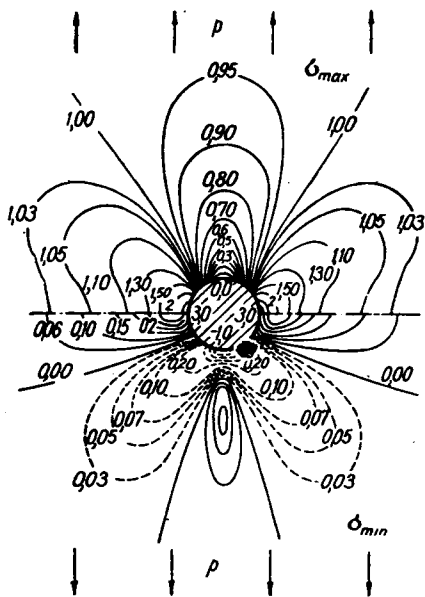


Рис. II. 35.

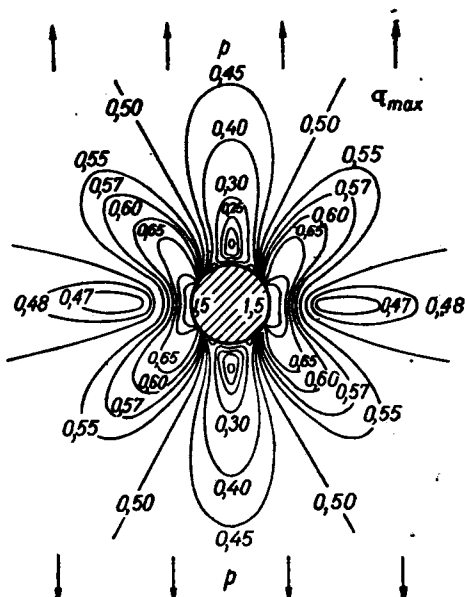


Рис. II. 36.

Растяжение упругой плоскости со щелью. Функцию напряжений для упругой плоскости с узкой щелью, свободной от внешних усилий, получим непосредственно из функций (II.61), положив в них  $m = \pm 1$ .

Для плоскости со щелью длиной  $2a$ , расположенной по оси  $Ox$ , имеем  $m = 1$ , а для щели длиной  $2b$ , расположенной по оси  $Oy$ ,  $m = -1$ .

Таблица II.7

$\theta^\circ$	$b/a=3/2$	$b/a=2/3$	$\theta^\circ$	$b/a=3/2$	$b/a=2/3$
0	-1,00	-1,00	50	0,93	1,54
10	-0,93	-0,78	60	1,86	1,90
20	-0,72	-0,23	70	2,85	2,15
30	-0,35	0,43	80	3,67	2,29
40	0,19	1,04	90	4,00	2,33

Напряжения  $\sigma_\phi$  в точке пересечения контура эллиптического отверстия (в полуосью  $b \neq 0$ ) с осью  $Ox$  получим из формулы (II.63), положив в ней  $\phi = 0$  или  $\phi = 180^\circ$ :

$$(\sigma_\phi)_{\substack{\phi=0^\circ \\ \phi=180^\circ}} = p \left( 2 \frac{a}{b} \sin^2 \alpha - \cos 2\alpha \right).$$

Если щель расположена по оси  $Ox$ , то  $b = 0$ , и из последней формулы следует, что по концам щели напряжения  $\sigma_\phi$  при любом  $\alpha \neq 0$  неограниченно возрастают. Другими словами, по концам щели возникнут пластические деформации или (в случае хрупкого разрушения материала пластинки) трещины.

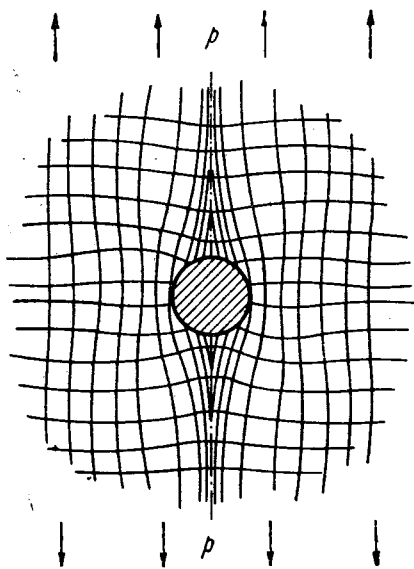


Рис. II. 37.

Таким образом, по концам любой щели в пластинке, растягиваемой усилиями  $p$ , составляющими со щелью угол  $\alpha \neq 0$ , возникнут пластические деформации\* или при  $p = p_{кр}$  начнет распространяться трещина\*\*. Только щель, совпадающая с направлением растягивающих усилий  $p$ , не влияет на напряженное состояние пластинки.

Сжатие упругой плоскости со щелью\*\*\*. Допустим, что упругая изотропная плоскость, ослабленная прямолинейной щелью длиной  $2a$ , сжимается на бесконечности равномерно распределенными усилиями  $p$ , образующими с направлением щели угол  $\alpha$ . Выберем оси координат  $Oxy$  так, что ось  $Ox$  совпадает с осью щели,

а начало координат  $Oxy$  поместим в ее середине.

Различают два вида щелей: «математическую» щель — такую, у которой ширина настолько мала, что ею можно пренебрегать и принимать равной нулю, и «физическую» — такую, у которой ширина (до деформации)  $\delta$  соизмерима с величиной упругих деформаций материала пластинки.

Рассмотрим случай «математической» щели. При действии внешних сжимающих усилий  $p$  под углом  $\alpha \neq 0$  края щели сомкнутся при любом значении  $p \neq 0$ .

\* См. § 8 гл. V.

\*\* См. § 6 гл. VIII.

\*\*\* Решение этой задачи дано В. И. Моссаковским и П. А. Загубиженко в работах [1, 2], основные результаты из которых приводятся ниже. Растяжение и изгиб пластин с различными щелями рассмотрен в ряде работ В. В. Панасюка и Б. Л. Лозового; основные результаты из этих работ приведены в § 4 и 7 гл. VIII. В канд. диссерт. Б. Л. Лозового [1] приведен достаточно полный список литературы по трещинам.

Принимая силы трения (которые могут возникнуть в местах соприкосновения краев щели) подчиняющимися закону Кулона, запишем граничные условия на контуре щели (т. е. для  $t$ , изменяющегося в интервале  $-a < t < +a$ ):

$$\sigma_y^{(+)}(t) = \sigma_y^{(-)}(t), \quad \tau_{xy}^{(+)}(t) = k_s \sigma_y^{(+)}(t), \quad \tau_{xy}^{(-)}(t) = k_s \sigma_y^{(-)}(t), \quad v^{(+)} = v^{(-)},$$

где  $k_s$  — коэффициент трения;  $t$  — произвольная точка оси  $Ox$ , с которой совпадают точки «верхнего» и «нижнего» краев «математической» щели.

Напряжения вдоль щели определяются по формулам

$$\sigma_y^{(+)} = -\rho \sin^2 \alpha, \quad \tau_{xy}^{(+)} = -k_s \rho \sin^2 \alpha = k_s \sigma_y^{(+)},$$

$$\sigma_x^{(+)} = \rho \left[ (\sin 2\alpha + k_s \cos 2\alpha - k_s) \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}} - \cos^2 \alpha \right].$$

Из этих формул видим, что  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  вдоль щели остаются постоянными, а напряжения  $\sigma_x$  на концах щели неограниченно возрастают. Здесь нужно ожидать либо появления пластических деформаций, либо начала распространения трещины при хрупком разрушении материала пластинки.

Пусть  $y = f_1(t)$  и  $y = f_2(t)$  будут уравнения соответственно «верхнего» и «нижнего» краев «физической» трещины. По условию в недеформированном состоянии ширина этой щели  $\delta = f_1(t) - f_2(t)$  соизмерима с упругими деформациями. При сжатии плоскости с такой щелью края ее на некотором участке  $(-\tau_0, +\tau_0)$  могут прийти в соприкосновение, так что после деформации контур щели будет состоять из трех участков: двух свободных  $(-a, -\tau_0)$  и  $(+\tau_0, +a)$  и одного участка  $(-\tau_0, +\tau_0)$  — контакта посередине. Длины этих участков заранее неизвестны и должны быть определены в процессе решения задачи.

Граничные условия в этой задаче, как видим (на контуре щели), будут: на среднем участке контакта  $(-\tau_0, +\tau_0)$

$$\sigma_y^{(+)} = \sigma_y^{(-)}, \quad \tau_{xy}^{(+)} = k_s \sigma_y^{(+)}, \quad \tau_{xy}^{(-)} = k_s \sigma_y^{(-)},$$

$$v^{(+)} - v^{(-)} = f_1(t) - f_2(t) = f(t);$$

на свободных от усилий участках  $(-a, -\tau_0)$  и  $(+\tau_0, +a)$

$$\sigma_y^{(+)} = \sigma_y^{(-)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(+)} = \tau_{xy}^{(-)} = 0.$$

Напряжения по контуру щели в этом случае определяются по формулам

$$\sigma_y^{(+)} = -\frac{\sqrt{\tau_0^2 - t^2}}{\sqrt{a^2 - t^2}} \rho \sin^2 \alpha, \quad \tau_{xy}^{(+)} = -k_s \rho \frac{\sqrt{\tau_0^2 - t^2}}{\sqrt{a^2 - t^2}} \sin^2 \alpha,$$

$$\sigma_x^{(+)} = \rho \left[ (\sin 2\alpha + k_s \cos 2\alpha - k_s) \frac{t}{\sqrt{a^2 - t^2}} - \frac{\sqrt{\tau_0^2 - t^2}}{\sqrt{a^2 - t^2}} \sin^2 \alpha - \cos 2\alpha \right],$$

а длина участка контакта — по формуле

$$E\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \lambda^2 K\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = \frac{2\mu\delta}{(\kappa + 1) a p \sin^2 \alpha},$$

где  $\lambda = \tau_0/a$ ;  $k = \sqrt{1 - \lambda^2}$ , а  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

Если  $\lambda = 0$  ( $\tau_0 = 0$ ), то  $E(\pi/2, 1) = 1$ , а  $\lambda^2 K(\pi/2, 1) = 0$ . Отсюда следует, что «верхний» и «нижний» края «физической» щели придут в соприкосновение при условии

$$\rho \geq \frac{2\mu\delta}{(\kappa + 1) a \sin^2 \alpha}.$$

Для «математической» щели  $\delta = 0$ , и из приведенного неравенства видим, что края ее придут в соприкосновение при любой величине  $\rho \neq 0$ , что и было принято при решении задачи для этой щели.

**Отверстие в форме полукруга\***. Функцию, конформно отображающую внешность единичного круга  $\gamma$  на внешность бесконечной упругой плоскости с отверстием, близким к полукругу, получим из функции

$$\omega(\zeta) = R \left( \zeta + \sum_{k=1}^n a_k \zeta^{-k} \right) \quad (\text{II.70})$$

при  $n=5$ ,  $a_1 = -0,31250$ ;  $a_2 = -0,15625$ ;  $a_3 = -0,05078$ ;  $a_4 = 0,00195$ ;  $a_5 = 0,015113$ ;  $R$  — постоянная, влияющая на размеры отверстия и положение его относительно осей координат  $Oxy$ .

Положив в (II.70)  $\zeta = \rho e^{i\vartheta}$  при  $\rho = 1$ , получим уравнение контура отверстия

$$\begin{aligned} x &= R [0,68750 \cos \vartheta - 0,15625 \cos 2\vartheta - 0,05078 \cos 3\vartheta + \\ &\quad + 0,00195 \cos 4\vartheta + 0,01513 \cos 5\vartheta]; \\ y &= R [1,31250 \sin \vartheta + 0,15625 \sin 2\vartheta + 0,05078 \sin 3\vartheta - \\ &\quad - 0,00195 \sin 4\vartheta - 0,01513 \sin 5\vartheta]. \end{aligned} \quad (\text{II.71})$$

Напряжения по контуру отверстия при растяжении пластинки вдоль оси  $Ox$  ( $\alpha = 0$ ) определяются формулой

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta} &= \frac{p}{L(\vartheta)} (0,16542 - 0,92141 \cos \vartheta - 1,75649 \cos 2\vartheta + \\ &\quad + 0,03923 \cos 3\vartheta + 0,07549 \cos 4\vartheta), \end{aligned} \quad (\text{II.72})$$

\* Решение для отверстий в форме полукруга и свода дано Е. Ф. Бурмистровым [1—3].



а при растяжении вдоль оси  $Oy$  ( $\alpha = \pi/2$ ) — формулой

$$\sigma_{\phi} = \frac{p}{L(\phi)} (1,38129 + 0,32298 \cos \phi + 1,86243 \cos 2\phi + 0,02376 \cos 3\phi - 0,03928 \cos 4\phi), \quad (\text{II.73})$$

где

$$L(\phi) = 1,2243 + 0,28930 \cos \phi + 0,69230 \cos 2\phi + 0,57280 \cos 3\phi + 0,25740 \cos 4\phi - 0,1560 \cos 5\phi - 0,1524 \cos 6\phi. \quad (\text{II.74})$$

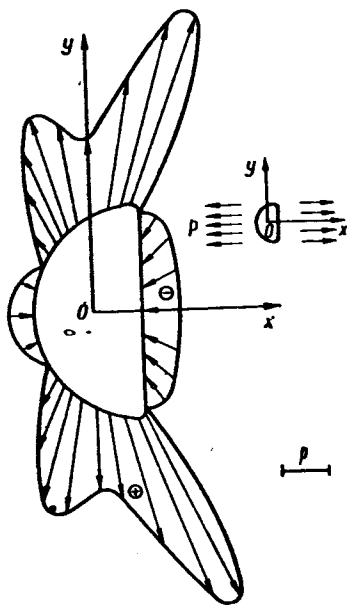


Рис. II. 38.

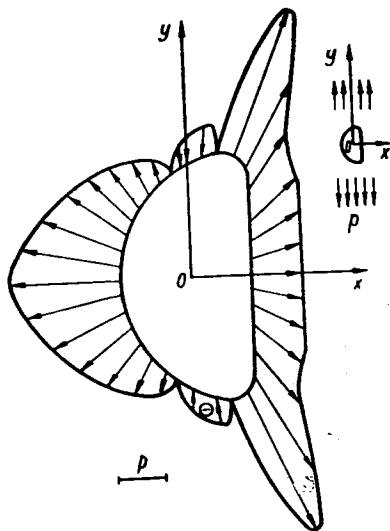


Рис. II. 39.

В табл. II.8 приведены значения коэффициентов концентрации напряжений  $k = \sigma_{\phi}/p$ , найденные по формулам (II.72) и (II.73).

На рис. II.38 и II.39 показано распределение напряжений  $\sigma_{\phi}$  по контуру рассматриваемого отверстия. Из этих графиков видно, что наибольшая концентрация напряжений  $\sigma_{\phi}$  будет при растяжении вдоль оси  $Ox$ .

Случай, когда край полукруга подвержен равномерному давлению, рассмотрен в работе Г. С. Грушко [1], а растяжения полубесконечной пластинки с полукруглым вырезом — в работах S. F. Yeung [1]. L. H. Mitchell [1].

**Отверстие в форме свода.** Контур отверстия задается уравнениями \*

\* Это соответствует удержанию в функции (II.70) шести членов при  $a_1=0,14153$ ,  $a_2=0,06795$ ,  $a_3=-0,10130$ ,  $a_4=0,03873$ ,  $a_5=0,00194$ .

$$\begin{aligned}
 x &= R [1,14153 \cos \vartheta + 0,06795 \cos 2\vartheta - 0,10130 \cos 3\vartheta + \\
 &\quad + 0,03873 \cos 4\vartheta + 0,00194 \cos 5\vartheta]; \\
 y &= R [0,85847 \sin \vartheta - 0,06795 \sin 2\vartheta + 0,10130 \sin 3\vartheta - \\
 &\quad - 0,03873 \sin 4\vartheta - 0,00194 \sin 5\vartheta].
 \end{aligned}
 \tag{II.75}$$

Таблица II.8

$\vartheta^\circ$	$\sigma_\vartheta/\rho$		$\vartheta^\circ$	$\sigma_\vartheta/\rho$	
	$\alpha=0$	$\alpha=90^\circ$		$\alpha=0$	$\alpha=90^\circ$
0	-0,836	1,238	90	2,123	-0,553
10	-0,831	1,249	100	1,876	-0,422
20	-0,826	1,279	110	1,742	-0,132
30	-0,899	1,518	120	2,818	0,621
40	-0,829	1,752	130	0,939	0,832
50	-0,154	0,819	140	0,419	1,226
55	0,525	3,463	150	0,035	1,537
60	0,617	0,740	160	0,244	1,892
65	5,349	1,907	165	-0,334	1,937
70	4,691	0,150	170	-0,452	2,269
80	3,831	-0,624	180	-0,539	2,421

Напряжения по контуру отверстия, свободного от внешних усилий, при растяжении вдоль оси  $Ox$  ( $\alpha = 0$ )

$$\begin{aligned}
 \sigma_\vartheta &= \frac{P}{L(\vartheta)} [1,11878 + 0,40289 \cos \vartheta - 2,41694 \cos 2\vartheta + \\
 &\quad + 0,11960 \cos 3\vartheta + 0,01519 \cos 4\vartheta],
 \end{aligned}
 \tag{II.76}$$

а при растяжении вдоль оси  $Oy$  ( $\alpha = \pi/2$ )

$$\begin{aligned}
 \sigma_\vartheta &= \frac{P}{L(\vartheta)} [0,57096 - 0,08668 \cos \vartheta + 1,66426 \cos 2\vartheta - \\
 &\quad - 0,16301 \cos 3\vartheta - 0,02026 \cos 4\vartheta],
 \end{aligned}
 \tag{II.77}$$

где

$$\begin{aligned}
 L(\vartheta) &= 1,1549 - 0,1353 \cos \vartheta - 0,3329 \cos 2\vartheta - 0,2253 \cos 3\vartheta + \\
 &\quad + 0,6105 \cos 4\vartheta - 0,3098 \cos 5\vartheta - 0,0194 \cos 6\vartheta.
 \end{aligned}
 \tag{II.78}$$

В табл. II.9 приведены значения  $\sigma_\vartheta/\rho$  по контуру рассматриваемого отверстия.

На рис. II.40 и II.41 показано распределение напряжений  $\sigma_\vartheta$ , подсчитанных по формулам (II.76) и (II.77). Из этих графиков видим, что наибольшие значения  $\sigma_\vartheta$  будут возникать при растяжении пластинки вдоль оси  $Oy$  (рис. II.41).

Исследованию концентрации напряжений возле отверстия в виде, близком к своду, посвящены также работы И. С. Хара [1, 2], который в функции (II.70) удерживал десять членов.

Таблица II.9

$\theta^\circ$	$\sigma_\theta/\rho$		$\theta^\circ$	$\sigma_\theta/\rho$	
	$\alpha=0$	$\alpha=90^\circ$		$\alpha=0$	$\alpha=90^\circ$
0	-1,024	2,846	100	1,627	-0,519
10	-0,829	2,450	110	1,765	-0,493
20	-0,389	2,081	120	2,252	-0,384
30	0,245	1,557	130	3,377	0,540
40	1,120	1,065	140	2,044	4,444
50	2,711	0,628	145	-0,056	3,547
60	2,403	-0,141	150	-0,809	2,682
70	2,231	-0,441	160	-0,790	1,515
80	1,888	-0,518	170	-0,936	1,355
90	1,677	-0,526	180	-0,858	1,177

На рис. II.42—II.44 даны значения  $\sigma_\theta/\rho$  по контуру рассматриваемого отверстия при растяжении вдоль осей  $Ox$  ( $\alpha=0$ ) и  $Oy$  ( $\alpha=\pi/2$ ), найденные соответственно по формулам (II.76) и (II.77). На рис. II.44 показана эпюра напряжений  $\sigma_\theta$  по контуру отверстия (II.75) при двухосном растяжении пластинки на бесконечности:

$$\sigma_x^{(\infty)} = \rho, \quad \sigma_y^{(\infty)} = \frac{1}{4} \rho, \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = 0.$$

**Трапециoidalное отверстие\***. В функции (II.70), отображающей внешность трапециoidalного отверстия на внешность единичного круга, И. С. Хара [1] удерживал шесть членов, т. е. в (II.70) полагал  $n=5$  при соответствующих значениях коэффициентов  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, 5$ ).

Эпюры коэффициентов концентрации  $k = \sigma_\theta/\rho$  по контуру этого отверстия представлены на рис. II.45—II.47 как при одноосном ( $\sigma_x^{(\infty)} = \rho, \sigma_y^{(\infty)} = 0, \tau_{xy}^{(\infty)} = 0; \sigma_x^{(\infty)} = 0, \sigma_y^{(\infty)} = \rho, \tau_{xy}^{(\infty)} = 0$ ), так и при двухосном ( $\sigma_x^{(\infty)} = \rho, \sigma_y^{(\infty)} = 0,25\rho, \tau_{xy}^{(\infty)} = 0$ ) напряженном состоянии пластинки.

В работе А. А. Бойма [1] функция  $\omega(\zeta)$  (II.70) была взята в виде\*\*

$$\omega(\zeta) = R \left[ \zeta - 0,0086 + \frac{0,0167}{\zeta} + \frac{0,058}{\zeta^2} - \frac{0,1405}{\zeta^3} - \frac{0,0109}{\zeta^4} \right]. \quad (\text{II.79})$$

\* Решение этой задачи дано в работах А. А. Бойма [1]; И. С. Хара [1]; В. М. Гурьянова и А. С. Космодамианского [1].

\*\* Начало координат — в центре тяжести рассматриваемого отверстия.

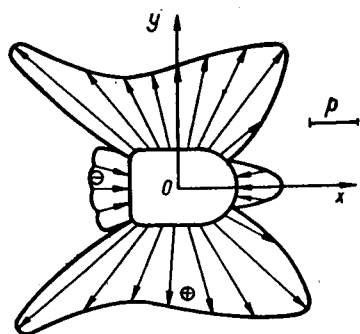
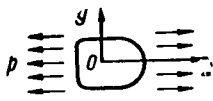


Рис. II. 40.

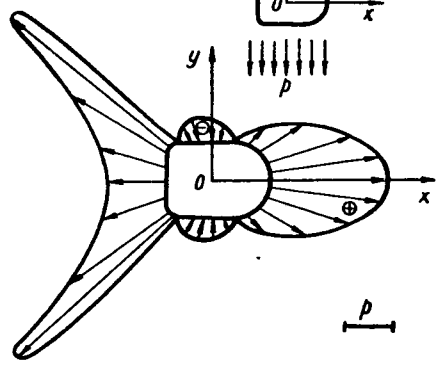
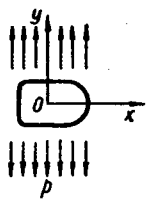


Рис. II.41

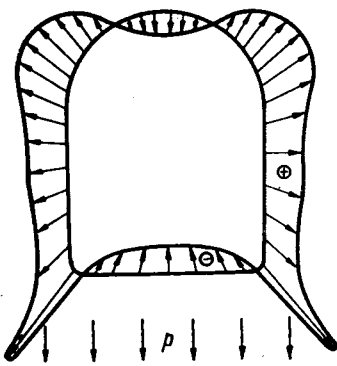
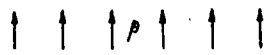


Рис. II.42

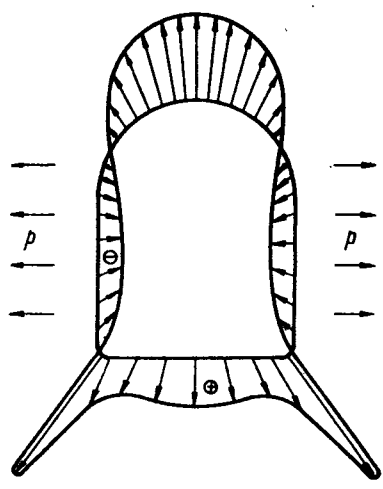
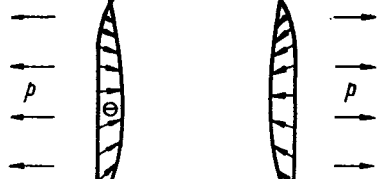


Рис. II.43

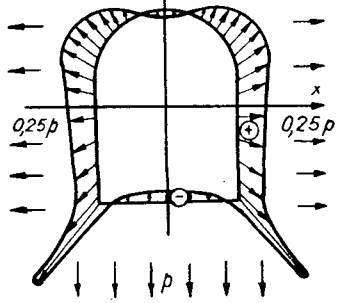


Рис. II.44

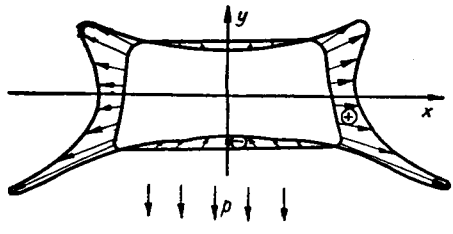
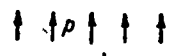


Рис. II.45

На рис. II. 48 — II.50 представлены эпюры  $\sigma_\theta/\rho$  и  $\sigma_\phi/\rho$  как для свободно-го (кривые II для  $\sigma_\theta/\rho$ ), так и подкрепленного абсолютно-жестким кольцом (кривые I для  $\sigma_\phi/\rho$ ) отверстия, даваемого функцией (II.79) при  $\rho = 1$ , в случае плоской деформации при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,2$ . На рис. II.48 представлен случай растяжения пластинки (на бесконечности) вдоль оси  $Ox$  усилиями  $p$ , на рис. II.49 — вдоль оси  $Oy$  усилиями  $0,25p$ , а на рис. II.50 — при двухосном напряженном состоянии, усилиями  $\sigma_x^{(\infty)} = p$ ,  $\sigma_y^{(\infty)} = 0,25p$  и  $\tau_{xy}^{(\infty)} = 0$ .

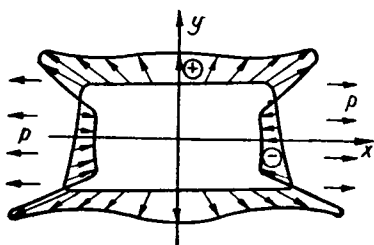


Рис. II.46

В работе В. М. Гурьянова и А. С. Космодамианского [1] рассмотрено отверстие, близкое к равнобочной трапеции. Изучено влияние закругления углов контура отверстия в общем случае для отверстий, даваемых функций (II.70).

Кривизна контура криволинейного отверстия, заданного функцией  $\omega(\zeta)$  при  $\rho = 1$  в любой его точке,

$$K = Re \frac{[\sigma\omega''(\sigma) + \omega'(\sigma)] \overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|^3}. \quad (II.80)$$

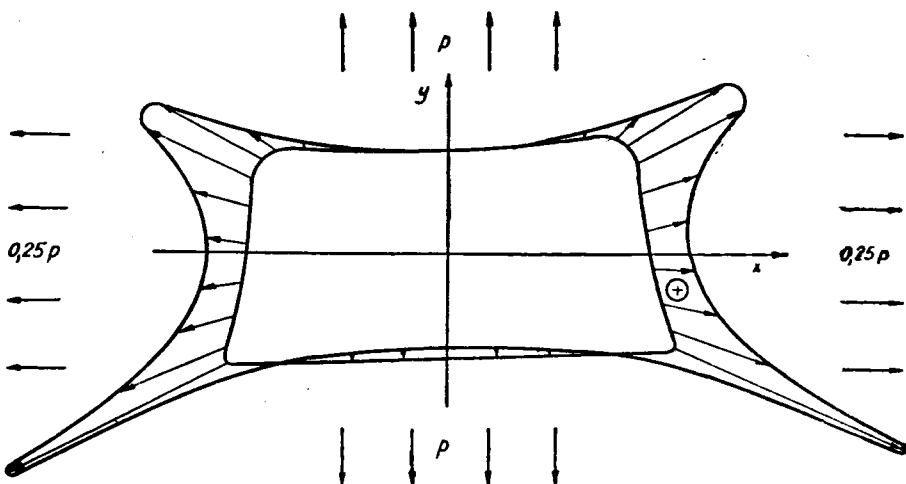


Рис. II.47

Эту кривизну удобно представить в виде

$$\tilde{K} = KR \quad (II.81)$$

и называть в дальнейшем приведенной кривизной.

В табл. II.10 даны значения  $\sigma_\theta/\rho$  в угловых точках трапециoidalного контура отверстия с наименьшим радиусом закругления в зави-

симости от приведенной кривизны  $\tilde{K}$  вида I, II или III основного напряженного состояния.

В табл. II.11 даны значения  $\sigma_\phi/\rho$  в острых углах контура трапецидального отверстия с приведенной кривизной, равной 60, в зависимости от параметра  $\phi$  и вида нагрузки — I, II или III.

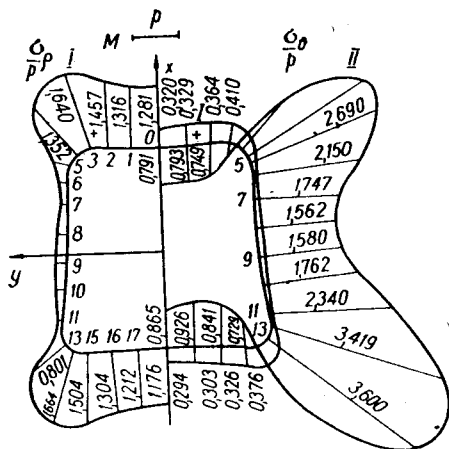


Рис. II.48

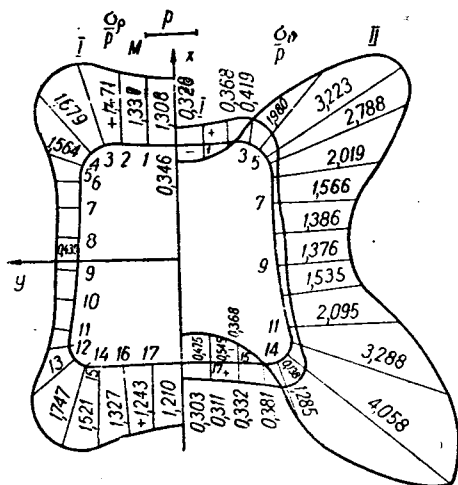


Рис. II.49

В табл. II.10 и II.11 обозначено: I — всестороннее растяжение усилиями  $p$ ; II — одноосное растяжение усилиями  $p$  вдоль оси симметрии отверстия, т. е. вдоль оси  $Ox$  (рис. II.48); III — одноосное растяжение усилиями  $p$  поперек оси симметрии отверстия, т. е. вдоль оси  $Oy$ .

На рис. II.51 показан график зависимости  $\sigma_\phi/\rho$  от  $\tilde{K}$  для рассматриваемого отверстия (обозначения те же, что и в табл. II.10 и II.11).

**Другие формы отверстий.** Приведем краткие сведения о некоторых работах по концентрации напряжений возле отверстий других конфигураций.

Концентрация напряжений в дисках с отверстиями специальной формы рассматривалась Д. В. Вайнбергом и А. А. Синявским [1]; с звездообразным отверстием — Б. А. Ободовским [1]; с овалообразным отверстием — Э. Е. Хачияном [1], Е. Ф. Бурмистровым [2]; с отверстием в форме лемнискаты — А. М. Sen-Gupta [1], W. Showdon [1]; с отверстием крестообразной формы — Н. С. Hahn [1], в форме гипотроихиды — Villagio Piego [1]; около отверстия с волнистым контуром — И. В. Баклашовым [1], в форме ромба — А. С. Аветисяном [1, 2]\*.

\* См. также обзор Г. Нейбера и Г. Хана [1] теоретических и экспериментальных исследований по концентрации напряжений около отверстий в линейной и нелинейной постановке, опубликованных в зарубежной литературе.

**Заключительные замечания.** На основании приведенных таблиц и графиков можно установить ряд особенностей закона распределения напряжений возле отверстий при одноосном напряженном состоянии.

Прежде всего необходимо отметить резкую концентрацию напряжений возле края отверстия в окрестности точек, где касательная к контуру параллельна направлению растягивающих усилий.

Таблица II.10

$K$	$\sigma_{\theta}/p$		
	I	II	III
15	7,67	4,70	2,97
30	10,58	6,95	3,63
45	12,91	8,03	4,87
60	14,59	9,19	5,40

Таблица II.11

$\theta^{\circ}$	$\sigma_{\theta}/p$		
	I	II	III
0	1,00	-0,83	1,83
15	1,03	-0,72	1,76
30	2,49	-0,46	2,95
45	3,24	2,62	0,63
60	0,95	1,48	-0,53
75	0,81	1,60	-0,79
90	0,78	1,67	-0,89
105	0,98	1,97	-0,99
120	2,39	3,41	-1,02
135	3,59	-0,096	3,69
150	0,88	-0,87	1,75
165	0,69	-0,99	1,69
180	0,59	-0,95	1,54

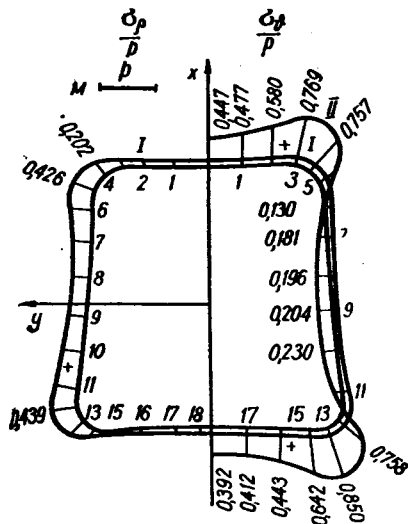


Рис. II.50

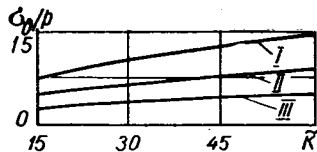


Рис. II.51

Для круглого отверстия (II.69) наибольший коэффициент концентрации равен трем и относится к точкам, лежащим на концах диаметра, перпендикулярного к направлению растягивающих усилий. Для эллипса при растяжении (или сжатии), параллельном одной из осей симметрии эллипса, коэффициент концентрации напряжений определяется формулой (II.65).

Для отверстий, имеющих форму прямоугольника, квадрата, полуокруга, трапеции или равностороннего треугольника, наиболее резкая концентрация напряжений имеет место в углах, и коэффициент концентрации  $k$  зависит как от радиуса закругления углов, так и, особенно, от положения отверстия по отношению к направлению растягивающих усилий.

В дополнение к табл. II.10 ниже приведены значения коэффициентов концентрации напряжений  $k'$  для прямоугольных отверстий с разным отношением сторон, соответствующих серединам сторон, параллельных направлению растягивающих сил, а также коэффициентов концентрации напряжений  $k''$  в углах \* этих отверстий при растяжении, параллельном одной из осей симметрии прямоугольника ( $\alpha=0$  или  $\alpha=\pi/2$ ):

$a/b$	1:5	1:3	1:1	3:1	5:1
$k'$	2,5	2,2	1,5	1,35	1,2
$k''$	8,0	6,2	3,0	3,2	3,0

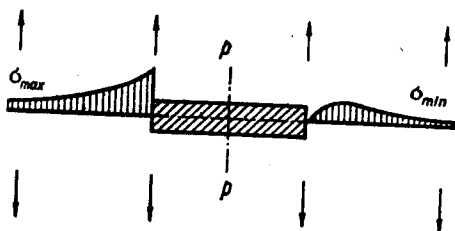


Рис. II.52

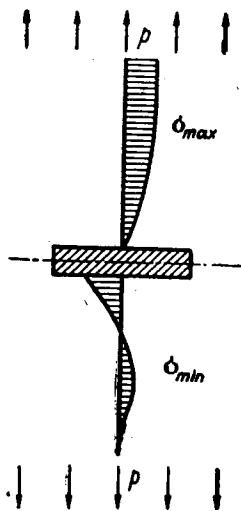


Рис. II.53

Приведем значения коэффициентов концентрации напряжений  $k$  в углах квадрата для различных отношений величины радиуса закругления  $r$  этих углов к длине стороны квадрата при растяжении, параллельном одной из сторон:

$r/a$	1:9	1:20	1:40
$k$	3,0	4,6	7,0

Закон изменения напряжений  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  возле прямоугольного отверстия вдоль оси, перпендикулярной к направлению растягивающих усилий, показан на рис. II.52. Вдоль края контура, где касательная к контуру перпендикулярна к направлению усилий или составляет с ним угол, близкий к  $90^\circ$ , напряжения  $\sigma_{\min}$  меняют знак на обратный. Область, охваченная напряжениями обратного знака, имеет седлообразную форму, отмеченную на рис. II.3, II.10, II.14, II.17, II.19, II.21, II.24, II.29, II.32, II.35 штриховыми линиями. Закон изменения напряжений  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{\min}$  возле прямоугольного отверстия вдоль оси, параллельной направлению растягивающих усилий, показан на рис. II.53.

\* Поскольку рассматриваемые отверстия имеют закругленные углы, напряжение  $\sigma_\phi$  в угловой точке контура может быть меньше, чем в точках контура, находящихся в непосредственной близости от угла (см., например, первую колонку табл. II.1, где  $(\sigma_\phi)_{\phi=50^\circ} = 3,86r$ , а  $(\sigma_\phi)_{\phi=45^\circ} = 3,00r$ .



## § 3. Двухосное однородное напряженное состояние

Двухосное растяжение или сжатие. Запишем функцию напряжений в виде

$$U_0(x, y) = \frac{\sigma_T}{2} (\lambda_2 x^2 + \lambda_1 y^2), \quad (\text{II.82})$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — безразмерные параметры, а  $\sigma_T$  — предел текучести материала при простом растяжении. Этой функции соответствует основное напряженное состояние

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} = \lambda_1 \sigma_T = p, \\ \sigma_y^0 &= \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} = \lambda_2 \sigma_T = q, \\ \tau_{xy}^0 &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.83})$$

При  $\lambda_1 \neq 0$  и  $\lambda_2 \neq 0$  имеем однородное двухосное напряженное состояние. Располагаясь\*  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , можно получить все возможные случаи однородного напряженного состояния.

Функции  $\varphi^0(z)$  и  $\psi^0(z)$  (II.2), соответствующие функции (II.82), будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi^0(z) &= \frac{\sigma_T}{2} (\lambda_2 + \lambda_1) z = \frac{p+q}{4} z, \\ \psi^0(z) &= \frac{\sigma_T}{2} (\lambda_2 - \lambda_1) z = \frac{q-p}{2} z. \end{aligned} \quad (\text{II.84})$$

Приведенные контурные условия (II.7) при  $f_1 = f_2 = 0$ , т. е. для случая, когда контур отверстия свободен от внешних усилий, будут иметь вид

$$\begin{aligned} f_1^0 + if_2^0 &= -\frac{\sigma_T}{2} [(\lambda_1 + \lambda_2) \omega(\sigma) + (\lambda_2 - \lambda_1) \overline{\omega(\sigma)}], \\ f_1^0 - if_2^0 &= -\frac{\sigma_T}{2} [(\lambda_1 + \lambda_2) \overline{\omega(\sigma)} + (\lambda_2 - \lambda_1) \omega(\sigma)]. \end{aligned}$$

Поступая так же, как это было подробно изложено в предыдущих параграфах для различных форм отверстий, легко получаем функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ . Например, для пластинки с круговым отверстием

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \frac{\sigma_T R}{4} \left[ (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{1}{\zeta} + 2(\lambda_1 - \lambda_2) \zeta \right], \\ \psi(\zeta) &= \frac{\sigma_T R}{2} \left[ (\lambda_2 - \lambda_1) \frac{1}{\zeta} - (\lambda_1 + \lambda_2) \zeta - (\lambda_2 - \lambda_1) \zeta^3 \right]. \end{aligned} \quad (\text{II.85})$$

\* Значения  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  должны быть такой величины, чтобы материал в зоне концентрации напряжений оставался в упругом состоянии.

По функциям (II.85) определим из (I.27) компоненты напряжений:

$$\sigma_{\varrho} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \sigma_{\tau} (1 - \varrho^2) - \lambda \sigma_{\tau} (1 - 4\varrho^2 + 3\varrho^4) \cos 2\vartheta,$$

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} \sigma_{\tau} (1 + \varrho^2) + \lambda \sigma_{\tau} (1 + 3\varrho^4) \cos 2\vartheta, \quad (\text{II.86})$$

$$\tau_{\varrho\vartheta} = -\lambda \sigma_{\tau} (1 + 2\varrho^2 - 3\varrho^4) \sin 2\vartheta,$$

где

$$\lambda = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}.$$

Однако с точки зрения облегчения техники подсчетов значительно удобнее непосредственно находить отдельные решения для одноосных напряженных состояний, а затем уже, путем наложения соответствующих решений, получать решения для искомым двухосных напряженных состояний\*. На рис. II.54—II.57 приведены результаты такого наложения двух решений для одноосных напряженных состояний, полученных выше, а именно

$$\sigma_x^{(\infty)} = \frac{1}{4} p, \quad \sigma_y^{(\infty)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = 0$$

и

$$\sigma_x^{(\infty)} = 0, \quad \sigma_y^{(\infty)} = p, \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = 0,$$

для эллиптического отверстия с отношением полуосей  $a/b=3/2$  и для прямоугольного отверстия с отношением сторон  $a/b=3/2$ . На этих рисунках штриховыми линиями обозначены сжимающие напряжения.

**Чистый сдвиг.** В случае, когда основное напряженное состояние есть чистый сдвиг, решение можно получить двояким путем: 1) полагая в (II.82)  $\lambda_1 = -\lambda_2$  и 2) непосредственно выбирая функцию напряжений в виде

$$U_0(x, y) = -\tau xy. \quad (\text{II.87})$$

Легче воспользоваться функцией (II.87) и для нее получить функции  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$ , так как эта функция значительно проще, чем (II.82).

Функции  $\varphi^0(z)$  и  $\psi^0(z)$ , соответствующие функции (II.87), как нетрудно убедиться, имеют вид

$$\varphi^0(z) = 0, \quad \psi^0(z) = i\tau z, \quad (\text{II.88})$$

а приведенные контурные условия (II.7)

$$f_1^0 + if_2^0 = \overline{i\tau\omega(\sigma)},$$

$$f_1^0 - if_2^0 = -i\tau\omega(\sigma). \quad (\text{II.89})$$

\* Ряд таких задач при  $p=q/4$  для отверстий эллиптической, прямоугольной (в частности, узкой длинной щели) и квадратной формы подробно исследован в совместной работе А. Н. Динника, А. Б. Моргаевского и Г. Н. Савина [1].

Функции  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  для области с одним отверстием при чистом сдвиге, следовательно, будут

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= \varphi_0(\zeta), \\ \psi(\zeta) &= \psi_0(\zeta) + i\tau\omega(\zeta).\end{aligned}\quad (\text{II.90})$$

Для области с квадратным отверстием\* отображающую функцию возьмем в виде (II.24). Функции же  $\varphi_0(\zeta)$  и  $\psi_0(\zeta)$  получим из уравнений (II.6) и приведенных контурных условий (II.89). Окончательно:

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= i\frac{6}{5}R\tau, \\ \psi(\zeta) &= iR\tau\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{13\zeta^3}{5(2+\zeta^4)}\right]\end{aligned}\quad (\text{II.91})$$

Напряжения по контуру отверстия получим из (II.8):

$$\sigma_\phi = \frac{48}{5}\tau \frac{\sin 2\phi}{5 + 4\cos 4\phi}.\quad (\text{II.92})$$

В табл. II.12 приведены значения напряжений  $\sigma_\phi$  в долях от  $\tau$ , подсчитанные по формуле (II.92).

Таблица II.12

$\phi^\circ$	$\sigma_\phi/\tau$	$\phi^\circ$	$\sigma_\phi/\tau$	$\phi^\circ$	$\sigma_\phi/\tau$
0	0,000	60	2,771	135	-9,600
20	1,084	80	0,407	140	-7,618
30	2,771	90	0,000	150	-2,771
40	7,618	100	-0,407	160	-1,084
45	9,600	110	-1,084	170	-0,407
50	7,618	130	-7,618	180	0,000

Концентрация напряжений при чистом сдвиге в бесконечной пластинке с прямоугольным отверстием со сторонами  $a$  и  $b$  в зависимости от величины  $r/b$  ( $r$  — радиус закругления угла отверстия) для различных значений  $a/b$  рассматривалась Е. П. Аникиным [1]. В этой работе приведены функции напряжений, а также отображающие функции в зависимости от параметров  $a/b$  и  $r/b$ .

Напряжения по контуру отверстия определялись по формулам (II.8). Полученные при этом значения  $k_{\max} = \tau_{\max}/\tau$  в наиболее напря-

\* Задача о чистом сдвиге конечной квадратной пластинки с центральным круговым отверстием решена С. К. Wang [1].

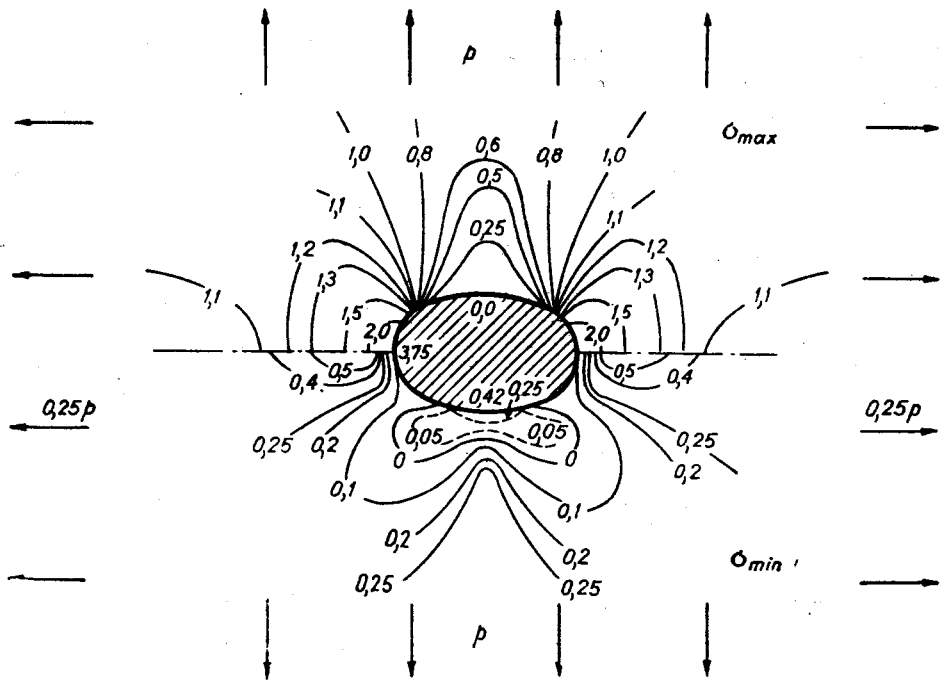


Рис. II.54

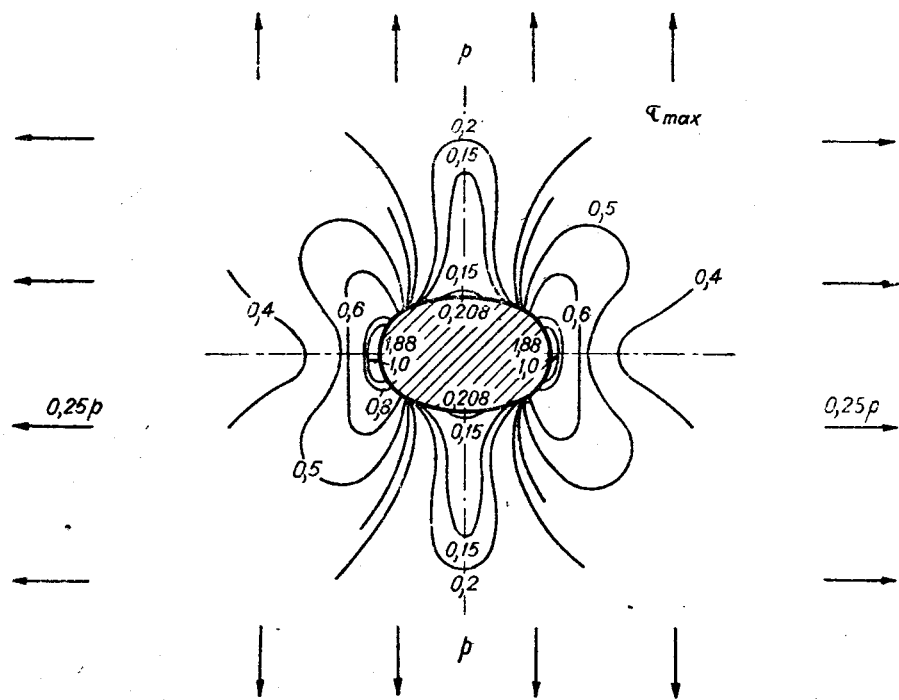


Рис. II.55

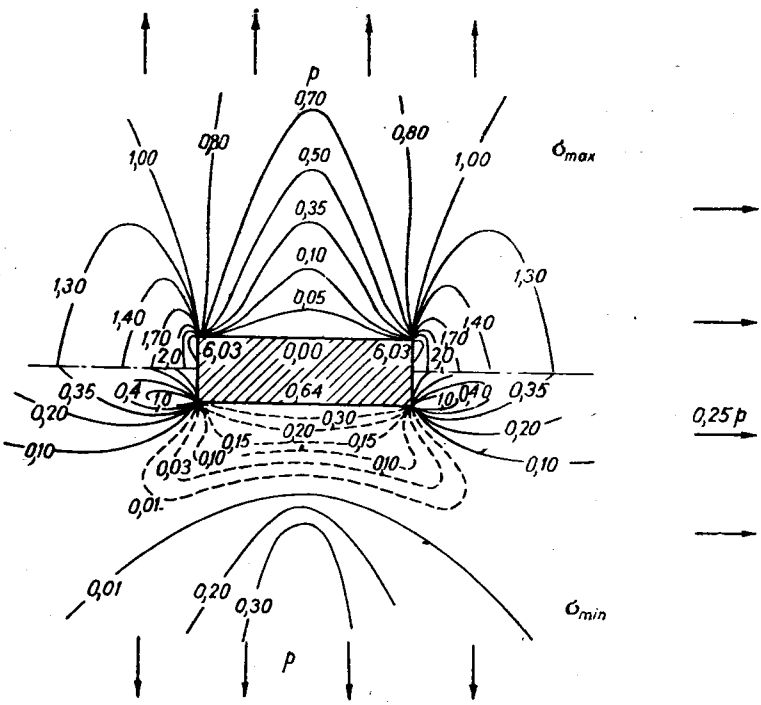


Рис. II.56

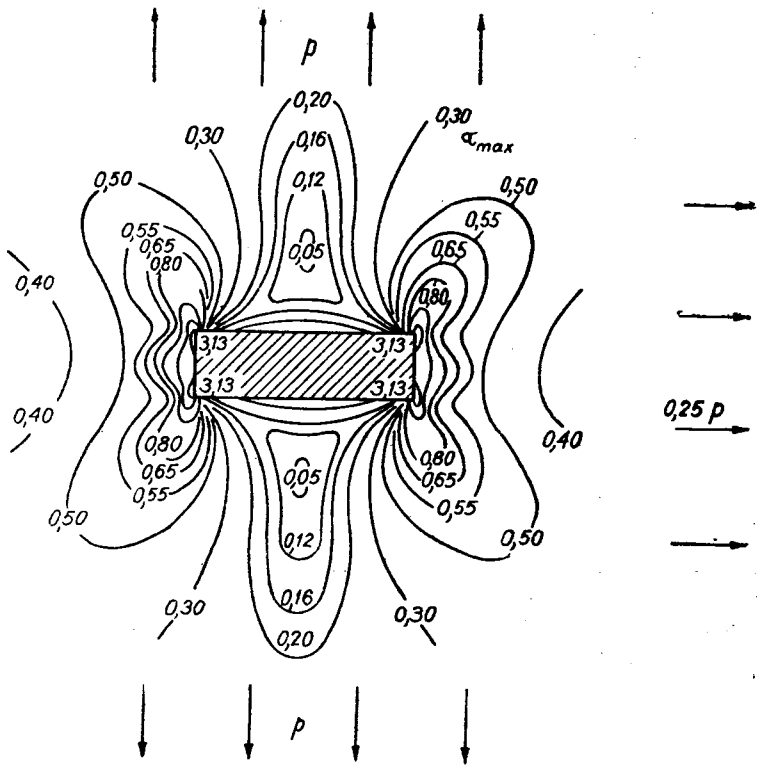


Рис. II.57

женных точках контура отверстия в зависимости от параметров  $a/b$  и  $r/b$  приведены в табл. II.13\*.

Таблица II.13

$a/b$	$r/b$									
	0,03	0,06	0,09	0,12	0,16	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
1,0	7,7	5,5	4,5	3,8	3,3	3,0	2,7	2,4	2,2	2,0
1,4	8,2	5,8	5,0	4,2	3,7	3,3	2,9	2,7	2,4	2,2
1,8	8,6	6,3	5,2	4,5	3,9	3,6	3,2	2,9	2,6	2,4
2,0	8,8	6,5	5,3	4,7	4,1	3,7	3,3	3,0	2,7	2,5
2,4	—	6,8	5,7	5,0	4,4	4,0	3,5	3,2	2,9	2,7
2,8	—	7,2	6,1	5,3	4,7	4,2	3,7	3,4	3,1	2,8
3,0	—	7,3	6,2	5,5	4,8	4,3	3,9	3,5	3,2	2,9
3,5	—	7,6	6,5	5,7	5,1	4,6	4,2	3,8	3,4	3,1
4,0	—	7,9	6,8	6,0	5,4	4,8	4,4	4,0	3,6	3,3
4,5	—	8,1	7,0	6,2	5,6	5,0	4,6	4,2	3,7	3,4
5,0	—	8,2	7,2	6,4	5,8	5,2	4,8	4,3	3,8	3,5

Концентрацию напряжений в бесконечной плоскости, ослабленной отверстием в форме ромба, рассматривал А. С. Аветисян [3], а Sen Gupta A. [1] — возле отверстия в виде лемнискаты. Влияние луночных отверстий на напряжения при чистом сдвиге исследовались Н. А. Савруком [6]. Концентрация напряжений возле прямоугольного отверстия при чистом сдвиге и растяжении рассматривалась И. М. Будняцким [1] и В. Н. Кожевниковой [2].

#### § 4. Чистый изгиб\*\*

Напряжения при чистом изгибе полосы (балки) определяются формулами

$$\sigma_x^0 = -\frac{M}{J}y, \quad \sigma_y^0 = 0, \quad \tau_{xy}^0 = 0, \quad (\text{II.93})$$

где  $M$  — изгибающий момент;  $J$  — момент инерции поперечного сечения балки. Направление осей координат и действие изгибающего момента  $M$  см. на рис. II.58.

\* По данным этой таблицы можно легко построить сетку кривых  $k_{\max}(r/b)$  и  $k_{\max}(a/b)$  для заданных значений  $a/b = 1,0; 1,4; \dots 5,0$  и  $r/b = 0,03; \dots 0,50$  и по этим плавным кривым найти (приближенное значение)  $k_{\max}$  для любых значений  $a/b$  и  $r/b$ , заключенных в интервалах  $(0,03 \leq r/b \leq 0,50)$  и  $(1,0 \leq a/b \leq 5,0)$ .

\*\* Решения, изложенные в § 4 и 5 настоящей главы, даны Г. Н. Савиным в работе [2].

Ось  $Ox$  совпадает с нейтральной осью балки \*. Функция напряжений

$$U_0(x, y) = -\frac{M}{6J}y^3. \quad (\text{II.94})$$

Определим функции  $\varphi^0(z)$  и  $\psi^0(z)$ . Из (II.9) и (II.10) следует, что  $P(x, y) = -\frac{M}{4J}y$ . Из (II.11) видим, что  $Q(x, y) = \frac{M}{4J}x$ . Отсюда

$$\varphi^0(z) = i\frac{M}{4J}(x + iy) = i\frac{M}{4J}z;$$

следовательно, при  $C_1 = C_2 = 0$

$$\varphi^0(z) = i\frac{Mz^2}{8J}. \quad (\text{II.95})$$

Функцию  $\psi^0(z)$  определим из (II.13). Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательно:

$$\psi^0(z) = -i\frac{Mz^2}{8J}. \quad (\text{II.96})$$

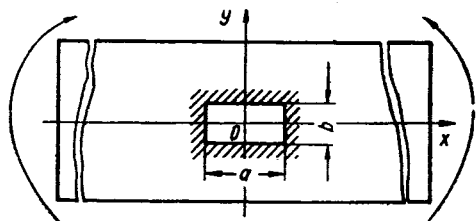


Рис. II.58

Пусть теперь в полосе (балке) сделано отверстие какой-либо формы, центр которого совпадает с началом координат (см. рис. II.58). Размеры этого отверстия малы в сравнении с высотой  $2h$  балки, и контур отверстия свободен от внешних напряжений. Функции комплексного переменного (II.1) имеют вид

$$\varphi_1(z) = \varphi^*(z) + i\frac{M}{8J}z^2, \quad (\text{II.97})$$

$$\psi_1(z) = \psi^*(z) - i\frac{M}{8J}z^2.$$

Переходя к преобразованной области или, что то же, к переменной  $\zeta$ , в зависимости от формы отверстия, по формулам (I.39), (I.49) или (I.54) имеем

$$\Phi(\zeta) = \varphi_0(\zeta) + i\frac{M}{8J}[\omega(\zeta)]^2, \quad (\text{II.98})$$

$$\Psi(\zeta) = \psi_0(\zeta) - i\frac{M}{8J}[\omega(\zeta)]^2.$$

\* Если центр отверстия не лежит на нейтральной линии балки, а смещен от нее на расстояние  $d$ , задача о распределении напряжений возле отверстий сводится к решению задач: а) о растяжении полосы в направлении нейтральной линии усилиями  $p = -Md/J$  и б) о чистом изгибе полосы с отверстием, центр которого лежит на нейтральной линии (см., например, §1 гл. III).

Приведенные контурные условия (II.7) (считая, что контур отверстия свободен от внешних усилий) для данного случая изгиба балки будут иметь вид

$$f_1^0 + if_2^0 = -i \frac{M}{8J} [\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}]^2, \quad (\text{II.99})$$

$$f_1^0 - if_2^0 = i \frac{M}{8J} [\overline{\omega(\sigma)} - \omega(\sigma)]^2.$$

Эллиптическое отверстие\*. Взяв функцию, конформно отображающую внутренность единичного круга  $\gamma$  на внешность эллипса в виде (II.60), получим

$$\varphi(\zeta) = i \frac{MR^2}{8J} \left[ \frac{1}{\zeta^2} + (2m-1)\zeta^2 \right], \quad (\text{II.100})$$

$$\psi(\zeta) = i \frac{MR^2}{8J} \left[ (1-2m)\zeta^2 + \frac{2(1-m)^2(m+\zeta^2)}{m\zeta^2-1} \zeta^2 - \frac{1}{\zeta^2} \right].$$

Напряжения по контуру эллиптического отверстия получим из уравнения (II.8), подставляя в него соответствующие производные функции  $\varphi(\zeta)$  (II.100) и  $\omega(\zeta)$  (II.60):

$$\sigma_\phi = \frac{MR}{J} \cdot \frac{(1+m-2m^2)\sin\phi + (m-1)\sin 3\phi}{1+m^2-2m\cos 2\phi}. \quad (\text{II.101})$$

Подставив в (II.101) различные значения  $m$  и  $R$ , получим формулу для напряжений  $\sigma_\phi$  по контуру любого эллиптического отверстия. Например, для эллиптического отверстия любых размеров с соотношением осей  $k=1/3$ , т. е. при  $m=1/2$ , имеем

$$\sigma_\phi = \frac{MR}{J} \cdot \frac{4\sin\phi - 2\sin 3\phi}{5 - 4\cos 2\phi}. \quad (\text{II.102})$$

Наибольшее значение  $\sigma_\phi$  на контуре любого эллиптического отверстия получим из (II.101) при  $\phi = \pi/2$ :

$$\sigma_\phi = 2 \frac{MR}{J} \cdot \frac{b}{a} = \frac{Mb}{b} \left( 1 + \frac{b}{a} \right). \quad (\text{II.103})$$

Если  $b=0$ , а  $a \neq 0$ , т. е. в случае щели на оси  $Ox$  длиной  $2a$ ,  $\sigma_\phi=0$ . Это означает, что щель длиной  $2a$ , расположенная параллельно нейтральной линии балки, не вызывает концентрации напряжений в рассматриваемой полосе (балке).

Если  $b \neq 0$ , а  $a=0$ , т. е. в случае щели по оси  $Oy$  длиной  $2b$ ,  $\sigma_\phi$  будут неограниченно велики, т. е. возникнут зоны пластического состояния материала или трещины.

\* Решение этой задачи дано Н. И. Мусхелишвили [4] и А. С. Локшиным [1].



**Круговое отверстие\*.** Если в (II.100) положить  $m=0$ , получим функции напряжений для кругового отверстия

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= i \frac{MR^2}{8J} \left[ \frac{1}{\zeta^2} - \zeta^2 \right], \\ \psi(\zeta) &= i \frac{MR^2}{8J} \left[ \zeta^2 - 2\zeta^4 - \frac{1}{\zeta^2} \right].\end{aligned}\quad (\text{II.104})$$

Формулу для напряжений по контуру кругового отверстия получим из (II.101) при  $m=0$ :

$$\sigma_{\phi} = \frac{MR}{J} [\sin \phi - \sin 3\phi]. \quad (\text{II.105})$$

**Квадратное отверстие I.** Возьмем функцию  $\omega(\zeta)$  в том же виде (II.24), что и при растяжении\*\*. Расположение отверстия относительно координатных осей см. на рис. II.2; ось  $Ox$  совпадает с нейтральной линией балки. Окончательный вид функций для рассматриваемого отверстия:

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= i \frac{MR^2}{8J} \left[ \frac{1}{\zeta^2} - \zeta^2 - \frac{1}{3} \zeta^4 \right], \\ \psi(\zeta) &= -i \frac{MR^2}{8J} \left[ \frac{1}{\zeta^2} + \frac{5}{3} \zeta^2 - \frac{52\zeta^4 + 39}{5(\zeta^4 + 2)} \right].\end{aligned}\quad (\text{II.106})$$

Формулу для напряжений по контуру квадратного отверстия I получим из (II.8):

$$\sigma_{\phi} = \frac{MR}{J} \cdot \frac{14\sin \phi - 12\sin 3\phi - 2\sin 5\phi}{15 + 12 \cos 4\phi}. \quad (\text{II.107})$$

**Квадратное отверстие II.** Повернуто относительно положения предыдущего отверстия на угол  $\pi/4$ . Взяв отображающую функцию в виде

$$\omega(\zeta) = R \left( \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{6} \zeta^3 \right), \quad (\text{II.108})$$

получим функции для плоскости с квадратным отверстием II:

$$\begin{aligned}\varphi(\zeta) &= i \frac{MR^2}{8J} \left[ \frac{1}{\zeta^2} - \zeta^2 + \frac{1}{3} \zeta^4 \right], \\ \omega(\zeta) &= i \frac{MR^2}{8J} \cdot \frac{18 + 117\zeta^2 - 31\zeta^4 - 15\zeta^8}{9\zeta^2(\zeta^4 - 2)}.\end{aligned}$$

\* Чистый изгиб балки, ослабленной отверстием в виде симметричной круговой лунки, рассмотрен Г. Н. Савиным и М. А. Савруком [1, 2]. Из этих решений как частный случай следует решение данной задачи.

\*\* Изгиб балки с квадратным и треугольным отверстием несколько иных очертаний рассмотрел М. И. Нейман [1].

Формулу напряжений для точек контура рассматриваемого отверстия получим из (II.8):

$$\sigma_{\vartheta} = 2 \frac{MR}{J} \cdot \frac{\sin \vartheta - 6 \sin 3\vartheta + \sin 5\vartheta}{15 - 12 \cos 4\vartheta}. \quad (\text{II.109})$$

**Треугольное отверстие.** Взяв отображающую функцию  $\omega(\zeta)$  в том же виде (II.53), что и при растяжении (см. рис. II.27), получим

$$\varphi(\zeta) = i \frac{MR^2}{8J} \left[ \frac{1}{\zeta^2} - \zeta^2 + \frac{2}{3} \zeta^3 \right],$$

$$\psi(\zeta) = i \frac{MR^2}{8J} \cdot \frac{27 + 33\zeta^2 - 45\zeta^4 + 22\zeta^5 + 54\zeta^6 - 36\zeta^7}{9\zeta^2(2\zeta^3 - 3)}. \quad (\text{II.110})$$

Напряжение по контуру треугольного отверстия

$$\sigma_{\vartheta} = 3 \frac{MR}{J} \cdot \frac{\sin \vartheta - 3 \sin 3\vartheta + \sin 4\vartheta}{13 - 12 \cos 3\vartheta}. \quad (\text{II.111})$$

**Прямоугольное отверстие\*** с отношением сторон  $a/b \approx 3,2$ . Возьмем отображающую функцию  $\omega(\zeta)$  в виде (II.50):

$$\omega(\zeta) = R \left[ \frac{1}{\zeta} + \frac{1}{2} \zeta - \frac{1}{8} \zeta^3 - \frac{3}{80} \zeta^5 \right]. \quad (\text{II.112})$$

Окончательный вид функций:

$$\varphi(\zeta) = i \frac{MR^2}{8J} \left[ \frac{1}{\zeta^2} - \frac{1}{8} \zeta^2 - \frac{23}{80} \zeta^4 - \frac{3}{40} \zeta^6 \right],$$

$$\psi(\zeta) = -i \frac{MR^2}{8J} \cdot \frac{20480 - 10240\zeta^2 - 2965,6\zeta^4}{2048(80\zeta^2 - 40\zeta^4 + 30\zeta^6 + 15\zeta^8)} +$$

$$+ \frac{12012,4\zeta^6 + 7462,7\zeta^8 + 3027,3\zeta^{10}}{2048(80\zeta^2 - 40\zeta^4 + 30\zeta^6 + 15\zeta^8)}. \quad (\text{II.113})$$

Напряжения по контуру отверстия

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{MR}{J} \cdot \frac{1228 \sin \vartheta - 490 \sin 3\vartheta - 112 \sin 5\vartheta - 48 \sin 7\vartheta}{1825 - 1580 \cos 2\vartheta + 720 \cos 4\vartheta + 480 \cos 6\vartheta}. \quad (\text{II.114})$$

**Заключительные замечания.** Приведем сравнение влияния различных отверстий на картину напряженного состояния в балке при чистом изгибе, пользуясь формулами (II.102), (II.105), (II.107), (II.109), (II.111) и (II.114).

Во все формулы для напряжений  $\sigma_{\vartheta}$  входит множителем величина  $MR/J$ , где постоянная  $R$  характеризует величину отверстия. Для того чтобы получить правильное представление о влиянии того или иного

\* Задаче о распределении напряжений возле прямоугольного отверстия при изгибе бесконечной пластинки посвящены также работы В. Н. Кожевниковой [2, 3].

отверстия на распределение напряжений возле отверстий, надо вести это сравнение при одинаковых габаритах отверстий, т. е. когда их размеры составляют определенную часть высоты балки.

В табл. II.14 приведены значения напряжений  $\sigma_\phi$  в долях от  $MR/J$  по нижней части контура рассматриваемых отверстий (см. рис. II.8). Для того чтобы получить, например, напряжения для эллиптического отверстия с полуосями  $a=6$  см и  $b=2$  см, найдем сперва из (II.60), что  $R=4$ . Умножив затем все величины из третьей колонки табл. II.14 на  $4M/J$ , получим значения напряжений  $\sigma_\phi$  по контуру данного отверстия.

Таблица II.14

$\phi^\circ$	Форма отверстия					
	круг	эллипс ( $\frac{a}{b}=3$ )	квадрат (I)	квадрат (II)	треуголь- ник	прямоу- гольник ( $\frac{a}{b}=3,2$ )
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	-0,326	-0,245	-0,169	-0,709	-0,785	-0,143
20	-0,524	-0,188	-0,443	-0,599	-0,544	-0,291
30	-0,500	0,000	-0,667	-0,476	-0,377	0,472
45	0,000	0,282	0,942	-0,315	-0,197	0,575
60	0,866	0,494	1,528	0,000	0,000	0,409
70	1,440	0,590	1,141	0,583	0,186	0,384
80	1,851	0,647	0,946	2,350	0,464	0,436
90	2,000	0,666	0,888	5,333	0,923	0,454
100	1,851	0,647	0,946	2,350	1,811	0,436
115	1,165	0,547	1,294	0,221	5,685	0,377
120	0,866	0,494	1,528	0,000	5,196	0,409
125	0,560	0,433	1,670	-0,143	1,459	0,435
135	0,000	0,282	0,942	-0,315	-0,939	0,575
170	-0,326	-0,245	-0,169	-0,709	-0,252	-0,143
180	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

Для случая изгиба балки с постоянной перерезывающей силой концентрация напряжений возле тех же отверстий, что и для чистого изгиба, рассматривается в § 5 гл. II монографии Г. Н. Савина [13]. Здесь же в § 6 гл. II рассмотрен вопрос о напряжениях возле кругового отверстия при более сложных видах изгиба полос (балок). Следует заметить, что с момента выхода в свет монографии Г. Н. Савина [13] появилось много работ по изгибу балки (с различными отверстиями) постоянной перерезывающей силой. Укажем на некоторые из них. Так, S. R. Heller [1], S. R. Heller, Ir, Brock I. S., R. Bart [2] исследовали распределение напряжений около квадратного, прямоугольного и овалоидального отверстий при изгибе консоли. Г. Н. Савин и М. А. Саврук [2, 3] рассмотрели задачу о распределении напряжений около отверстия в виде симметричной круговой луночки в консольной балке (полосе). А. М. Авериним и Е. Ф. Бурмистровым [1] рассмотрена задача о распределении напряжений в балках с отверстием общего вида.

## § 5. Учет влияния сил собственного веса на распределение напряжений в упругой плоскости с отверстием

Рассматривая картину напряженного состояния вокруг отверстий, мы не учитывали объемных сил собственного веса. На практике же иногда нельзя пренебрегать влиянием собственного веса, а именно тогда, когда собственный вес не является слишком малой величиной по сравнению с действующими поверхностными усилиями, и в особенности в тех случаях, когда собственный вес является единственным фактором, вызывающим напряженное состояние и, следовательно, концентрацию напряжений вокруг отверстий (как, например, при концентрации напряжений вокруг подземных горных выработок и т. п.).

Допустим, что компоненты напряжений

$$(\sigma_r)_0, (\sigma_\theta)_0, (\tau_{r\theta})_0 \quad (\text{II.115})$$

отнесены к полярной системе  $(r, \theta)$  и определяют напряженное состояние неограниченной тяжелой и упругой изотропной плоскости, не ослабленной отверстием. Как известно, эти компоненты напряжений (II.115) должны удовлетворять основным уравнениям равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = \gamma \sin \theta, \quad (\text{II.116})$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = \gamma \cos \theta$$

и уравнению совместности

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (\text{II.117})$$

В (II.116)  $\gamma = \rho g$ , где  $g$  — ускорение силы тяжести, а  $\rho = \text{const}$  — плотность. Очевидно, вследствие линейности уравнений (II.116) и (II.117) их общее решение, т. е. компоненты напряжений  $(\sigma_r)_0$ ,  $(\sigma_\theta)_0$  и  $(\tau_{r\theta})_0$  (II.115), можно представить в виде

$$(\sigma_r)_0 = \sigma_r^0 + \sigma_r^{00}, \quad (\text{II.118})$$

$$(\sigma_\theta)_0 = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^{00},$$

$$(\tau_{r\theta})_0 = \tau_{r\theta}^0 + \tau_{r\theta}^{00},$$

где компоненты напряжений

$$\sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \tau_{r\theta}^0 \quad (\text{II.119})$$

являются частным решением системы уравнений (II.117) и (II.116), а компоненты

$$\sigma_r^{00}, \sigma_\theta^{00}, \tau_{r\theta}^{00} \quad (\text{II.120})$$

определяются из решения однородной системы дифференциальных уравнений равновесия (II.116) при  $\gamma = 0$  и уравнений совместности (II.117) плоской задачи теории упругости.

**Круговое отверстие.** Если рассматриваемая тяжелая упругая плоскость ослаблена круговым отверстием радиуса  $R$  с центром в начале координат, возле отверстия возникает некоторая зона концентрации напряжений, вызванная основным напряженным состоянием (II.118).

Обозначим компоненты напряжений в плоскости с круговым отверстием через

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_r^* + \sigma_r^{**}, \\ \sigma_\theta &= \sigma_\theta^* + \sigma_\theta^{**}, \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{r\theta}^* + \tau_{r\theta}^{**},\end{aligned}\quad (\text{II.121})$$

где первые слагаемые правой части соответствуют основному напряженному состоянию (II.119), а вторые — напряженному состоянию (II.120). Примем частное решение (II.119) основных уравнений (II.116) и (II.117) в виде

$$\begin{aligned}\sigma_r^0 &= \frac{\gamma r}{4} (3 \sin \theta - \sin 3\theta), \\ \sigma_\theta^0 &= \frac{\gamma r}{4} (\sin \theta + \sin 3\theta), \\ \tau_{r\theta}^0 &= \frac{\gamma r}{4} (\cos \theta - \cos 3\theta).\end{aligned}\quad (\text{II.122})$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что компоненты напряжений  $\sigma_r^*$ ,  $\sigma_\theta^*$  и  $\tau_{r\theta}^*$  в плоскости с круговым отверстием, вызванные напряженным состоянием (II.122), будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_r^* &= \left( \frac{3\gamma r}{4} + \frac{\alpha_1}{r} + \frac{\alpha_3}{r^3} \right) \sin \theta + \left( -\frac{\gamma r}{4} + \frac{\beta_3}{r^3} + \frac{\beta_5}{r^5} \right) \sin 3\theta, \\ \sigma_\theta^* &= \left( \frac{\gamma r}{4} + \frac{\omega_1}{r} - \frac{\alpha_3}{r^3} \right) \sin \theta + \left( \frac{\gamma r}{4} - \frac{\beta_3}{5r^3} - \frac{\beta_5}{r^5} \right) \sin 3\theta, \\ \tau_{r\theta}^* &= \left( \frac{\gamma r}{4} - \frac{\omega_1}{r} - \frac{\alpha_3}{r^3} \right) \cos \theta + \left( -\frac{\gamma r}{4} - \frac{3\beta_3}{5r^3} - \frac{\beta_5}{r^5} \right) \cos 3\theta.\end{aligned}\quad (\text{II.123})$$

Неизвестные коэффициенты  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_3$ ,  $\beta_5$ ,  $\omega_1$ , входящие в (II.123), определим из граничных условий

$$\sigma_r^* = 0 \quad \text{и} \quad \tau_{r\theta}^* = 0 \quad \text{при} \quad r = R \quad (\text{II.124})$$

и из условия однозначности перемещений\*

$$\alpha_1 (1 - 2\nu) + \omega_1 (3 - 2\nu) = 0, \quad (\text{II.125})$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

\* См., например, П. Ф. Палкович [1], стр. 486.

После подстановки напряжений (II.123) в условия (II.124) и (II.125) получим систему уравнений, из которой находим

$$\alpha_1 = -\frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} \gamma R^2, \quad \alpha_3 = \frac{\nu}{4(1-\nu)} \gamma R^4, \quad (II.126)$$

$$\omega_1 = -\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \gamma R^2, \quad \beta_3 = \frac{5}{4} \gamma R^4, \quad \beta_5 = -\gamma R^6.$$

Представим теперь компоненты напряжений (II.123) в их окончательной форме:

$$\sigma_r^* = \gamma R \left\{ \left[ \frac{3}{4} \cdot \frac{r}{R} - \frac{3-2\nu}{4(1-\nu)} \frac{R}{r} + \frac{\nu}{4(1-\nu)} \cdot \frac{R^3}{r^3} \right] \sin \theta + \right. \\ \left. + \left[ -\frac{1}{4} \cdot \frac{r}{R} + \frac{5}{4} \frac{R^3}{r^3} - \frac{R^5}{r^5} \right] \sin 3\theta \right\}, \quad (II.127)$$

$$\sigma_\theta^* = \gamma R \left\{ \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{r}{R} + \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \frac{R}{r} - \frac{\nu}{4(1-\nu)} \cdot \frac{R^3}{r^3} \right] \sin \theta + \right. \\ \left. + \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{r}{R} - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r^3} + \frac{R^5}{r^5} \right] \sin 3\theta \right\},$$

$$\tau_{r\theta}^* = \gamma R \left\{ \left[ \frac{1}{4} \cdot \frac{r}{R} - \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \frac{R}{r} - \frac{\nu}{4(1-\nu)} \cdot \frac{R^3}{r^3} \right] \cos \theta + \right. \\ \left. + \left[ -\frac{1}{4} \cdot \frac{r}{R} - \frac{3}{4} \frac{R^3}{r^3} + \frac{R^5}{r^5} \right] \cos 3\theta \right\}.$$

Соответственно получим выражения для компонентов перемещения, которые мы выписываем с точностью до жесткого смещения плоскости как целого:

$$v_r^* = \frac{\gamma R^2}{8\mu} \left\{ \left[ \frac{3-4\nu}{2} \cdot \frac{r^2}{R^2} - \frac{3-4\nu}{1-\nu} \ln r - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \frac{R^2}{r^2} \right] \sin \theta + \right. \\ \left. + \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{R^2} - \frac{5-4\nu}{2} \cdot \frac{R^2}{r^2} + \frac{R^4}{r^4} \right] \sin 3\theta, \right. \\ v_\theta^* = \frac{\gamma R^2}{8\mu} \left\{ \left[ \frac{1+4\nu}{2} \cdot \frac{r^2}{R^2} - \frac{3-4\nu}{1-\nu} \ln r - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{1-\nu} + \frac{\nu}{2(1-\nu)} \cdot \frac{R^2}{r^2} \right] \cos \theta + \right. \\ \left. + \left[ -\frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{R^2} - \frac{1-4\nu}{2} \cdot \frac{R^2}{r^2} - \frac{R^4}{r^4} \right] \cos 3\theta \right\}. \quad (II.128)$$

Формулы (II.127) и (II.128) выведены для случая плоской деформации. В случае обобщенного плоского напряженного состояния эти формулы дадут средние по толщине пластинки значения компонентов

напряжений и перемещений, если в них заменим постоянную  $\nu$  величиной  $\nu^* = \frac{\nu}{1+\nu}$ .

Складывая теперь напряжения (II.127) с напряжениями  $\sigma_r^{**}$ ,  $\sigma_\theta^{**}$  и  $\tau_{r\theta}^{**}$ , получаем искомые полные напряжения (II.121) в тяжелой плоскости с круговым отверстием под заданной внешней нагрузкой\*.

**Отверстие в форме полукруга\*\*.** В тяжелой полуплоскости на расстоянии  $H$  от дневной поверхности вырезано отверстие в форме

Таблица II.15

$\vartheta^\circ$	$\sigma_\vartheta/\gamma H$	$\vartheta^\circ$	$\sigma_\vartheta/\gamma H$
0	-0,255	100	2,715
10	-0,236	110	2,640
20	-0,171	120	4,789
30	-0,021	130	2,009
40	0,416	135	0,926
50	0,716	140	1,469
60	2,026	150	1,089
65	12,224	160	0,899
80	4,435	170	0,824
90	3,097	180	0,809

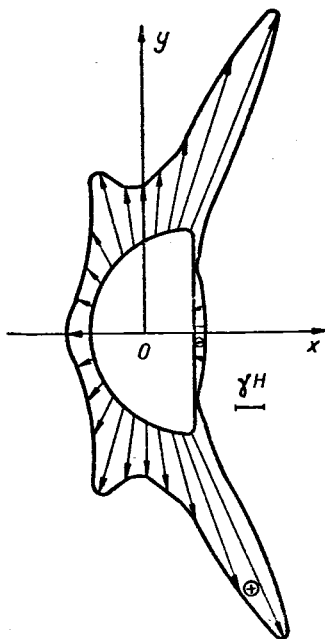


Рис. II.59

полукруга, контур которого задан уравнением (II.71). Напряжения по контуру рассматриваемого отверстия.

$$\sigma_\vartheta = -\frac{\gamma H}{L(\vartheta)} [1,44405 - 0,85986 \cos \vartheta - 1,40164 \cos 2\vartheta + 0,01850 \cos 3\vartheta + 0,06799 \cos 4\vartheta]. \quad (\text{II.129})$$

Здесь  $\gamma$  — плотность среды;  $H$  — глубина залегания (от границы полуплоскости) центра отверстия, а функция  $L(\vartheta)$  определяется формулой (II.74).

В табл. II.15 приведены значения напряжений  $\sigma_\vartheta$  (в долях от  $\gamma H$ ), подсчитанные по формуле (II.129).

На рис. II.59 показан график распределения напряжений  $\sigma_\vartheta$  по контуру отверстия для материала (бетона) с коэффициентом Пуассона  $\nu=0,16$  и  $\gamma=2,4 \cdot 9,81 \cdot 10^3 \text{ н/м}^3$ .

\* См. А. Н. Динник, А. Б. Моргаевский и Г. Н. Савин [1], где рассмотрена задача о напряжениях возле кругового отверстия в тяжелой полуплоскости; см. также работы П. А. Журавлева и А. Ф. Захаревича [1], С. А. Орлова [1].

\*\* Решение задач для отверстий в форме полукруга и свода дано Е. Ф. Бурмистровым [3].

Отверстие в форме свода. Контур отверстия задается уравнениями (II.75). Напряжения по контуру отверстия

$$\sigma_{\phi} = -\frac{\gamma H}{L(\phi)} [1,22758 + 0,35174 \cos \phi - 1,98149 \cos 2\phi + 0,08837 \cos 3\phi + 0,01133 \cos 4\phi], \quad (\text{II.130})$$

где функция  $L(\phi)$  определяется формулой (II.78).

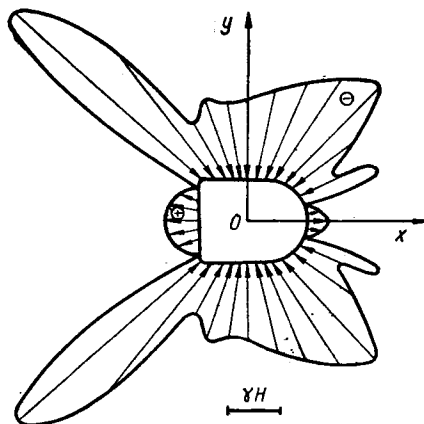


Рис. II.60

Таблица II.16

$\phi^\circ$	$\sigma_{\phi}/\gamma H$	$\phi^\circ$	$\sigma_{\phi}/\gamma H$
0	0,407	100	-1,488
10	0,262	110	-1,626
20	-0,107	120	-1,138
30	-0,628	130	-3,536
40	-1,308	135	-3,936
50	-2,780	140	-4,925
60	-2,304	150	0,133
70	-2,068	160	0,542
80	-1,712	170	0,604
90	-1,521	180	0,565

В табл. II.16 приведены значения  $\sigma_{\phi}/\gamma H$ , найденные по формуле (II.130). На рис. II.60 показан график распределения напряжений  $\sigma_{\phi}$  по контуру отверстия для полуплоскости из бетона с коэффициентом Пуассона  $\nu=0,16$  и  $\gamma=2,4 \cdot 9,81 \cdot 10^3 \text{ н/м}^3$ .

А. Г. Угодчиков и А. Я. Крылов [1] рассмотрели задачу о концентрации напряжений возле смотровых галлерей как при заданной форме отверстия, так и при основном напряженном состоянии:

$$\sigma'_x = -\frac{2}{3} \gamma (\xi_0 - x), \quad \sigma'_y = -\frac{\gamma}{6a}, \quad \tau'_{xy} = \frac{\gamma}{3} y. \quad (\text{II.131})$$

В этой работе рассматривается напряженное состояние, вызванное собственным весом, около отверстия (рис. II.61) в плотине, внешний контур которой очерчен по параболе  $\xi = c\eta^2$ . На рис. II.61 параметр  $c = 0,055$ , и числовое значение его подобрано так, чтобы получить хорошее приближение к существующим профилям плотин. Отверстие имеет вид свода с размерами:  $a=2,5 \text{ м}$ ,  $h=3,0 \text{ м}$ ,  $R_1=1,25 \text{ м}$ ,  $\xi_0=7,5 \text{ м}$ .

Функция, отображающая внутренность единичного круга на внешность кривой, весьма близкой к контуру заданного отверстия, имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = 1,50855 \left[ \frac{1}{\zeta} - 0,266786 + 0,0769579\zeta + 0,0764652\zeta^2 - 0,0885262\zeta^3 + 0,0245996\zeta^4 + 0,005903\zeta^5 + \dots \right]. \quad (\text{II.132})$$



Задача решена приближенно методом последовательных приближений. В качестве нулевого приближения взято решение для неограниченной (тяжелой) плоскости с основным напряженным состоянием (II.131). Это решение не удовлетворяет условиям на контуре  $L_1$  (см. рис. II.61). По найденным из (II.131) на  $L_1$  ( $-X_n$ ) и ( $-Y_n$ ) находятся соответствующие комплексные потенциалы Колосова—Мусхелишвили  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$ , которые дадут первые поправки к решению (II.131). По этим функциям  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  находятся соответствующие компоненты напряжений  $\sigma'_x$ ,  $\sigma'_y$  и  $\tau'_{xy}$ .

Решение в первом приближении найдем в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(I)} &= \sigma'_x + \sigma''_x, & \sigma_y^{(I)} &= \sigma'_y + \sigma''_y, \\ \tau_{xy}^{(I)} &= \tau'_{xy} + \tau''_{xy}. \end{aligned} \quad (II.132a)$$

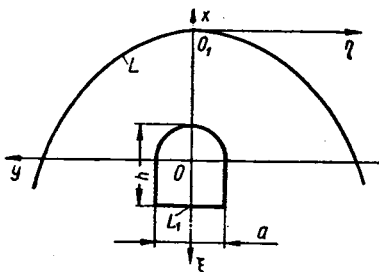


Рис. II.61

Однако решение (II.132a) не будет удовлетворять условиям на внешнем контуре  $L$  (см. рис. II.61). Снимая усилия на  $L$ , даваемые решением (II.132a), найдем решение задачи во втором приближении, и т. д. Если отверстие мало и расположено достаточно далеко от внешнего контура  $L$ , то первое приближение дает довольно хорошее согласование.

Результаты подсчетов (при  $\gamma = 2,4 \cdot 9,81 \cdot 10^3 \text{ н/м}^3$ ,  $\nu = 1/6$ ) для бетонной плотины в первом приближении для  $\sigma_{\phi}^{(I)} = \sigma'_{\phi} + \sigma''_{\phi}$  и  $\sigma_Q^{(I)} = \sigma'_Q + \sigma''_Q$  на контуре  $L_1$  и в сечении  $\phi = 0$  представлены в табл. II.17 и II.18 и в виде эпюр напряжений — на рис. II.62, где штрихом в сечении  $\phi = 0$  показаны эпюры для  $\sigma'_Q$  и  $\sigma'_{\phi}$  основного напряженного состояния (II.131).

Таблица II.17

Таблица II.18

$\phi^\circ$	$\sigma_{\phi} / 9,81 \cdot 10^3, \text{ н/м}^2$	$\phi^\circ$	$\sigma_{\phi} / 9,81 \cdot 10^3, \text{ н/м}^2$
0	-12,49	105	-19,01
15	-13,26	120	-32,37
30	-16,96	135	-52,28
45	-23,89	150	-12,42
60	-24,90	165	-2,99
75	-19,13	180	-1,67
90	-16,42	—	—

$q$	$\sigma_Q / 9,81 \cdot 10^3, \text{ н/м}^2$	$\sigma_{\phi} / 9,81 \cdot 10^3 \text{ н/м}^2$
1,0	0,0	-12,49
0,8	-2,598	-9,833
0,5	-5,386	-8,151
0,42	-5,252	-7,756

Исследованию концентрации напряжений в тяжелой полуплоскости возле отверстия в форме свода как свободного, так и подкрепленного абсолютно жестким кольцом посвящены работы А. А. Бойма [2, 3] и И. С. Хара [2].

**Другие формы отверстий.** Задача о распределении напряжений в тяжелой полуплоскости возле свободного и подкрепленного абсолютно жестким кольцом трапециoidalного отверстия рассматривалась

И. С. Хара [2]. Эта же задача с несколько иной отображающей функцией рассматривалась К. В. Руппенейтом и Ц. Гомесом [1]. Случай эллиптического отверстия рассмотрен в работе В. И. Беспалого [1]. При достаточно близком расположении эллиптического отверстия к

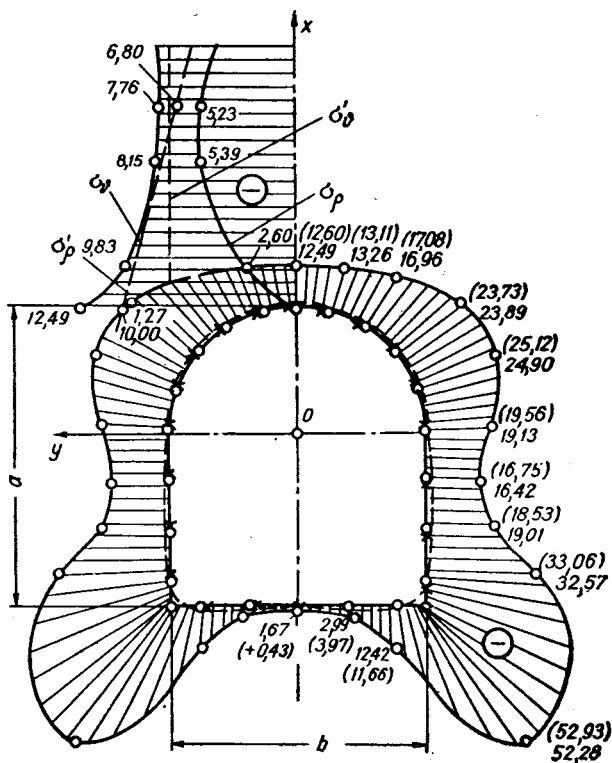


Рис. 11.62

границе полуплоскости задача рассматривалась Д. И. Шерманом [10], Л. Н. Карпенко [1] — методом Д. И. Шермана. Случай прямоугольного отверстия в весомой упругой плоскости рассматривался В. Н. Кожевниковой [3].

### § 6. Напряжения в полосе конечной ширины, ослабленной круговым отверстием

При рассмотрении вопроса о влиянии отверстий различной формы на напряженное состояние в упругой плоскости (пластинке, балке) мы принимали эту плоскость бесконечной. Однако в инженерной практике сравнительно редко приходится иметь дело с задачами о концентрации

напряжений возле отверстий, когда можно считать область, ослабленную отверстием, неограниченной. В большинстве случаев размеры этих плоскостей невелики. Поэтому возникает вопрос, в каких случаях (соблюдая определенную степень точности) решения, полученные в предыдущих параграфах для бесконечных областей, можно применять для конечных областей? Лучшим ответом на этот вопрос было бы сопоставление результатов точных решений задач для бесконечной и конечной областей. К сожалению, этого сделать мы не можем для рассмотренных задач, поскольку имеем крайне мало доведенных до конца решений соответствующих задач для конечных областей, хотя теоретическое решение этих задач для любой связности как для изотропной, так и анизотропной среды получено\* уже сравнительно давно. Но

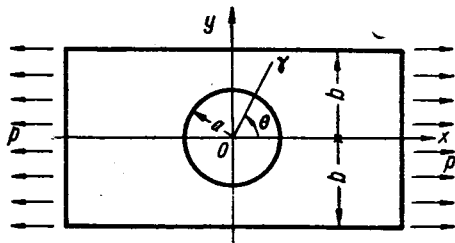


Рис. II.63

эти решения для конечных областей даны в такой форме, что кроме теорем существования из них вследствие колоссальных вычислительных трудностей, до сих пор ничего большего получить не удалось\*\*.

Рассмотрим задачу о концентрации напряжений возле кругового отверстия для полосы конечной ширины при неограниченной ее длине.

**Растяжение полосы с круговым отверстием\*\*\*.** Допустим, что тонкая неограниченная полоса из упругого изотропного материала шириной  $2b$ , толщиной  $2h$  с круговым отверстием радиуса  $R=a < b$ , контур которого свободен от внешних усилий, с центром, лежащим на оси симметрии полосы, растягивается вдоль этой оси симметрии усилиями  $p = \text{const}$  (рис. II.63).

Возьмем начало осей координат  $xOy$  в центре кругового отверстия, ось  $Ox$  направим по оси симметрии полосы, а ось  $Oy$  — вверх. Определим картину напряженного состояния в этой полосе\*\*\*\*, ослабленной круговым отверстием.

Отнесем все размеры к полуширине полосы, вводя безразмерные координаты:  $\xi = x/b$ ,  $\eta = y/b$ ,  $\lambda = a/b$ . Кроме декартовых координат  $\xi$  и  $\eta$  будем применять полярные координаты  $\rho$ ,  $\theta$ ;  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $\bar{\rho} = r/b$  (см. рис. II.63). Полярная ось совпадает с осью  $Ox$ , а отсчет углов ведется, как обычно, от оси  $Ox$  к  $Oy$ .

\* См. работы Н. И. Мухелишвили [1, 2, 3], С. Г. Михлина [5], Д. И. Шермана [13], Г. Н. Савина [11, 12], а также обзоры Д. И. Шермана [12, 17].

\*\* Следует заметить, что, применяя метод электроаналогии (см. литературу к гл. I) для построения отображающей функции данной двусвязной области на круговое кольцо, можно построить точные или приближенные (с высокой степенью) решения для двусвязных областей, из которых можно сделать ряд очень важных выводов, в частности исследовать влияние конечности размеров пластинки на концентрацию напряжений возле отверстия в ней.

\*\*\* Напряженное состояние в бесконечной полосе, содержащей круглое включение, исследовалось в работе R. G. Wilson [1].

\*\*\*\* См. R. Howland [1].

Задача заключается в определении бигармонической функции  $U(\xi, \eta)$ , удовлетворяющей уравнению (I.5) и условиям: на границе полосы, т. е. на контуре  $\eta = \pm 1$ ,

$$\sigma_y = \frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0, \quad \tau_{xy} = -\frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0; \quad (\text{II.133})$$

на контуре отверстия  $r = a$ , т. е. при  $\varrho = \lambda$ ,

$$\sigma_\varrho = \frac{1}{b^2} \left[ \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial U}{\partial \varrho} \right] = 0, \quad (\text{II.134})$$

$$\tau_{\varrho\theta} = -\frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) = 0,$$

так как контур отверстия свободен от внешних усилий; на бесконечности при  $x = \xi b \rightarrow \infty$

$$\sigma_x = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = p,$$

$$\sigma_y = \frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = 0, \quad (\text{II.135})$$

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{b^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Представим функцию  $U(\xi, \eta)$  в виде ряда

$$U(\xi, \eta) = U_0^{(1)}(\xi, \eta) + U_0(\xi, \eta) + U_1(\xi, \eta) + U_2(\xi, \eta) + \dots, \quad (\text{II.136})$$

причем, члены этого ряда являются бигармоническими функциями со следующими свойствами: функция  $U^0(\xi, \eta) = U_0^{(1)}(\xi, \eta) + U_0(\xi, \eta)$  удовлетворяет условию на бесконечности (II.135) и на контуре отверстия (II.134), но не удовлетворяет условию на границе полосы (II.133), т. е. функция  $U^0(\xi, \eta)$  является решением задачи для бесконечной плоскости с круговым отверстием, растягиваемой вдоль оси  $Ox$  усилиями  $p$ .

Как следует из (II.67) и (I.8), функция

$$U^0(\varrho, \theta) = \frac{b^2 p}{4} \left[ \varrho^2 - 2\lambda^2 \ln \varrho + \left( 2\lambda^2 - \frac{\lambda^4}{\varrho^4} - \varrho^2 \right) \cos 2\theta \right]. \quad (\text{II.137})$$

Для удобства разобьем ее на две части:

$$U_0^{(1)} = \frac{b^2 p}{4} \varrho^2 (1 - \cos 2\theta)$$

и

$$U_0 = \frac{b^2 p}{4} \left[ \left( 2\lambda^2 - \frac{\lambda^4}{\varrho^4} \right) \cos 2\theta - 2\lambda^2 \ln \varrho \right].$$

Функция  $U_1(\xi, \eta)$  из (II.136) уничтожает напряжения, вызванные функцией  $U_0(\xi, \eta)$  на границе полосы  $\eta = \pm 1$ , но вводит напряжения на контуре отверстия, и т. д.

Вообще функция  $U_{2n} + U_{2n+1}$  дает нулевые напряжения на границе  $\eta = \pm 1$ , тогда как функция  $U_{2n-1} + U_{2n}$  — нулевые напряжения на контуре отверстия  $\rho = \lambda$ .

Компоненты напряжений в полосе возле кругового отверстия при  $\lambda = a/b < 0,5$  даются в виде рядов

$$\sigma_{\theta} = \rho \left\{ \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta) + 2m_0 - \frac{d_0}{\rho^2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n(2n+1)d_{2n}}{\rho^{2n+2}} + \frac{(n+1)(2n-1)e_{2n}}{\rho^{2n}} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2n(2n-1)l_{2n}\rho^{2n-2} + (n-1)(2n+1)m_{2n}\rho^{2n} \right] \cos 2n\theta \right\}; \quad (\text{II.138})$$

$$\sigma_{\rho} = \rho \left\{ \frac{1}{2} (1 - \cos 2\theta) + 2m_0 + \frac{d_0}{\rho^2} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n(2n+1)d_{2n}}{\rho^{2n+2}} + \frac{(n-1)(2n-1)e_{2n}}{\rho^{2n}} + \right. \right. \\ \left. \left. + n(2n-1)l_{2n}\rho^{2n-2} + (n+1)(2n+1)m_{2n}\rho^{2n} \right] \cos 2n\theta \right\},$$

$$\tau_{\theta\rho} = -\rho \left\{ \frac{1}{2} \sin 2\theta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ n(2n-1) \left( l_{2n}\rho^{2n-2} - \frac{e_{2n}}{\rho^{2n}} \right) + n(2n+1) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( m_{2n}\rho^{2n} - \frac{d_{2n}}{\rho^{2n+2}} \right) \right] \sin 2n\theta \right\}.$$

Значения коэффициентов, входящих в формулы (II.138), для некоторых значений  $\lambda$  даны в табл. II.19\*.

В табл. II.20 приведены значения  $\sigma_{\theta}/\rho$  по контуру кругового отверстия в полосе при различных значениях  $\lambda = a/b$ .

В табл. II.21 представлены значения  $\sigma_{\theta}/\rho$  по поперечному сечению полосы ( $\theta = \pi/2$ ), проходящему через центр кругового отверстия (см. рис. II.63).

В табл. II.22 (в колонках для ограниченной полосы) приведены значения  $\frac{\sigma_{\rho}}{\rho} = \frac{\sigma_x}{\rho}$  и  $\frac{\sigma_{\theta}}{\rho} = \frac{\sigma_y}{\rho}$  по сечению  $\theta = 0$ , т. е. по оси  $Ox$ , для случая, когда диаметр отверстия равен высоте полосы (при  $\lambda = a/b = 0,5$ ). Для сравнения в той же таблице приведены те же величины возле такого же отверстия, но для пластинки неограниченных размеров.

По данным табл. II.20 на рис. II.64 построены\*\* кривые для различных значений  $\lambda$ : кривая 1 — для  $\lambda = 0,5$ ; кривая 2 — для  $\lambda = 0,4$ ; кривая 3 — для  $\lambda = 0,3$  и кривая 4 — для  $\lambda = 0$ , т. е. для пластинки неограниченных размеров.

\* Табл. II.19 и II.20 заимствованы нами из работы R. Howland [1].

\*\* Значения  $\sigma_{\theta}/\rho$  отложены в радиальном направлении так: положительные — вне круга, а отрицательные — внутри круга.

Таблица II.19

h	$\lambda$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$d_0$	$5,01 \cdot 10^{-3}$	$2,02 \cdot 10^{-2}$	$4,59 \cdot 10^{-2}$	$8,28 \cdot 10^{-2}$	$1,32 \cdot 10^{-1}$
$d_2$	$2,54 \cdot 10^{-5}$	$4,25 \cdot 10^{-4}$	$2,34 \cdot 10^{-3}$	$8,28 \cdot 10^{-3}$	$2,33 \cdot 10^{-2}$
$d_4$	$3,15 \cdot 10^{-11}$	$3,05 \cdot 10^{-8}$	$1,85 \cdot 10^{-6}$	$3,32 \cdot 10^{-5}$	$3,14 \cdot 10^{-4}$
$d_6$	$1,40 \cdot 10^{-15}$	$2,13 \cdot 10^{-11}$	$6,32 \cdot 10^{-9}$	$3,42 \cdot 10^{-7}$	$7,51 \cdot 10^{-6}$
$d_8$	$5,00 \cdot 10^{-20}$	$1,19 \cdot 10^{-14}$	$1,72 \cdot 10^{-11}$	$2,82 \cdot 10^{-9}$	$1,45 \cdot 10^{-7}$
$e_2$	$-5,08 \cdot 10^{-3}$	$-2,13 \cdot 10^{-2}$	$-5,21 \cdot 10^{-2}$	$-1,04 \cdot 10^{-1}$	$-1,89 \cdot 10^{-1}$
$e_4$	$-4,21 \cdot 10^{-9}$	$-1,02 \cdot 10^{-6}$	$-2,75 \cdot 10^{-5}$	$-2,79 \cdot 10^{-4}$	$-1,70 \cdot 10^{-3}$
$e_6$	$-1,68 \cdot 10^{-12}$	$-6,41 \cdot 10^{-10}$	$-8,45 \cdot 10^{-8}$	$-2,58 \cdot 10^{-6}$	$-3,64 \cdot 10^{-5}$
$e_8$	$-5,72 \cdot 10^{-18}$	$-3,41 \cdot 10^{-13}$	$-2,20 \cdot 10^{-10}$	$-2,02 \cdot 10^{-8}$	$-6,7 \cdot 10^{-7}$
$l_2$	$4,13 \cdot 10^{-3}$	$1,62 \cdot 10^{-2}$	$4,09 \cdot 10^{-2}$	$8,03 \cdot 10^{-2}$	$1,40 \cdot 10^{-1}$
$l_4$	$1,06 \cdot 10^{-3}$	$4,10 \cdot 10^{-3}$	$1,01 \cdot 10^{-2}$	$1,92 \cdot 10^{-2}$	$3,27 \cdot 10^{-2}$
$l_6$	$2,83 \cdot 10^{-4}$	$1,08 \cdot 10^{-3}$	$2,61 \cdot 10^{-3}$	$4,82 \cdot 10^{-3}$	$8,09 \cdot 10^{-3}$
$l_8$	$7,24 \cdot 10^{-5}$	$2,74 \cdot 10^{-4}$	$6,44 \cdot 10^{-4}$	$1,17 \cdot 10^{-3}$	$1,95 \cdot 10^{-3}$
$l_{10}$	$1,82 \cdot 10^{-5}$	$6,82 \cdot 10^{-5}$	$1,57 \cdot 10^{-4}$	$2,79 \cdot 10^{-4}$	$4,71 \cdot 10^{-4}$
$l_{12}$	$4,65 \cdot 10^{-6}$	$1,80 \cdot 10^{-5}$	$3,80 \cdot 10^{-5}$	$6,64 \cdot 10^{-5}$	$1,14 \cdot 10^{-4}$
$l_{14}$	$1,15 \cdot 10^{-6}$	$4,41 \cdot 10^{-6}$	$9,12 \cdot 10^{-6}$	$1,58 \cdot 10^{-6}$	$2,8 \cdot 10^{-5}$
$m_0$	$5,69 \cdot 10^{-4}$	$2,46 \cdot 10^{-3}$	$5,15 \cdot 10^{-3}$	$8,89 \cdot 10^{-3}$	$1,40 \cdot 10^{-2}$
$m_2$	$-1,13 \cdot 10^{-3}$	$-4,35 \cdot 10^{-3}$	$-1,09 \cdot 10^{-2}$	$-2,11 \cdot 10^{-2}$	$-3,62 \cdot 10^{-2}$
$m_4$	$-5,95 \cdot 10^{-4}$	$-2,29 \cdot 10^{-3}$	$-5,60 \cdot 10^{-3}$	$-1,06 \cdot 10^{-2}$	$-1,78 \cdot 10^{-2}$
$m_6$	$-2,28 \cdot 10^{-4}$	$-8,70 \cdot 10^{-4}$	$-2,10 \cdot 10^{-3}$	$-3,88 \cdot 10^{-3}$	$-6,47 \cdot 10^{-3}$
$m_8$	$-7,65 \cdot 10^{-5}$	$-2,90 \cdot 10^{-4}$	$-6,88 \cdot 10^{-4}$	$-1,25 \cdot 10^{-3}$	$-2,08 \cdot 10^{-4}$
$m_{10}$	$-2,39 \cdot 10^{-5}$	$-8,99 \cdot 10^{-5}$	$-2,10 \cdot 10^{-4}$	$-3,78 \cdot 10^{-4}$	$-6,30 \cdot 10^{-4}$
$m_{12}$	$-7,30 \cdot 10^{-6}$	$-2,86 \cdot 10^{-5}$	$-6,17 \cdot 10^{-5}$	$-1,10 \cdot 10^{-4}$	$-1,84 \cdot 10^{-4}$

Таблица II.20

$\theta^\circ$	$\lambda$					
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	-1,00	-1,03	-1,11	-1,26	-1,44	-1,58
15	-0,73	-0,74	-0,82	-0,95	-1,12	-1,32
30	0,00	-0,01	-0,06	-0,15	-0,30	-0,51
45	1,00	1,00	1,00	0,98	0,91	0,77
60	2,00	2,01	2,07	2,15	2,25	2,32
75	2,73	2,74	2,85	3,03	3,32	3,72
90	3,00	3,03	3,14	3,36	3,74	4,32

На рис. II.65 построены эпюры напряжений: кривая 1 дает значения  $\sigma_{\theta}/p$  по контуру отверстия при  $\lambda=0,5$ ; кривая 2 — значения  $\sigma_{\theta}/p$ , подсчитанные по формулам (II.138) при  $\lambda=0,5$ , и кривая (точечная) 3 построена по данным, полученным методом фотоупругости на контуре отверстия.

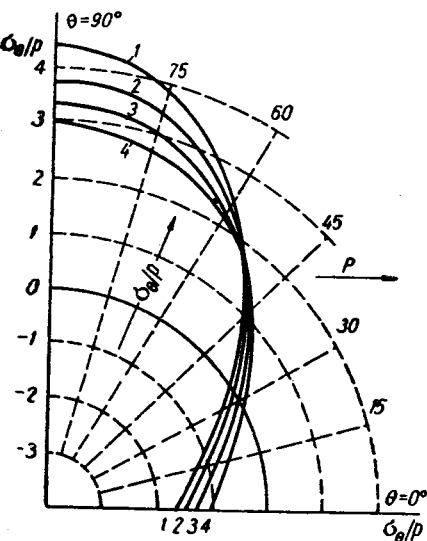


Рис. II.64

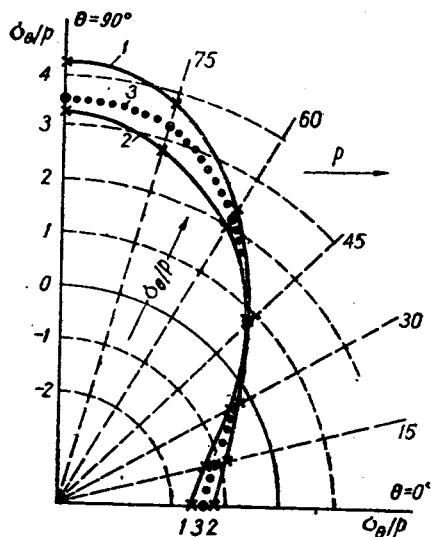


Рис. II.65

На рис. II.66 построены кривые для  $\sigma_{\theta}/p$  по наиболее опасному сечению  $\theta=\pi/2$  для различных  $\lambda$  по данным табл. II.22. Штриховая кривая показывает рост коэффициента концентрации напряжений при возрастании  $\lambda$ .

На рис. II.67 представлены графически данные, приведенные в предыдущих таблицах для растянутой полосы с круговым отверстием при

Таблица II.21

$\rho$	$\lambda$				
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,1	3,03	—	—	—	—
0,2	1,23	3,14	—	—	—
0,3	1,08	1,57	3,36	—	—
0,4	1,04	1,26	1,93	3,74	—
0,5	1,03	1,16	1,47	2,30	4,32
0,6	1,02	1,11	1,28	1,75	2,75
0,7	1,01	1,07	1,17	1,48	2,04
0,8	1,01	1,05	1,07	1,28	1,61
0,9	1,00	1,01	0,96	1,08	1,22
1,0	0,99	0,97	0,89	0,81	0,73

Таблица II.22

$\xi$	$\sigma_x/p = \sigma_{\theta}/p$		$\sigma_y/p = \sigma_{\theta}/p$	
	Ограниченная полоса	Неограниченная пластинка	Ограниченная полоса	Неограниченная пластинка
0,5	0,00	0,00	-1,6	-1,00
0,6	-0,09	-0,01	-0,7	-0,38
0,7	0,02	0,12	-0,4	-0,14
0,8	0,17	0,25	-0,1	0,03
0,9	0,31	0,37	0,0	0,01
1,0	0,44	0,47	0,1	0,03
$\pi/2$	0,81	0,76	—	—
$2\pi/3$	0,95	0,86	—	—
$\pi$	1,00	0,94	—	—

$\lambda=0,5$ ; кривая 1 дает напряжения  $\sigma_\theta/\rho$  по контуру кругового отверстия при  $\lambda=0,5$  (см. табл. II.20); кривая 2 — напряжения  $\sigma_\theta/\rho$  по наиболее опасному сечению  $\theta = \pi/2$  при  $\lambda = 0,5$  (см. табл. II.21); кривая 3 — напряжения  $\sigma_\theta/\rho$  по сечению  $\theta=0$ , т. е. по оси полосы при  $\lambda=0,5$  (см. табл. II.22); кривая 4 — напряжения  $\sigma_y/\rho$  по сечению  $\theta=0$  при  $\lambda=0,5$  (см. табл. II.22). Штриховые кривые построены по экспериментальным данным, полученным оптическим методом.

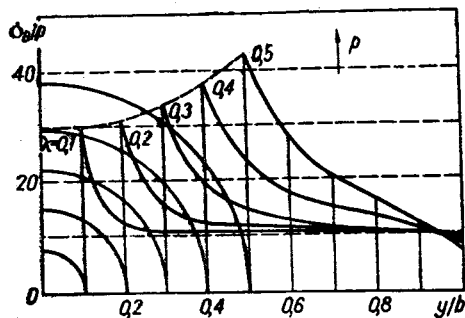


Рис. II.66

По приведенным в таблицах данным можно сделать следующие выводы.

1. При данной ширине полосы с увеличением радиуса отверстия коэффициент концентрации значительно возрастает (см. табл. II.20). Например, при  $\lambda=0,5$  этот коэффициент равен 4,32, тогда как для пластинки неограниченных размеров он равен только 3,0. Для значений  $\lambda$ , отличных от приведенных на рис. II.66,

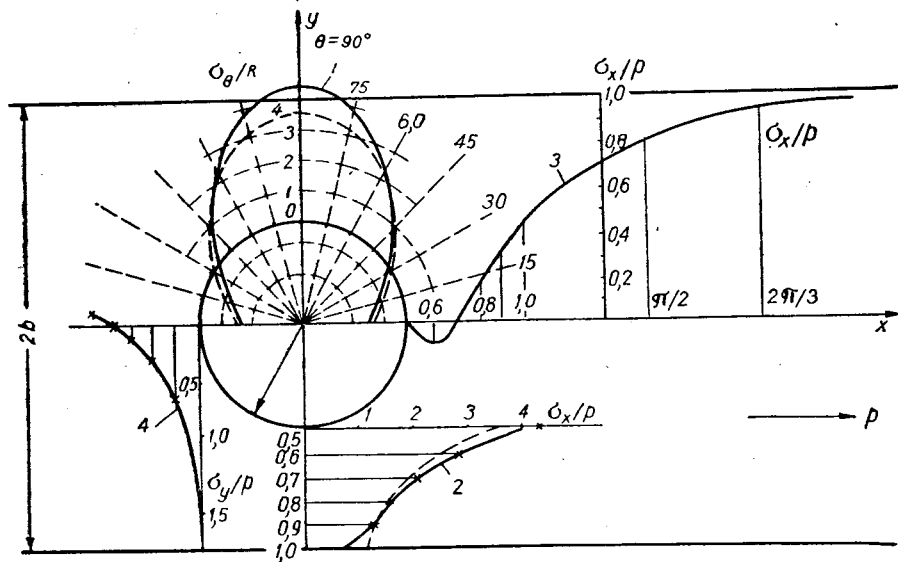


Рис. II.67

коэффициент концентрации может быть непосредственно взят по штрихпунктирной кривой этого рисунка.

2. Если ограничиться обычной точностью (до 6%), то, как следует из данных табл. II.20 и II.21, решения, полученные для неограниченных областей, можно применять к пластинкам конечных размеров,



если отношение диаметра отверстия (центрально расположенного) к наименьшему размеру пластинки, т. е.  $\lambda = a/b$ , будет не меньше 0,2; другими словами, ширина пластинки должна быть не менее чем в пять раз больше диаметра отверстия\*.

**Чистый сдвиг полосы с круговым отверстием.** Тем же методом, которым решена задача о растяжении полосы с круговым отверстием, С. К. Wang [1] решил задачу о распространении напряжений в изотропной полосе шириной  $2b$  (см. рис. II.63) с круговым отверстием радиуса  $R = a < b$ , по граням  $y = \pm b$  которой приложены сдвигающие усилия  $\tau_{xy} = -\tau = \text{const}$ . Контур отверстия был свободен от внешних усилий. Напряжение по контуру отверстия С. К. Wang [1] дает в виде

$$\sigma_{\theta} = \tau(a_1 \sin 2\theta - a_2 \sin 4\theta + a_3 \sin 6\theta - a_4 \sin 8\theta + a_5 \sin 10\theta).$$

Числовые величины коэффициентов  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$  для различных значений  $\lambda = a/b$  приведены в табл. II.23. Величины  $\tau_{\rho\theta}/\tau$  по сечению  $\theta = -\pi/2$  для различных значений  $\lambda$  даны в табл. II.24.

Таблица II.23

$\lambda = a/b$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
0,0	-4,0000	—	—	—	—
0,1	-4,1078	-0,0012	—	—	—
0,2	-4,4453	-0,0191	-0,0004	—	—
0,3	-5,0577	-0,0996	-0,0053	-0,0003	—
0,4	-6,0367	-0,3292	-0,0301	-0,0021	-0,0001
0,5	-7,5563	-0,8700	-0,1193	-0,0105	-0,0011

Таблица II.24

$\eta = y/b$	$\lambda = a/b$					
	0 (полоса без отверстия)	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0,0	1,000	—	—	—	—	—
0,1	1,000	0,000	—	—	—	—
0,2	1,000	1,348	0,000	—	—	—
0,3	1,000	1,217	1,448	0,000	—	—
0,4	1,000	1,143	1,464	1,527	0,000	—
0,5	1,000	1,103	1,383	1,712	1,716	0,000
0,6	1,000	1,079	1,311	1,666	2,051	2,114
0,7	1,000	1,062	1,251	1,570	2,023	2,577
0,8	1,000	1,046	1,190	1,447	1,847	2,459
0,9	1,000	1,028	1,115	1,275	1,533	1,973
1,0	1,000	1,000	1,001	1,003	1,006	1,028

\* Это заключение, выведенное для простого растяжения пластинки с круговым отверстием, очевидно, будет справедливым и для чистого изгиба пластинки, ослабленной круговым отверстием (см. § 2 и 4 гл. II, а также § 4 гл. III).

**Заключительные замечания.** Укажем на некоторые работы по исследованию напряженного состояния в пластинке конечных размеров, ослабленной круговым отверстием. Концентрация напряжений возле кругового отверстия в растягиваемой конечной прямоугольной пластинке рассматривалась Н. Ф. Гурьевым [1, 2], а в квадратной пластинке — В. М. Ракивненко и В. И. Маховиковым [1]. Растяжение и изгиб бесконечной изотропной полосы, ослабленной круговым отверстием, рассматривал Нагаи [1]. Он исследовал концентрацию напряжений возле

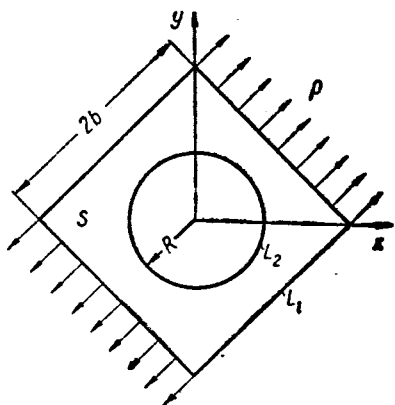


Рис. II.68

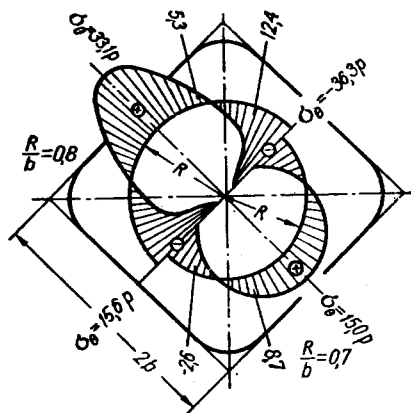


Рис. II.69

отверстия в зависимости от размеров отверстия и его расположения по ширине полосы. Распределение напряжений в квадратной пластинке с центральным круговым отверстием при действии гидростатического давления вдоль контура отверстия исследовано в работе G. A. O. Davies [1], D. K. Vaid, R. K. Varma, S. T. Awade [1]. В последней работе задача решалась методом релаксации при густой сетке. Построено большее число графиков распределения напряжений при различных геометрических соотношениях. Эта же задача при нецентральной круговом отверстии рассматривалась З. Г. Алиевым [1]. М. З. Народецким [4] методом комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили решена задача о растяжении изотропной квадратной пластинки с центральным круговым отверстием усилиями, равномерно распределенными по двум противоположным сторонам, когда контур отверстия свободен от внешних усилий (рис. II.68).

Контур квадрата заменялся гладким контуром, когда отображающая функция бралась в виде

$$\omega(\zeta) = A \left[ \zeta + \frac{m}{\zeta^3} \right], \quad b = A(1 - m), \quad m = \frac{1}{9}, \quad (\text{II.139})$$

$$\zeta = \varrho e^{i\theta} \quad (\text{при } \varrho = 1).$$

Поскольку граничные условия на контуре отверстия удовлетворялись точно, на контуре отверстия  $\sigma_r = 0$ ,  $\tau_{r\theta} = 0$ , а

$$\sigma_\theta = 4p \sum_{k=0}^s \left(\frac{8}{9}c\right)^{4k} \{ (4k+1)[a_{4k+1} \cos 4k\theta - b_{4k+1} \sin(4k+2)\theta] - \\ - (4k-3)[a_{4k+3} \sin(4k+2)\theta + b_{4k+3} \cos(4k+1)\theta] \}. \quad (\text{II.140})$$

На рис. II.69 представлены эпюры напряжений  $\sigma_\theta$  в точках, лежащих на контуре отверстия, для  $c=0,7$  и  $c=0,8$ , где  $c=R/b$  ( $R$  — радиус отверстия). Как видим, увеличение параметра  $c$  на 0,1 (от 0,7 до 0,8) увеличивает наибольшее напряжение  $\sigma_\theta$  в 2,5 раза.

### § 7. Концентрация напряжений в областях, ограниченных двумя окружностями или окружностью и прямой

В общем случае, когда область ограничена двумя неконцентрическими окружностями, задача определения напряженного состояния в ней по заданным внешним усилиям вдоль границы сведена В. Н. Замятиной [1] к интегральному уравнению. Однако для решения частных задач удобно перейти, как это показал Н. Е. Жуковский [1], к криволинейной системе координат  $x=x(\xi, \eta)$ ,  $y=y(\xi, \eta)$  так, чтобы граница области могла быть представлена в виде уравнения  $\eta=\text{const}$  либо  $\xi=\text{const}$ , т. е. чтобы она совпадала с одной из координатных линий нашей системы. Для этого возьмем криволинейные координаты в виде

$$x = \frac{a \sin \eta}{\text{ch } \xi - \cos \eta}, \quad y = \frac{a \text{ sh } \xi}{\text{ch } \xi - \cos \eta}. \quad (\text{II.141})$$

Тогда на плоскости  $xOy$  кривые  $\xi=\text{const}$  и  $\eta=\text{const}$  представляют собой окружности (центры которых лежат соответственно на осях  $Ox$  и  $Oy$ ), пересекающиеся под прямым углом друг с другом.

Рассмотрим, например, кривую  $\xi=\xi_0=\text{const}>0$ . Это будет окружность

$$(y - a \text{cth } \xi_0)^2 + x^2 = \frac{a^2}{\text{sh}^2 \xi_0} \quad (\text{II.142})$$

с центром  $C(O, a \text{cth } \xi_0)$ , лежащим на оси  $Oy$ , и радиусом

$$R = \frac{a}{\text{sh } \xi_0} = a \text{csch } \xi_0. \quad (\text{II.143})$$

При  $\xi_0 \rightarrow \infty$  радиус (II.143) будет стремиться к нулю, а центр этой окружности — к точке  $O_2(0, a)$  (рис. II.70).

Аналогичные рассуждения для  $\xi=\xi_0=\text{const}<0$  приведут к тому, что предельной окружностью для  $\xi_0<0$  будет точка  $O_1(0, -a)$ . Нетруд-

но видеть, что для всех  $\xi > 0$  окружности (II.142) будут располагаться выше оси  $Ox$ , а для  $\xi < 0$  — ниже ее. Значению  $\xi = 0$  будет соответствовать прямая  $y = 0$ , т. е. ось  $Ox$ .

Рассмотрим кривые  $\eta = \eta_0 = \text{const} > 0$ . Исключив параметр  $\xi$  из уравнения (I.141), найдем, что кривая  $\eta = \eta_0 = \text{const}$  есть окружность

$$(x - a \text{ctg } \eta_0)^2 + y^2 = \frac{a^2}{\sin^2 \eta_0} \quad (\text{II.144})$$

с центром  $C_1(a, \text{ctg } \eta_0, 0)$ , лежащим на оси  $Ox$ , и радиусом

$$R_1 = \frac{a}{\sin \eta_0}. \quad (\text{II.145})$$

Очевидно, что все окружности (II.144) проходят через точки  $O_1(0, -a)$  и  $O_2(0, a)$ . Устремляя в (II.144)  $\eta$  к нулю, видим, что радиусы кругов будут неограниченно увеличиваться, а поскольку все эти окружности будут проходить через две точки  $O_1$  и  $O_2$ , то значению  $\eta = 0$  будет соответствовать прямая  $x = 0$ , т. е. ось  $Oy$ . Для  $\eta_0 > 0$  центры окружностей (II.144) будут располагаться по правую сторону от оси  $Oy$ , а для  $\eta < 0$  — по левую.

Примем параметры  $\xi, \eta$  за криволинейные координаты. Связь между этими криволинейными (ортогональными) координатами, называемыми биполярными, и декартовыми дана формулами (I.141). Возьмем на плоскости  $xOy$  какую-либо точку  $K(\xi_0, \eta_0)$  пересечения окружностей  $\xi = \xi_0 = \text{const}$  и  $\eta = \eta_0 = \text{const}$ . Очевидно, координаты точки  $A$  будут  $\xi = \xi_0$  и  $\eta = 0$ , а точки  $B$   $\xi = \xi_0$  и  $\eta = \pi$ . Если обозначить центральный угол  $ACK$  через  $\theta^*$  и отсчитывать его так, как указано на рис. II.70, легко найдем зависимость между углом  $\theta$  и параметром  $\eta$ :

$$\sin \theta^* = \frac{x}{R} = \frac{\text{sh } \xi \sin \eta}{\text{ch } \xi - \cos \eta}. \quad (\text{II.146})$$

Пользуясь этой системой криволинейных (ортогональных) координат, С. А. Чаплыгин [1], С. Г. Гутман [1] и G. В. Jeffery [1] решили ряд технически важных задач о концентрации напряжений для областей, ограниченных двумя неконцентрическими окружностями или окружностью и прямой, а R. D. Mindlin [1] исследовал напряжения возле кругового отверстия в тяжелой полуплоскости. С помощью другой системы биполярных координат С. В. Ling [1, 2] дал решение задач об одноосном растяжении плоскости, ослабленной двумя равными круговыми отверстиями или отверстием, контур которого состоит из двух равных дуг окружности.

Цилиндр под внутренним давлением  $p_1 = \text{const}$ . Допустим, что поперечное сечение цилиндра представляет собой двусвязную область, ограниченную двумя неконцентрическими окружностями радиусов  $R_1$  (внутренней окружности) и  $R_2$  (внешней окружности), как это указано на рис. II.71.

Предположим, что по контуру внутренней окружности цилиндра приложено равномерно распределенное давление  $p_1$ , а внешний контур (окружность радиуса  $R_2$ ) свободен от внешних усилий. Расстояние между центрами этих окружностей обозначим через  $d$  (см. рис. II.71).

Напряжения по контуру внешней окружности радиуса  $R_2$  (на площадках, перпендикулярных к контуру  $\xi = \text{const}$ )

$$\sigma_\eta = 2p_1 \frac{R_1^2 [R_2^2 (R_2 - 2d \cos \eta)^2 - (R_1^2 - d^2)^2]}{(R_1^2 + R_2^2) [R_2^2 - (R_1 + d)^2] [R_2^2 - (R_1 - d)^2]} \quad (\text{II.147})$$

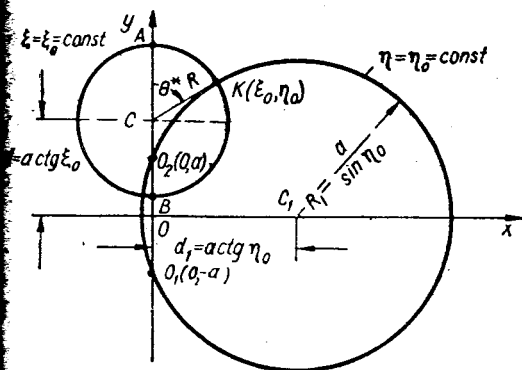


Рис. II.70

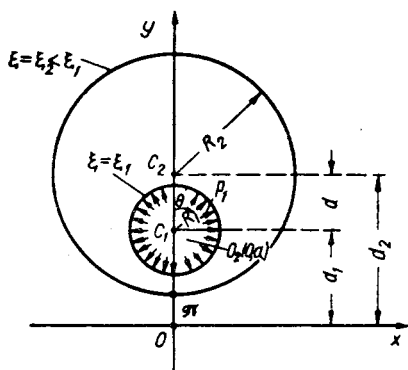


Рис. II.71

Из (II.147) и неравенства  $d + R_1 < R_2$  получим следующее.

1. Наибольшее численное значение  $\sigma_\eta$  (II.147) будет при  $\eta = \pi$ , т. е. в точке пересечения линии центров (оси  $Oy$ ) с кругом радиуса  $R_2$  (т. е. кривой  $\xi_2 = \text{const}$ ) в тонкой части цилиндра:

$$(\sigma_\eta)_{\eta=\pi} = 2p_1 \frac{R_1^2 (R_2^2 + R_1^2 + 2R_2 d - d^2)}{(R_1^2 + R_2^2) (R_2^2 - R_1^2 - 2R_2 d + d^2)} \quad (\text{II.148})$$

2. Если расстояние между центрами кругов  $C_1$  и  $C_2$  больше половины радиуса внешнего круга, т. е.  $d > \frac{1}{2} R_2$ ,  $\sigma_\eta$  (II.147) принимает минимальное значение в точке  $\cos \eta = \frac{R_2}{2d}$ . Это напряжение  $\sigma_\eta$  всегда отрицательно (если  $p_1$  — давление):

$$\sigma_\eta = - \frac{2p_1 R_1^2 (R_1^2 - d^2)^2}{(R_1^2 + R_2^2) [R_2^2 - (R_1 + d)^2] [R_2^2 - (R_1 - d)^2]} \quad (\text{II.149})$$

значения  $\sigma_\eta$  (II.149) численно всегда меньше максимальных значений (II.148). Так как в промежутке  $0 < \eta < \pi$  напряжения  $\sigma_\eta$  меняют знак, в точке  $\eta = 0$ , т. е. в точке пересечения линии центров (оси  $Oy$ )

с окружностью радиуса  $R_2$  в толстой части цилиндра, напряжения принимают также экстремальное (максимальное) значение:

$$(\sigma_\eta)_{\eta=0} = 2p_1 \frac{R_1^2 (R_2^2 + R_1^2 - 2R_2d - d^2)}{(R_1^2 + R_2^2) (R_2^2 - R_1^2 + 2R_2d + d^2)}, \quad (\text{II.150})$$

однако всегда  $(\sigma_\eta)_{\eta=\pi} > (\sigma_\eta)_{\eta=0}$ .

3. Если расстояние  $d$  между центрами кругов  $C_1$  и  $C_2$  (см. рис. II.71) меньше половины радиуса внешнего круга, т. е.  $d < 1/2 R_2$ , мы имеем в дополнение к максимальным напряжениям  $\sigma_\eta$  (II.148) минимальные значения  $\sigma_\eta$  при  $\eta=0$ , данные формулой (II.150). Никаких больше максимумов и минимумов  $\sigma_\eta$  иметь в этом случае не будет. Оно непрерывно уменьшается от максимальных значений  $\sigma_\eta$  (II.148) в тонкой части цилиндра к значениям  $\sigma_\eta$  (II.150) в толстой части цилиндра.

Напряжения  $\sigma_\eta$  во внутренней окружности радиуса  $R_1$  ( $\xi_1 = \text{const}$ ) будут везде растягивающими:

$$\sigma_\eta = -p_1 + \frac{2p_1 R_2^2 [(R_2^2 - d^2)^2 - R_1^2 (R_1 + 2d \cos \eta)^2]}{(R_1^2 + R_2^2) [R_2^2 - (R_1 - d)^2] [R_2^2 - (R_1 + d)^2]}. \quad (\text{II.151})$$

Из (II.151) получим следующее.

1. Если расстояние  $d$  между центрами кругов  $\xi_1 = \text{const}$  и  $\xi_2 = \text{const}$  будет больше половины радиуса внутреннего круга, т. е.  $d > 1/2 R_1$ , максимальные значения  $\sigma_\eta$  на внутренней окружности будут в точке

$$\cos \eta = -\frac{R_1}{2d}:$$

$$\sigma_\eta = -p_1 \left\{ 1 - \frac{2R_2^2 (R_2^2 - d^2)^2}{(R_1^2 + R_2^2) [R_2^2 - (R_1 - d)^2] [R_2^2 - (R_1 + d)^2]} \right\}. \quad (\text{II.152})$$

2. Если расстояние  $d$  между центрами кругов будет меньше половины радиуса внутреннего круга, т. е.  $d < 1/2 R_1$ , максимальное значение  $\sigma_\eta$  будет в точке  $\eta = \pi$ , т. е. в точке пересечения оси  $Oy$  с окружностью радиуса  $R_1$  в тонкой части цилиндра:

$$\sigma_\eta = -p_1 \left\{ 1 - \frac{2R_2^2 (R_2^2 + R_1^2 - 2R_1d - d^2)}{(R_1^2 + R_2^2) (R_2^2 - R_1^2 - 2R_1d - d^2)} \right\}. \quad (\text{II.153})$$

3. Минимальные значения  $\sigma_\eta$  на окружности радиуса  $R_1$  будут в точке  $\eta=0$ , т. е. в точке пересечения этой окружности с линией центров (осью  $Oy$ ) в толстой части цилиндра:

$$\sigma_\eta = -p_1 \left\{ 1 - \frac{2R_2^2 (R_2^2 + R_1^2 + 2R_1d - d^2)}{(R_1^2 + R_2^2) (R_2^2 - R_1^2 + 2R_1d - d^2)} \right\}. \quad (\text{II.154})$$

**Цилиндр под внешним давлением  $p_2 = \text{const}$ .** Допустим, что давление  $p_2 = \text{const}$  приложено только по внешней окружности радиуса  $R_2$ , а внутренняя окружность  $R = R_1$  свободна от внешних усилий (см. рис. II.71).

Напряжения по внутреннему контуру, т. е. на окружности радиуса  $R_1$ ,

$$\sigma_{\eta} = -2p_2 R_2^2 \frac{(R_2^2 - d^2)^2 - R_1^2 (R_1 + 2d \cos \eta)^2}{(R_1^2 + R_2^2) [R_2^2 - (R_1 - d)^2] [R_2^2 - (R_1 + d)^2]}, \quad (\text{II.155})$$

а по внешнему контуру, т. е. по окружности радиуса  $R_2$ ,

$$\sigma_{\eta} = -p_2 \left\{ 1 + \frac{2R_1^2 [R_2^2 (R_2 - 2d \cos \eta)^2 - (R_1^2 - d^2)^2]}{(R_1^2 + R_2^2) [R_2^2 - (R_1 - d)^2] [R_2^2 - (R_1 + d)^2]} \right\}. \quad (\text{II.156})$$

Из (II.155) получим следующее.

1. Если расстояние между центрами кругов  $\xi_1 = \text{const}$  и  $\xi_2 = \text{const}$  будет меньше половины радиуса внутренней окружности, т. е.  $d < R_1/2$ , экстремальные значения  $\sigma_{\eta}$  будут в точках  $\eta = 0$  и  $\eta = \pi$ , а наибольшие по абсолютному значению  $\sigma_{\eta}$  (II.155) — в точке  $\eta = \pi$ , т. е. в точке пересечения линии центров с внутренней окружностью радиуса  $R_1$  в тонкой части цилиндра.

2. Если расстояние между центрами кругов  $\xi_1 = \text{const}$  и  $\xi_2 = \text{const}$  будет больше половины радиуса внутренней окружности, т. е.  $d > R_1/2$ , экстремальные значения  $\sigma_{\eta}$  будут в точках  $\eta = 0$  и  $\eta = \pi$ , а наибольшие по абсолютному значению сжимающие напряжения  $\sigma_{\eta}$  (II.155) — в точках  $\cos \eta = -R_1/2d$ . Из (II.156) нетрудно видеть, что как для  $d < R_2/2$ , так и для  $d > R_2/2$  наибольшие по абсолютной величине значения  $\sigma_{\eta}$  по внешнему контуру будут в точке  $\eta = \pi$ . Если в формулах (II.147), (II.151), (II.155) и (II.156) положить  $d = 0$ , получим известные формулы Ляме.

**Полуплоскость с круговым отверстием, по краю которого приложено равномерно распределенное давление.** Если положить в предыдущих формулах  $\xi_2 = 0$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_1 = p$  и  $R_1 = R$ , получим решение для полуплоскости, в которой на некотором расстоянии  $d$  от прямолинейного края (рис. II.72) сделано круговое отверстие радиуса  $R$  и по контуру этого отверстия приложено равномерно распределенное давление  $p$ . На границе же полуплоскости внешних усилий не приложено\*.

Обозначив через  $x$  расстояние, измеряемое вдоль оси  $Ax$  от точки  $A$ , получим напряжения  $\sigma_x$  по контуру прямолинейной грани полуплоскости, т. е. по оси  $Ax$ ,

$$\sigma_x = -4p \frac{R^2 (x^2 - d^2 + R^2)}{(x^2 + d^2 - R^2)^2}. \quad (\text{II.157})$$

Наибольшие растягивающие напряжения будут в точке  $A$ :

$$(\sigma_x)_{\max} = 4p \frac{R^3}{d^2 - R^2}. \quad (\text{II.158})$$

\* Случай, когда по прямолинейной грани полуплоскости приложено равномерно распределенное давление  $p = \text{const}$ , подробно рассмотрен С. Г. Гутманом [1], Д. Р. Gurta [1, 2].

В точках  $x = \pm \sqrt{d^2 - R^2}$  напряжение  $\sigma_x$  равно нулю и при дальнейшем увеличении  $x$  оно становится сжимающим, достигая наибольшей величины в точках  $x = \pm \sqrt{3(d^2 - R^2)}$ :

$$\sigma_x = -\frac{\rho}{2} \frac{R^2}{d^2 - R^2}.$$

Напряжения  $\sigma_\eta$  по контуру кругового отверстия могут быть найдены из простого геометрического построения. Обозначив через  $C$  центр кругового отверстия, через  $Q$  — произвольную точку контура отверстия,  $CA$  — перпендикуляр, опущенный из точки  $C$  на прямолинейную границу полуплоскости и  $\varphi$  — угол  $QAC$  (см. рис. II.72), получим напряжения  $\sigma_\eta$  по контуру кругового отверстия

$$\sigma_\eta = \rho(1 + 2\operatorname{tg}^2 \varphi). \quad (\text{II.159})$$

Из этого построения видно, что напряжения  $\sigma_\eta$  будут одни и те же в точках  $Q$  и  $Q'$ , которые лежат на одной прямой, выходящей из точки  $A$  и пересекающей контур отверстия. Минимальные растягивающие напряжения  $\sigma_\eta$  по контуру отверстия будут, очевидно, в точках  $B$  и  $D$ , т. е. в точках, наиболее и наименее удаленных от прямолинейной грани полуплоскости.

Положив в (II.159)  $\varphi=0$ , получим  $\sigma_\eta=\rho$ . Из формулы (II.159) следует, что наибольшие значения  $\sigma_\eta$  будут в точках контура отверстия, для которых  $\varphi=\varphi_{\max}$ :

$$(\sigma_\eta)_{\max} = \rho \frac{d^2 + R^2}{d^2 - R^2}; \quad (\text{II.160})$$

это — точки контура кругового отверстия, в которых прямая  $AQ$  будет касательной к контуру.

Если  $d=R\sqrt{3}$ , то наибольшее значение растягивающих напряжений  $\sigma_\eta$  по контуру кругового отверстия будет равно максимальному значению растягивающих напряжений  $\sigma_x$  по прямолинейной грани полуплоскости и, как следует из формул (II.158) и (II.160),  $(\sigma_\eta)_{\max}=2\rho$ .

Из формул (II.158) и (II.160) следует, что если расстояние  $d$  центра кругового отверстия от прямолинейной грани будет больше, чем  $R\sqrt{3}$ , то наибольшие растягивающие напряжения  $\sigma_\eta$  будут на контуре кругового отверстия.

Если же  $d < R\sqrt{3}$ , то наибольшие напряжения  $\sigma_\eta$  будут в точке  $A$  прямолинейной грани полуплоскости.

Если ввести обозначение  $d=2\lambda R$ , формула (II.158) примет вид

$$(\sigma_x)_{\max} = \rho \frac{4}{4\lambda^2 - 1};$$

при  $\lambda=3/5$ , т. е. если расстояние  $AB=0,2R$ ,  $(\sigma_x)_{\max}=9,1\rho$ . Если уменьшим  $AB$  вдвое, т. е. расстояние  $AB=0,1R$ , то  $(\sigma_x)_{\max}=19,5\rho$ .



Обычно при расчетах заклепочных соединений  $\lambda = 1,5 \div 2,5$ , и из последней формулы находим, что напряжение в точке  $A$  заключено в интервале

$$\frac{1}{6} \rho < (\sigma_x)_{x=0} < \frac{1}{2} \rho.$$

**Растяжение полуплоскости, ослабленной круговым отверстием\***  
 Допустим, что в изотропной полуплоскости сделано круговое отверстие радиуса  $R$ , центр которого находится на расстоянии  $d$  от прямолинейной границы полуплоскости (рис. II.73). Эта полуплоскость растягива-

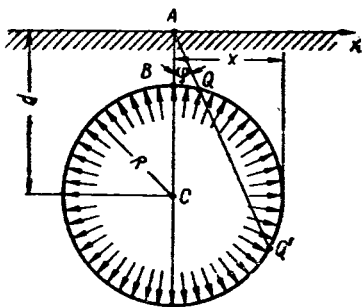


Рис. II.72

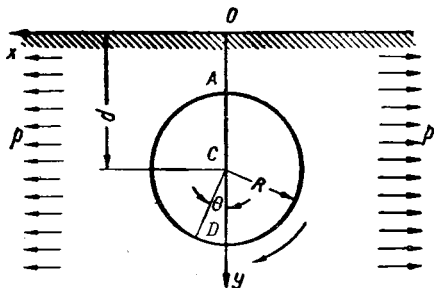


Рис. II.73

ется усилиями  $\rho = \text{const}$  параллельно прямолинейной грани полуплоскости.

Напряжения  $\sigma_\eta = \sigma_x$  на границе полуплоскости

$$\sigma_x = \rho \left[ 1 + (1 - \cos \eta) \sum_{n=1}^{\infty} P_n \cos n\eta \right]. \quad (\text{II.161})$$

Напряжения по контуру кругового отверстия \*\*

$$\sigma_\eta = 2\rho \left\{ 1 - \frac{2\text{sh}^2 \xi_1 \sin^2 \eta}{(\text{ch} \xi_1 - \cos \eta)^2} + (\text{ch} \xi_1 - \cos \eta) \times \right. \\ \left. \times \left[ \frac{1}{2\text{sh} \xi_1} + 2e^{-2\xi_1} \cos \eta + \sum_{n=2}^{\infty} N_n \cos n\eta \right] \right\}, \quad (\text{II.162})$$

где параметр  $\xi_1$  определяется по формуле  $d = R \text{ch} \xi_1$  или

$$\xi_1 = \ln \frac{d + \sqrt{d^2 - R^2}}{R}.$$

\* Этот случай рассмотрен также Ю. А. Устиновым [1], когда отверстие находится весьма близко от границы полуплоскости.

\*\* После исправления вкравшейся, к сожалению, в решение Г. В. Jeffery [1] ошибки (в функции напряжений был опущен один член), которая была любезно указана мне Д. Г. Хлебниковым, в решении Г. В. Jeffery [1], вероятно, впервые эту ошибку обнаружил R. G. Mindlin [2]. Табл. II. 25 и II.27 подсчитаны с учетом указанных исправлений.

Зависимость между углом  $\theta$  (отсчитываемым на оси  $Oy$  в направлении, указанном на рис. II.73 стрелкой) и параметром  $\eta$  дана формулой (II.146). Легко видеть из рис. II.70 и II.73, что абсциссы точек прямолинейной грани полуплоскости связаны с параметром  $\eta$  соотношением  $x = a \frac{1 - \cos \eta}{\sin \eta}$ , где  $a = R \operatorname{sh} \xi_1$  или  $a = \frac{d}{\operatorname{cth} \xi_1}$ . Значения коэффициентов  $P_n$  и  $N_n$ , входящих в формулы (II.161) и (II.162), для некоторых значений  $\xi_1$  даны соответственно в табл. II.25 и II.26.

Таблица II.25

$P_n$	$\xi_1$									
	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
$P_1$	1,7241	1,0119	0,6261	0,3991	0,2590	0,1700	0,1124	0,0746	0,0497	0,0332
$P_2$	3,4481	2,0238	1,2521	0,7982	0,5180	0,3400	0,2247	0,1493	0,0994	0,0664
$P_3$	2,2403	1,0617	0,5110	0,2448	0,1160	0,0543	0,0251	0,0115	0,0053	0,0024
$P_4$	1,3549	0,4874	0,1699	0,0570	0,0185	0,0059	0,0018	0,0006	0,0002	0,0001
$P_5$	0,7601	0,1969	0,0474	0,0108	0,0024	0,0005	0,0001	—	—	—
$P_6$	0,3964	0,0713	0,0116	0,0018	0,0003	—	—	—	—	—
$P_7$	0,1934	0,0237	0,0026	0,0003	—	—	—	—	—	—
$P_8$	0,0891	0,0073	0,0005	—	—	—	—	—	—	—
$P_9$	0,0391	0,0022	0,0001	—	—	—	—	—	—	—
$P_{10}$	0,0165	0,0006	—	—	—	—	—	—	—	—

Таблица II.26

$N_n$	$\xi_1$									
	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
$N_3$	1,4649	0,77160	0,4139	0,2240	0,1219	0,0665	0,0364	0,0199	0,0109	0,0060
$N_3$	0,7457	0,26470	0,0914	0,0306	0,0100	0,0032	0,0010	0,0003	0,0001	—
$N_4$	0,3238	0,00719	0,0148	0,0029	0,0005	0,0001	—	—	—	—
$N_5$	0,1232	0,01620	0,0019	0,0002	—	—	—	—	—	—
$N_6$	0,0421	0,00320	0,0002	—	—	—	—	—	—	—
$N_7$	0,0131	0,00050	—	—	—	—	—	—	—	—
$N_8$	0,0038	0,00010	—	—	—	—	—	—	—	—

Формула (II.162) для больших значений  $\xi_1$  с учетом (II.146) принимает вид

$$\sigma_\eta = 2\rho \left[ 1 - 2\sin^2 \theta + \frac{1}{2} \right] = \rho (1 + 2\cos 2\theta),$$

т. е. то, что и следовало было ожидать (см. § 2 гл. II).

В табл. II.27 приведены значения  $\sigma_x/\rho$  и  $\sigma_y/\rho$  в точках  $O$ ,  $A$  и  $D$  (см. рис. II.73) для различных значений  $d/R$ .

Тяжелая полуплоскость с круговым отверстием \*. Напряжения в тяжелой полуплоскости, т. е. полуплоскости (см. рис. II.73), находящейся под действием собственного веса  $\gamma = \rho g = \text{const}$  ( $\rho$  — плотность, а  $g$  — ускорение силы тяжести), ослабленной круговым отверстием радиуса  $R$ , центр которого находится на расстоянии  $d$  от прямолинейной

Таблица II.27

$\xi_1$	$d/R$	$\sigma_{x/p}$ в точке $O$	$\sigma_{\eta/p}$	
			в точке $A$	в точке $D$
0,6	1,185	0,314	6,960	3,523
0,8	1,337	0,412	5,387	3,414
1,0	1,543	0,506	4,494	3,323
1,2	1,811	0,596	3,944	3,249
1,4	2,151	0,681	3,596	3,189
1,6	1,577	0,758	3,376	3,141
1,8	3,107	0,822	3,238	3,104
2,0	3,762	0,863	3,151	3,076
2,2	4,570	1,911	3,096	3,054
$\infty$	$\infty$	1,000	3,000	3,000

ее грани, исследованы для трех случаев основного напряженного состояния нетронутого массива:

$$\text{I. } \sigma_y^0 = -\gamma y, \quad \sigma_x^0 = -\gamma y, \quad \tau_{xy}^0 = 0;$$

$$\text{II. } \sigma_y^0 = -\gamma y, \quad \sigma_x^0 = -\frac{\nu}{1-\nu} \gamma y, \quad \tau_{xy}^0 = 0;$$

$$\text{III. } \sigma_y^0 = -\gamma y, \quad \sigma_x^0 = 0, \quad \tau_{xy}^0 = 0,$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Компоненты напряжений в биполярных координатах определяются по формулам

$$\sigma_{\xi} = \frac{1}{a} \left\{ (\text{ch } \xi - \cos \eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \text{sh } \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} - \sin \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \text{ch } \xi \right\} - \frac{\alpha \gamma \text{sh } \xi}{\text{ch } \xi - \cos \eta}, \quad (\text{II.163})$$

$$\sigma_{\eta} = \frac{1}{a} \left\{ (\text{ch } \xi - \cos \eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - \text{sh } \xi \frac{\partial F}{\partial \xi} - \sin \eta \frac{\partial F}{\partial \eta} + F \cos \eta \right\} - \frac{\alpha \gamma \text{sh } \xi}{\text{ch } \xi - \cos \eta},$$

$$\tau_{\xi\eta} = -\frac{1}{a} (\text{ch } \xi - \cos \eta) \frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta},$$

если известна функция  $F = UH$ , где  $U$  — функция напряжений в биполярных координатах, а  $H = \frac{1}{a} (\text{ch } \xi - \cos \eta)$  — первый дифференциальный параметр системы биполярных координат.

\* Задача о напряжениях в анизотропной полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями при  $\sigma_x^0 = \text{const}$ ,  $\sigma_y^0 = \text{const}$ ,  $\tau_{xy}^0 = 0$  рассмотрена Л. Н. Нагибиным [1].

Для I случая функцию  $F(\xi, \eta)$  R. G. Mindlin [1] дает в виде

$$F(\xi, \eta) = -\frac{\gamma a^2 \operatorname{csch}^2 \alpha}{2} \left\{ \Phi \sin \eta - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \xi \operatorname{ch} \xi + \right. \\ \left. + \frac{5-6\nu}{2(1-\nu)} \operatorname{cth} \alpha (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \xi - \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} (\operatorname{ch} 2\xi - 1) \cos \eta + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left[ \frac{5-6\nu}{2(1-\nu)} \operatorname{cth} \alpha - 1 \right] \operatorname{sh} 2\xi \cos \eta + \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sh} \alpha e^{-n\alpha}}{\operatorname{sh}^2 n\alpha - n^2 \operatorname{sh}^2 \alpha} [\operatorname{sh} n\alpha \operatorname{sh} n\xi \operatorname{sh}(\xi - \alpha) - n \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh} n(\xi - \alpha)] \right\} \cos n\eta,$$

где  $\alpha = \xi_0 > 0$  (см. рис. II.70),  $\operatorname{tg} \Phi = \frac{\operatorname{ch} \xi \cos \eta - 1}{\operatorname{sh} \xi \sin \eta}$ .

Таблица II.28

$R_n$	$\alpha$								
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$R_2$	1,4663	0,5198	0,2043	0,0848	0,0364	0,0157	0,0069	0,0031	0,0014
$R_3$	0,7620	0,1852	0,0482	0,0127	0,0033	0,0034	0,0002	0,0001	—
$R_4$	0,3848	0,0615	0,0099	0,0016	0,0003	—	—	—	—
$R_5$	0,1884	0,0189	0,0018	0,0002	—	—	—	—	—
$R_6$	0,0893	0,0054	0,0003	—	—	—	—	—	—
$R_7$	0,0409	0,0015	—	—	—	—	—	—	—
$R_8$	0,0181	0,0004	—	—	—	—	—	—	—

Наибольший интерес представляют напряжения  $\sigma_\eta$  по контуру кругового отверстия, которые выражаются так:

$$[\sigma_\eta]_{\xi=\alpha} = \frac{2\gamma a [\operatorname{ch} \alpha - \cos \eta]}{\operatorname{sh} \alpha} \left\{ \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \eta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \eta)^2} - \operatorname{cth} \alpha - \right. \\ \left. - \frac{(7-8\nu) \cos \eta}{4(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha} + 2e^{-\alpha} \cos \eta - \sum_{n=2}^{\infty} R_n \cos n\eta \right\}. \quad (\text{II.164})$$

Величины  $R_n$  даны в табл. II.28.

На рис. II.74 дан график напряжений  $(\sigma_\eta)_{\xi=\alpha}$ , уменьшенных в  $2\gamma R$  раз, действующих по контуру отверстия радиуса  $R$  и подсчитанных по формуле (II.164) при  $\nu=1/2$ ,  $\alpha=0,4$  и  $\alpha=2,0$ .

На рис. II.75 представлены подобные графики при  $\xi=\alpha$ ,  $\eta=\pi$ , т. е. в точке  $A$  (см. рис. II.73) для трех значений коэффициента Пуассона  $\nu=0$ ,  $1/4$  и  $1/2$ .

Из приведенных на рис. II.74 и II.75 данных следует, что:

изменение коэффициента Пуассона оказывает незначительное влияние на напряжения, за исключением случаев, когда отверстие очень близко ( $d/R < 1,2$ ) расположено к прямолинейной грани полуплоскости; напряжения  $\sigma_{\eta}$  в точке  $A$  (см. рис. II.73) растут с увеличением глубины почти по линейному закону;

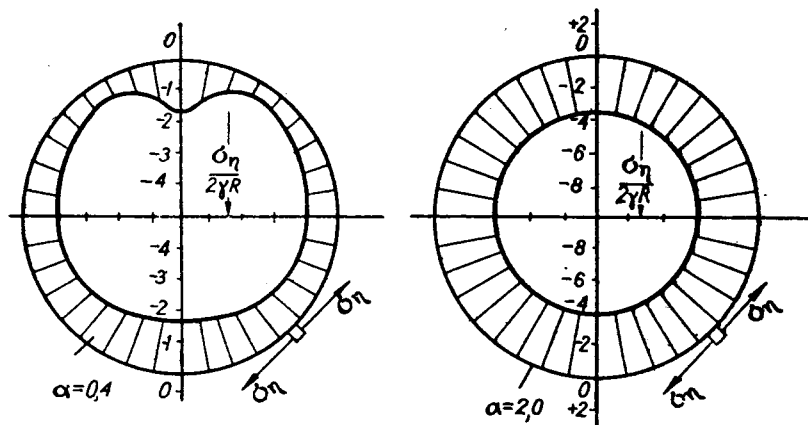


Рис. II.74

напряжения  $\sigma_{\eta}$  в точке  $A$  значительно возрастают при приближении отверстия к прямолинейной грани полуплоскости;

наибольшее значение напряжения  $\sigma_{\eta}$  на контуре отверстия для больших значений  $\alpha$  будет в точке  $D$  (рис. II.73); для малых же значений  $\alpha$  ( $\alpha < 0,4$ ) наибольшее значение  $\sigma_{\eta}$  будет в точке  $A$ .

Для II и III случаев функция  $F = UH$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 F = M\gamma a^2 \left\{ \operatorname{ch} \xi + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{ch} \xi + n \operatorname{sh} \xi) e^{-n\xi} \cos n\eta + \right. \\
 + 3 \operatorname{cth} \alpha \operatorname{ch}^2 \alpha [\xi (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) + \operatorname{sh} \xi (\operatorname{ch} \xi \cos \eta - 1)] - \\
 - \frac{3}{2} \operatorname{csch}^2 \alpha (\operatorname{ch} 2\xi - 1) \cos \eta + \sum_{n=2}^{\infty} (A_n [\operatorname{ch} (n+1) \xi - \operatorname{ch} (n-1) \xi] + \\
 \left. + B_n [(n-1) \operatorname{sh} (n+1) \xi - (n+1) \operatorname{sh} (n-1) \xi]) \cos n\eta \right\} - \\
 - \frac{1}{2} \gamma a^2 \operatorname{csch}^2 \alpha \left\{ \Phi \sin \eta - \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \xi \operatorname{sh} \xi + \frac{5-6\nu}{2(1-\nu)} \operatorname{cth} \alpha (\operatorname{ch} \xi - \cos \eta) \xi - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{3-4\nu}{4(1-\nu)} (\operatorname{ch} 2\xi - 1) \cos \eta + \frac{1}{2} \left( \frac{5-6\nu}{2(1-\nu)} \operatorname{cth} \alpha - 1 \right) \operatorname{sh} 2\xi \cos \eta + \\
 & + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2e^{-n\alpha} \operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{sh}^2 n\alpha - n^2 \operatorname{sh}^2 \alpha} \left[ \operatorname{sh} n\alpha \operatorname{sh} n\xi \operatorname{sh} (\xi - \alpha) - n \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} \xi \operatorname{sh} n(\xi - \alpha) \right] \cos n\eta,
 \end{aligned} \quad (\text{II.165})$$

где

$$A_n = - \frac{n(n^2 - 1) \operatorname{sh}^2 \alpha}{\operatorname{sh}^2 n\alpha - n^2 \operatorname{sh}^2 \alpha}, \quad B_n = \frac{n \operatorname{sh} \alpha (n \operatorname{sh} \alpha + \operatorname{ch} \alpha) + e^{-n\alpha} \operatorname{sh} n\alpha}{\operatorname{sh}^2 n\alpha - n^2 \operatorname{sh}^2 \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{\operatorname{ch} \xi \cos \eta - 1}{\operatorname{sh} \xi \sin \eta};$$

для II случая  $M = \frac{1-2\nu}{6(1-\nu)}$ , а для III случая  $-M = \frac{1}{6}$ . Наибольший интерес представляют напряжения  $\sigma_\eta$  по контуру кругового отверстия:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_\eta)_{\xi=\alpha} = & \gamma M a (\operatorname{ch} \alpha - \cos \eta) \left\{ 6 \operatorname{cth} \alpha \operatorname{csch} \alpha + 6 \operatorname{csch}^2 \alpha \cos \eta + \right. \\
 & \left. + 4 \operatorname{sh} \alpha \sum_{n=2}^{\infty} T_n \cos n\eta \right\} + 6\gamma M a \operatorname{csch} \alpha [\cos \psi + 2 \operatorname{ch} \alpha \cos 2\psi + \cos 3\psi] + \\
 & + \frac{2\gamma a (\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta)}{\operatorname{sh} \alpha} \left\{ \frac{1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \eta}{(\operatorname{ch} \alpha - \cos \eta)^2} - \operatorname{cth} \alpha - \frac{(7-8\nu) \cos \eta}{4(1-\nu) \operatorname{sh} \alpha} + \right. \\
 & \left. + 2e^{-\alpha} \cos \eta - \sum_{n=2}^{\infty} R_n \cos n\eta \right\},
 \end{aligned}$$

где

$$\cos \psi = \frac{\operatorname{ch} \alpha \cos \eta - 1}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \eta}, \quad \sin \psi = \frac{\operatorname{sh} \alpha \sin \eta}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \eta}.$$

Величины коэффициентов  $R_n$  даны в табл. II.28, значения  $\alpha$  — в табл. II.29, значения коэффициентов  $T_n$  — в табл. II.30.

На рис. II.76 даны кривые напряжений  $(\sigma_\eta)_{\xi=\alpha}$ , уменьшенных в  $2\gamma R$  раз, для точки  $A$  (см. рис. II.73) при различных значениях  $d/R$ , как для II случая (рис. II.76,а), так и для III случая (рис. II.76,б).

К выводам, изложенным выше, необходимо добавить следующее.

Для  $d/R > 1,5$ , как показывают данные, приведенные на рис. II.75 и II.76, влияние прямолинейной грани полуплоскости почти не сказывается на напряжениях  $\sigma_\eta$ . Поэтому, для  $d/R > 1,5$  (или  $a > 1$ ) напряжения  $\sigma_\eta$  по контуру отверстия можно вычислять по формулам, выведенным в предположении, что радиус отверстия  $R$  мал в сравнении с  $d$ . В этом предельном случае формулы для напряжений  $\sigma_\eta$  по контуру кругового отверстия имеют вид:

I случай

$$\sigma_{\alpha} = -2d\gamma + \gamma R \frac{3-4\nu}{2(1-\nu)} \sin \Phi; \quad (\text{II.166})$$

II случай

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\gamma R}{1-\nu} \left[ \frac{1}{2} \sin \Phi + (1-2\nu) \sin 3\Phi \right] - \frac{\gamma d}{1-\nu} [1 + 2(1-2\nu) \cos 2\Phi], \quad (\text{II.167})$$

где  $\Phi = \frac{3}{2}\pi - \psi$  — угол, который касательная к кривой  $\eta = \text{const}$  составляет с осью  $Ox$ .

Таблица II.29

$\alpha$	$d/R$	$\alpha$	$d/R$
0,2	1,02	1,4	2,15
0,4	1,08	1,6	2,58
0,6	1,19	1,8	3,11
0,8	1,34	2,0	3,76
1,0	1,54	—	—
1,2	1,81	—	—

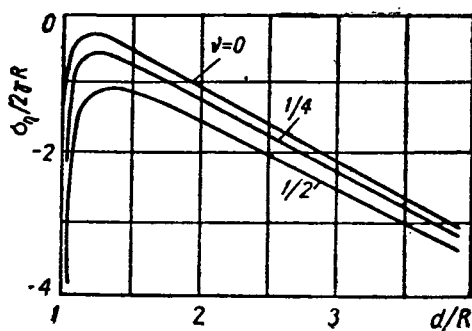


Рис. II.75

Выбрав на рис. II.73 начало декартовой системы координат  $xOy$  в центре отверстия и направив  $Ox$  вправо, а ось  $Oy$  — вверх, запишем компоненты напряжений основного напряженного состояния в неослабленной отверстию тяжелой полуплоскости:

$$\sigma_x^0 = \gamma \lambda (y - d), \quad \sigma_y^0 = \gamma (y - d), \quad \tau_{xy}^0 = 0,$$

где  $\lambda$  — любое вещественное число, или в полярных координатах при отсчете  $\theta$  от оси  $Ox$  против часовой стрелки:

$$(\sigma_r)_0 = \frac{\gamma r}{4} [(3 + \lambda) \sin \theta + (\lambda - 1) \sin 3\theta] - \frac{\gamma d}{2} [(1 + \lambda) - (1 - \lambda) \cos 2\theta], \quad (\text{II.168})$$

$$(\sigma_\theta)_0 = \frac{\gamma r}{4} [(3\lambda + 1) \sin \theta - (\lambda - 1) \sin 3\theta] - \frac{\gamma d}{2} [(1 + \lambda) + (1 - \lambda) \cos 2\theta],$$

$$(\tau_{r\theta})_0 = \frac{\gamma r}{4} (1 - \lambda) (\cos \theta - \cos 3\theta) - \frac{\gamma d}{2} (1 - \lambda) \sin 2\theta.$$

Отделив от напряжений (II.168) компоненты  $\sigma_r^0$ ,  $\sigma_\theta^0$  и  $\tau_{r\theta}^0$  вида (II.122), получим компоненты  $\sigma_r^{00}$ ,  $\sigma_\theta^{00}$ ,  $\tau_{r\theta}^{00}$  (II.120), которым соответствует функция напряжений

$$U_0(x, y) = \frac{\gamma \lambda}{6} y^3 - \frac{\lambda \gamma d}{2} y^2 - \frac{\gamma d}{2} x^2.$$

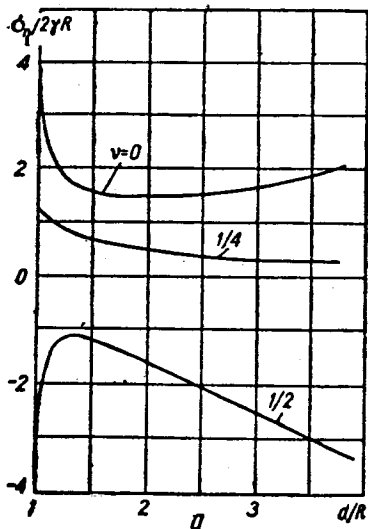
По этой функции, характеризующей напряженное состояние (II.120) в неослабленной плоскости, определяем \* компоненты напряжений в

\* \* Здесь использован метод, изложенный в монографии Г. Н. Савина [13], гл. II, стр. 121—125.

плоскости с круговым отверстием, контур которого свободен от внешних усилий:

$$\sigma_r^* = \frac{\gamma \lambda R}{4} \left[ \left( 3 \frac{r}{R} + \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta + \left( -\frac{r}{R} + \frac{R^3}{r^3} - 4 \frac{R^5}{r^5} \right) \sin 3\theta \right] - \frac{\gamma d}{2} \left[ (1 + \lambda) \left( 1 + \frac{R^3}{r^3} \right) + (1 - \lambda) \left( 1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos^2 2\theta \right], \quad (\text{II.169})$$

$$\sigma_\theta^* = \frac{\gamma \lambda R}{4} \left[ \left( \frac{r}{R} - \frac{R^3}{r^3} \right) \sin \theta + \left( \frac{r}{R} - 5 \frac{R^3}{r^3} + 4 \frac{R^5}{r^5} \right) \sin 3\theta \right] - \frac{\gamma d}{2} \left[ (1 + \lambda) \left( 1 - \frac{R^3}{r^3} \right) + (1 - \lambda) \left( -1 + 4 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right],$$



$$\tau_{r\theta}^* = \frac{\gamma \lambda R}{4} \left[ \left( -\frac{r}{R} + \frac{R^3}{r^3} \right) \cos \theta + \left( \frac{r}{R} + 3 \frac{R^3}{r^3} - 4 \frac{R^5}{r^5} \right) \cos 3\theta \right] - \frac{\gamma d}{2} \times \times (1 - \lambda) \left( 1 + 2 \frac{R^2}{r^2} - 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta.$$

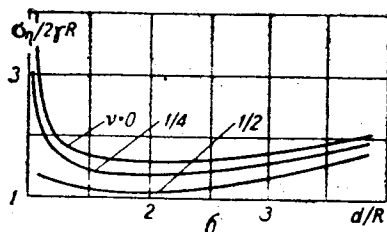


Рис. II.76

Таблица II.30

$T_n$	$d$								
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$T_3$	41,4132	10,1670	3,3052	1,2281	0,4924	0,2047	0,0876	0,0382	0,0168
$T_5$	33,2080	6,1642	1,4073	0,3146	0,0867	0,0219	0,0055	0,0026	0,0003
$T_7$	20,1894	3,1329	0,4583	0,0680	0,0099	0,0015	0,0001	—	—
$T_9$	16,2229	1,3750	0,1211	0,0103	0,0008	0,0001	—	—	—
$T_{11}$	10,1179	0,5326	0,0271	0,0012	0,0001	—	—	—	—
$T_{13}$	5,9144	0,1857	0,0053	0,0001	—	—	—	—	—
$T_{15}$	3,2620	0,0593	0,0005	—	—	—	—	—	—
$T_{17}$	1,7069	0,0176	0,0001	—	—	—	—	—	—
$T_{19}$	0,8523	0,0043	—	—	—	—	—	—	—



Сложив теперь напряжения (II.169) с напряжениями (II.127), соответствующими частному решению (II.122), получим искомые полные напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  (II.121) в тяжелой полуплоскости с круговым отверстием. Напряжения по контуру кругового отверстия

$$\sigma_\theta = \gamma R \left[ \left( \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} + \lambda \right) \sin \theta + (1-\lambda) \sin 3\theta \right] - \gamma d [(1+\lambda) + 2(1-\lambda) \cos 2\theta]. \quad (\text{II.170})$$

Положив в (II.170)  $\lambda=1$  или  $\lambda = \frac{\nu}{1-\nu}$ , получим формулы, совпадающие с формулами (II.166) и (II.167). Для частного значения  $\lambda = \text{tg}^2(45^\circ - \varphi/2)$ , где  $\varphi$  — угол внутреннего трения грунта, некоторые подсчеты выполнены И. В. Родиным [1].

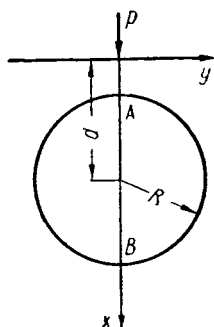


Рис. II.77

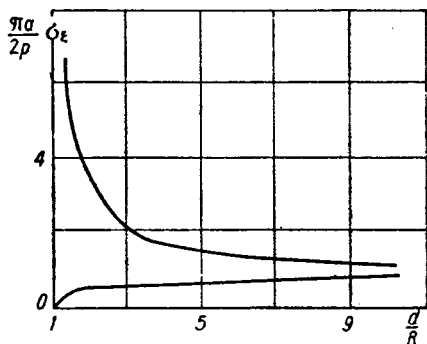


Рис. II.78

Действие сосредоточенной силы или пары, приложенных в произвольной точке прямолинейного края полуплоскости с круговым отверстием. Задача о напряженном состоянии полуплоскости, ослабленной круговым отверстием, когда к прямолинейному краю ее приложена сосредоточенная сила  $p$ , направленная по диаметру отверстия (рис. II.77), рассматривалась Я. С. Подстригачем [1]. Решение этой задачи проведено в координатах (II.141).

Напряжения по контуру отверстия

$$\sigma_\xi = \frac{2p}{\pi a} [\text{ch } \alpha - \cos \xi] \left[ -\frac{\text{ch } \alpha + \cos \xi}{\text{sh}^2 \alpha} + 4 \text{sh } \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \text{sh } 2n\alpha \cos 2n\xi}{\text{sh}^2 2n\alpha - 4n^2 \text{sh}^2 \alpha} \right];$$

по краю полуплоскости

$$\sigma_\xi = \frac{2p}{\pi a} (1 - \cos \xi) \left[ \frac{\cos \xi}{\text{sh}^2 \alpha} - 8 \text{sh}^2 \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos 2n\xi}{\text{sh}^2 2n\alpha - 4n^2 \text{sh}^2 \alpha} \right],$$

где

$$a = \sqrt{d^2 - R^2}.$$

На рис. II.78 приведены графики напряжений  $\sigma_{\xi}$  в точках  $A$  и  $B$  (рис. II.77) по контуру отверстия для различных значений  $d/R$  при постоянном  $a$ .

В тех же биполярных координатах  $\xi$  и  $\eta$  (II.141) R. M. Evan — Iwanowski [1] составил выражения для функций напряжений в полуплоскости с круговым отверстием, находящейся под действием нормальной и касательной сил, приложенных к произвольной точке границы полуплоскости.

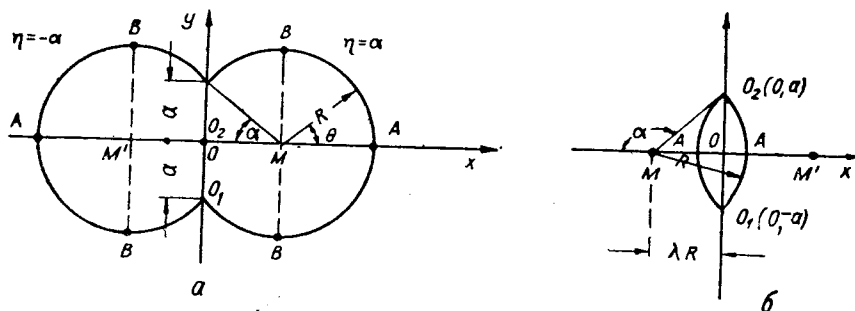


Рис. II.79

Задача о напряжениях в полуплоскости с круговым отверстием, находящейся под действием сосредоточенной пары, приложенной к прямолинейной границе, рассматривалась А. М. Сен—Gupta [3]. В этой работе приведены напряжения  $\sigma_{\xi}$  как на прямолинейной, так и круговой границах.

**Растяжение пластинки, ослабленной отверстием, контур которого состоит из двух равных дуг окружности.** Допустим, что в неограниченной изотропной упругой плоскости сделано отверстие, контур которого состоит из двух равных круговых дуг (рис. II.79). Определим напряженное состояние возле этого отверстия при условии, что его контур свободен от внешних усилий, а напряженное состояние на бесконечности есть двух- или одноосное растяжение.

Из рис. II.79, а видно, что при  $\lambda > 1$  имеем два непересекающихся круговых отверстия, при  $\lambda = 1$  контур отверстия состоит из двух равных, касающихся между собой окружностей, а при  $\lambda = 0$  — из двух равных полуокружностей, т. е. из одной окружности радиуса  $R$ . Для отверстий, изображенных на рис. II.79, б,  $\lambda < 0$ , и при  $\lambda = -1$  отверстие вырождается в щель длиной  $2a$  по оси  $Oy$ .

Если известны  $\lambda R$  и  $R$ , для координатных линий биполярных координат  $\eta = d$  и  $\eta = -\alpha$ , совпадающих с контуром отверстия, можем записать  $\lambda R = a \operatorname{ctg} \alpha$ ,  $a = R \sin \alpha$  или

$$a = R \operatorname{arccos} \lambda, \quad a = R \sqrt{1 - \lambda^2}. \quad (\text{II.171})$$

Связь между декартовыми и биполярными координатами дана формулами (II.141). Из рис. II.79, а легко находим зависимость меж-

ду  $\xi$  (по линии  $\eta = \alpha = \text{const}$ ) и углом  $\theta$ :

$$\text{ch } \xi = \frac{1 + \lambda \cos \theta}{\lambda + \cos \theta}. \quad (\text{II.172})$$

Для функции  $F(\xi, \eta) = H(\xi, \eta)U(\xi, \eta)$  имеем

$$\begin{aligned} F(\xi, \eta) = & 4apK \int_0^{\infty} \frac{[n \text{ch } n(\alpha - \eta) \sin \eta + \text{sh } n(\alpha - \eta) \cos \eta] \text{sh } n\alpha \cos n\xi}{n(n^2 + 1)(\text{sh } 2n\alpha + n \sin 2\alpha)} dn - \\ & - 4apK \sin \alpha \int_0^{\infty} \frac{n \text{ch } n\eta \sin(\alpha - \eta) + \text{sh } n\eta \cos(\alpha - \eta)}{(n^2 + 1)(\text{sh } 2n\alpha + n \sin 2\alpha)} \cos n\xi dn \pm \\ & \pm 2ap \int_0^{\infty} \frac{n \text{ch } n\eta \sin(\alpha - \eta) \sin \alpha - \text{ch } n\alpha \text{sh } n(\alpha - \eta) \sin \eta}{\text{sh } 2n\alpha + n \sin 2\alpha} \cos n\xi dn, \quad (\text{II.173}) \end{aligned}$$

где  $K$  находим из выражения

$$4K \int_0^{\infty} \frac{(\text{sh}^2 n\alpha - n^2 \sin^2 \alpha) dn}{n(n^2 + 1)(\text{sh } 2n\alpha + n \sin 2\alpha)} = \delta \pm 2 \sin^2 \alpha \int_0^{\infty} \frac{ndn}{\text{sh } 2n\alpha + n \sin 2\alpha}. \quad (\text{II.174})$$

Из двух знаков (верхний и нижний) в (II.173) и (II.174) следует брать только верхний знак при растяжении вдоль оси  $Ox$  и нижний — при растяжении вдоль оси  $Oy$ . Величина  $\delta$  в (II.174) также будет иметь два значения в зависимости от условий в бесконечно удаленных частях пластинки: при растяжении пластинки вдоль оси  $Oy$   $\delta = 0$ , а вдоль оси  $Ox$   $\delta = 1$ . Функция  $H(\xi, \eta) = \frac{1}{a}(\text{ch } \xi - \cos \eta)$ , а  $U(\xi, \eta)$  — функция напряжений в биполярных координатах. Зная функцию  $F(\xi, \eta)$  (II.173), можно определить компоненты напряжений  $\sigma_{\xi}$ ,  $\sigma_{\eta}$  и  $\tau_{\xi\eta}$  по формулам (II.163), в которых нужно положить  $\gamma = 0$ . Наибольший интерес представляет формула для напряжений по контуру отверстия:

$$\sigma_{\xi} = 4p(\text{ch } \xi - \cos \alpha) \sin \alpha \int_0^{\infty} \frac{2K \mp n(n - \text{ctg } \alpha \text{cth } n\alpha)}{\text{sh } 2n\alpha + n \sin 2\alpha} \text{sh } n\alpha \cos n\xi dn, \quad (\text{II.175})$$

где  $K$  определяется формулой (II.174), а двойные знаки имеют тот же смысл, что и прежде.

Напряжения  $\sigma_{\xi}$  на контуре отверстия при двухосном растяжении при  $\lambda > 0$ , т. е. при  $\alpha < \pi/2$  (см. рис. II.79, а) будут наибольшими в точках  $A$ . При  $\lambda < 0$ , т. е. при  $\alpha > \pi/2$  (см. рис. 79, б) напряжения  $\sigma_{\xi}$  в точках  $O_2$  и  $O_1$  обращаются в бесконечность. При растяжении вдоль оси  $Ox$  при  $\lambda > 0$  наибольшие напряжения  $\sigma_{\xi}$  будут в точках, расположенных очень близко к точкам  $B$ , а при  $\lambda < 0$  напряжения  $\sigma_{\xi}$  в точках  $O_2$  и  $O_1$  обращаются в бесконечность. При растяжении вдоль оси  $Oy$

как при  $\lambda > 0$ , так и при  $\lambda < 0$  наибольшие напряжения  $\sigma_{\xi}$  будут в точках  $A$ .

В табл. II.31 приведены напряжения  $\sigma_{\xi}$ , подсчитанные по формулам (II.174) и (II.175) С. В. Ling [2] для трех случаев: всестороннего растяжения пластинки, растяжения вдоль оси  $Ox$  и вдоль оси  $Oy$ .

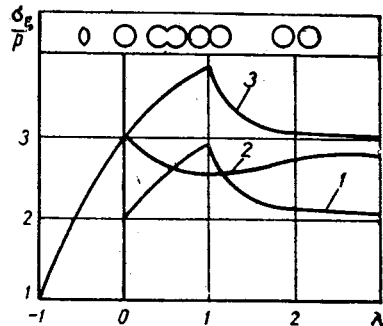


Рис. II.80

На рис. II.80 по данным табл. II.30 и II.31 построены эпюры напряжений: кривая 1 представляет величину  $\sigma_{\xi}/\rho$  в точках  $A$  (см. рис. II.79) при двухосном растяжении пластинки, кривая 2 — величину  $\sigma_{\xi}/\rho$  в точках  $B$  при растяжении вдоль оси  $Ox$  и кривая 3 — величину  $\sigma_{\xi}/\rho$  в точке  $A$  при растяжении вдоль оси  $Oy$ . В верхней части этого рисунка показана форма отверстия, соответствующая указанному значению  $\lambda$ . Чистый изгиб пластинки, ослабленной отверстием, контур которого состоит из двух равных дуг окружности, рассматривался Н. А. Савруком [2], В. Карупес [1].

Таблица II.31

$\lambda$	$\alpha^\circ$	Двухосное растяжение $\sigma_{\xi}/\rho$ в точках $A$	Растяжение вдоль оси $Ox$ $\sigma_{\xi}/\rho$ в точках $B$	Растяжение вдоль оси $Oy$ $\sigma_{\xi}/\rho$ в точках $A$	Примечание
1,0	0	2,894	2,569	3,869	Две соприкасающиеся между собой окружности
0,5	60	2,524	2,630	3,493	Одно круговое отверстие
0,0	90	2,000	3,00	3,000	
-0,5	120	—	—	2,101	Щель по оси $Oy$ длиной $2a$
-1,0	180	—	—	1,000	

## § 8. Напряжения в упругой плоскости, ослабленной одинаковыми круговыми отверстиями

Допустим, что упругая среда занимает плоскость  $xOy$ , ослабленную одинаковыми круговыми отверстиями, расстояния между центрами которых также одинаковы. К контурам отверстий приложены внешние усилия  $X_n$  и  $Y_n$ , статически эквивалентные нулю на каждом контуре. На разных контурах эти усилия могут быть различными.

Задачи, связанные с определением напряженного состояния такой среды, рассматривались многими авторами.

При исследовании среды с двумя круговыми отверстиями С. В. Ling [1] применил биполярные координаты.

Для близко расположенных отверстий, когда проявляется наибольшее взаимное влияние отверстий на напряженное состояние среды вблизи каждого из них, целесообразнее использовать теорию функций комплексного переменного. Решение указанной задачи Д. И. Шерман [1, 5] свел к решению бесконечной системы алгебраических уравнений, кото-

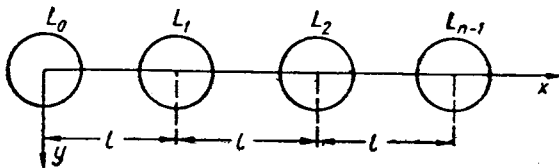


Рис. II.81

рая оказывается квазирегулярной при любой близости отверстий друг от друга. Этот метод Д. И. Шерман [2—8] распространил и на решения других задач, связанных с рассмотрением многосвязных областей.

Следует особо отметить метод А. С. Космодамианского [3, 5], использовавшего основную идею метода Бубнова—Галеркина, что позволило получить эффективные решения многих практически важных задач достаточно простыми средствами.

Пусть упругая среда ослаблена  $n$  отверстиями, центры которых лежат на одной прямой, совпадающей с осью  $x$  (рис. II.81). Радиусы отверстий примем  $r=1$ , что не нарушит общности рассматриваемой задачи. Расстояния между центрами отверстий обозначим через  $l$ . Будем считать\*, что на бесконечности упругая плоскость загружена таким образом, что функция напряжений Эри для сплошной плоскости может быть представлена в виде целого полинома по переменным  $x$  и  $y$ .

Задача о напряженном состоянии в плоскости, ослабленной отверстиями, приводится к определению функции  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  из граничных условий (I.9) в случае первой основной задачи и из условий (I.10) в случае второй основной задачи. При этом нужно потребовать, чтобы указанные условия выполнялись на контурах всех отверстий.

Введем функцию

$$\Psi(z) = \psi_1(z) + z\varphi_1'(z). \quad (\text{II.176})$$

Эта функция будет инвариантной при переносе начала координат вдоль оси  $x$ , как и функция  $\varphi(z) = \varphi_1(z)$ .

Теперь граничное условие (I.9) можно представить в виде

$$F(z, \bar{z}) = \varphi(z) + (z - \bar{z})\overline{\varphi'(z)} + \psi(z) - (f_{1k} + if_{2k} + C_k) = 0 \quad (\text{II.177})$$

$$(k = 0, 1, \dots, n-1).$$

\* Решения задач, приведенных в § 8 и 9, даны А. С. Космодамианским [1—7].

Голоморфные в рассматриваемой области функции

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m^{(k)}}{(z-kl)^m}, \quad (\text{II.178})$$

$$\psi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m^{(k)}}{(z-kl)^m}.$$

Здесь  $\alpha_m^{(k)}$  и  $\beta_m^{(k)}$  — произвольные постоянные коэффициенты, которые следует определять из граничного условия (II.177).

В  $N$ -ом приближении функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  будем искать в виде

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=1}^N \frac{\alpha_m^{(k)}}{(z-kl)^m}, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=1}^{N+2} \frac{\beta_m^{(k)}}{(z-kl)^m}. \quad (\text{II.179})$$

Рассмотрим контур с номером  $\nu$  ( $\nu = 0, 1, \dots, n-1$ ) и подставим в граничное условие на этом контуре выражения (II.179). Потребуем, чтобы функция  $F(\sigma) = F_1(z, \bar{z})$ , где  $\sigma = e^{i\theta}$  — точка на контуре  $\nu$ -го отверстия, была ортогональной к первым  $N+4$  функциям полной системы функций  $\sigma^{\pm k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ). В этом случае для определения коэффициентов  $\alpha_m^{(\nu)}$  и  $\beta_m^{(\nu)}$  получим уравнения

$$\int_{\gamma_\nu} F(\sigma) \sigma^{\pm k} d\sigma = 0. \quad (\text{II.180})$$

После интегрирования из (II.180) получим (конечную) алгебраическую систему уравнений, в которой коэффициенты  $\alpha_m^{(\nu)}$  и  $\beta_m^{(\nu)}$  выражены через коэффициенты  $\alpha_m^{(k)}$  и  $\beta_m^{(k)}$  ( $k \neq \nu$ ). Проведя аналогичную операцию на каждом контуре, получим алгебраическую систему уравнений для определения всех постоянных  $\alpha_m^{(k)}$  и  $\beta_m^{(k)}$ . Зная эти постоянные, по формулам (II.179) найдем функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , через которые выражаются искомые напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x^0 + \operatorname{Re} \{ -(\bar{z} - z) \varphi''(z) + 3\varphi'(z) - \psi'(z) \}, \\ \sigma_y &= \sigma_y^0 + \operatorname{Re} \{ (\bar{z} - z) \varphi''(z) + \varphi'(z) + \psi'(z) \}, \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^0 + \operatorname{Im} \{ (\bar{z} - z) \varphi''(z) - \varphi'(z) + \psi'(z) \}. \end{aligned} \quad (\text{II.181})$$

Здесь  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  — напряжения в сплошной упругой плоскости при заданных усилиях на бесконечности.

Два одинаковых круговых отверстия. Расположим систему координат так, как это показано на рис. 82. Расстояние между центрами отверстий примем равным  $2l$ . Будем считать, что на бесконечности

заданы растягивающие усилия  $p$  вдоль линии центров отверстий и усилия  $q$  — поперек линии центров\*.

В  $N$ -ом приближении

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \left[ \frac{1}{(z-l)^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{(z+l)^k} \right], \quad \psi(z) = \sum_{k=1}^{N+2} \beta_k \left[ \frac{1}{(z-l)^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{(z+l)^k} \right]. \quad (\text{II.182})$$

В силу геометрической и силовой симметрии в данном случае следует потребовать выполнения равенства (II.180) только на правом\*\* контуре  $\gamma$ . В развернутом виде уравнение (II.180) на контуре  $\gamma$

$$\int_{\gamma} \left[ \varphi(\sigma) + \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} - \right. \\ \left. - \frac{p-q}{2} \frac{1}{\sigma} + \frac{p+q}{2} \sigma + c \right] \frac{d\sigma}{\sigma^k} = 0 \quad (\text{II.183}) \\ (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots).$$

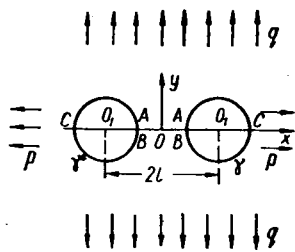


Рис. II.82

Здесь  $\sigma = z - l$  — точка на контуре  $\gamma$ .

В первом приближении ( $N=1$ ) система для определения искомым постоянных  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  будет иметь вид

$$\alpha_1 (1 + 2\varepsilon^2 - 8\varepsilon^4 - 3\varepsilon^6) = \frac{p-q}{2} - \varepsilon^2 \frac{p+q}{2}; \quad (\text{II.184})$$

$$\beta_1 = -\alpha_1 (1 - 2\varepsilon^2) - \frac{p+q}{2}, \quad \beta_2 = -\alpha_1 \varepsilon^3; \quad \beta_3 = \alpha_1 (1 + \varepsilon^4).$$

Во втором приближении ( $N=2$ )

$$\alpha_1 (1 + 2\varepsilon^2 - 8\varepsilon^4 - 2\varepsilon^6 - 3\varepsilon^8 - 4\varepsilon^{10}) + \alpha_2 (-6\varepsilon^3 + 24\varepsilon^5 + \\ + 6\varepsilon^7 + 12\varepsilon^9 + 20\varepsilon^{11}) = \frac{p-q}{2} - \varepsilon^2 \frac{p+q}{2},$$

$$\alpha_1 (-3\varepsilon^3 + 12\varepsilon^5 + 3\varepsilon^7 + 6\varepsilon^9 + 10\varepsilon^{11}) + \alpha_2 (1 + 12\varepsilon^4 - \\ - 44\varepsilon^6 - 9\varepsilon^8 - 24\varepsilon^{10} - 50\varepsilon^{12}) = \frac{p+q}{2} \varepsilon^3; \quad (\text{II.185})$$

$$\beta_1 = -\alpha_1 (1 - 2\varepsilon^2) - 4\alpha_2 \varepsilon^3 - \frac{p+q}{2},$$

$$\beta_2 = -\alpha_1 \varepsilon^3 - \alpha_2 (2 - 3\varepsilon^4),$$

$$\beta_3 = \alpha_1 (1 + \varepsilon^4) - 4\alpha_2 \varepsilon^5,$$

$$\beta_4 = -\alpha_1 \varepsilon^5 + \alpha_2 (2 + 5\varepsilon^6).$$

В системах (II.184) и (II.185)  $\varepsilon = 1/2l$ .

\* Другие случаи загрузки изучены А. С. Космодамианским и В. Н. Ложкиным [1] и А. С. Космодамианским [14].

\*\* На левом контуре граничные условия будут удовлетворены автоматически.

Результаты вычислений коэффициентов  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  для различных расстояний между отверстиями приведены в табл. II.32. Коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  в этой таблице даны с точностью до множителя  $p$ , а  $\alpha'_k$  и  $\beta'_k$  — с точностью до множителя  $q$ .

Таблица II.32

$\varepsilon$	Постоянные	I приближение			II приближение			
		$k$			$k$			
		1	2	3	1	2	3	4
$\frac{2}{5}$	$\alpha_k$	0,380	—	—	0,386	0,050	—	—
	$\alpha'_k$	-0,525	—	—	-0,525	-0,006	—	—
	$\beta_k$	-0,758	-0,024	0,390	-0,775	-0,121	0,394	0,097
	$\beta'_k$	-0,143	0,034	-0,538	-0,141	0,045	-0,538	-0,007
$\frac{1}{3}$	$\alpha_k$	0,397	—	—	0,401	0,039	—	—
	$\alpha'_k$	-0,496	—	—	-0,497	-0,010	—	—
	$\beta_k$	-0,809	-0,015	0,402	-0,818	-0,092	0,405	0,077
	$\beta'_k$	-0,114	0,018	-0,502	-0,112	0,039	-0,503	-0,019
$\frac{1}{4}$	$\alpha_k$	0,429	—	—	0,430	0,022	—	—
	$\alpha'_k$	-0,486	—	—	-0,487	-0,009	—	—
	$\beta_k$	-0,875	-0,007	0,430	-0,878	-0,051	0,423	0,044
	$\beta'_k$	-0,075	0,008	-0,488	-0,074	0,025	-0,488	-0,017

Значения напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  в точках  $O$ ,  $A$ ,  $B$  и  $C$  (см. рис. II.82) вещественной оси приведены в табл. II.33.

Напряжения  $\sigma_\theta$  по контуру правого отверстия

$$\sigma_\theta = p + q + 4 \operatorname{Re} \varphi'(\sigma). \quad (\text{II.186})$$

В четвертом приближении

$$\varphi'(\sigma) = - \sum_{k=1}^4 k \alpha_k \left[ \frac{1}{\sigma^{k+1}} + \frac{(-1)^{k+1}}{(\sigma + 2l)^{k+1}} \right]. \quad (\text{II.187})$$

Значения напряжений  $\sigma_\theta$  в четвертом приближении приведены в табл. II.34. Эти результаты мало отличаются от (практически точных) результатов Д. И. Шермана [5]. В табл. II.35 для сравнения даны результаты Д. И. Шермана для тех же точек вещественной оси, что и в табл. II.33.

На основании данных, приведенных в этих таблицах, на рис. II.83 построены графики, характеризующие распределение напряжений между отверстиями и вблизи правого отверстия. Эти графики относятся к случаю, когда  $\varepsilon=0,4$ , т. е. при расстоянии между отверстиями, равном половине радиуса одного из них.



Таблица П.33

$\sigma$	Точки по рис. П. 82	I приближение			II приближение		
		1/4	1/3	2/5	1/4	1/3	2/5
		$\sigma_x/q$	O A B C	0,51 0,50 0,04 -0,01	0,60 0,52 0,08 -0,02	0,44 0,36 0,05 -0,01	0,49 0,48 0,02 0,01
$\sigma_y/q$	O A B C	1,47 1,67 3,12 3,03	2,16 2,39 3,40 3,12	3,25 3,41 3,99 3,28	1,47 1,67 3,07 3,09	2,15 2,38 3,35 3,18	3,24 3,40 3,97 3,30
$\sigma_x/p$	O A B C	0,08 -0,01 -0,08 0,03	-0,28 -0,29 -0,19 0,06	-0,42 -0,39 -0,28 0,08	0,13 0,04 -0,03 -0,01	-0,15 -0,15 -0,09 -0,04	-0,21 -0,19 -0,11 -0,04
$\sigma_y/p$	O A B C	0,06 -0,02 -0,83 -0,82	-0,13 -0,24 -0,80 -0,74	-0,52 -0,61 -0,92 -0,72	0,06 -0,01 -0,70 -0,95	-0,09 -0,18 -0,58 -0,98	-0,36 -0,41 -0,60 -1,02

Для получения большей точности следует при применении метода Бубнова—Галеркина увеличить количество приближений. Тогда, естественно, увеличится и количество уравнений в системе (П.185).

Таблица П.34

$\theta^\circ$	$\varepsilon$					
	$\sigma_\theta/p$			$\sigma_\theta/q$		
	2/5	1/3	1/4	2/5	1/3	1/4
0	-0,92	-0,92	-0,92	3,26	3,16	3,07
15	-0,64	-0,64	-0,65	2,98	2,88	2,80
30	0,08	0,08	0,06	2,23	2,12	2,06
45	1,00	1,00	1,00	1,19	1,11	1,06
60	1,88	1,89	1,91	0,15	0,11	0,07
75	2,50	2,51	2,55	-0,63	-0,63	-0,65
90	2,62	2,65	2,71	-0,92	-0,90	-0,89
105	2,10	2,19	2,34	-0,60	-0,55	-0,56
120	1,12	1,28	1,55	0,26	0,32	0,24
135	0,17	0,35	0,64	1,45	1,43	1,26
150	-0,34	-0,22	-0,08	2,67	2,42	2,19
165	-0,42	-0,40	-0,50	3,62	3,07	2,81
180	-0,38	-0,42	-0,62	3,99	3,29	3,03

Для определения искомых постоянных  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  можно легко получить и бесконечную систему уравнений\*:

\* Этим методом В. Н. Ложкин [1] изучил случай, когда отверстия подкреплены абсолютно жесткими кольцами.

$$\alpha_k + (-1)^k \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \{v \alpha_v \varepsilon^{k+v} (C_{k+v}^k - \varepsilon^2 C_{k+v+2}^{k+1}) - \beta_v^* \varepsilon^{k+v} C_{k+v-1}^k\} = \omega_k, \quad (\text{II.188})$$

$$\beta_k^* + q_k - (-1)^k \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \alpha_v \varepsilon^{k+v} C_{k+v-1}^k = t_k,$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{2l}, \quad q_1 = \sum_{v=1}^{\infty} v (-1)^v \alpha_v \varepsilon^{v+1},$$

$$\omega_1 = \frac{p-q}{2}, \quad t_1 = -\frac{p+q}{2},$$

$$\beta_k^* = \beta_k + k \alpha_k - (k-2) \alpha_{k-2}, \quad (\text{II.189})$$

$$\omega_k = t_k = q_k = 0 \quad (k \geq 2), \quad C_q^r = \frac{q!}{r!(r-q)!}.$$

Система (II.188) выписана в явном виде, что позволяет легко установить, что она всегда — квазирегулярна, как бы ни были близки друг от друга рассматриваемые отверстия\*. Для установления этого факта нужно просуммировать в бесконечных суммах коэффициенты при неизвестных  $\alpha_k$  и  $\beta_k^*$ , взятые по абсолютной величине, и установить, что при увеличении номера  $k$  сумма этих коэффициентов стремится к нулю. Выражения для суммы указанных коэффициентов в первом и во втором уравнениях (II.188):

$$A_{1k} = \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{k+1} \left[ k + 3 - (k+2) \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - (1-\varepsilon)^{k+1} \right],$$

$$A_{2k} = \delta_k \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 + \left( \frac{1}{1-\varepsilon} \right)^{k+1}. \quad (\text{II.190})$$

Таблица II.35

$\varepsilon$	$\sigma_x/q$				$\sigma_y/q$				$\sigma_x/p$				$\sigma_y/p$			
	O	A	B	C	O	A	B	C	O	A	B	C	O	A	B	C
1/4	0,48	0,46	0,00	0,00	1,50	1,67	3,02	3,07	0,14	0,06	0,00	0,00	0,06	-0,02	-0,61	-0,91
1/3	0,53	0,44	0,00	0,00	2,25	2,37	3,26	3,15	-0,07	-0,06	0,00	0,00	-0,09	-0,16	-0,38	-0,90
2/5	0,41	0,32	0,00	0,00	3,26	3,43	4,03	3,26	-0,06	-0,04	0,00	0,00	-0,30	-0,32	-0,38	-0,90

\* См. А. С. Космодамианский [10].

Здесь

$$\delta_1 = 1, \delta_k = 0 \quad (k \geq 2).$$

В выражениях (II.190) значение  $\varepsilon = 1/2l$  всегда меньше  $1/2$ , поэтому значения  $A_{1k}$  и  $A_{2k}$  будут стремиться к нулю при  $k \rightarrow \infty$ .

Следует отметить, что если в системе (II.188) исключить коэффициенты  $\beta_k^*$ , ее можно привести к известной системе Д. И. Шермана [5].

**Три одинаковых круговых отверстия.** Систему координат расположим так, как указано на рис. II.84. Расстояния между центрами отвер-

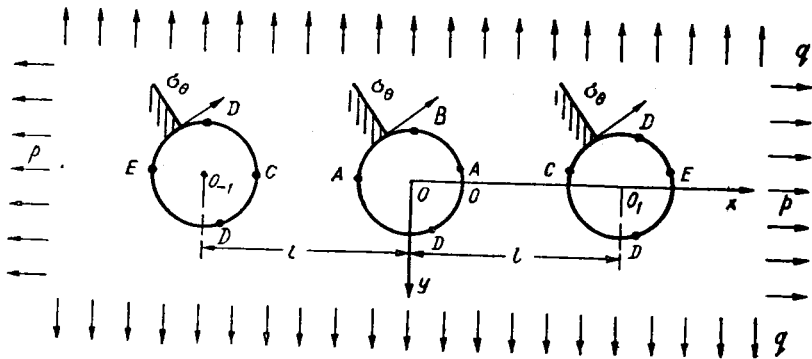


Рис. II.84

стий прием равными  $l$ . Загружение на бесконечности принимается таким же, как и в предыдущем случае.

Учитывая геометрическую и силовую симметрию, функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  возьмем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{h=1}^{\infty} \left\{ \alpha'_h \left[ \frac{1}{(z-l)^h} + \frac{(-1)^{h+1}}{(z+l)^h} \right] + \frac{\alpha_k^0}{z^h} \right\}, \\ \psi(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \beta'_k \left[ \frac{1}{(z-l)^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{(z+l)^k} \right] + \frac{\beta_k^0}{z^k} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{II.191})$$

Из граничных условий на среднем и правом контурах отверстий (на левом контуре они удовлетворяются автоматически) для определения коэффициентов  $\alpha_k^0, \beta_k^0, \alpha'_k$  и  $\beta'_k$  получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \alpha_k^0 - [1 + (-1)^{k+1}] \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \{ v \alpha'_v \varepsilon^{k+v} (C_{k+v}^k - \varepsilon^2 C_{k+v+2}^{k+1}) - \varepsilon^{k+v} C_{k+v-1}^k \beta_v^* \} &= \omega_k, \\ \beta_k^0 + 2\delta_k \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v v \alpha'_v \varepsilon^{v+1} + [1 - (-1)^{k+1}] \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \alpha'_v \varepsilon^{k+v} C_{k+v-1}^k &= t_k, \end{aligned}$$

$$\alpha'_k + (-1)^k \sum_{\nu=1}^{\infty} \{(-1)^\nu \nu \alpha'_\nu \varepsilon_1^{k+\nu} (C_{k+\nu}^k - \varepsilon_1^2 C_{k+\nu+2}^{k+1}) - \nu \alpha_\nu^0 \varepsilon^{k+\nu} (C_{k+\nu}^k - \varepsilon^2 C_{k+\nu+2}^{k+1}) - (-1)^\nu \beta_\nu^{0*} \varepsilon_1^{k+\nu} C_{k+\nu-1}^k + \beta_\nu^{0*} \varepsilon^{k+\nu} C_{k+\nu-1}^k\} = \omega_k, \quad (\text{II.192})$$

$$\beta_k^{0*} + \delta_k \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \nu \alpha'_\nu \varepsilon_1^{\nu+1} - \delta_k \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \alpha_\nu^0 \varepsilon^{\nu+1} - (-1)^k \sum_{\nu=1}^{\infty} \{(-1)^\nu \alpha'_\nu \varepsilon_1^{k+\nu} C_{k+\nu-1}^k - \alpha_\nu^0 \varepsilon^{k+\nu} C_{k+\nu-1}^k\} = t_k.$$

Здесь

$$\beta_k^{0*} = \beta_k^0 + k \alpha_k^0 - (k-2) \alpha_{k-2}^0, \quad \beta_k^{0*} = \beta_k' + k \alpha_k' - (k-2) \alpha_{k-2}',$$

$$\varepsilon = \frac{1}{l}, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{2l}. \quad (\text{II.193})$$

Просуммировав в бесконечных суммах коэффициенты при  $\alpha'_k, \alpha_k^0, \beta_k'$  и  $\beta_k^{0*}$ , получим

$$A_{1k} = 2 \left\{ \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{k+1} \left[ k+3 - (k+2) \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - (1-\varepsilon)^{k+1} \right] \right\},$$

$$A_{2k} = 2 \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{k+1} + 2 \delta_k \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2, \quad (\text{II.194})$$

$$A_{3k} = \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{k+1} \left[ k+3 - (k+2) \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 - (1-\varepsilon)^{k+1} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{k+1} \left[ k+3 - (k+2) \left( \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^2 - (1+\varepsilon)^{k+1} \right] +$$

$$+ \left( \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \right)^{k+1} \left[ k+3 - (k+2) \left( \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \right)^2 - (1-\varepsilon_1)^{k+1} \right],$$

$$A_{4k} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^{k+1} + \left( \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^{k+1} + \delta_k \left[ \left( \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \right)^2 + \left( \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \right)^2 \right] \right\} +$$

$$+ \left( \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \right)^{k+1} + \delta_k \left( \frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} \right)^2.$$

Выражения (II.194) имеют такую же структуру, как и (II.190). Они показывают, что система (II.192) — квазирегулярна при любой близости отверстий друг к другу. Распределение напряжений вблизи контуров отверстий и между контурами здесь получается в таком же виде, как и при рассмотрении среды с двумя круглыми отверстиями. Однако концентрация напряжений получается несколько другой, что видно из приведенных ниже значений максимальных напряжений, возникающих в упругой среде с тремя отверстиями при ее растяжении как

вдоль линии центров ( $p \neq 0, q = 0$ ), так и поперек линии центров ( $p = 0, q \neq 0$ ):

$\varepsilon$	1/4	1/3	2/5
$\left(\frac{\sigma_{\theta}}{p}\right)_{\theta=\pi/2}$	2,42	2,27	2,19
$\left(\frac{\sigma_{\theta}}{q}\right)_{\theta=0}$	3,10	3,46	4,44

Значения этих напряжений относятся соответственно к точкам  $B$  и  $A$  (рис. II.84) контура внутреннего отверстия.

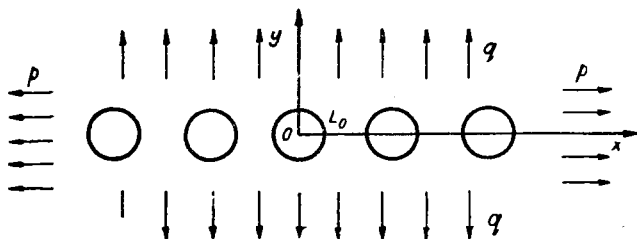


Рис. II.85

**Бесконечный ряд одинаковых круговых отверстий.** Пусть имеем упругую плоскость с бесконечным рядом равных круговых отверстий\*, когда на бесконечности осуществлено растяжение в двух направлениях\*\*. Начало координат поместим в центре одного из отверстий, которое назовем основным, а ось  $x$  совместим с линией центров отверстий (рис. II.85). Расстояния между центрами отверстий примем равными  $l$ .

В  $N$ -ом приближении функции

$$\varphi(z) = \sum_{k=1,3,\dots}^N \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_k}{(z-nl)^k}, \quad (\text{II.195})$$

$$\psi(z) = \sum_{k=1,3,\dots}^{N+2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\beta_k}{(z-nl)^k}.$$

В силу периодичности данной задачи коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  определяются из граничных условий на контуре основного отверстия. На остальных отверстиях они будут удовлетворены автоматически.

\* Эта задача иным методом ранее была рассмотрена Р. С. J. Howland [2].

\*\* Случай, когда отверстия подкреплены упругими кольцами или заполнены упругими ядрами, рассмотрен А. С. Космодамианским [13].

В первом приближении ( $N=1$ ) система для определения коэффициентов  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  будет иметь вид

$$\alpha_1(1 + 4\varepsilon^2 P_{11}) = \frac{p-q}{2} - \lambda_2 \varepsilon^2 (p+q), \quad (II.196)$$

$$\beta_1 = -\frac{p+q}{2} - \alpha_1(1 - 4\lambda_2 \varepsilon^2), \quad \beta_3 = \alpha_1(1 + 2\lambda_4 \varepsilon^4).$$

где

$$\varepsilon = \frac{1}{l}, \quad \lambda_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}, \quad P_{11} = \lambda_2 - \varepsilon^2(3\lambda_4 + 2\lambda_2^2) - 3\lambda_4^2 \varepsilon^6. \quad (II.197)$$

Во втором приближении ( $N=2$ )

$$\alpha_1(1 + 4\varepsilon^2 P_{12}) + 6\alpha_3 \varepsilon^4 P_{32} = \frac{p-q}{2} - \lambda_2 \varepsilon^2 (p+q),$$

$$2\alpha_1 \varepsilon^4 P_{32} + \alpha_3(1 + 4\varepsilon^6 Q_{32}) = -\lambda_4 \varepsilon^4 (p+q),$$

$$\beta_1 = -\frac{p+q}{2} - \alpha_1(1 - 4\lambda_2 \varepsilon^2) + 12\alpha_3 \lambda_4 \varepsilon^4, \quad (II.198)$$

$$\beta_3 = \alpha_1(1 + 2\lambda_4 \varepsilon^4) - \alpha_3(3 - 20\lambda_6 \varepsilon^6),$$

$$\beta_5 = 2\alpha_1 \lambda_6 \varepsilon^6 + 3\alpha_3(1 + 14\lambda_8 \varepsilon^8).$$

Здесь

$$P_{32} = 4\lambda_4 - \varepsilon^2(15\lambda_6 + 4\lambda_2 \lambda_4) - 20\lambda_4 \lambda_6 \varepsilon^6 - 70\lambda_6 \lambda_8 \varepsilon^{10},$$

$$Q_{32} = 30\lambda_6 - \varepsilon^2(105\lambda_8 + 6\lambda_4^2) - 100\lambda_6^2 \varepsilon^6 - 735\lambda_8^2 \varepsilon^{10}. \quad (II.199)$$

Как будет показано ниже, уже второе приближение обеспечивает получение результатов, близких к точным, если расстояния между отверстиями больше или равны половине радиуса одного из отверстий.

При рассмотрении среды с более близкими расстояниями между отверстиями следует использовать следующие приближения, получая для определения постоянных  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  укороченную систему из следующей бесконечной системы:

$$\alpha_k + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \varepsilon^{k+m} \{ \alpha_m [\varepsilon^2 \lambda'_{k+m+2} ((k+2) C_{k+m+1}^{k+2} +$$

$$+ m C_{k+m+1}^k) - (k+m) \lambda'_{k+m} C_{k+m-1}^k ] + B_m^* \lambda'_{k+m} C_{k+m-1}^k \} = \omega_k, \quad (II.200)$$

$$\beta_k^* + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \alpha_m \varepsilon^{m+1} (\varepsilon^{k-1} \lambda'_{k+m} C_{k+m-1}^k + \delta_k \alpha_{m+1} m) = t_k.$$

Здесь  $\lambda'_k = 2\lambda_k$ .

Система (II.200), как и ранее рассмотренные бесконечные системы (II.188) и (II.192) — квазирегулярна при любой близости отверстий друг от друга\*.

Характер распределения напряжений в упругой плоскости с бесконечным числом одинаковых круговых отверстий между отверстиями и вблизи них такой же, как и в плоскости с двумя и тремя отверстиями. Поэтому в табл. II.36 приведены лишь максимальные напряжения, возникающие вблизи основного отверстия.

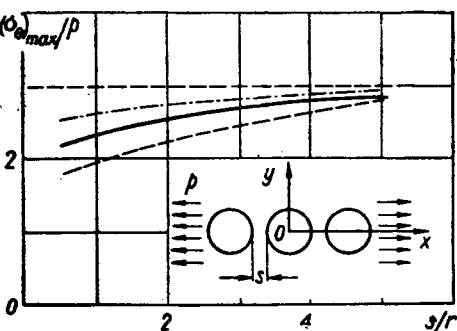


Рис. II.86

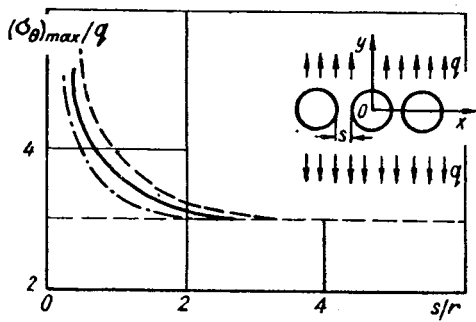


Рис. II.87

**Заключительные замечания.** Сравнив полученные результаты для плоскости с двумя, тремя и бесконечным рядом круговых отверстий, можно определить влияние количества отверстий и расстояний между ними на концентрацию напряжений.

На рис. II.86 и II.87 представлены графики, характеризующие изменение максимального напряжения  $\sigma_\theta$  на контуре одного из отверстий при изменении расстояний между отверстиями, когда на бесконечности действуют растягивающие усилия вдоль и поперек линии центров: штрихпунктирные линии соответствуют плоскости, ослабленной двумя отверстиями; сплошные — с тремя (рассматривается  $\sigma_\theta$  на внутреннем отверстии) отверстиями; а штриховые — плоскости с бесконечным рядом равных отверстий. Кривые на этих графиках показывают, что

Таблица II.36

$s$	$(\sigma_\theta/\rho)_{\theta=\pi/2}$ при различных приближениях			$(\sigma_\theta/q)_{\theta=0}$ при различных приближениях		
	I	II	III	I	II	III
1/2,2	1,45	1,76	1,75	8,69	10,39	11,15
1/2,5	1,52	1,85	1,81	5,47	5,64	5,71
1/3	1,70	1,96	1,92	4,03	3,95	3,93
1/4	2,09	2,15	2,14	3,33	3,26	3,24

\* См. А. С. Космодамианский [10].

существенное влияние отверстий друг на друга появляется тогда, когда расстояние между ними меньше диаметра одного из них. При растяжении упругой плоскости вдоль линии центров отверстий (рис. II.86) концентрация напряжений при сближении отверстий медленно убывает, причем степень убывания возрастает с увеличением количества отверстий. Если же упругая плоскость растягивается поперек линии центров отверстий (рис. II.87), наблюдается обратная картина: при сближении отверстий концентрация напряжений растет, причем тем быстрее, чем больше имеется отверстий.

### § 9. Напряжения в упругой плоскости, ослабленной двумя неодинаковыми отверстиями

При изучении напряженного состояния в упругой изотропной плоскости, ослабленной двумя неодинаковыми круговыми отверстиями, возможно применение биполярных координат, что приводит к точному решению поставленной задачи. Такие решения для разных частных задач получены Я. С. Подстригачем [2, 3], М. А. Савруком [1—3], Могі Кyohei [1] и др.

Д. И. Шерман [5] при решении задач для многосвязных областей применил приближенный метод и свел их к решению бесконечных алгебраических систем, которые оказываются квазирегулярными при любой близости отверстий друг от друга. Этот метод был применен Д. И. Шерманом [6] к задаче, когда одно из отверстий — круговое, а второе — эллиптическое. Многие практически интересные задачи были рассмотрены методом Д. И. Шермана Л. Н. Кислер [1, 2], Н. П. Мошкиным [1, 2] и др.

Если неодинаковые отверстия расположены близко друг от друга, решение задачи о напряженном состоянии для такой многосвязной области представляет значительные трудности. Однако, как показал А. С. Космодамианский [2], в случае, когда расстояние между отверстиями превышает два диаметра малого отверстия, можно получить достаточно простые результаты, используя при решении указанных задач метод последовательных приближений Шварца.

**Два неравных круговых отверстия.** Пусть упругая изотропная плоскость ослаблена двумя неодинаковыми круговыми отверстиями, центры которых лежат на прямой, совпадающей с осью  $x$  (рис. II.88). Расстояние между контурами отверстия равно  $S$ , а между центрами отверстий —  $l$ . Радиусы малого и большого отверстий  $r=1$  и  $R(R>1)$ . Контур большого отверстия обозначим через  $L_1$ , а малого — через  $L_0$ . На бесконечности заданы растягивающие усилия  $p$  и  $q$  так, как указано на рис. II.88.

Приближенное решение этой задачи в первом приближении, используя метод Шварца, дал А. С. Космодамианский [2]. Метод Шварца в применении к данной задаче состоит в том, что сначала находят



известным (см. § 1 гл. I) методом Н. И. Muskhelishvili решение для бесконечной плоскости с одним большим круговым отверстием. На контуре малого отверстия это решение дает ненулевое значение  $\bar{X}_n$  и  $\bar{Y}_n$ . Далее тем же методом Н. И. Muskhelishvili находится решение для бесконечной плоскости с одним малым отверстием, по контуру которого

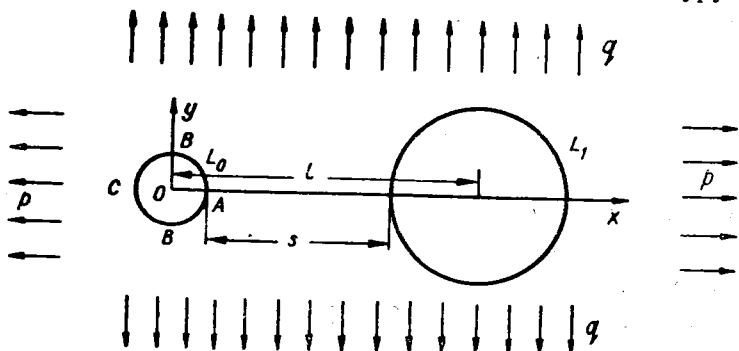


Рис. II.88

приложены внешние усилия  $(-X_n)$  и  $(-Y_n)$ . Наложение этих двух полей напряжений и дает искомое решение задачи в первом приближении\*.

При растяжении пластинки усилиями  $q$  поперек линии центров, т. е. при  $q \neq 0$  и  $p = 0$ , напряжения возле отверстий определим из следующих уравнений:

$$\sigma_x + \sigma_y = q + 2q \operatorname{Re} \left\{ \frac{R^2}{l^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{R^2}{(z-l)^2} + \frac{R^2(1+zl-3z^2+lz^3)}{(1-lz)^3} + \frac{3R^4z^2}{(1-lz)^4} \right\}, \quad (\text{II.201})$$

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = q \left\{ 1 + \frac{3R^4}{(z-l)^4} + \frac{R^2(z-2\bar{z}+l)}{(z-l)^3} + 2 \left( \bar{z} - \frac{1}{z} \right) \left[ -\frac{1}{z^3} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{3R^4(1+lz)}{(1-lz)^5} + \frac{R^2(2l-3z+l^2z)}{(1-lz)^4} \right] + \frac{1}{z^2} \left[ 1 + \frac{2R^2}{l^2} + \frac{1}{z^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{R^2(1+zl-3z^2+lz^3)}{(1-lz)^3} + \frac{3R^4z^2}{(1-lz)^4} \right] + \frac{R^2}{(1-lz)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Исследование напряженного состояния в плоскости, ослабленной двумя неодинаковыми отверстиями показало, что наибольший интерес представляют напряжения  $\sigma_\theta$ , действующие по контуру малого отвер-

\* Легко видеть, что при этом удовлетворяются условия на бесконечности и граничные условия лишь на контуре малого кругового отверстия  $L_0$ . Очевидно, отклонение значений  $X_n$  и  $Y_n$  от нуля на контуре  $L_1$  будет показывать степень приближения найденного решения.

стия  $L_0$ . Что касается распределения напряжений в плоскости вблизи большого отверстия, то оно получается примерно таким же, как и в среде с одним отверстием (малое отверстие незначительно влияет на изменение напряженного состояния среды вблизи большого отверстия).

Напряжения для точек контура  $L_0$

$$\sigma_\theta = q \left( 1 + \frac{2R^2}{l^2} \right) + 2q \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sigma^2} + \frac{R^2}{(\sigma - l)^2} + \frac{R^2(1 + \sigma l - 3\sigma^2 + l\sigma^3)}{(1 - l\sigma)^4} + \frac{3R^4\sigma^2}{(1 - l\sigma)^4} \right], \quad (\text{II.202})$$

где

$$\sigma = e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Напряжения в точках  $A(\theta = 0)$ ,  $B(\theta = \frac{\pi}{2})$  и  $C(\theta = \pi)$  (см. рис. II.88)

$$(\sigma_\theta)_{\theta=0} = 2q [1,5 - R^2\varepsilon^2 (2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + 5\varepsilon^4) + 3R^4\varepsilon^4 (1 + 4\varepsilon + 10\varepsilon^2 + 20\varepsilon^3 + 35\varepsilon^4)],$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2q [-0,5 + R^2\varepsilon^2 (2 - 15\varepsilon^2 + 45\varepsilon^4) - 3R^4\varepsilon^4 (1 - 10\varepsilon^2 + 35\varepsilon^4)],$$

(II.203)

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\pi} = 2q [1,5 + R^2\varepsilon^2 (2\varepsilon - 3\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 - 5\varepsilon^4) + 3R^4\varepsilon^4 (1 - 4\varepsilon + 10\varepsilon^2 - 20\varepsilon^3 + 35\varepsilon^4)].$$

Здесь

$$\delta = \frac{1}{l} \ll \frac{1}{2}.$$

Формулы (II.203) получены удержанием в разложениях (II.202) в ряд по малому параметру  $\varepsilon$  трех первых слагаемых.

При растяжении пластинки (рис. II.89) вдоль линии центров отверстий ( $q = 0$ ,  $p \neq 0$ ):

$$\sigma_x + \sigma_y = p - 2p \operatorname{Re} \left\{ \frac{R^2}{l^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{R^2}{(z-l)^2} - \frac{R^2(1-3lz+3z^2-lz^3)}{(1-lz)^3} + \frac{3R^4z^2}{(1-lz)^4} \right\},$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = p \left\{ -1 - \frac{3R^4}{(z-l)^4} + \frac{R^2(z-2\bar{z}-3l)}{(z-l)^3} + \right.$$

$$\left. + 2 \left( \bar{z} - \frac{1}{z} \right) \left[ \frac{1}{z^3} + \frac{3R^2z(1-l^2)}{(1-lz)^4} - \frac{3zR^4(1+lz)}{(1-lz)^5} \right] + \frac{1}{z^2} \left[ 1 - \frac{1}{z^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{2R^2}{l^2} + \frac{R^2(1-3lz+3z^2-lz^3)}{(1-lz)^3} - \frac{3R^4z^2}{(1-lz)^4} \right] - \frac{R^2}{(1-lz)^3} \left. \right\}. \quad (\text{II.204})$$

В точках контура  $L_0$  (рис. II.88)

$$\sigma_\theta = p \left( 1 - \frac{2R^2}{l^2} \right) - 2p \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\sigma^2} + \frac{R^2}{(\sigma - l)^2} - \frac{R^2(1-3l\sigma^2+3\sigma^3-l\sigma^3)}{(1-l\sigma)^3} + \frac{3R^4\sigma^2}{(1-l\sigma)^4} \right].$$

(II.205)

Разлагая  $\sigma_\theta$  (II.205) в ряд по малому параметру  $\epsilon$  и ограничиваясь той же точностью, что и выше, получаем напряжения  $\sigma_\theta$  в точках  $A, B$  и  $C$ :

$$(\sigma_\theta)_{\theta=0} = -2\rho[0,5 - R^2\epsilon^2(2 + 6\epsilon + 9\epsilon^2 + 12\epsilon^3 + 15\epsilon^4) + 3R^4\epsilon^4(1 + 4\epsilon + 10\epsilon^2 + 20\epsilon^3 + 35\epsilon^4)],$$

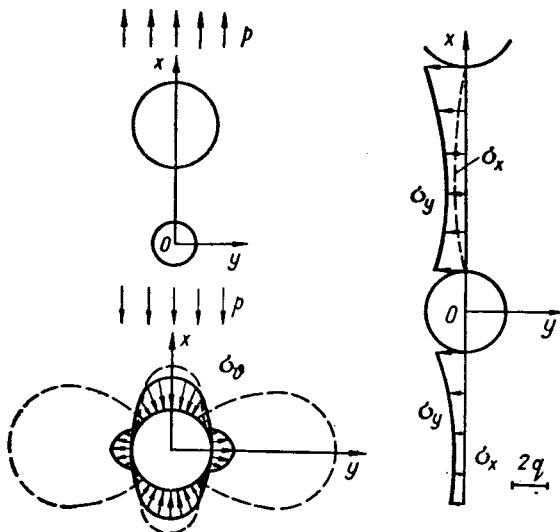


Рис. II.89

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \rho\{1 + 2[1 - R^2\epsilon^2(4 - 21\epsilon^2 + 55\epsilon^4) + 3R^4\epsilon^4(1 - 10\epsilon^2 + 35\epsilon^4)]\},$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\pi} = -2\rho[0,5 - R^2\epsilon^2(2 - 6\epsilon + 9\epsilon^2 - 12\epsilon^3 + 15\epsilon^4) + 3R^4\epsilon^4(1 - 4\epsilon + 10\epsilon^2 - 20\epsilon^3 + 35\epsilon^4)]. \quad (\text{II.206})$$

Следует отметить, что в случае всестороннего растяжения ( $p = q$ ) формула для определения напряжений в точках контура  $L_0$  получается наиболее простой:

$$\sigma_\theta = 2q \left[ 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{R^2}{(1 - l\sigma)^2} \right]. \quad (\text{II.207})$$

В точках  $A, B$  и  $C$  (см. рис. II.88) напряжения

$$(\sigma_\theta)_{\theta=0} = 2q \left[ 1 + \frac{2R^2}{(1 - l)^2} \right], \quad (\sigma_\theta)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 2q \left[ 1 + \frac{2R^2(1 - l^2)}{(1 + l^2)^2} \right],$$

$$(\sigma_\theta)_{\theta=\pi} = 2q \left[ 1 + \frac{2R^2}{(1 + l)^2} \right]. \quad (\text{II.208})$$

В табл. II.37 и II.38 приведены значения напряжений  $\sigma_\theta$  в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  для случая всестороннего растяжения ( $p=q$ ). В табл. II.37 даны значения  $\sigma_\theta/q$  в указанных трех точках (см. рис. II.88) как функции от  $s/r$ , когда радиус большого отверстия в 20 раз превышает радиус малого отверстия. В табл. II.38 представлены те же значения  $\sigma_\theta/q$  в виде функции от изменения (увеличения) радиуса большого отверстия  $R$ , когда расстояние между отверстиями остается неизменным и равным  $5r$ .

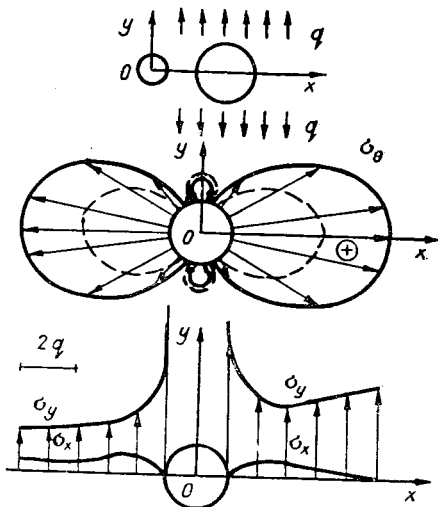


Рис. II.90

На рис. II.89 и II.90 приведены графики, характеризующие распределение напряжений  $\sigma_\theta$  по контуру  $L_0$  и сечению  $y=0$  между отверстиями при  $R/r=20$  и  $s/r=5$ . Штриховые линии относятся к среде, ослабленной одним отверстием  $L_0$ , и даны для сравнения. Эти графики показывают влияние большого отверстия на напряженное состояние вблизи малого отверстия.

**Эллиптическое и квадратное отверстия.** Рассмотрим упругую изотропную плоскость, ослабленную двумя неодинаковыми криволинейными отверстиями, одно из которых является эллиптическим, а второе — квадратным с закругленными углами.

Будем считать, что большая ось эллиптического отверстия значительно превышает по своим размерам расстояние между наиболее удаленными друг от друга точками контура квадратного отверстия. Расположение отверстий примем таким, как это изображено на рис. II.91. Контур эллиптического отверстия обозначим через  $L_0$ , а квадратного — через  $L_1$ . На бесконечности, как и раньше, будем предполагать, что упругая плоскость растягивается в двух направлениях усилиями  $p$  и  $q$ . При приближенном решении поставленной задачи методом Шварца, как и выше, ограничимся первым приближением\*.

Таблица II.37

z	s/r						
	5	10	15	20	30	50	100
1	4,56	3,78	3,31	3,00	2,64	2,32	2,01
$\pm i$	-0,36	0,34	0,77	1,05	1,39	1,68	1,89
-1	4,19	3,56	3,17	2,91	2,59	2,31	2,01

\* Решение задачи дано А. С. Космодамианским [9].

Функции, конформно отображающие внешность единичного круга  $\gamma$  соответственно на внешность эллиптического и квадратного отверстий, возьмем в виде

$$z - l = R \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right). \quad (\text{II.209})$$

$$z = \omega(\zeta) = R_1 \left( \zeta + \frac{m_3}{\zeta^3} \right). \quad (\text{II.210})$$

Здесь  $R = \frac{a+b}{2}$ ,  $m = \frac{a-b}{a+b}$  ( $a$  и  $b$  — полуоси эллипса),  $m_3 = -\frac{1}{9}$  а  $R_1$  — постоянная, влияющая на размеры квадратного отверстия.

Как и в задаче с двумя неодинаковыми круговыми отверстиями, наибольший интерес представляют напряжения вблизи квадратного отверстия  $L_1$ . В случае растяжения (рис. II.91) поперек линии центров отверстий ( $q \neq 0$ ,  $p = 0$ ) напряжения по контуру  $L_1$

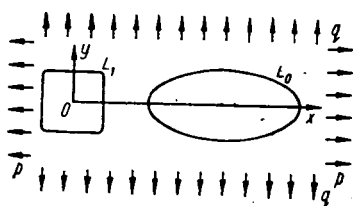


Рис. II.91

$$\sigma_\theta = q - 2qR(1+m)\{A_1 + 2A_2R_1(\cos\theta + m_3 \cos 3\theta) + 3A_3R_1^2[(1+2m_3)\cos 2\theta +$$

$$+ m_3^2 \cos 6\theta]\} - \frac{2q}{R_1 C^2} \left\{ A \sum_{k=1}^9 k M_k \cos k\theta - B \sum_{k=1}^9 k M_k \sin k\theta \right\}, \quad (\text{II.211})$$

де

$$M_1 = \frac{1}{1-m_3} \{-R_1 + R(1+m)[3A_3R_1^3(1+m_3+2m_3^2) + R_1(B_1 - A_1)]\},$$

$$M_2 = RR_1^2(1+m)[B_2 + 2A_2(m_3 - 1)], \quad (\text{II.212})$$

$$M_3 = -R_1m_3 + RR_1(1+m)[2A_1m_3 + (B_3 - 3A_3)R_1^2],$$

$$M_4 = 2RR_1^2(1+m)A_2m_3, \quad M_5 = 3RR_1^2(1+m)(1+m_3)m_3A_3,$$

$$M_6 = RR_1^2(1+m)A_2m_3^2, \quad M_7 = M_8 = 0, \quad M_9 = RR_1^3A_3m_3^3(1+m),$$

$$A = \cos\theta - 3m_3 \cos 3\theta, \quad B = \sin\theta + 3m_3 \sin 3\theta, \quad C^2 = A^2 + B^2,$$

Таблица II.38

z	R/r							
	1	2	3	5	10	20	30	100
1	2,11	2,33	2,56	3,00	3,78	4,56	4,94	5,63
$\pm i$	1,92	1,76	1,54	1,19	0,46	-0,36	-0,77	-1,56
-1	2,06	2,20	2,36	2,69	3,38	4,19	4,63	5,49

$$\begin{aligned}
 A_1 &= -R^{-1}(q_0^2 - m)^{-1}, & A_2 &= q_0^3 R^{-2}(q_0^2 - m)^{-3}, \\
 A_3 &= -q_0^4(q_0^2 + m)(q_0^2 - m)^{-5} R^{-3}, \\
 B_1 &= -[mq_0^4 + (3 - 6m + m^2)q_0^2 + m](q_0^2 - m)^{-3} R^{-1}, & (II.213) \\
 B_2 &= q_0^3[mq_0^4 + (6 - 12m + 4m^2)q_0^2 + m^3](q_0^2 - m)^{-5} R^{-2}, \\
 B_3 &= -q_0^4[mq_0^6 + (10 - 20m + 9m^2)q_0^2(q_0^2 + m) + m^4](q_0^2 - m)^{-7} R^{-3}, \\
 q_0 &= -\frac{l}{2R}(1 + \sqrt{1 - 4mR^2 l^{-2}}).
 \end{aligned}$$

Если же упругая плоскость растягивается вдоль линии центров ( $p \neq 0, q = 0$ ), то

$$\begin{aligned}
 \sigma_\vartheta &= p + 2pR(1 - m)\{A_1 + 2A_2R_1(\cos\vartheta + m_3 \cos 3\vartheta) + \\
 &+ 3A_3R_1^2[(1 + 2m_3)\cos 2\vartheta + m_3^2 \cos 6\vartheta]\} - \\
 &- \frac{2p}{R_1 C^2} \left\{ A \sum_{k=1}^9 kM_k^* \cos k\vartheta - B \sum_{k=1}^9 kM_k^* \sin k\vartheta \right\}, & (II.214)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 M_1^* &= \frac{R_1}{1 - m_3} \{1 - R(1 - m)[3A_3R_1^2(1 + m_3 + 2m_3^2) - A_1 - B_1^*]\}, \\
 M_2^* &= -RR_1^2(1 - m)[2A_2(m_3 - 1) - B_2^*], \\
 M_3^* &= -R_1m_3 - R(1 - m)[2A_1m_3 - R_1^2(B_3^* + 3A_3)]R_1, \\
 M_4^* &= -2RR_1^2m_3A_2(1 - m), \\
 M_5^* &= -3RR_1^3m_3A_3(1 - m)(1 + m_3), \\
 M_6^* &= -RR_1^2m_3^2A_2(1 - m), \\
 M_7^* &= M_8^* = 0, \\
 M_9^* &= -RR_1^3m_3^3A_3(1 - m).
 \end{aligned} & (II.215)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 B_1^* &= [q_0^4(m - 2) + q_0^2(3 - 2m + m^2) - m](q_0^2 - m)^{-3} R^{-1}, \\
 B_2^* &= [q_0^7(2 - m) + 2q_0^5(3 - 4m + 2m^2) + q_0^4m^2(2 - m)](q_0^2 - m)^{-5} R^{-2},
 \end{aligned}$$

$$B_3^* = [q_0^{10}(m-2) + (q_0^8 + mq_0^6)(10 - 18m + 9m^2) + q_0^4 m^3 (m-2)](q_0^2 - m)^{-7} R^{-3}. \quad (\text{II.216})$$

На рис. 92 представлены напряжения  $\sigma_\phi$  по контуру квадратного отверстия для случая, когда  $a/b=20$ ,  $R/b=10,5$ ,  $m=19/21$ ,  $R_1/b=1,125$ ,  $m_3 = -1/9$ ,  $l/b=26$ . Как и раньше, штриховой линией обозначены  $\sigma_\phi$  для случая, когда плоскость ослаблена лишь одним квадратным отверстием.

**Заключительные замечания.** Проведенные исследования показывают, что в упругой плоскости, ослабленной двумя неодинаковыми отверстиями, малое отверстие незначительно влияет на напряженное состояние вблизи большого отверстия. Последнее может весьма существенно изменять напряженное состояние вблизи малого отверстия, если расстояние между отверстиями меньше половины диаметра большого отверстия.

При растяжении плоскости поперек линии центров (рис. II.92) концентрация напряжений вблизи малого отверстия резко возрастает. При растяжении плоскости вдоль линии центров в случае двух круговых отверстий (рис. II.89) концентрация напряжений вблизи малого отверстия резко уменьшается; в случае же, когда большое отверстие является эллиптическим, напряженное состояние среды вблизи малого отверстия изменится несущественно по сравнению со случаем, когда плоскость ослаблена одним малым отверстием.

Исследованию напряженного состояния в бесконечной пластинке, ослабленной двумя равными круговыми отверстиями при различных условиях на бесконечности и контуре отверстия, посвящены работы В. В. Матвиенко [1], Н. Н. Пенина [1], М. А. Саврука [1], А. Atsumi [1—3], Мияо Кадзю [1, 2], А. М. Sen Gupta [2], З. Хокао [1], В. В. Еганяна [1]. Напряженное состояние в бесконечной пластинке, ослабленной двумя неравными круговыми отверстиями, исследовано В. М. Заблудовским [1], Я. С. Подстригачем [2, 3], М. А. Савруком [2—5], М. З. Народецким [1—3], А. С. Локшиным [2], Г. А. Davies, I. R. Hoddinott [1], J. N. Sckhri [1], Ю. А. Устиновым [1]. Напряженное состояние в пластинке с несколькими круговыми отверстиями рассматривалось в работах В. Н. Буйвола [1, 2], Isida Makoto [1, 2], Н. Kraus [1], Окабаяси [1], М. З. Народецкого [5], Radkowski Peter P. [1], Saito Hideo [1], Тан-Ли-Минь [1, 2], Сайто [1], в монографии L. E. Hulbert [1], L. E. Hulbert, F. W. Niefenfuhr [1]. Растяжение

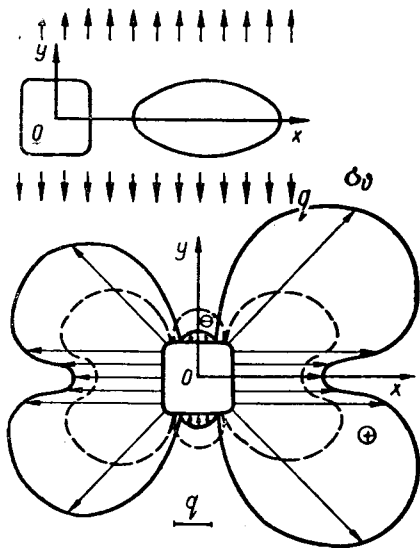


Рис. II.92

бесконечной пластинки, содержащей бесконечное число эллиптических отверстий, исследовалось Nisitani Hiropobu [1, 2]. Задача о концентрации напряжений в растягиваемой пластинке, ослабленной несколькими прямоугольными отверстиями, рассматривалась S. K. Roy [1].

### § 10. Напряжения в упругой плоскости, ослабленной криволинейными отверстиями

**Бесконечный ряд одинаковых криволинейных отверстий\***. Допустим, что упругая среда заполняет плоскость  $Oxy$ , в которой имеется неограниченный ряд конгруэнтных вырезов-отверстий произвольной формы\*\*, расположенных так, что каждый последующий вырез получается передвижением предыдущего на  $2\pi$  вдоль оси  $Ox$ . К контуру каждого из вырезов приложены равные в соответствующих точках внешние усилия  $X_n$  и  $Y_n$ , статически эквивалентные нулю на каждом контуре. Возьмем начало координат внутри одного из контуров и мысленно разобьем всю плоскость  $Oxy$  на бесконечный ряд полос шириной  $2\pi$  прямыми  $y = -3\pi, y = -\pi, y = \pi, y = 3\pi$  и т. д., считая, что каждый вырез полностью лежит внутри соответствующей полосы. Компоненты напряжений и деформаций будут периодическими функциями  $s$  с периодом  $2\pi$ . Достаточно поэтому рассмотреть их в полосе  $-\pi \leq \text{Re } z \leq +\pi$  с данным вырезом\*\*\*.

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к определению компонентов напряжений и деформаций в полосе с данным отверстием, по контуру  $l$  которого заданы внешние усилия  $X_n$  и  $Y_n$ . Обозначим через  $S$  область, ограниченную прямыми  $y = -\pi, y = \pi$  и контуром  $l$  выреза, через  $S^*$  — область внутри  $l$ .

Решение плоской задачи теории упругости по заданным внешним усилиям  $X_n$  и  $Y_n$  на контуре сводится к определению двух аналитических функций комплексной переменной  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , удовлетворяющих контурному условию (I.9):

$$\overline{\varphi(z)} + z\overline{\varphi'(z)} + \psi(z) = -i \int_0^s (X_n - iY_n) ds + \overline{C} = f_1 - if_2, \quad (\text{II.127})$$

где  $C$  — произвольная комплексная постоянная.

Компоненты напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  и деформаций  $u$  и  $v$  по найденным функциям  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  определяются из формул (I.10) и (I.13):

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re} \{ \varphi'(z) \},$$

\* См. Г. Н. Савин [6]; эту же задачу несколько отличными методами решали Д. И. Шерман [7, 8], И. И. Ворович и А. С. Космодамианский [1], А. С. Космодамианский [7, 8].

\*\* Случай круговых отверстий при одноосном однородном напряженном состоянии на бесконечности рассматривался R. C. J. Howland [2]; основные результаты из этой статьи приведены в монографии Г. Н. Савина [13].

\*\*\* Эта задача имеет единственное решение при условиях, что компоненты напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  при  $y \rightarrow \infty$  равномерно стремятся к нулю, а компоненты деформации  $u, v$  — ограниченные величины.



$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad (\text{II.218})$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (\text{II.219})$$

Поскольку левые части уравнений (II.218) и (II.219), как это следует из самой постановки задачи, суть периодические функции периода  $2\pi$ , то функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  непременно должны иметь вид

$$\varphi(z) = \varphi_0(z), \quad \psi(z) = \psi_0(z) - z\varphi_0'(z), \quad (\text{II.220})$$

где  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  — периодические функции периода  $2\pi$ .

Контурное условие (II.217) и формулы для напряжений и деформаций (II.218) и (II.219) в функциях  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  будут иметь вид

$$\overline{\varphi_0(z)} + (\bar{z} - z)\varphi_0'(z) + \psi_0(z) = f_1 - if_2, \quad (\text{II.221})$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\text{Re}\{\varphi_0'(z)\},$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[(z - \bar{z})\varphi_0''(z) + \psi_0'(z) - \varphi_0'(z)], \quad (\text{II.222})$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi_0(z) - (z - \bar{z})\overline{\varphi_0'(z)} - \overline{\psi_0(z)}. \quad (\text{II.223})$$

Функции  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  определены\* с точностью до выражения

$$\varphi_0(z) = C_1^*, \quad \psi_0(z) = -\bar{C}_1^*, \quad (\text{II.224})$$

где  $C_1^*$  — произвольная комплексная постоянная.

Отобразим полосу  $-\pi \leq \text{Re } z \leq +\pi$  на плоскость с разрезом по отрицательной части вещественной оси  $Ox$  при помощи функции

$$w = e^{iz}. \quad (\text{II.225})$$

Контур отверстия переходит в некоторый замкнутый контур  $L$ , не содержащий внутри себя координат. Обозначим через  $\Sigma$  бесконечную область вне контура  $L$  выреза, через  $\Sigma^*$  — область внутри  $L$ .

Функции  $F_1(w) = \varphi_0(-i \ln w)$  и  $F_2(w) = \psi_0(-i \ln w)$  голоморфны в области  $\Sigma$  и удовлетворяют на контуре  $L$  условию

$$\overline{F_1(w)} - w(\overline{\ln w} + \ln w)F_1'(w) + F_2(w) = f_1 - if_2. \quad (\text{II.226})$$

Для определения функций  $F_1(w)$  и  $F_2(w)$  применим прием\*\* Н. И. Мусхелишвили сведения задачи к функциональным уравнениям. Умножим обе части уравнения (II.226) на  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{dw}{w - w_e}$ , где  $w_e$  — точка области  $\Sigma^*$ , и

\* Это следует из теоремы единственности и из периодичности данных функций.

\*\* См. § 1 гл. I.

проинтегрируем по контуру  $L$  в положительном направлении относительно области  $\Sigma$ :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{F_1(\bar{w})}}{w - w_e} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w (\ln \bar{w} + \ln w)}{w - w_e} F_1'(w) dw = \\ & = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f_1 - if_2}{w - w_e} dw = A_1 - iA_2 + \bar{C}. \end{aligned} \quad (\text{II.227})$$

Устремляя в (II.227)  $w_e \rightarrow w_0$ , где  $w_0$  — некоторая точка на контуре  $L$ , и складывая (II.227) с равенствами

$$-\frac{1}{2} \overline{F_1(w)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{F_1(\bar{w})}}{w - w_e} d\bar{w} = 0, \quad (\text{II.228})$$

$$-\frac{w_0 (\ln \bar{w}_0 + \ln w_e)}{2} F_1'(w_0) + \frac{w_0 (\ln \bar{w}_0 + \ln w_e)}{2\pi i} \int_L \frac{F_1'(w)}{w - w_e} dw = 0,$$

после простых преобразований получим:

$$\begin{aligned} & \overline{F_1(w_0)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{F_1(\bar{w})} d \left\{ \ln \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0} \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_L F_1(w) d \left\{ \frac{w_0 \ln (\bar{w}_0 w_0) - w \ln (\bar{w} w)}{w - w_0} \right\} = -A_1^{(e)} + iA_2^{(e)} - \bar{C}, \end{aligned} \quad (\text{II.229})$$

где  $A_1^{(e)} - iA_2^{(e)} + \bar{C}$  — предел правой части уравнения (II.227) при стремлении точки  $w_e$  к точке  $w_0$  на контуре  $L$  изнутри его. Уравнение (II.229) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма II рода с регулярным ядром. Однако оно, вообще говоря, неразрешимо, так как однородное уравнение, соответствующее (II.229), имеет нетривиальное решение. Изменим несколько наше уравнение (II.229) прибавлением к его левой части оператора\*

$$i \overline{\ln w} \operatorname{Re} \left\{ \frac{b}{2\pi} \int_L \frac{F_1(w) dw}{(w - b)^2} \right\}, \quad (\text{II.230})$$

где  $b$  — некоторая точка внутри  $\Sigma^*$ .

Итак, уравнение, решающее поставленную нами задачу, будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \overline{F_1(w)} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \overline{F_1(\bar{w})} d \left\{ \ln \frac{w - w_0}{w - \bar{w}_0} \right\} + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_L F_1(w) d \left\{ \frac{w_0 \ln (\bar{w}_0 w_0) - w \ln (\bar{w} w)}{w - w_0} \right\} + \\ & + i \overline{\ln w} \operatorname{Re} \left\{ \frac{b}{2\pi} \int_L \frac{F_1(w) dw}{(w - b)^2} \right\} = -A_1^{(e)} + iA_2^{(e)} - \bar{C}_1. \end{aligned} \quad (\text{II.231})$$

\* См. Д. И. Шерман [8, 11].

Исследование уравнения (II.231) можно вести по такой схеме\*. Допустим, что существует решение уравнений (II.231); если ввести в рассмотрение функции

$$\Phi(w_e) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_1(w)}{w - w_e} dw \quad (\text{II.232})$$

$$\Psi(w_e) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{F_1(w)}}{w - w_e} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w \ln(\overline{w})}{w - w_e} F_1'(w) dw + A_1 - iA_2 + \overline{C}, \quad (\text{II.233})$$

придем к уравнению

$$\overline{\Phi(w)} + w_0 (\ln \overline{w_0} + \ln w_0) \Phi'(w) - \Psi(w) + i \ln w \operatorname{Re} \left\{ \frac{b}{2\pi} \int_L \frac{F_1(w)}{(w-b)^2} dw \right\} = 0. \quad (\text{II.234})$$

Функции  $\Phi(w)$  и  $\Psi(w)$ , как это следует (II.232) и (II.233) — голоморфны в области  $\Sigma^*$ .

Уравнение (II.234) в переменной  $z$  имеет вид

$$\overline{F(z)} + (z - \overline{z}) F'(z) - G(z) + \overline{z} \operatorname{Re} \{F'(a)\} = 0, \quad (\text{II.235})$$

$$\Phi(w) = F(z), \quad \Psi(w) = G(z), \quad a = -i \ln b.$$

Умножая обе части уравнения (II.235) на  $dz$  и интегрируя по контуру  $L$ , получаем

$$\operatorname{Re} \{F'(a)\} = 0, \quad (\text{II.236})$$

откуда

$$\overline{F(z)} + (z - \overline{z}) F'(z) - G(z) = 0. \quad (\text{II.237})$$

Введя обозначения

$$F(z) = iF^*(z), \quad G(z) - zF'(z) = iH^*,$$

представим уравнение (II.237) в виде

$$\overline{F^*(z)} + \overline{z} F'^*(z) + H^*(z) = 0. \quad (\text{II.238})$$

Уравнение (II.238) соответствует контурной задаче теории упругости с нулевыми внешними усилиями на контуре. Согласно теореме единственности\*\* функции

$$F^*(z) = iC_1 z + C_2, \quad H^*(z) = -\overline{C}_2, \quad (\text{II.239})$$

где  $C_1$  — вещественная постоянная;  $C_2$  — комплексная. Следовательно,

$$F(z) = -C_1 z + iC_2, \quad G(z) = -C_1 z - i\overline{C}_2. \quad (\text{II.240})$$

\* См. Н. И. Muskhelishvili [1].

\*\* См. Н. И. Muskhelishvili [1], стр. 118.

Из (II.236) и (II.240) следует, что  $C_1 \equiv 0$ , т. е.

$$F(z) = iC_2, \quad G(z) = -i\bar{C}_2. \quad (\text{II.241})$$

Из уравнений (II.232), (II.233) и (II.241)

$$\Phi(w_e) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_1(w)}{w - w_e} dw = iC_2, \quad (\text{II.242})$$

$$\Psi(w_e) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{F_1(w)}}{w - w_e} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w \ln(\bar{w}w)}{w - w_e} F_1'(w) dw + \\ + A_1 - iA_2 + \bar{C} = -i\bar{C}_2.$$

Введя новую функцию  $F_1^* = F_1 + iC_2$  и подставляя ее в уравнения (II.242), получим, что функция  $F_1^*$  — голоморфна в области  $\Sigma$  и удовлетворяет уравнению (II.227), в котором изменена правая часть на постоянную величину  $2i\bar{C}_2$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F_1^*(w)}{w - w_e} dw = 0, \quad (\text{II.243})$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{F_1^*(w)}}{w - w_e} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{w \ln(\bar{w}w)}{w - w_e} F_1^*(w) dw = A_1 - iA_2 + \bar{C} + 2i\bar{C}_2.$$

Следует заметить, что постоянная  $C_2$  выпадает при восстановлении  $F_1^*(w)$  интегралом Коши в области  $\Sigma$ , так что при фактическом решении задачи нет надобности ее определять.

Таким образом, решение поставленной задачи для отверстия любой формы может быть получено из интегрального уравнения (II.231), имеющего единственное решение. Это уравнение необходимо сначала заменить системой линейных алгебраических уравнений, для решения которой удобно применить ЭЦВМ.

**Бесконечный ряд одинаковых квадратных отверстий\*.** Пусть упругая изотропная плоскость ослаблена бесконечным рядом одинаковых квадратных отверстий с закругленными углами, уравнения контуров которых заданы отображающей функцией  $\omega(\zeta)$  (II.210) при  $\rho=1$ . Центры тяжести рассматриваемых отверстий поместим на оси  $Ox$  на равном расстоянии  $l$  друг от друга. Начало системы координат  $Oxy$  поместим в центре тяжести одного из отверстий (оно может быть любым), которое назовем **о с н о в н ы м**.

Как и в предыдущем параграфе, будем предполагать, что основное напряженное состояние упругой плоскости — однородно, т. е.

$$\sigma_x^0 = p, \quad \sigma_y^0 = q, \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (\text{II.244})$$

\* Решение этой задачи дано А. С. Космодамианским [6]. Случай, когда отверстия подкреплены абсолютно жесткими кольцами, рассмотрен В. А. Швецовым [1].

Отображающую функцию внешности единичного круга на внешность основного отверстия возьмем в виде (II.210)

Контурное условие (II.221) для рассматриваемого случая

$$\varphi_0(t) + (t - \bar{t}) \overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = \frac{p-q}{2} \bar{t} - \frac{p+q}{2} t, \quad (\text{II.245})$$

где  $t$  — точка на контуре  $L$  основного отверстия.

Периодические функции  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  (с периодом  $l$ ) можно\* представить в виде

$$\varphi_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{[\zeta(z)]^k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{[\zeta(z + nl)]^k}, \quad (\text{II.246})$$

$$\psi_0(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{[\zeta(z)]^k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{[\zeta(z + nl)]^k},$$

где  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — постоянные коэффициенты, а переменная  $\zeta$  связана с переменной  $z$  зависимостью

$$z = \zeta + \frac{m_3}{\zeta^3} + nl \quad \left( m_3 = -\frac{1}{9} \right). \quad (\text{II.247})$$

Первые суммы (II.246) представляют функции, голоморфные в области вне основного отверстия, а вторые суммы — функции, голоморфные внутри основного отверстия. Последние можно разложить в сходящиеся ряды и удержать в них заданное (конечное) число членов.

Наиболее удобно провести такие разложения по малому параметру  $\varepsilon = 1/l$ . Если в указанных разложениях сохранить члены, содержащие множители  $\varepsilon$  в степенях не выше четвертой, получим

$$\varphi(z) = \varphi^*(\zeta) - 2\lambda_2 \varepsilon^2 \alpha_1 z - 2\lambda_4 \varepsilon^4 (\alpha_1 z^3 + 3\alpha_3 z), \quad (\text{II.248})$$

$$\psi(z) = \psi^*(\zeta) - 2\lambda_2 \varepsilon^2 \beta_1 z - 2\lambda_4 \varepsilon^4 (\beta_1 z^3 + 3\beta_3 z),$$

где

$$\varphi^*(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{\zeta^k}, \quad \psi^*(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\zeta^k}, \quad \lambda_{2k} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2k}. \quad (\text{II.249})$$

Приняв во внимание вид отображающей функции  $z = \omega(\zeta)$  (II.210) и разложения (II.248), граничное условие (II.245) можно привести к виду

$$\begin{aligned} & \varphi^*(\sigma) + \frac{\omega(\sigma) - \overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi^*(\sigma)} + \overline{\psi^*(\sigma)} = \\ & = \frac{p-q}{2} \overline{\omega(\sigma)} - \frac{p+q}{2} \omega(\sigma) + 4\omega(\sigma) (\alpha_1 \lambda_2 \varepsilon^2 + 3\lambda_4 \alpha_3 \varepsilon^4) + \end{aligned}$$

\* См. С. Г. Михлин [5].

$$+ 2\lambda_4 \varepsilon^4 \alpha_1 [\omega(\sigma)]^2 + 6\lambda_4 \alpha_1 \varepsilon^4 \omega(\sigma) [\overline{\omega(\sigma)}]^2 + 2\overline{\omega(\sigma)} [\lambda_2 \varepsilon^2 (\beta_1 - \alpha_1) + 3\lambda_4 \varepsilon^4 (\beta_3 - \alpha_3)] + 2\lambda_4 \varepsilon^4 (\beta_1 - \alpha_1) [\overline{\omega(\sigma)}]^2. \quad (\text{II.250})$$

Отсюда методом, изложенным в § 8, находим

$$\begin{aligned} \varphi^*(\zeta) &= \frac{1}{\zeta} \left\{ \frac{p-q}{2} + \alpha_1 [m - 2\lambda_2 \varepsilon^2 + 6\lambda_4 \varepsilon^4 (1 + m + 2m^2)] + \right. \\ &+ 2\lambda_2 \varepsilon^2 \beta_1 + 6\lambda_4 \varepsilon^4 (\beta_3 - \alpha_3) \left. \right\} + \frac{1}{\zeta^3} \left[ -\frac{p+q}{2} m + 2\varepsilon^2 \alpha_1 (2\lambda_2 m - 3\lambda_4 \varepsilon^2) + \right. \\ &+ 2\lambda_4 \varepsilon^4 (\beta_1 + 6m\alpha_3) \left. \right] + 6\alpha_1 m \lambda_4 \varepsilon^4 (1 + m) \frac{1}{\zeta^6} + 2\alpha_1 m^3 \lambda_4 \varepsilon^4 \frac{1}{\zeta^9}; \\ \psi^*(\zeta) &= -\frac{\overline{\omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)} - \omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi^{*\prime}(\zeta) - m\alpha_1 \zeta + \frac{1}{\zeta} \left[ -\frac{p+q}{2} + \right. \\ &+ 2\varepsilon^2 \alpha_1 (2\lambda_2 - 9m\lambda_4 \varepsilon^2) + 6\lambda_4 \varepsilon^4 (m\beta_1 + 2\alpha_3) \left. \right] + \\ &+ \frac{1}{\zeta^3} \left\{ \frac{p-q}{2} m - 2\varepsilon^2 \alpha_1 [\lambda_2 m - \lambda_4 \varepsilon^2 (1 + 6m + 3m^2)] + \right. \\ &+ 2\lambda_2 \varepsilon^2 m \beta_1 + 6m\lambda_4 \varepsilon^4 (\beta_3 - \alpha_3) \left. \right\} + 6m^2 \lambda_4 \varepsilon^4 (\beta_1 - 3\alpha_1) \frac{1}{\zeta^6} + \\ &+ 6m^2 \lambda_4 \varepsilon^4 \alpha_1 \frac{1}{\zeta^9} + 2m^3 \lambda_4 \varepsilon^4 (\beta_1 - 3\alpha_1) \frac{1}{\zeta^9}. \end{aligned} \quad (\text{II.251})$$

Неизвестные коэффициенты  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_3$  определяются из следующей алгебраической системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1 [1 - m + 2\lambda_2 \varepsilon^2 - 6\lambda_4 \varepsilon^4 (1 + m + 2m^2)] + 6\alpha_3 \lambda_4 \varepsilon^4 - \\ - 2\beta_1 \lambda_2 \varepsilon^2 - 6\beta_3 \lambda_4 \varepsilon^4 = \frac{p-q}{2}, \end{aligned}$$

$$2\alpha_1 \varepsilon^2 (3\lambda_4 \varepsilon^2 - 2\lambda_2 m) + \alpha_3 (1 - 12\lambda_4 \varepsilon^4 m) - 2\beta_1 \lambda_4 \varepsilon^4 = -\frac{p+q}{2} m; \quad (\text{II.252})$$

$$\alpha_1 (1 + 18m\lambda_4 \varepsilon^4 - 4\lambda_2 \varepsilon^2) - 3\alpha_3 (m + 4\lambda_4 \varepsilon^4) + \beta_1 (1 - 6m\lambda_4 \varepsilon^4) = -\frac{p+q}{2};$$

$$-\alpha_1 [1 + 3m^2 + 2\lambda_4 \varepsilon^4 (1 + 6m + 3m^2) - 2\lambda_2 \varepsilon^2 m] +$$

$$+ 3\alpha_3 (1 + 2m\lambda_4 \varepsilon^4) - 2\beta_1 \lambda_2 \varepsilon^2 m + \beta_3 (1 - 6\lambda_4 \varepsilon^4 m) = \frac{p-q}{2} m.$$

Найдя функции  $\varphi^*(\zeta)$  и  $\psi^*(\zeta)$  (II.251), из (II.248) получим функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ . Компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  определим по формулам (II.181).

Напряжения по контуру основного отверстия (по контурам других отверстий напряжения будут такими же)

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta} = & p + q - \frac{4}{C^2} \left[ \frac{p-q}{2} + \alpha_1 [m - 2\lambda_2 \varepsilon^2 + 6\lambda_4 \varepsilon^4 (1 + m + 2m^2)] + \right. \\ & \left. + 2\lambda_2 \varepsilon^2 \beta_1 + 6\lambda_4 \varepsilon^4 (\beta_3 - \alpha_3) \right] (A \cos \vartheta - B \sin \vartheta) + \\ & + 3 \left[ -\frac{p+q}{2} m + 2\varepsilon^2 \alpha_1 (2\lambda_2 m - 3\lambda_4 \varepsilon^2) + 2\lambda_4 \varepsilon^4 (\beta_1 + \right. \\ & \left. + 6m\alpha_3) \right] (A \cos 3\vartheta - B \sin 3\vartheta) + 30\alpha_1 m \lambda_4 \varepsilon^4 (1 + m) (A \cos 5\vartheta - B \sin 5\vartheta) + \\ & + 18\alpha_1 m^3 \lambda_4 \varepsilon^4 (A \cos 9\vartheta - B \sin 9\vartheta) - 8\varepsilon^2 (\lambda_2 \alpha_1 + 3\lambda_4 \varepsilon^2 \alpha_3) + \\ & \left. + 3\lambda_4 \varepsilon^2 \alpha_1 [(1 + 2m) \cos 2\vartheta + m^2 \cos 6\vartheta] \right], \quad (\text{II.253}) \end{aligned}$$

где

$$A = \cos \vartheta - 3m \cos 3\vartheta, \quad B = \sin \vartheta + 3m \sin 3\vartheta, \quad C^2 = A^2 + B^2.$$

Для напряжений в точках вещественной оси (в частности, в точках между отверстиями) формулы (II.181) можно упростить:

$$\sigma_x = p + \frac{1}{\omega'(\zeta)} [3\varphi^*(\zeta) - \psi^*(\zeta)] - 3\varphi_1'(z) + \psi_1'(z), \quad (\text{II.254})$$

$$\sigma_y = q + \frac{1}{\omega'(\zeta)} [\varphi^*(\zeta) + \psi^*(\zeta)] - \varphi_1'(z) - \psi_1'(z),$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Для каждой интересующей нас точки  $\zeta$  следует определять из соотношений (II.247), а

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= 2\varepsilon^2 [\lambda_2 \alpha_1 + 3\lambda_4 \varepsilon^2 (\alpha_3 + \alpha_1 z^2)], \\ \psi_1' &= 2\varepsilon^2 [\lambda_2 \beta_1 + 3\lambda_4 \varepsilon^2 (\beta_3 + \beta_1 z^2)]. \end{aligned} \quad (\text{II.255})$$

Формулы (II.255) можно применять для вычисления напряжений лишь вблизи контура основного отверстия вплоть до точек, лежащих посередине между основным и соседними отверстиями.

Если расстояния между отверстиями  $l$  больше двух сторон одного из квадратных отверстий, все выведенные ранее формулы существенно упрощаются, ибо в них следует принять  $\alpha_3 = \beta_3 = \varepsilon^4 = 0$ . Формула (II.253) в этом случае

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta} = & p + q - \frac{4}{C^2} \left\{ \left[ \frac{p-q}{2} + \alpha_1 (m - 2\lambda_2 \varepsilon^2) + 2\lambda_2 \varepsilon^2 \beta_1 \right] (A \cos \vartheta - B \sin \vartheta) + \right. \\ & \left. + 3m \left( -\frac{p+q}{2} + 4\varepsilon^2 \alpha_1 \lambda_2 \right) (A \cos 3\vartheta - B \sin 3\vartheta) \right\} - 8\varepsilon^2 \lambda_2 \alpha_1, \quad (\text{II.256}) \end{aligned}$$

де

$$\alpha_1 = \frac{0,5(p-q) - \lambda_2 \varepsilon^2 (p+q)}{1-m+4\lambda_2 \varepsilon^2}, \quad \beta_1 = -\frac{p+q}{2} - \alpha_1 (1-4\lambda_2 \varepsilon^2). \quad (\text{II.257})$$

Ниже приведены значения  $\sigma_x/q$  и  $\sigma_y/q$  в точках 1, 2 и 3 (рис. II.93) по сечению  $y = 0$  между отверстиями, когда на бесконечности задано однородное напряженное состояние  $\sigma_x^{(\infty)} = 0$ ,  $\sigma_y^{(\infty)} = q$  и  $\tau_{xy}^{(\infty)} = 0$ , т. е. при растяжении упругой плоскости усилиями  $q = \text{const}$  поперек линии центров и при условии, что расстояние между контурами отверстий, измеряемое по оси  $Ox$ , равно длине стороны одного из отверстий:

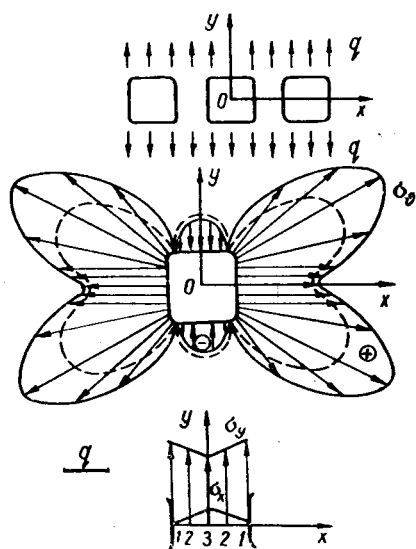


Рис. II.93

Точки по рис. II.93	1	2	3
$\sigma_x/q$	0,00	0,24	0,45
$\sigma_y/q$	2,01	1,94	1,70

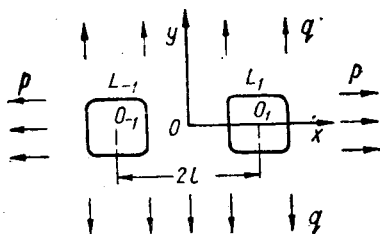


Рис. II.94

Значения  $\sigma_\phi/q$  по контуру основного квадратного отверстия и значения  $\sigma_\phi^*/q$  в тех же точках такого же квадратного отверстия, но для случая, когда упругая плоскость ослаблена лишь одним отверстием, приведены ниже:

$\phi^\circ$	0	10	20	30	40	45	50	60	70	80	90
$\sigma_\phi/q$	2,01	2,14	2,57	3,35	4,26	3,19	2,08	0,07	-0,59	-0,77	-0,81
$\sigma_\phi^*/q$	1,85	1,94	2,22	2,69	2,69	2,00	0,97	-0,40	-0,77	-0,84	-0,85

**Два одинаковых квадратных отверстия.** Допустим, что упругая плоскость ослаблена двумя одинаковыми квадратными отверстиями той же формы, что и в предыдущем случае, центры тяжести которых лежат на оси  $Ox$  и отстоят друг от друга на расстоянии  $2l$  (рис. II.94). Примем, что на бесконечности задано двухосное напряженное состояние (II.244). Искомые функции можно представить в виде \*

$$\varphi(z) = \varphi^*(\zeta) + \varphi_1(z), \quad \psi(z) = \psi^*(\zeta) + \psi_1(z), \quad (\text{II.258})$$

\* См. А. С. Космодамианский [4, 7]. Этот метод позволяет рассматривать и конечное число криволинейных отверстий при различных загрузках пластинки, а также термоупругие задачи. См. А. С. Космодамианский [4, 12].



где

$$\begin{aligned}\varphi^*(\zeta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{[\zeta(z-l)]^m}, & \psi^*(\zeta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{[\zeta(z-l)]^m} \\ \varphi_1(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \alpha_m}{[\zeta(z+l)]^m}, & \psi_1(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \beta_m}{[\zeta(z+l)]^m}.\end{aligned}\quad (\text{II.259})$$

Для определения постоянных  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  следует воспользоваться граничным условием (II.245) только на правом контуре (граничное условие на левом контуре будет удовлетворено автоматически).

Функции  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  будут голоморфными внутри правого отверстия. Их можно разложить в сходящийся ряд Фурье в круге, охватывающем правое отверстие, не касаясь контура левого. Ограничиваясь в указанном разложении членами, содержащими в качестве множителя малый параметр  $\varepsilon = \frac{1}{2l}$  в степени не выше четвертой, получим

$$\varphi_1(z) = -(z-l)(\alpha_1 \varepsilon^2 - 2\alpha_2 \varepsilon^3 + 3\alpha_3 \varepsilon^4) + (z-l)^2(\alpha_1 \varepsilon^3 - 3\alpha_2 \varepsilon^4) - (z-l)^3 \alpha_1 \varepsilon^4, \quad (\text{II.260})$$

$$\psi_1(z) = -(z-l)(\beta_1 \varepsilon^2 - 2\beta_2 \varepsilon^3 + 2\beta_3 \varepsilon^4) + (z-l)^2(\beta_1 \varepsilon^3 - 3\beta_2 \varepsilon^4) - (z-l)^3 \beta_1 \varepsilon^4.$$

Применяя изложенный в § 8 метод, найдем

$$\begin{aligned}\varphi^*(\zeta) &= \frac{1}{\zeta} \left\{ \frac{p-q}{2} + m\alpha_1 + \varepsilon^2(\beta_1 - \alpha_1) - 2\varepsilon^3(\beta_2 - \alpha_2) + \right. \\ &+ 3\varepsilon^4[\alpha_1(1+m^2) + (\beta_3 - \alpha_3)] \left. \right\} + \frac{m}{\zeta^3} \left( -\frac{p+q}{2} + 2\alpha_1 \varepsilon^2 - \right. \\ &- 4\alpha_2 \varepsilon^3 + 6\alpha_3 \varepsilon^4 \left. \right) + m(\alpha_1 \varepsilon^3 - 3\alpha_2 \varepsilon^4) \left( \frac{2}{\zeta^2} + \frac{m}{\zeta^5} \right) + \\ &+ \alpha_1 m \varepsilon^4 \left[ \frac{3}{\zeta} + \frac{3(m+1)}{\zeta^5} + \frac{m^2}{\zeta^9} \right] + \\ &+ \frac{2m}{\zeta^4} (\alpha_1 \varepsilon^3 - 3\alpha_2 \varepsilon^4) - \frac{1}{\zeta^2} [\varepsilon^3(\beta_1 - 2\alpha_1) - \\ &- 3\varepsilon^4(\beta_2 - 2\alpha_2)] + \frac{\varepsilon^4}{\zeta^3} (\beta_1 - 3\alpha_1); \end{aligned}$$

$$\psi^*(\zeta) = -\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi^{*'}(\zeta) - m\alpha_1 \zeta + \quad (\text{II.261})$$

$$\begin{aligned}+ \frac{1}{\zeta} - \frac{p+q}{2} + 2\alpha_1 \varepsilon^2 - 4\alpha_2 \varepsilon^3 + 6\alpha_3 \varepsilon^4 \left. \right] + \frac{m}{\zeta^3} \left[ \frac{p-q}{2} + \right. \\ \left. + \varepsilon^2(\beta_1 - \alpha_1) - 2\varepsilon^3(\beta_2 - \alpha_2) + 3\varepsilon^4(\beta_3 - \alpha_3) \right] - \frac{\varepsilon^3}{\zeta^2} (\alpha_1 - 3\varepsilon\alpha_2) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_1 \varepsilon^4}{\zeta^3} - \frac{2m\varepsilon^3}{\zeta^4} (\alpha_1 - 3\varepsilon\alpha_2) + 3\alpha_1 \varepsilon^4 \left[ \frac{m(2+m^2)}{\zeta^3} + \frac{m^2}{\zeta^7} \right] - \\
& - m\varepsilon^3 \left( \frac{2}{\zeta^2} + \frac{m}{\zeta^6} \right) [\beta_1 - 2\alpha_1 - 3\varepsilon(\beta_2 - 2\alpha_2)] + \\
& + m\varepsilon^4 \left( \frac{3}{\zeta} + \frac{3m}{\zeta^5} + \frac{m^2}{\zeta^9} \right) (\beta_1 - 3\alpha_1).
\end{aligned}$$

Коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), входящие в выражения (II.261), определяются из системы уравнений\*

$$\begin{aligned}
\alpha_1 [1 - m + \varepsilon^2 - 3m\varepsilon^4 - 3\varepsilon^4(1 + 2m^2)] - 2\alpha_2 \varepsilon^3 - 3\alpha_3 \varepsilon^4 - \\
- \varepsilon^3 \beta_1 + 2\varepsilon^3 \beta_2 - 3\varepsilon^4 \beta_3 = \frac{p-q}{2};
\end{aligned}$$

$$2\alpha_1 \varepsilon^3 (m-1) + [1 + 6\varepsilon^4(1-m)] \alpha_2 + \varepsilon^3 \beta_1 - 3\varepsilon^4 \beta_2 = 0;$$

$$\varepsilon^2 \alpha_1 (3\varepsilon^2 - 2m) + 4m\varepsilon^2 \alpha_2 + \alpha_3 (1 - 6m\varepsilon^4) - \beta_1 \varepsilon^4 = -\frac{p+q}{2} m;$$

$$\beta_1 (1 - 3m\varepsilon^4) + \alpha_1 (1 - 2\varepsilon^2 + 9m\varepsilon^4) + 4\alpha_2 \varepsilon^3 - 3\alpha_3 (2\varepsilon^4 + m) = -\frac{p+q}{2};$$

$$2m\varepsilon^3 \beta_1 + \beta_2 (1 - 6m\varepsilon^4) + \varepsilon^3 \alpha_1 (1 - 4m) + \alpha_2 (2 - 3\varepsilon^4 + 12m\varepsilon^4) = 0;$$

(II.262)

$$\begin{aligned}
- \beta_1 m \varepsilon^2 + 2m\varepsilon^3 \beta_2 + \beta_3 (1 - 3m\varepsilon^4) - \alpha_1 [1 + 3m^2 - m\varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \\
+ 3m\varepsilon^4(2 + m^2)] - 2m\varepsilon^3 \alpha_2 + 3\alpha_3 (1 + m\varepsilon^4) = m \frac{p+q}{2}.
\end{aligned}$$

Найдя из (II.262) коэффициенты  $\beta_k$  и  $\alpha_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) и внося их в функции  $\varphi^*(\zeta)$ ,  $\psi^*(\zeta)$  (II.261), а также в функции  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  (II.259) и последние в (II.258), получим окончательный вид искомых функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ . Напряжения в любой точке в окрестности отверстий найдем по формулам (II.181).

Напряжения по контуру правого отверстия

$$\begin{aligned}
\sigma_\vartheta = p + q - \frac{4}{C^2} \sum_{k=1}^9 k A_k (A \cos k\vartheta - B \sin k\vartheta) - 4 \{ \alpha_1 \varepsilon^2 - \\
- 2\alpha_2 \varepsilon^3 + 3\alpha_3 \varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 (\alpha_1 - 3\alpha_2 \varepsilon) (\cos \vartheta + m \cos 3\vartheta) + \\
+ 3\alpha_1 \varepsilon^4 [(1 + 2m) \cos 2\vartheta + m^2 \cos 6\vartheta] \},
\end{aligned} \tag{II.263}$$

\* А. С. Космодамианский [11] показал, что для этого случая получается бесконечная квазирегулярная алгебраическая система.

где

$$A = \cos \vartheta - 3m \cos 3\vartheta; \quad B = \sin \vartheta + 3m \sin 3\vartheta; \quad C^2 = A^2 + B^2;$$

$$A_1 = \frac{p-q}{2} + \varepsilon^2 (\beta_1 - \alpha_1) - 2\varepsilon^3 (\beta_2 - \alpha_2) + 3\varepsilon^4 (\beta_3 - \alpha_3) + \alpha_1 [m(1 + 3\varepsilon^4) + 3\varepsilon^4(1 + 2m^2)]; \quad (\text{II.264})$$

$$A_2 = -2m\varepsilon^3 (\alpha_1 - 3\varepsilon\alpha_2) - \varepsilon^3 (\beta_1 - 2\alpha_1) + 3\varepsilon^4 (\beta_2 - 2\alpha_2);$$

$$A_3 = \varepsilon^4 (\beta_1 - 3\alpha_1) + m \left( -\frac{p+q}{2} + 2\alpha_1\varepsilon^2 - 4\alpha_2\varepsilon^3 + 6\alpha_3\varepsilon^4 \right);$$

$$A_4 = -2m\varepsilon^3 (\alpha_1 - 3\alpha_2\varepsilon); \quad A_5 = 3m\alpha_1\varepsilon^4(1 + m);$$

$$A_6 = -m^2\varepsilon^3 (\alpha_1 - 3\alpha_2\varepsilon); \quad A_7 = A_8 = 0; \quad A_9 = m^3\alpha_1\varepsilon^4.$$

В табл. II.39 и II.40 приведены значения для напряжений по контуру правого отверстия и сечению  $y=0$  между отверстиями, когда расстояние между контурами отверстий (рис. II.94) равно длине стороны одного из отверстий, при условии, что на бесконечности действуют растягивающие усилия как вдоль линии центров отверстий ( $p \neq 0, q=0$ ), так и поперек линии центров отверстий ( $p=0, q \neq 0$ ). Величины со звездочками, как и раньше, относятся к плоскости с одним, той же формы, квадратным отверстием.

На рис. II.95 и II.96 построены графики по данным табл. II.39 и II.40, характеризующие распределение напряжений вблизи правого отверстия и по сечению  $y=0$  между отверстиями. Штриховые линии соответствуют случаю, когда плоскость ослаблена одним квадратным отверстием.

Таблица II.39

Напря- жение	$\vartheta^\circ$												
	0	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180
$\sigma_\vartheta/p$	-0,77	-0,75	-0,38	1,92	2,61	1,97	1,70	1,74	2,00	1,18	-0,32	-0,45	-0,43
$\sigma_\vartheta^*/p$	-0,85	-0,82	-0,40	2,00	2,69	2,05	1,85	2,05	2,69	2,00	-0,40	-0,82	-0,85
$\sigma_\vartheta/q$	1,91	2,14	2,83	2,14	-0,42	-0,87	-0,86	-0,74	-0,07	2,67	2,92	2,05	1,78
$\sigma_\vartheta^*/q$	1,85	2,05	2,69	2,00	-0,40	-0,82	-0,85	-0,82	-0,40	2,00	2,69	2,05	1,85

Таблица II.40

$\frac{9}{8} z$	$\sigma_x/p$	$\sigma_y/p$	$\sigma_x^*/p$	$\sigma_y^*/p$	$\sigma_x/q$	$\sigma_y/q$	$\sigma_x^*/q$	$\sigma_y^*/q$
1,00	-0,02	-0,46	0,00	-0,85	0,01	1,87	0	1,85
0,75	-0,05	-0,27	0,03	-0,37	0,19	1,80	0,03	1,84
0,50	-0,05	-0,06	0,15	-0,19	0,22	1,74	0,06	1,64
0,25	-0,05	0,02	0,26	-0,04	0,25	1,66	0,13	1,45
0	-0,05	0,05	0,37	0,05	0,27	1,62	0,16	1,32

**Заключительные замечания.** В упругой плоскости, ослабленной квадратными отверстиями, когда на бесконечности приложены усилия (II.244), наблюдаются те же закономерности, что и в случае с круговыми отверстиями.

При растяжении плоскости усилиями  $p$  (на бесконечности) вдоль линии центров концентрация напряжений вблизи угловых точек отверстий уменьшается вместе с ростом количества отверстий по сравнению со случаем, когда плоскость ослаблена лишь одним отверстием. Если же плоскость (на бесконечности) растягивается усилиями  $q$  поперек линии центров, с увеличением

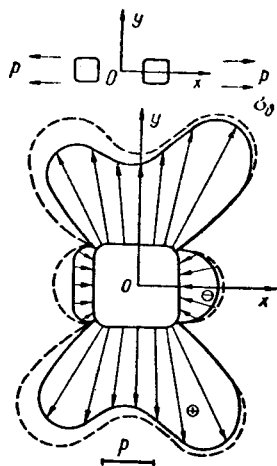


Рис. II.95

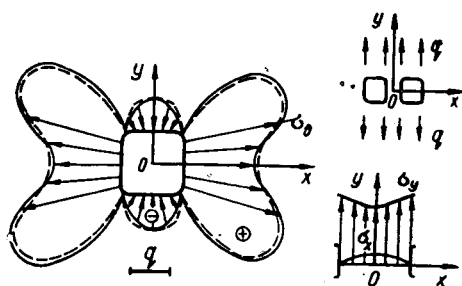


Рис. II.96

количества отверстий увеличивается концентрация напряжений возле них. В случае двух отверстий указанное выше уменьшение или увеличение концентрации напряжений получается более значительным с внутренних сторон отверстий и небольшим с внешних сторон.

## § 11. Концентрация напряжений около двоякопериодической системы отверстий

**Постановка задачи.** Перфорированные пластинки встречаются довольно часто в конструкциях современных машин, поэтому решение задачи о распределении напряжений в бесконечной пластинке, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий, может в значительной степени облегчить анализ работы перфорированных пластин. В данном случае ограничения на «бесконечности», которые накладываются на функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$ , описывающие возмущенное напряженное состояние, должны быть заменены условиями двоякой периодичности этих функций. Очевидно, периодами функции будут расстояния между центрами отверстий. Общее решение поставленной задачи получено в работе Г. А. Ван Фо Фы [1]. Для простоты здесь мы рас-

смаатриваем только систему равных\* отверстий, расположенных симметрично (рис. II.97, II.98) осям координат. Если условия двоякой периодичности будут удовлетворены, произвольные постоянные в решении должны быть найдены из граничных условий на контуре одного произвольно взятого отверстия.

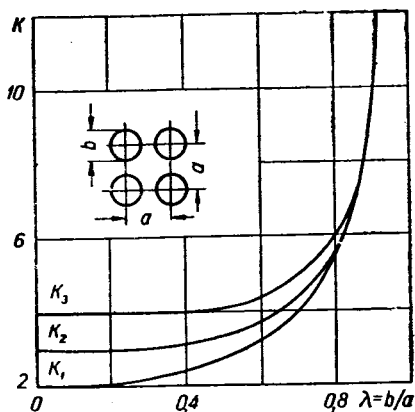


Рис. II.97

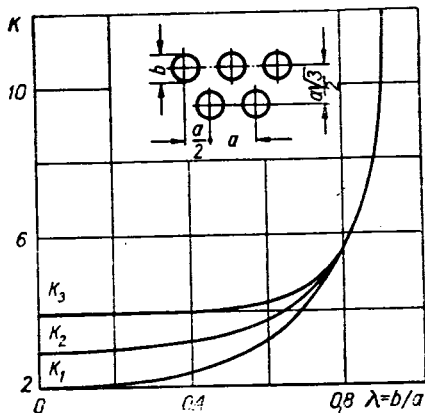


Рис. II.98

**Двоякопериодическая система одинаковых круговых отверстий.** Пусть  $\omega_1=2$  и  $\omega_2=2le^{i\alpha}$  ( $l>0$ ,  $\alpha \neq 0$ ) — основные периоды двоякопериодической решетки,  $\lambda$  — безразмерный радиус отверстий, а  $p=m\omega_1+n\omega_2$  — координаты центров отверстий ( $m, n = \pm 1, \pm i$ ). Из условия двоякой периодичности напряженного состояния перфорированной пластинки

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 3\text{Re } \Phi(z), \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2\{\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)\} \end{aligned} \quad (\text{II.265})$$

$$(z = x + iy)$$

следуют ограничения, накладываемые на комплексные потенциалы  $\Phi$  и  $\Psi$ :

$$\Phi(z) = \Phi(z + \omega_j), \quad \Psi(z + \omega_j) = \Psi(z) - \bar{\omega}_j \Phi'(z) \quad (j = 1, 2). \quad (\text{II.266})$$

Условия симметрии задачи накладывают на искомые функции такие дополнительные соотношения:

$$\Phi(\bar{z}) = \overline{\Phi(z)}, \quad \Phi(-z) = \Phi(z); \quad \Psi(\bar{z}) = \overline{\Psi(z)}, \quad \Psi(-z) = \Psi(z). \quad (\text{II.267})$$

Функции  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  могут быть построены или на основе представления Аппеля, или с помощью эллиптических функций. В последнем

\* См. Л. А. Фильштинский [1]. Более подробные данные о перфорированных пластинках см. в обзоре Э. И. Григолюка, Л. А. Фильштинского [1].

случае возможны различные представления решений, но наиболее просто, по-видимому, воспользоваться функциями Вейерштрасса  $\wp(z)$  и теоремой о представлении любой двойкопериодической функции через известные эллиптические функции и ее производные. В частности, в работе Л. А. Фильштинского [1] были использованы функции

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum'_{m, n} \left\{ \frac{1}{(z-p)^2} - \frac{1}{p^2} \right\}; \quad (\text{II.268})$$

$$Q(z) = \sum'_{m, n} \left\{ \frac{\bar{p}}{(z-p)^2} - 2z \frac{\bar{p}}{p^3} - \frac{\bar{p}}{p^2} \right\}. \quad (\text{II.269})$$

Функции  $Q(z)$  построены так, что между ними существуют соотношения

$$Q^{(h)}(z + \omega_j) = Q^{(h)}(z) + \bar{\omega}_j \wp^{(h)}(z).$$

$$Q(z + \omega_j) = Q(z) + \bar{\omega}_j \wp(z) + \gamma_j,$$

$$\gamma_j = 2Q\left(\frac{\omega_j}{2}\right) - \bar{\omega}_j \wp\left(\frac{\omega_j}{2}\right).$$

Между параметрами  $\gamma_i$  и  $\omega_j$  существуют зависимости

$$\gamma_2 \omega_1 - \omega_2 \gamma_1 = \delta_1 \bar{\omega}_2 - \delta_2 \bar{\omega}_1, \quad \delta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \delta_2 = 2\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right),$$

а также

$$\delta_1 \omega_2 - \delta_2 \omega_1 = 2\pi i.$$

Здесь  $\zeta(z)$  — известная дзета-функция Вейерштрасса. Связь между комплексными потенциалами и функциями  $\wp(z)$  и  $Q(z)$  устанавливается на основании упомянутой уже теоремы, согласно которой любая двойкопериодическая функция может быть определена через известные эллиптические функции и ее производные. В частности, для функций  $\Phi$  и  $\Psi$ , удовлетворяющих условиям периодичности (II.265) и (II.266), справедливы представления

$$\Phi(z) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \wp^{(2k)}(z)}{(2k+1)!}; \quad (\text{II.270})$$

$$\Psi(z) = d_0 + \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \wp^{(2k)}(z)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} Q^{(2k+1)}(z)}{(2k+1)!}.$$

Неизвестные коэффициенты  $c_{2k}$ ,  $d_{2k}$  в разложениях (II.270) определяются из условий на контуре одного из отверстий и статических условий — равенства нулю главного вектора всех сил, действующих на контуре, охватывающего отверстия.

Последнее условие эквивалентно соотношениям

$$g(z + \omega_j) - g(z) = 0,$$

где

$$g(z) = \varphi(z) + z\overline{\Phi(z)} + \overline{\Psi(z)}, \quad \varphi(z) = \int \Phi(z) dz, \quad \Psi(z) = \int \Psi(z) dz.$$

Выполнение этого условия приводит к формулам

$$c_0 = a_0 c_2 \lambda^2 + a_1 d_2 \lambda^2, \quad d_0 = a_2 c_2 \lambda^2 + a_3 d_2 \lambda^2,$$

где для сокращения записи введены обозначения

$$a_0 = \frac{\delta_1}{2\omega_1} - a_1, \quad a_2 = \frac{\overline{\gamma}_1}{\omega_1} + 2a_1, \quad a_3 = 2a_0, \quad a_1 = \frac{\pi i}{\omega_1 \omega_2 - \omega_1 \omega_3}.$$

Для определения коэффициентов  $c_{2k}$ ,  $d_{2k}$  целесообразно функции  $\varphi^{(k)}(z)$  и  $Q^{(k)}(z)$  разложить в ряды Лорана в окрестности точки  $z = 0$ :

$$\varphi^{(2k)}(z) = \frac{1}{z^{2k+2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n,k} z^{2k};$$

$$Q^{(2k+1)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,k} z^{2k},$$

$$\alpha_{n,k} = \frac{(2n+2k+1)! q_{n+k+1}}{(2n)! 2^{2n+2k+2}},$$

$$\beta_{n,k} = \frac{(2n+2k+2)! p_{n+k+1}}{(2n)! 2^{2n+2k+2}}.$$

где

$$q_k = \sum'_{m,n} \frac{1}{T^{2k}}, \quad p_k = \sum'_{m,n} \frac{\overline{T}}{T^{2k+1}}, \quad (\alpha_{00} = 0, \quad \beta_{00} = 0, \quad T = \frac{1}{2} p).$$

Если на контуре отверстия заданы внешние силы  $N(\theta) - iT(\theta)$ , коэффициенты разложения функций  $\Phi$  и  $\Psi$  находятся из краевого условия

$$\overline{\Phi(\tau)} + \Phi(\tau) - e^{2i\theta} \{\overline{\tau\Phi'(\tau)} + \Psi(\tau)\} = N(\theta) - iT(\theta) \quad (\text{II.271})$$

при  $z = \tau = \lambda e^{i\theta}$

$$N(\theta) - iT(\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} A_{2k} e^{2ki\theta},$$

где  $N$ ,  $T$  — нормальная и касательная составляющие усилия на контуре отверстия.

Внося в функциональные уравнения (II.271) разложения функций  $\Phi$  и  $\Psi$  из (II.270), получим относительно  $c_{2k}$  бесконечную систему уравнений

$$c_{2j+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{j,k} c_{2k+2} + b_j,$$

где

$$\beta_{j,k} = (2j+1) \gamma_{j,k} \lambda^{2j+2k+2},$$

$$\gamma_{0,0} = \frac{3}{8} g_2 \lambda^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i+1) g_{i+1}^2 \lambda^{4i+2}}{2^{4i+4}} + a_2 + \frac{2a_0 a_3 \lambda^2}{1-2a_1 \lambda^2};$$

$$\begin{aligned} \gamma_{0,k} = & - \frac{(2k+2) p_{k+1}}{2^{2k+2}} + \frac{(2k+4)! g_{k+2} \lambda^2}{2! (2k+2)! 2^{2k+4}} + \frac{2a_3 \lambda^2 g_{k+1}}{(1-2a_1 \lambda^2) 2^{2k+2}} + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2k+2j+1)! g_{i+1} g_{k+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2k+1)! (2i)! 2^{2k+4i+4}}; \end{aligned}$$

(II.272)

$$\begin{aligned} \gamma_{i,0} = & - \frac{(2j+2) p_{j+1}}{2^{2j+2}} + \frac{(2j+4)! g_{k+2} \lambda^2}{2! (2j+2)! 2^{2j+4}} + \frac{2a_0 \lambda^2 g_{j+1}}{(1-2a_1 \lambda^2) 2^{2j+2}} + \\ & + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)! g_{i+1} g_{i+j+1} \lambda^{4i+2}}{(2j+1)! (2i)! 2^{2j+4i+4}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{j,k} = \gamma_{k,j} = & - \frac{(2j+2k+2)! p_{j+k+1}}{(2j+1)! (2k+1)! 2^{2j+2k+2}} + \frac{(2j+2k+4)! g_{j+k+2} \lambda^2}{(2j+2)! (2k+2)! 2^{2j+2k+4}} + \\ & + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(2j+2i+1)! (2k+2i+1) g_{j+i+1} g_{k+i+1} \lambda^{4i+2}}{(2j+1)! (2k+1)! (2i+1)! (2i)! 2^{2j+2k+4i+4}} + \\ & + \frac{g_{i+1} g_{k+1}}{2^{2j+2k+4}} \left\{ 1 + \frac{4a_1 \lambda^2}{1-2a_1 \lambda^2} \right\} \quad (j, k = 1, 2, \dots); \end{aligned}$$

$$b_0 = A_2 - \frac{A_0 a_3 \lambda^2}{1-2a_1 \lambda^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g_{k+2} \lambda^{2k+4}}{2^{2k+4}} A_{-2k-2};$$

$$b_j = A_{2j+2} - \frac{(2j+1) A_0 \lambda^{2j+2} g_{j+1}}{(1-2a_1 \lambda^2) 2^{2j+2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2} \lambda^{2k+2j+4}}{(2j)! (2k+3)! 2^{2j+2k+4}} A_{-2k-2}.$$



Постоянные  $d_{2k}$  определяются из условия (II.271) на контуре отверстия:

$$d_2 = \frac{1}{1-2a_0\lambda^2} \left\{ -A_0 + 2a_0\lambda^2 c_2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_{k+1}\lambda^{2k+2}}{2^{2k+2}} c_{2k+2} \right\},$$

$$d_{2j+4} = (2j+3)c_{2j+2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2j+2k+3)! g_{j+k+2}\lambda^{2j+2k+4}}{(2j+2)!(2k+1)! 2^{2j+2k+4}} c_{2k+2} - A_{-2j-2}.$$

Коэффициенты концентрации напряжений по контурам отверстий для квадратной и правильной треугольной решетки представлены на рис. II.97 и II.98 кривыми  $(k_1)$ ,  $(k_2)$  и  $(k_3)$ . На этих рисунках кривая  $(k_1)$  соответствует случаю вестороннего растяжения пластинки;  $(k_2)$  — случаю одноосного растяжения, а  $(k_3)$  — чистому сдвигу. Эти кривые показывают, что коэффициенты концентрации напряжений для треугольной и квадратной решеток незначительно отличаются друг от друга. Основное влияние на распределение напряжений оказывает взаимное расположение отверстий.

Напряженное состояние пластины, перфорированной правильной треугольной и квадратной системой одинаковых подкрепленных круговых отверстий, рассматривается в работе R. W. Bailey, R. Fidler [1]. Напряжениям в перфорированной пластине посвящены работы J. W. Dally and A. J. Durelli [1], а также близкая по тематике статья С. К. Wang [1].

## § 12. Растяжение упругой плоскости с криволинейным отверстием, подкрепленным упругими стойками

**Постановка задачи.** Рассмотрим бесконечную изотропную плоскость с ограниченным одним криволинейным отверстием в виде эллипса, квадрата или прямоугольника с закругленными углами. Положим, что на дугах  $L_k$  контура отверстия  $L$  с материалом пластинки, находящемся в напряженном состоянии, спаяны жесткие дуговые накладки. Между дуговыми накладками устанавливаются с некоторым предварительным натягом упругие стойки из другого материала. Задача заключается в определении суммарного осевого давления (растяжения) на каждую из стоек в зависимости от их жесткости, предварительного натяга и от напряженного состояния на бесконечности плоскости\*.

Для упрощения решения задачи будем рассматривать только те случаи, когда упругое состояние в плоскости симметрично относительно

\* Решение в квадратурах дано в статье М. П. Шереметьева и И. А. Прусова [1]. Решения остальных задач этого параграфа (включая и приближенные решения) получены И. А. Прусовым [1].

но геометрических осей симметрии отверстия, а дуговые накладки при деформации плоскости и стоек перемещаются поступательно, не испытывая поворотов. Кроме того, применительно к стойкам воспользуемся обычной гипотезой плоских сечений стержней, учитывая лишь их жесткость на растяжение  $EF$  и пренебрегая в некоторых случаях их жесткостью на изгиб. Выберем начало координат комплексной плоскости  $z = x + iy$  внутри контура  $L$  и введем в рассмотрение функцию  $z = \omega(\zeta)$ , конформно отображающую внешность единичной окружности  $\gamma$  комплексной плоскости  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  на внешность контура  $L$ . Тогда, как известно\*, в полярных координатах комплексной плоскости  $\zeta$  в области  $|\zeta| > 1$

$$\sigma_{\theta} + \sigma_{\rho} = 2[\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\bar{\zeta})}]; \quad (\text{II.273})$$

$$\sigma_{\theta} + i\tau_{\theta\rho} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\bar{\zeta})} - \frac{\bar{\zeta}}{\zeta\omega'(\zeta)} [\omega(\zeta)\overline{\Phi'(\bar{\zeta})} + \overline{\omega'(\bar{\zeta})}\overline{\Psi(\bar{\zeta})}]; \quad (\text{II.274})$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(\zeta) - \omega(\zeta)\overline{\Phi(\bar{\zeta})} - \overline{\psi(\bar{\zeta})} + \text{const}; \quad (\text{II.275})$$

$$X' + iY' = -i[\varphi(\zeta) + \omega(\zeta)\overline{\Phi(\bar{\zeta})} + \overline{\psi(\bar{\zeta})}]_A^B, \quad (\text{II.276})$$

где  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  — функции, связанные с  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$  соотношениями  $\varphi'(\zeta) = \omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$  и  $\psi'(\zeta) = \omega'(\zeta)\Psi(\zeta)$ ;  $u$  и  $v$  — компоненты смещения в декартовых координатах  $(xOy)$ ;  $X' + iY'$  — главный вектор внешних сил, действующих на дугу  $AB$  справа при движении от точки  $A$  к  $B$ .

Распространим определение функции  $\Phi(\zeta)$  на область  $|\zeta| < 1$ , положив

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta)\Phi(\zeta) &= -\omega'(\zeta)\overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} = \frac{1}{\zeta^2}\omega(\zeta)\overline{\Phi'(\bar{\zeta})} + \\ &+ \frac{1}{\zeta^2}\overline{\omega'\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)}\overline{\Psi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right)} \quad \text{при } |\zeta| < 1. \end{aligned} \quad (\text{II.277})$$

Учитывая (II.277), на основании (II.274) — (II.276), получим формулы, принадлежащие И. Н. Карцивадзе [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} + i\tau_{\theta\rho} &= \Phi(\zeta) - \Phi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) + \bar{\zeta}^2 \left[ \frac{\omega(\bar{\zeta}^{-1})}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \overline{\Phi'(\bar{\zeta})} + \\ &+ \bar{\zeta}^2 \overline{\omega'(\bar{\zeta})} \left[ \frac{1}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} - \frac{1}{\omega'(\zeta)} \right] \overline{\Psi(\bar{\zeta})}; \end{aligned} \quad (\text{II.278})$$

$$\begin{aligned} 2\mu \frac{\partial}{\partial \theta}(u + iv) &= i\zeta\omega'(\zeta) \left[ \kappa\Phi(\zeta) + \Phi\left(\frac{1}{\bar{\zeta}}\right) \right] - \\ &- i\omega'(\zeta) \left\{ \left[ \frac{\bar{\zeta}\omega(\bar{\zeta}^{-1})}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right] \Phi'(\zeta) + \overline{\omega'(\bar{\zeta})} \left[ \frac{\bar{\zeta}}{\omega'(\bar{\zeta}^{-1})} - \frac{1}{\omega'(\zeta)} \right] \overline{\Psi(\bar{\zeta})} \right\}; \end{aligned} \quad (\text{II.279})$$

\* См. формулы (I.10) и (I.27).

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(\zeta) + \varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \left[\omega(\zeta) - \omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]\overline{\Phi(\zeta)} + \text{const}; \quad (\text{II.280})$$

$$X' + iY' = -i \left\{ \varphi(\zeta) - \varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \left[\omega(\zeta) - \omega\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right]\overline{\Phi(\zeta)} \right\}_A^B. \quad (\text{II.281})$$

В дальнейшем будем считать, что функция  $\Phi(\zeta)$  непрерывно продолжима на все точки  $\zeta = \sigma$  окружности  $\gamma$  со стороны  $|\zeta| > 1$  и  $|\zeta| < 1$ , за исключением, быть может, конечного числа точек  $\sigma_k = e^{i\theta_k}$ , вблизи которых

$$|\Phi(\zeta)| < \frac{\text{const}}{|\zeta - \sigma_k|^\alpha} \quad (0 \leq \alpha < 1).$$

Будем также считать, что для всех точек  $\sigma$  окружности  $\gamma$ , кроме, быть может, точек  $\sigma_k = e^{i\theta_k}$

$$\lim_{\zeta \rightarrow \sigma} \Phi(\zeta)(1 - \varrho) = \lim_{\zeta \rightarrow \sigma} \Phi'(\zeta) \left[ \omega(\zeta) - \omega\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right] = 0. \quad (\text{II.282})$$

Положим, что отображающая функция  $z = \omega(\zeta)$  имеет вид

$$\omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} + \frac{n}{\zeta^3} + \frac{l}{\zeta^5} \right), \quad (\text{II.283})$$

где  $R, m, n$  и  $l$  — действительные параметры.

Тогда функции  $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$  и  $\omega'(\zeta)\Psi(\zeta)$  при  $|\zeta| \rightarrow \infty$  имеют вид

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = \Gamma R - \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)} \frac{1}{\zeta} + o\left(\frac{1}{\zeta^2}\right), \quad (\text{II.284})$$

$$\omega'(\zeta)\Psi(\zeta) = \Gamma'R + \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1 + \kappa)} \frac{1}{\zeta} + o\left(\frac{1}{\zeta^2}\right),$$

где  $X + iY$  — главный вектор внешней нагрузки, приложенный к контуру  $L$ .

Функции  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$  — голоморфны в области  $|\zeta| > 1$ . Учитывая это обстоятельство и что  $\omega'(\zeta) \neq 0$  в области  $|\zeta| \geq 1$ , на основании (II.277) и (II.284) следует, что внутри окружности  $\gamma$  функция  $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$  голоморфна всюду, кроме точки  $\zeta = 0$ , где она, как нетрудно показать, имеет полюс не выше шестого порядка:

$$\begin{aligned} \omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = & \frac{1}{\zeta^2} \left[ \Gamma R(m + mn + m^2l + 3nl) + \bar{A}_2(n + ml) + \bar{A}_4l \right] + \\ & + \frac{2}{\zeta^3} \left[ -\bar{P}'(n + ml) + \bar{A}_3l \right] + \frac{3}{\zeta^4} \left[ \Gamma R(n + ml) + \bar{A}_2l \right] - \frac{4}{\zeta^5} \bar{P}'l + \\ & + \frac{5}{\zeta^6} \Gamma Rl + \frac{\bar{\Gamma}'R}{\zeta^2} + \frac{\kappa P'}{\zeta} + \Phi_0(\zeta). \end{aligned} \quad (\text{II.285})$$

Здесь  $\Phi_0(\zeta)$  — голоморфна в области вне круга достаточно большого радиуса;

$$P' = \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad \bar{P}' = \frac{X - iY}{2\pi(1 + \kappa)}; \quad (\text{II.286})$$

$A_2, A_3, A_4$  — коэффициенты разложения функции  $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$  в ряд

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = \Gamma R - \frac{P}{\zeta} + \frac{A_2}{\zeta^2} + \frac{A_3}{\zeta^3} + \frac{A_4}{\zeta^4} + \dots \quad (\text{II.287})$$

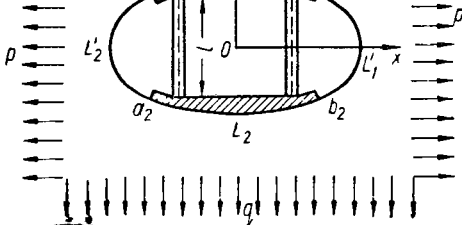


Рис. II.99

Примем в дальнейшем, что оси координат комплексной плоскости  $z = x + iy$  направлены по осям симметрии отверстия  $L$ , а компоненты напряжения на бесконечности заданы в виде

$$X_x^{(\infty)} = p, \quad Y_y^{(\infty)} = q, \quad X_y^{(\infty)} = 0. \quad (\text{II.288})$$

Кроме того примем, что на участках контура отверстия, на которых материалы плоскости и дуговых накладок не соприкасаются, внешняя нагрузка отсутствует и главный вектор внешней нагрузки на контуре  $L$  равен нулю:

$$P' = X + iY = 0. \quad (\text{II.289})$$

Эллиптическое отверстие с двумя стойками, передающими давление на две жесткие дуговые накладки. Пусть  $L$  — контур эллиптического отверстия с полуосями  $a$  и  $b$ , внутри которого установлены дуговые накладки и стойки симметрично координатным осям (рис. II.99);  $\delta$  — предварительное натяжение каждой из стоек;  $l$  — длина, а  $EF$  — жесткость на растяжение каждой из них;  $L_k$  — дуги, на которых накладки спаяны с материалом плоскости;  $L'_k$  — остальные участки контура  $L$ ;  $a_k$  и  $b_k$  — концы дуг  $L_k$  ( $k = 1, 2$ );  $\gamma_k$ ,  $\gamma'_k$ ,  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — дуги и точки на окружности  $\gamma$ , соответствующие  $L_k, L'_k$  и  $a_k, b_k$ .

В рассматриваемом случае

$$\omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b}. \quad (\text{II.290})$$

На основании (II.284) и (II.285) функция  $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$  в окрестности  $\zeta = 0$  и  $|\zeta| = \infty$  принимает вид

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = \Gamma R + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \quad (|\zeta| \rightarrow \infty), \quad (\text{II.291})$$

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = \frac{R}{\zeta^2} (m\Gamma + \Gamma') + O(1) \quad (\zeta \rightarrow 0),$$

где

$$\Gamma = \frac{1}{4}(P + Q); \quad \Gamma' = \frac{1}{2}(Q - P). \quad (\text{II.292})$$

Учитывая (II.278), (II.279) и принятые условия о перемещениях дуговых накладок, для функции  $\omega'(\zeta) \Phi(\zeta)$  получаем граничное условие

$$\begin{aligned} [\omega'(\sigma) \Phi(\sigma)]^+ + \kappa[\omega'(\sigma) \Phi(\sigma)]^- &= 0 \quad \text{на } \gamma_k, \\ [\omega'(\sigma) \Phi(\sigma)]^+ - [\omega'(\sigma) \Phi(\sigma)]^- &= 0 \quad \text{на } \gamma'_k. \end{aligned} \quad (\text{II.293})$$

Удовлетворяя этому условию, запишем общее решение задачи:

$$\omega'(\zeta) \Phi(\zeta) = R \left( \frac{D_1}{\zeta} + \frac{D_2}{\zeta^2} + C_0 \zeta^2 + C_1 \zeta + C_2 \right) X(\zeta), \quad (\text{II.294})$$

где

$$\begin{aligned} X(\zeta) &= (\zeta^2 - \alpha_1^2)^\lambda (\zeta^2 - \beta_1^2)^{\bar{\lambda}}; \\ \lambda &= -\frac{1}{2} + i\beta, \quad \bar{\lambda} = -\frac{1}{2} - i\beta, \quad \beta = \frac{\ln \kappa}{2\pi}; \end{aligned} \quad (\text{II.295})$$

$D_k$  и  $C_k$  — произвольные постоянные.

При этом условимся брать ту ветвь многозначной функции  $X(\zeta)$ , для которой при  $|\zeta| \rightarrow \infty$   $\zeta^2 X(\zeta) \rightarrow 1$ .

Подчиняя решение (II.294) условиям (II.291), найдем

$$D_1 = C_1 = 0, \quad C_0 = \Gamma, \quad D_2 = (m\Gamma + \Gamma') e^{-2i\omega}, \quad (\text{II.296})$$

где  $\omega$  — центральный угол, соответствующий дуге  $\gamma_k$  ( $k=1, 2$ ).

Обозначив через  $2iv_0$  разность смещений точек на  $L_1$  и  $L_2$ , а через  $2P_0$  — величину главного вектора сил, действующих на дугу  $L_1$  с какой-либо одной стороны, для определения  $v_0$ , давления на каждую из стоек  $p$  и действительной постоянной  $C_2$  на основании (II.280) и (II.281) получим два уравнения:

$$\begin{aligned} (1 + \kappa) \int_{\gamma_1} \Phi^-(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma &= 4i\mu v_0, \\ (1 + \kappa) \int_{\gamma_1} \Phi^-(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma &= -2P_0. \end{aligned} \quad (\text{II.297})$$

Присоединив к ним уравнение

$$2v_0 = \delta + \frac{P_0 l}{EF}, \quad (\text{II.298})$$

вытекающее из закона Гука для стержней, получим полную систему уравнений для определения всех неизвестных. Решив эту систему, полу-

чим следующую формулу для суммарного давления на каждый из стержней:

$$P_0 = \frac{\frac{1}{4} \left[ D_2 J_2 + C_0 J_{-2} - \frac{J_0}{T_0} (D_2 T_2 + C_0 T_{-2}) \right] (1 + \kappa) R e^{\beta \omega} - \mu \delta}{\frac{J_0}{T_0} \sqrt{\kappa} + \frac{\mu l}{EF}}, \quad (\text{II.299})$$

где

$$J_k = 2 \int_0^\alpha \frac{\cos(A + k\theta) d\theta}{R(\theta)}, \quad T_k = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(A + k\theta) d\theta}{R(\theta)},$$

$$R(\theta) = \sqrt{|\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta - \alpha)|}, \quad k = 0, \pm 2, \quad (\text{II.300})$$

$$A = \beta \ln \left| \frac{\sin(\theta + \alpha)}{\sin(\theta - \alpha)} \right|, \quad \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{4}.$$

Полагая  $\nu = 0,25$ ,  $\kappa = 2$  (плоская деформация), для значений  $\omega$  соответственно равных  $90^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $10^\circ$ , получим

$$P_0(90^\circ) = \frac{3R [0,707 (m\Gamma + \Gamma') + \Gamma] - \mu \delta}{\sqrt{2} + \frac{\mu l}{EF}};$$

$$P_0(60^\circ) = \frac{3R [0,826 (m\Gamma + \Gamma') + 1,05\Gamma] - \mu \delta}{1,83 + \frac{\mu l}{EF}}; \quad (\text{II.301})$$

$$P_0(10^\circ) = \frac{3R [0,972 (m\Gamma + \Gamma') + 1,02\Gamma] - \mu \delta}{3,59 + \frac{\mu l}{EF}}.$$

При условиях рассматриваемой задачи найдем приближенное выражение для  $P_0$  при следующих упрощающих гипотезах:

- 1) нормальные напряжения  $N$  на участках контакта между пластинкой и дуговыми накладками (или между пластинкой и концами стержней при отсутствии накладок) распределены равномерно;
- 2) касательные напряжения на этих участках пренебрежимо малы;
- 3) вертикальные компоненты смещений  $v$  точек пластинки на участках контакта в плоскости  $(v, x)$  образуют параболу, определяющуюся значениями  $v$  середины и концов участка контакта;
- 4) между средним значением этих смещений  $v_{\text{ср}}$  и осевыми усилиями в стержнях  $P_0$  имеет место зависимость

$$2v_{\text{ср}} = \delta + \frac{P_0 l}{EF}, \quad (\text{II.302})$$

где

$$v_{\text{ср}} = \frac{1}{6} [v(\alpha_1) + 4v(\alpha_0) + v(\beta_1)] \quad (\text{II.303})$$

— высота прямоугольника, равновеликого фигуре, ограниченной указанной выше параболой (рис. II.100);  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  — концы дуги  $\gamma_1$ ,  $\alpha_0$  — средняя точка на этой дуге.

В дальнейшем центральные углы, определяющие положения точек  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  на окружности  $\gamma$ , будем обозначать теми же символами, что и сами точки  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ . Так, в данном случае

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}. \quad (\text{II.304})$$

На основании (II.278) имеем условие на контуре  $\gamma$

$$[\omega'(\sigma)\Phi(\sigma)]^+ - [\omega'(\sigma)\Phi(\sigma)]^- = f(\sigma), \quad (\text{II.305})$$

где  $f(\sigma) = -N\omega'(\sigma)$  на  $\gamma_k$  и  $f(\sigma) = 0$  на  $\gamma'_k$ .

Откуда, учитывая (II.291), находим

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = -\frac{N}{2\pi i} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} \frac{\omega'(\sigma)d\sigma}{\sigma - \zeta} + \Gamma R + R(m\Gamma + \Gamma') \frac{1}{\zeta^2}. \quad (\text{II.306})$$

Затем, помня что  $\Phi(\zeta) = \int \omega'(\zeta)\Phi(\zeta)d\zeta$ , найдем  $\Phi(\zeta)$ , а наряду с этим, воспользовавшись формулами (II.280) и (II.303), найдем и  $v_{\text{ср}}$ , зависящее от  $N$ .

Таким образом, для определения неизвестных  $v_{\text{ср}}$ ,  $P_0$  и  $N$  имеем два уравнения — (II.302) и (II.303). Недостающее третье уравнение

$$P_0 = RN(1+m)\sin\left(\frac{1}{2}\omega\right) \quad (\text{II.307})$$

получим из условия равновесия одной из накладок. В результате решения этих уравнений находим приближенную формулу

$$P_0 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{1}{3}(1+\kappa) \left( 2 + \cos \frac{\omega}{2} \right) [(1+m)\Gamma + \Gamma'] R - \mu \delta \right\}, \quad (\text{II.308})$$

где

$$\Delta = \frac{1+\kappa}{6\pi} \left[ -2\ln \left( \sin \frac{\omega}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{4} \right) + \frac{\omega}{\sin \frac{\omega}{2}} \left( 2 + \cos \frac{\omega}{2} \right) \right] - \\ - \frac{1}{3}(\kappa-1) \frac{1-m}{1+m} \operatorname{tg} \frac{\omega}{4} + \frac{\mu l}{EF}.$$

Практически эта формула значительно проще ранее полученной аналогичной формулы (II.299) тем, что она исключает необходимость вычислять несобственные интегралы  $J_k$  и  $T_k$ . Полагая в формуле

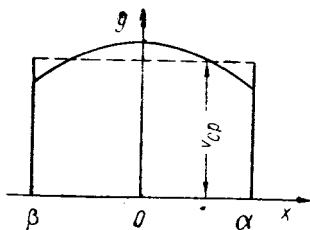


Рис. II.100

(II.308)  $\kappa=2$ , для значений  $\omega$ , соответственно равных 90, 60 и 10°, получим

$$\begin{aligned}
 P_0(90^\circ) &= \frac{2.707R [(1+m)\Gamma + \Gamma'] - \mu\delta}{1.490 + \frac{0.276m}{1+m} + \frac{\mu l}{EF}}; \\
 P_0(60^\circ) &= \frac{2.886R [(1+m)\Gamma + \Gamma'] - \mu\delta}{1.925 + \frac{0.179m}{1+m} + \frac{\mu l}{EF}}; \\
 P_0(10^\circ) &= \frac{2.996R [(1+m)\Gamma + \Gamma'] - \mu\delta}{3.710 + \frac{0.029m}{1+m} + \frac{\mu l}{EF}}.
 \end{aligned}
 \tag{II.309}$$

Из сравнения уравнений (II.301) и (II.309) видим, что значения  $P_0$ , полученные по приближенной формуле (II.309), незначительно отличаются от соответствующих значений  $P_0$ , полученных по формуле (II.301), для всех  $\omega \leq \pi/2$ .

**Эллиптическое отверстие с двумя стойками, передающими давление на четыре жесткие дуговые накладки.** Положим, что дуговые накладки и стойки установлены внутри отверстия симметрично осям эллипса (рис. II.101). Концы дуг  $L_k$  симметричны относительно центра эллипса. Упругие стойки, имеющие одинаковые длины  $l$ , жесткости на растяжение  $EF$  и предварительные натяжения  $\delta$ , размещены так, что дуговые накладки вследствие деформации стоек и пластинки перемещаются, не испытывая поворотов. Граничные условия на контуре  $\gamma$  также представляются в виде (II.293), а общее выражение для  $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$  с учетом симметрии упругого состояния

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = R \left[ \frac{D_2}{\zeta^2} + C_0\zeta^4 + C_2\zeta^2 + C_4 \right] X(\zeta),
 \tag{II.310}$$

где

$$X(\zeta) = (\zeta^2 - \alpha_1^2)^\lambda (\zeta^2 - \alpha_1^2)^\lambda (\zeta^2 - \beta_1^2)^{\bar{\lambda}} (\zeta^2 - \beta_2^2)^{\bar{\lambda}};$$

$D_2, C_0, C_2$  и  $C_4$  — действительные произвольные постоянные.

Учитывая (II.291) и (II.310), найдем

$$C_0 = \Gamma, \quad D_2 = (m\Gamma + \Gamma') e^{-4\beta_0},
 \tag{II.311}$$

где  $\omega$  — центральный угол, соответствующий дугам  $\gamma_k$ .

Обозначим через  $2iv_1$  и  $2u_1$  разность смещений точек на дугах  $L_1$  и  $L_4$ ,  $L_1$  и  $L_2$ , а через  $P_0$  — величину осевого усилия в каждой из стоек (главный вектор сил, действующих на дугу  $L_k$  со стороны материала плоскости).

Тогда на основании (II.280) и (II.281)

$$\begin{aligned}
 (1 + \kappa) \int_{\gamma_1} \Phi^-(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma &= 4\mu v_1 i; \\
 -i(1 + \kappa) \int_{\gamma_1} \Phi^-(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma &= iP_0.
 \end{aligned}
 \tag{II.312}$$



Учитывая (II.310), из уравнений (II.312) получаем

$$\begin{aligned} D_2 J_3 + C_0 J_{-3} + C_2 J_{-1} + C_4 J_1 &= \frac{4\mu v_1}{R(1+\kappa)} e^{2\beta\omega}; \\ D_2 T_3 + C_0 T_{-3} + C_2 T_{-1} + C_4 T_1 &= -\frac{2P_0}{R(1+\kappa)} e^{\beta(2\omega-\pi)}; \\ D_2 T'_3 + C_0 T'_{-3} + C_2 T'_{-1} + C_4 T'_1 &= 0; \\ D_2 S'_3 + C_0 S'_{-3} + C_2 S'_{-1} + C_4 S'_1 &= \frac{4\mu u_1}{R(1+\kappa)} e^{2\beta\omega}. \end{aligned} \quad (\text{II.313})$$

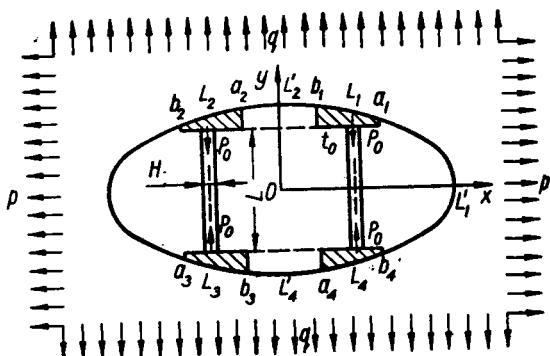


Рис. II.101

В этих уравнениях приняты обозначения:

$$\begin{aligned} J_k &= \int_0^\alpha \frac{\cos(A + k\theta)}{R(\theta)} d\theta; & T_k &= \int_\alpha^\varepsilon \frac{\cos(A + k\theta)}{R(\theta)} d\theta; \\ T'_k &= \int_\alpha^\varepsilon \frac{\sin(A + k\theta)}{R(\theta)} d\theta; & S'_k &= \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(A + k\theta)}{R(\theta)} d\theta; \\ \alpha_1 &= e^{i\alpha}; & \varepsilon &= \alpha + \omega; & \beta &= \frac{\ln \kappa}{2\pi}; \end{aligned}$$

$$A = \beta \ln \left| \frac{\sin(\theta + \alpha) \sin(\theta - \varepsilon)}{\sin(\theta - \alpha) \sin(\theta + \varepsilon)} \right|;$$

$$R(\theta) = 2\sqrt{|\sin(\theta - \alpha) \sin(\theta + \alpha) \sin(\theta - \varepsilon) \sin(\theta + \varepsilon)|}.$$

Присоединив к уравнениям (II.313) уравнение

$$2v_1 = \delta + \frac{P_0 l}{EF},$$

получим систему пяти уравнений для определения  $C_1, C_4, P_0, v_1$  и  $u_1$ . В частности,

$$P_0 = \frac{A^* - \mu\delta}{\sqrt{\kappa B + \frac{\mu e}{EF}}}, \quad (\text{II.314})$$

где

$$A^* = \frac{(1 + \kappa)R}{2e^{-2\beta\omega}} \left\{ D_2 \left[ J_3 - BT_3 + \frac{T'_3}{T'_{-1}} \left( \frac{BT_{-1}}{J_{-1}} - 1 \right) \right] + \right. \\ \left. + C_0 \left[ J_{-3} - BT_{-3} + \frac{T'_{-3}}{T'_{-1}} \left( \frac{BT_{-1}}{J_{-1}} - 1 \right) \right] \right\};$$

$$B = \frac{J_1 T_{-1} - J_{-1} T'_1}{T_1 T'_{-1} - T_{-1} T'_1}.$$

Осталось определить положение стоек, при котором дуговые накладки при деформациях пластинки и стоек перемещаются поступательно. Примем, что это положение стоек определяется расстоянием  $x_0$  от центра эллипса до линии действия главного вектора  $P_0$  растягивающих сил в сечении стойки. Для нахождения  $x_0$  воспользуемся формулой

$$M = -(1 + \kappa) \operatorname{Re} \int_{y_1} \overline{\omega(\sigma)} \omega'(\sigma) \Phi^-(\sigma) d\sigma, \quad (\text{II.315})$$

определяющей величину главного момента  $M$  сил, действующих на дугу  $L_1$  со стороны пластинки (взятого относительно начала координат). В результате, полагая  $P_0 x_0 = M$  и учитывая (II.310), получим \* уравнение для определения  $x_0$ :

$$D_2 T_4 + C_0 T_{-2} + C_2 T_0 + C_4 T_2 + m(D_2 T_2 + C_0 T_{-4} + C_2 T_{-2} + C_4 T_0) = - \frac{2P_0 x_0}{R^2 (1 + \kappa) e^{\beta(2\omega - \pi)}}. \quad (\text{II.316})$$

Полагая в (II.314) в качестве примера  $\omega = 10^\circ$ ;  $\alpha = 45^\circ$ ;  $v = 0,25$ ;  $\kappa = 2$ , получаем

$$P_0 = \frac{R [2,18\Gamma' + (2,39 + 2,18m)\Gamma] - \mu\delta}{1,88 + \frac{\mu l}{EF}}. \quad (\text{II.317})$$

Примем, что касательные и нормальные напряжения на дугах  $L_k$  распределены равномерно и воспользуемся гипотезами 2—4, приведенными выше. Тогда, поступая как и ранее, получим для давления на каждую из стоек приближенную формулу

$$P_0 = \frac{A^* - \mu\delta}{B^* + \frac{\mu l}{EF}}, \quad (\text{II.318})$$

\* Жесткостью стоек на изгиб пренебрегаем.

где

$$A^* = \frac{1+\kappa}{6} R[(1+m)\Gamma + \Gamma'](\sin \alpha + \sin \beta + 4 \sin \alpha_0);$$

$$B^* = \frac{1+\kappa}{6\pi(1+k^2)(\cos \alpha - \cos \beta)} [\cos \alpha \ln \varrho_1 - \cos \beta \ln \varrho_2 + \\ + 2 \cos \alpha_0 \ln \varrho_3 + \omega(\sin \alpha + \sin \beta + 4 \sin \alpha_0)] -$$

$$- \frac{(\kappa-1)(1-m)(5 \sin \alpha - 4 \sin \alpha_0 - \sin \beta)}{12(1+m)(1+k^2)(\cos \alpha - \cos \beta)} + \frac{k(\kappa-1)(5 \cos \alpha - 4 \cos \alpha_0 - \cos \beta)}{12(1+k^2)(\cos \alpha - \cos \beta)} -$$

$$- \frac{k(1+\kappa)(1-m)}{6\pi(1+k^2)(1+m)(\cos \alpha - \cos \beta)} (\sin \alpha \ln \varrho_4 - \sin \beta \ln \varrho_5 - 2 \sin \alpha_0 \ln \varrho_3);$$

$$\varrho_1 = \left| \frac{\sin \alpha_0 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\alpha_0 + \alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\omega}{2} \cos \alpha \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\omega}{4} \right)} \right|; \quad \varrho_2 = \left| \frac{\sin \alpha_0 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\beta + \alpha_0}{2} \right)}{\sin \frac{\omega}{2} \cos \beta \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\omega}{4} \right)} \right|;$$

$$\varrho_3 = \left| \frac{\sin(\alpha_0 + \beta)}{\sin(\alpha_0 + \alpha)} \right|; \quad \varrho_4 = \left| \frac{\sin \alpha \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\alpha_0 + \alpha}{2} \right)}{\sin \frac{\omega}{2} \cos \alpha_0 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\omega}{4} \right)} \right|;$$

$$\varrho_5 = \frac{\sin \beta \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\alpha_0 + \beta}{2} \right)}{\sin \frac{\omega}{2} \cos \alpha_0 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\omega}{4} \right)}; \quad k = \frac{(1-m)(\sin \beta - \sin \alpha)}{(1+m)(\cos \alpha - \cos \beta)};$$

$$\alpha_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}; \quad \beta = \alpha + \omega; \quad \alpha_1 = e^{i\alpha} \text{ и } \beta_1 = e^{i\beta} \text{ — концы дуги } \gamma_1.$$

Положив  $\alpha = 45^\circ$ ,  $\omega = 10^\circ$ ,  $\kappa = 2$ , по формуле (II.318) получим

$$P_0 = \frac{2,30 R[(1+m)\Gamma + \Gamma'] - \mu \delta}{B + \frac{\mu l}{EF}}, \quad (\text{II.319})$$

где

$$B = \frac{1}{1+k^2} \left[ 1,95 + 0,244k + \frac{1-m}{1+m} (0,217 + 1,63k) \right];$$

$$k = 0,8397 \frac{1-m}{1+m}.$$

Учитывая, что при  $0 \leq m \leq 1$  величина  $B$  (в данном случае) изменяется в пределах  $1,95 \leq B \leq 2,19$ , легко видеть, что расхождение между значениями  $P_0$ , полученными по формуле (II.317) и по приближенной формуле (II.319), незначительно.

**Квадратное отверстие с жесткими накладками.** Пусть внутри квадратного отверстия с закругленными углами имеются две жесткие дуговые накладки, спаянные с материалом плоскости на дугах  $L_1$  и  $L_2$ . Меж-

ду ними установлены с натягом  $\delta$  две одинаковые стойки длиной  $l$  с жесткостью на растяжение  $EF$ . Дуги  $L_k$  и стойки размещены симметрично относительно средних линий контура отверстия (рис. II.102). Принимая во внимание, что дуговые накладки в результате деформации плоскости и стоек перемещаются поступательно, и поступая аналогично тому, как это изложено для предыдущего случая, получаем

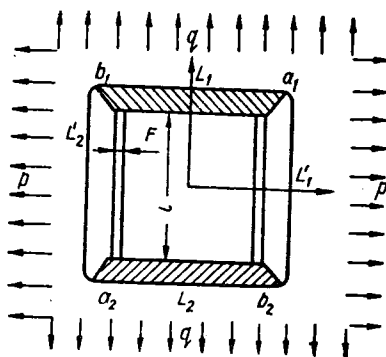


Рис. II.102

$$\omega'(\zeta) \Phi(\zeta) = R \left( \frac{D_4}{\zeta^4} + \frac{D_2}{\zeta^2} + C_0 \zeta^2 + C_2 \right) X(\zeta), \quad (II.320)$$

где

$$X(\zeta) = (\zeta^2 - \alpha_1^2)^\lambda (\zeta^2 - \beta_1^2)^{\bar{\lambda}};$$

$$\omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{n}{\zeta^3} \right);$$

$$n = -\frac{1}{9}; \quad C_0 = \Gamma; \quad D_4 = 3n\Gamma e^{-2\beta\omega};$$

$$D_2 = e^{-2\beta\omega} [\Gamma' + 2n\Gamma (\cos \omega + 4\beta \sin \omega) + nC_2];$$

$C_2$  — произвольная постоянная \*.

Действительную постоянную  $C_2$  и давление на каждый из стержней  $P_0$  найдем из системы уравнений

$$D_4 J_4 + D_2' J_2 + C_0 J_{-2} + C_2 (J_2 D_2' + J_0) = \lambda_1,$$

$$D_4 T_4 + D_2' T_2 + C_0 T_{-2} + C_2 (T_2 D_2' + T_0) = \lambda_2, \quad (II.321)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{2\mu e^{-\beta\omega}}{R(1+\kappa)} \left( \delta + \frac{P_0 l}{EF} \right); \quad \lambda_2 = -\frac{2P_0 e^{\beta(\pi-\omega)}}{R(1+\kappa)};$$

$$D_2' = n e^{-2\beta\omega};$$

$$D_2' = [\Gamma' + 2n\Gamma (\cos \omega + 4\beta \sin \omega)] e^{-2\beta\omega};$$

$$J_k = \int_0^\alpha \frac{\cos(A + k\theta)}{R\theta} d\theta, \quad T_k = \int_\alpha^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(A + k\theta)}{R\theta} d\theta;$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega}{2}.$$

\* Постоянные  $D_4$ ,  $D_2$  и  $C_0$  найдем, подчинив функцию (II.320) следующим условиям, вытекающим из (II.285) и (II.287):

$$\omega'(\zeta) \Phi(\zeta) = 3\Gamma R n \zeta^{-4} + (\Gamma' R + n \bar{A}_2) \zeta^{-2} + 0(1) \quad \text{при } \zeta \rightarrow 0;$$

$$\omega'(\zeta) \Phi(\zeta) = \Gamma R + A_2 \zeta^{-2} + 0\left(\frac{1}{\zeta^4}\right) \quad \text{при } |\zeta| \rightarrow \infty.$$

Окончательно:

$$P_0 = \frac{A - \mu\delta}{\sqrt{\kappa B + \frac{\mu l}{EF}}}, \quad (\text{II.322})$$

где

$$A = \frac{(1 + \kappa)R}{2e^{-\beta\omega}} [D_4 J_4 + D_2' J_2 + C_0 J_{-2} - B(D_4 T_4 + D_2' T_2 + C_0 T_{-2})];$$

$$B = \frac{J_2 D_2' + J_0}{T_2 D_2' + T_0}.$$

В частности, для значений  $\omega$ , равных 90 и 10°, получим

$$P_0(90^\circ) = \frac{(2,85\Gamma + 2,01\Gamma')R - \mu\delta}{1,31 + \frac{\mu l}{EF}}; \quad (\text{II.323})$$

$$P_0(10^\circ) = \frac{(3,37\Gamma + 2,63\Gamma')R - \mu\delta}{3,41 + \frac{\mu l}{EF}}.$$

Можно получить приближенное решение рассмотренной задачи, воспользовавшись гипотезами, сформулированными выше. Учитывая особенности функции  $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$ , указанные выше, для давления на каждый из стержней получим приближенную формулу

$$P_0 = \frac{A - \mu\delta}{B + \frac{\mu l}{EF}}, \quad (\text{II.324})$$

где

$$A = \frac{(1 + \kappa)R}{3} \left[ \left( \Gamma + \frac{\Gamma'}{1-n} \right) \left( 2 + \cos \frac{\omega}{2} \right) - n\Gamma \left( 2 + \cos \frac{3\omega}{2} \right) \right];$$

$$B = \frac{1}{\sin \frac{\omega}{2} - n \sin \frac{3\omega}{2}} \left\{ \frac{1 + \kappa}{6\pi} \left[ -2 \left( \sin \frac{\omega}{2} - n \sin \frac{3\omega}{2} \right) \ln \left( \sin \frac{\omega}{2} \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\omega}{4} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \omega \left( 2 + \cos \frac{\omega}{2} + n \left( 2 + \cos \frac{3\omega}{2} \right) - 4n \sin^2 \omega \right) \right] + \right. \\ \left. \left. + \frac{1 + \kappa}{3\pi} \frac{n \sin \omega}{1-n} \left( 2 + \cos \frac{\omega}{2} \right) - \frac{\kappa - 1}{3} \left[ 1 - \cos \frac{\omega}{2} + n \left( 1 - \cos \frac{3\omega}{2} \right) \right] \right\}.$$

Положив в последней формуле  $\kappa=2$  и  $n=-1/9$ , для значений  $\omega$ , равных 90 и 10°, получим

$$P_0(90^\circ) = \frac{(2,85\Gamma + 2,44\Gamma')R - \mu\delta}{1,42 + \frac{\mu l}{EF}}; \quad (\text{II.325})$$

$$P_0(10^\circ) = \frac{(3,33\Gamma + 2,70\Gamma')R - \mu\delta}{3,45 + \frac{\mu l}{EF}}.$$

Как видим, значения  $P_0$  из (II.323) и (II.325) практически незначительно различаются между собой.

**Прямоугольное отверстие с тремя поддерживающими стойками.** Пусть внутри прямоугольного отверстия установлены с натягами  $\delta_k$  три стойки 1, 2 и 3 (рис. II.103), жесткости на растяжение которых  $E_k F_k$ , а длины  $l_k$  ( $k=1, 2, 3$ ). Примем, что оси координатной плоскости  $xOy$  направлены по осям симметрии отверстия; оси стоек 1 и 3 параллельны и равноудалены от оси  $Oy$ , ось стойки 2 направлена по оси  $Oy$ .

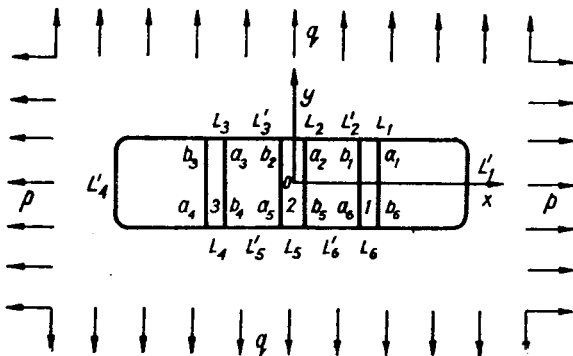


Рис. II.103

Кроме того, положим, что  $l_3=l_1$ ,  $E_3 F_3=E_1 F_1$ ,  $\delta_3=\delta_1$ . Дуги, на которых стойки соприкасаются с материалом плоскости без отверстия, обозначим через  $L_k$  ( $k=1, 2, \dots, 6$ ), а остальные участки контура  $L$  отверстия — через  $L'_k$ .

Найдем суммарное осевое усилие \*  $P_k$ , передающееся на каждую из стоек со стороны материала плоскости. Граничное условие

$$\omega'(\sigma) \Phi^+(\sigma) - \omega'(\sigma) \Phi^-(\sigma) = f(\sigma) \text{ на } \gamma, \quad (\text{II.326})$$

где

$$f(\sigma) = -N_k \omega'(\sigma) \text{ на } \gamma_k; \quad f(\sigma) = 0 \text{ на } \gamma'_k;$$

$N_k$  — нормальное напряжение на  $L_k$  ( $k=1, 2, \dots, 6$ );

$$\omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} + \frac{n}{\zeta^3} + \frac{l}{\zeta^5} \right).$$

Заметим при этом, что в силу симметрии напряженного состояния

$$N_1 = N_3 = N_4 = N_6; \quad N_2 = N_5.$$

\* Очевидно, в силу симметрии  $P_3=P_1$ .

На основании (II.326), учитывая вид функции  $\omega'(\zeta)\Phi(\zeta)$  при  $\zeta \rightarrow 0$  и  $|\zeta| \rightarrow \infty$ , определенной формулами (II.285) и (II.287), получим

$$\omega'(\zeta)\Phi(\zeta) = \Gamma R - \frac{\omega'(\zeta)}{2\pi i} \sum_{k=1}^6 N_k \ln \frac{\zeta - \beta_k}{\zeta - \alpha_k} + \frac{R}{\zeta^2} (B_0 + B_1 N_1 + B_2 N_2) + \\ + \frac{R^4}{\zeta^4} (C_0 + C_1 N_1 + C_2 N_2) + \frac{R}{\zeta^6} (D_0 + D_1 N_1 + D_2 N_2), \quad (\text{II.327})$$

где

$$B_0 = \frac{1}{\Delta} [\Gamma' + \Gamma(m + mn + 6nl + m^2 l + 3ml^2)];$$

$$\Delta = 1 - n - ml - 3l^2;$$

$$B_1 = -\frac{2}{\pi\Delta} [(m + 3nl)\omega_1 + (n + l^2)(\sin 2\beta - \sin 2\alpha) + l(\sin 4\beta - \sin 4\alpha)];$$

$$B_2 = -\frac{1}{\pi\Delta} [(m + 3nl)\omega_2 - 2(n + l^2)\sin \omega_2 + 2l \sin 2\omega_2];$$

$$C_0 = \frac{3}{\Delta} [l\Gamma' + \Gamma(n + 2ml - n^2 - mnl + 3nl^2)];$$

$$C_1 = -\frac{2}{\pi\Delta} [3(1-n)(n+ml)\omega_1 + l(1+2n-ml)(\sin 2\beta - \sin 2\alpha) + \\ + 3l^2(\sin 4\beta - \sin 4\alpha)]; \quad (\text{II.328})$$

$$C_2 = -\frac{1}{\pi\Delta} [3(1-n)(n+ml)\omega_2 - 2l(1+2n-ml)\sin \omega_2 + 6l^2 \sin 2\omega_2];$$

$$D_0 = s\Gamma; \quad D_1 = -\frac{10}{\pi} l\omega_1; \quad D_2 = -\frac{5}{\pi} l\omega_2;$$

$\beta = \alpha + \omega_1$ ;  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  — концы дуг  $\gamma_k(L_k)$ ;  $\omega_1$  — центральный угол, соответствующий дугам  $\gamma_1, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_6$ ;  $\omega_2$  — то же для дуг  $\gamma_2$  и  $\gamma_5$ ;  $\alpha$  — полярный угол, определяющий положение точки на окружности  $\gamma(L)$ .

Затем, воспользовавшись формулами (II.280), (II.327) и гипотезой 3, найдем  $v_{\text{cp}}^{(1)}$  и  $v_{\text{cp}}^{(2)}$  на дугах  $L_1(\gamma_1)$  и  $L_2(\gamma_2)$ :

$$2\mu v_{\text{cp}}^{(1)} = 2\mu \frac{v(\alpha_1) + v(\beta_1) + 4v(\alpha_0)}{6} = Rn_0 + N_1 n_1 + N_2 n_2, \quad (\text{II.329})$$

$$2\mu v_{\text{cp}}^{(2)} = 2\mu \frac{v(\alpha_2) + v(\beta_2) + 4v\left(\frac{\pi}{2}\right)}{6},$$

где

$$n_0 = \frac{1+x}{6} \left[ (\Gamma + B_0)(\sin \alpha + \sin \beta + 4 \sin \alpha_0) + \right. \\ \left. + \frac{C_0}{3}(\sin 3\alpha + \sin 3\beta + 4 \sin 3\alpha_0) + \frac{D_0}{5}(\sin 5\alpha + \sin 5\beta + 4 \sin 5\alpha_0) \right];$$

$$\begin{aligned}
n_1 = & -\frac{1+\kappa}{12\pi} \{T(\alpha) \ln \varrho_1 + T(\beta) \ln \varrho_2 + 4T(\alpha_0) \ln \varrho_3 + \\
& + 2\omega_1 [S(\alpha) + S(\beta) + 4S(\alpha_0)]\} - \frac{1+\kappa}{6\pi} R \{2n(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + \\
& + [2l(\sin 4\alpha - \sin 4\beta) - \pi B_1] (\sin \alpha + \sin \beta + 4 \sin \alpha_0) + \\
& + \frac{1}{3} [2l(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) - \pi C_1] (\sin 3\alpha + \sin 3\beta + 4 \sin 3\alpha_0)\} + \\
& + \frac{1+\kappa}{30} RD_1 (\sin 5\alpha + \sin 5\beta + 4 \sin 5\alpha_0) + \frac{1-\kappa}{12} [5S(\alpha) - 4S(\alpha_0) - S(\beta)]; \\
n_2 = & -\frac{1+\kappa}{12\pi} \{T(\alpha) \ln \varrho_4 + T(\beta) \ln \varrho_5 - T(\alpha_2) \ln \varrho_6 + 4T(\alpha_0) \ln \varrho_7 + \\
& + \omega_2 [S(\alpha) + S(\beta) + 4S(\alpha_0)]\} - \frac{1+\kappa}{6\pi} R \left[ (2n \sin \omega_2 - 2l \sin 2\omega_2 - \right. \\
& \left. - \pi B_2) (\sin \alpha + \sin \beta + 4 \sin \alpha_0) + \left( \frac{2}{3} l \sin \omega_2 - \pi C_2 \right) (\sin 3\alpha + \right. \\
& \left. + \sin 3\beta + 4 \sin 3\alpha_0) \right] + \frac{1+\kappa}{30} RD_2 (\sin 5\alpha + \sin 5\beta + 4 \sin 5\alpha_0); \\
m_0 = & \frac{1+\kappa}{3} \left[ (\Gamma + B_0) \left( 2 + \cos \frac{\omega_2}{2} \right) - \frac{1}{3} C_0 \left( 2 + \cos \frac{3\omega_2}{2} \right) + \frac{D_0}{2} \left( 2 + \cos \frac{5\omega_2}{2} \right) \right]; \\
m_1 = & -\frac{1+\kappa}{6\pi} \left\{ T(\alpha_2) \ln \varrho_8 + T(\beta) \ln \varrho_9 + T(\alpha) \ln \varrho_{10} + 2\omega_1 \left[ 2S\left(\frac{\pi}{2}\right) + S(\alpha_2) \right] \right\} - \\
& - \frac{1+\kappa}{3\pi} R \left\{ 2n(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) + [2l(\sin 4\alpha - \sin 4\beta) - \pi B_1] (2 + \sin \alpha_2) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} [2l(\sin 2\alpha - \sin 2\beta) - \pi C_1] (-2 + \sin 3\alpha_2) \right\} + \\
& + \frac{1+\kappa}{15} D_1 (2 + \sin 5\alpha_2) + \frac{1-\kappa}{2} [S(\alpha) - S(\beta)]; \\
m_2 = & -\frac{1+\kappa}{6\pi} \left\{ 2T(\alpha_2) \ln \varrho_{11} + \omega_2 \left[ 2S\left(\frac{\pi}{2}\right) + S(\alpha_2) \right] \right\} - \\
& - \frac{1+\kappa}{3\pi} R \left[ (2n \sin 2\alpha_2 + 2l \sin 4\alpha_2 - \pi B_2) (2 + \sin \alpha_2) + \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} (2l \sin 2\alpha_2 - \pi C_2) (-2 + \sin 3\alpha_2) \right] + \\
& + \frac{1+\kappa}{15} RD_2 (2 + \sin 5\alpha_2) + \frac{\kappa-1}{3} \left[ S\left(\frac{\pi}{2}\right) - S(\alpha_2) \right]; \\
& T(\theta) + iS(\theta) = \omega(\sigma); \quad \sigma = e^{i\theta};
\end{aligned}
\tag{II.330}$$



$$\alpha_0 = \frac{1}{2}(\alpha + \beta); \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{\omega_2}{2}; \quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega_2}{2};$$

$$Q_1 = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \cos^2 \alpha} \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0 + \alpha}{2}}{\frac{\alpha_0 - \alpha}{2}} \right)^4; \quad Q_2 = \frac{\sin^2\left(\frac{\omega_1}{2}\right) \cos^2 \beta}{\sin^2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)} \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0 - \beta_1}{2}}{\frac{\alpha_0 + \beta_1}{2}} \right)^4;$$

$$Q_3 = \left| \frac{\sin(\alpha_0 + \beta)}{\sin(\alpha_0 + \alpha)} \right|; \quad Q_4 = \left| \frac{\sin(\alpha - \alpha_2)}{\sin(\alpha + \alpha_2)} \right|;$$

$$Q_5 = \left| \frac{\sin(\beta - \alpha_2)}{\sin(\beta + \alpha_2)} \right|; \quad Q_6 = \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \alpha_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta - \alpha_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \alpha_2}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta + \alpha_2}{2}} \right| \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0 - \alpha_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_0 + \alpha_2}{2}} \right)^4;$$

$$Q_7 = \left| \frac{\sin(\alpha_0 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_0 - \beta_2)} \right|; \quad Q_8 = \left[ \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\omega_2}{2}\right) \cos\left(\beta - \frac{\omega_2}{2}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\omega_2}{2}\right) \cos\left(\beta + \frac{\omega_2}{2}\right)} \right]^2;$$

$$Q_9 = \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2 - \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2 + \beta}{2}} \right| \operatorname{tg}^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right); \quad Q_{10} = \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2 + \alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha_2 - \alpha}{2}} \right| \operatorname{tg}^4\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$Q_{11} = \frac{\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\omega_2}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\omega_2}{2}\right)}.$$

В формулах (II.330)  $\alpha$  и  $\beta$  обозначают то же, что и в (II.328); через  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  обозначены полярные углы, определяющие положения концов дуги  $\gamma_2 = \overline{\alpha_2 \beta_2}$  (теми же символами, что и сами точки  $\alpha_2$  и  $\beta_2$ ).

На основании гипотезы 4

$$2v_{\text{ср}}^{(1)} = \delta_1 + \frac{P_1 l_1}{E_1 F_1}, \tag{II.331}$$

$$2v_{\text{ср}}^{(2)} = \delta_2 + \frac{P_2 l_2}{E_2 F_2}.$$

С другой стороны, воспользовавшись формулами (II.281) и (II.327), найдем

$$P_1 = [T(\alpha) - T(\beta)] N_1 = k_1 N_1, \tag{II.332}$$

$$P_2 = [T(\alpha_2) - T(\beta_2)] N_2 = k_2 N_2.$$

Из уравнений (II.331) и (II.332), принимая во внимание (II.329), получаем следующие формулы для определения осевых усилий в стойках 1 и 2 (см. рис. II.103):

$$P_1 = \frac{(Rn_0 - \mu\delta_1) \left( \frac{\mu l_2}{E_2 F_2} - \frac{m_2}{k_2} \right) + (Rm_0 - \mu\delta_2) \frac{n_2}{k_2}}{\left( \frac{\mu l_1}{E_1 F_1} - \frac{n_1}{k_1} \right) \left( \frac{\mu l_2}{E_2 F_2} - \frac{m_2}{k_2} \right) - \frac{m_1 n_2}{k_1 k_2}}; \quad (\text{II.333})$$

$$P_2 = \frac{(Rn_0 - \mu\delta_1) \frac{m_1}{k_1} + (Rm_0 - \mu\delta_2) \left( \frac{\mu l_1}{E_1 F_1} - \frac{n_1}{k_1} \right)}{\left( \frac{\mu l_1}{E_1 F_1} - \frac{n_1}{k_1} \right) \left( \frac{\mu l_2}{E_2 F_2} - \frac{m_2}{k_2} \right) - \frac{m_1 n_2}{k_1 k_2}}. \quad (\text{II.334})$$

В частности, положив  $E_1 \rightarrow \infty$ , получим

$$P_2 = \frac{Rm_0 - \mu\delta_2}{\frac{\mu l_2}{E_2 F_2} - \frac{m_2}{k_2}}; \quad (\text{II.335})$$

положив  $E_2 \rightarrow \infty$ , получим

$$P_1 = \frac{Rn_0 - \mu\delta_1}{\frac{\mu l_1}{E_1 F_1} - \frac{n_1}{k_1}}. \quad (\text{II.336})$$

**Давление на перемычки между отверстиями в бесконечной упругой изотропной плоскости.** Воспользуемся полученными в этом параграфе формулами для определения суммарного давления на каждую из перемычек между одинаковыми отверстиями, имеющими форму квадратов с закругленными углами или эллипсов. Будем полагать, что центры отверстий расположены на одной прямой, являющейся их общей осью симметрии, а стороны квадратов и главные диаметры эллипсов имеют направление главных напряжений на бесконечности.

Давление на перемычки между тремя квадратными отверстиями. Пусть отверстия расположены так, как показано на рис. II.104;  $2a$  — сторона квадратов,  $a$  — ширина каждой из перемычек. Рассматривая три отверстия вместе с материалом, их отделяющим, как одно прямоугольное отверстие с двумя призматическими стержнями внутри его, найдем сначала параметры, входящие в выражение отображающей функции

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} + \frac{n}{\zeta^3} + \frac{l}{\zeta^5} \right).$$

Так, воспользовавшись геометрическими \* соображениями, получим

$$m = \frac{5}{9}, \quad n = -\frac{1}{9}, \quad l = -\frac{1}{45}, \quad R = \frac{45a}{16}.$$

\* Определяя, например,  $R$ ,  $m$ ,  $n$  и  $l$  из уравнений  $x = 4a$ ,  $\frac{d^2x}{d\theta^2} = 0$  при  $\theta = 0$ ,  $y = b$ ;

$\frac{d^2y}{d\theta^2} = 0$ , при  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Затем, положив в параметрическом уравнении

$$x = R[(1 + m) \cos \theta + n \cos 3\theta + l \cos 5\theta]$$

для абсциссы точек контура  $L$  отверстия  $x$  равным  $2a$  и  $a$ , найдем значения углов  $\alpha$  и  $\beta$ .

Численное значение для давления на каждую из перемычек найдем по формуле (II.336), положив  $\delta_1 = 0$ ,  $E_1 = 2\mu(1 + \nu)$ . Тогда, принимая, например,  $\rho = \lambda q$ ,  $\lambda = \frac{\nu}{1 - \nu}$  и  $\kappa = 3 - 4\nu$  (плоская деформация), соответственно значениям коэффициента Пуассона  $\nu$ , равным 0,25 и 0,50, получаем

$$P_1 \Big|_{\nu=\frac{1}{4}} = 2,05aq, \quad P_1 \Big|_{\nu=\frac{1}{2}} = 1,82aq.$$

Если же три отверстия окружить не прямоугольником, а эллипсом с полуосями  $4a$  и  $a$ , то, воспользовавшись формулой (II.318) (полагая  $l = 2R(1 - m) \sin \alpha$ ), получим \*

$$P_1 \Big|_{\nu=\frac{1}{4}} = 2,12aq, \quad P_1 \Big|_{\nu=\frac{1}{2}} = 1,88aq.$$

Давление на перемычки между круговыми и эллиптическими отверстиями. В качестве других примеров применения полученных в этом параграфе формул определялось в условиях плоской деформации при  $\nu=0,3$  суммарное давление  $P_0$  на перемычку между двумя одинаковыми отверстиями круговой и эллиптической форм. Полученные числовые значения сведены в табл. II.41. Первые две строки этой таблицы относятся к случаю круговых отверстий радиуса  $r$ , предпоследняя — к случаю эллиптических отверстий с полуосями 10 и 4, а последняя — к случаю, когда эллипсы вырождаются в щели. В первых двух столбцах таблицы указаны полуоси эллипсов, «окружающих» оба отверстия, в третьем столбце — наименьшая ширина перемычки (рис. II.105).

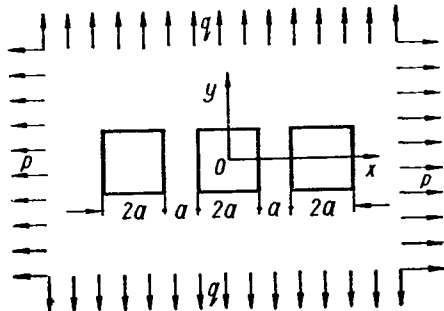


Рис. II.104

Таблица II.41

$a$	$b$	$d$	$P_0$	$P'_0$	$P''_0$	$P'''_0$
3,0 $r$	$r$	2 $r$	3,99 $qr$	3,80 $qr$	3,77 $qr$	3,48 $qr$
2,1 $r$	$r$	0,2 $r$	1,104 $qr$	1,10 $qr$	1,10 $qr$	0,70 $qr$
22,5	4	5	23,16 $q$	21,10 $q$	19,0 $q$	19,20 $q$
22,5	0	5	19,30 $q$	19,30 $q$	19,6 $q$	19,30 $q$

\* Полагая  $l = 2R(1 - m) \sin \alpha_0$ , при тех же условиях получим  $P_1 \Big|_{\nu=\frac{1}{4}} = 2,08aq$ ,

$$P_1 \Big|_{\nu=\frac{1}{2}} = 1,84aq.$$

Условимся называть перемычкой между отверстиями (целиком) заключенную между ними область, расположенную внутри контура, окружающего оба отверстия. Точки пересечения «окружающего» контура с контурами отверстий естественно принять за концы дуг соприкосновения перемычки и материала, занимающего внешность окружающего контура.

Рассматривая перемычку как стержень (стойку) переменного сечения некоторой длины  $l$ , получим среднее значение величины  $1/EF$  для перемычки двумя одинаковыми эллиптическими отверстиями:

$$\left(\frac{1}{EF}\right)_{\text{cp}} = \frac{1}{EF} \left[ \int_0^{\gamma} \frac{e+E}{e-\cos\psi} d\psi - 2\sqrt{1-\varepsilon^2} \arctg \left( \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \gamma \right) \right], \quad (\text{II.337})$$

где  $\psi$  — параметр, входящий в полярное уравнение контура эллиптического отверстия;

$$r = \frac{\rho^*}{1 + \varepsilon \cos \psi};$$

$\gamma$  — значение параметра  $\psi$ , определяющего точки пересечения окружающего контура с контуром отверстий;

$$e = \frac{k}{\rho^* - \varepsilon k};$$

$k$  — расстояние между средней точкой наименьшего сечения перемычки и ближайшими к ней фокусами эллиптических отверстий.

При таком определении жесткости перемычки по формуле (II.308) подсчитаны значения  $P_0$ , приведенные в четвертом столбце табл. II.41.

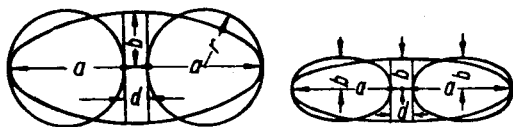


Рис. II.105

В предпоследнем столбце этой таблицы указаны значения тех же величин  $P_0''$ , полученных Д. И. Шерманом [3] более строгим, но значительно более сложным путем.

Сопоставление величин  $P_0$  и  $P_0''$  показывает, что значения  $P_0$  являются несколько завышенными, особенно в случае более отдаленных между собой отверстий. Если же в качестве жесткости стержня переменного сечения принять жесткость призматического стержня площадью  $F=d$ , то при той же области контакта между перемычкой и остальной частью пластинки получим несколько заниженные значения  $P_0$ , обозначенные в табл. II.41 через  $P_0'''$  (последний столбец).

Ясно, что действительное значение жесткости  $1/EF$  заключено между этими двумя предельными случаями, и, несомненно, что путем со-

поставления с точными решениями можно подобрать заключенное между этими предельными случаями среднее значение жесткости  $1/EF$ , приводящее к практически приемлемому результату. Так, если обозначить через  $\Delta'$  значение  $\mu/EF$  в первом случае, полагая, что  $1/EF$  определено формулой (II.337), а через  $\Delta'_0$  — значение  $\mu/EF$  во втором случае ( $F=d$ ) и положить, например,

$$\frac{\mu l}{EF} = \Delta' + \frac{1}{3} (1 + 2m) (\Delta'_0 - \Delta') \frac{d^2}{d^2 - (0,5l)^2}, \quad (\text{II.338})$$

то по формуле (II.308) или (II.335) получим значения для  $P_0$ , обозначенные в табл. II.41 (пятый столбец) через  $P'_0$ , весьма близкие к значениям этой величины  $P''_0$ , полученным Д. И. Шерманом [3]. Из сопоставления числовых значений табл. II.41 следует, что полученные приближенные формулы для результирующего давления на перемычки между отверстиями тем точнее, чем ближе расположены между собой отверстия.

Таким образом, анализируя числовые примеры, рассмотренные в этом параграфе, можно сделать следующие выводы:

давление на стойки с жесткими дугowymi накладками на концах, происходящее от посадочных напряжений, несколько больше давления на стойки без накладок, если соответствующие участки соприкосновения накладок с пластинкой больше участков соприкосновения стоек с пластинкой;

давление на стойки внутри эллиптического отверстия незначительно больше давления на стойки такой же жесткости внутри прямоугольного отверстия со сторонами, равными главным осям эллиптического отверстия;

наиболее точное значение суммарного давления на перемычки между близко расположенными отверстиями круговой или эллиптической форм можно получить тем же методом, что и значения  $P_0$ , приведенные в пятом столбце табл. II.41;

практически достаточно точное значение для давления на перемычку между круговыми или эллиптическими (незначительно отличающимися от круговых) отверстиями можно получить по образцу  $P'_0$  табл. II.41, как бы далеко или близко не были расположены между собой отверстия;

если эллиптические отверстия значительно отличаются от круговых, а их взаимное расположение нельзя считать близким, более точное значение для давления на перемычки между такими отверстиями можно получить тем же путем, что и значения  $P'''_0$ , приведенные в последнем столбце табл. II.41.

**Заключительные замечания.** Решение для плоскости, ослабленной любым конечным числом как угодно расположенных круговых отверстий равной величины, не имеющих между собой общих точек, впервые было дано Г. Н. Бухариновым [1]. Исследование же двоякопериодической задачи впервые, вероятно, было проведено W. T. Koiter [1].

который решение первой основной задачи для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых отверстий, свел к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода. Случаи растяжения двоякопериодических решеток с регулярным расположением отверстий изучались Чен-Лин-Си [1], Чжоу-Чен-Ти [1], Д. И. Шерманом [3, 7], R. Bailey, R. Hicke [1], Лин-Чжи-Бин [1], Saito Hideo [1]. Решение задач этими авторами строилось на основе представления Аппеля (см. Э. Гурса [1]) для многосвязных областей. В работах Л. А. Фильштинского [1], Г. А. Ван Фо Фы [1] и Jan Dvořák [1] решение задач строилось на основе теории эллиптических функций.

Следует указать на статью J. W. Dally and A. I. Durelli [1] обзорного характера, в которой в компактной форме в виде простых графиков и таблиц представлены (с указанием источников) результаты многих исследований (последних десяти лет) о концентрации напряжений возле отверстий в перфорированных различными сетками одинаковых круговых отверстий пластинках, а также на две статьи William Criffel [1—3] обзорного характера, где в удобной и компактной форме представлены (с указанием источников) данные о коэффициентах концентрации около одного отверстия различной формы (кругового, эллиптического, квадратного, треугольного, прямоугольного с закругленными углами) при различных условиях на бесконечности (одноосное или двухосное растяжение — сжатие, чистый сдвиг, чистый изгиб и т. п.). Приведены данные о влиянии друг на друга двух круговых отверстий; данные для бесконечного ряда одинаковых круговых отверстий, а также для пластинок, перфорированных различного вида сетками из равных круговых отверстий (квадратной, прямоугольной, в виде ромба, треугольника и т. п.).

Приведенные выше решения о концентрации напряжений возле различных отверстий показывают, что при одноосном напряженном состоянии около отверстия образуются зоны обратного по отношению к напряжениям в бесконечно удаленных точках знака, т. е. при растяжении пластинки в области сжимающих напряжений. В случае тонкой пластинки в этих зонах могут возникнуть напряжения такой величины, что пластинка потеряет устойчивость и выпучится. Напряженное состояние в выпученных зонах будет иным по сравнению с тем, что следует из решения плоской задачи. Исследованию этих задач была посвящена работа Г. П. Черепанова [1].

## ЛИТЕРАТУРА

- Аверин А. М., Бурмистров Е. Ф. [1] Распределение напряжений в балках с отверстием.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. Изд-во Саратовского ун-та, 1964.
- Аветисян А. С. [1] Исследование концентрации напряжений в бесконечной плоскости, ослабленной отверстием в форме ромба, при двухосном напряженном состоянии.— В кн.: Уч. зап. Ереванского пединститута, 2, 1963, 87—104.

- [2] Исследование концентрации напряжений в бесконечной плоскости, ослабленной отверстием в форме ромба.— В кн.: Уч. зап. Ереванского пединститута, 2, 1963, 69—86.
- [3] Исследование концентрации напряжений в бесконечной плоскости, ослабленной отверстием в форме ромба, при чистом сдвиге.— В кн.: Уч. зап. Ереванского пединститута, 2, 1963, 105—119.
- Алиев З. Г.** [1] О напряженном состоянии в квадратной пластинке вблизи отверстия, возникшем от равномерно распределенного давления.— В кн.: Уч. зап. АЗИНЕФТ, сер. хим. IX, 1965, 1.
- Амензаде Ю. А., Гуськова Е. П.** [1] О напряженном состоянии квадратной пластинки с центральным круговым отверстием, подверженным внутреннему давлению.— Прикл. мех., 1967, 3, 1, 80—86.
- Аннкин Е. П.** [1] Концентрация напряжений в пластине с прямоугольным вырезом.— В кн.: Тр. Дальневосточ. политехн. ин-та, 45, 1956, 63—81.
- Баклашов И. В.** [1] Концентрация напряжений около отверстий с волнистым контуром.— В кн.: Научн. тр. Моск. ин-та радиоэлектроники и горной электромеханики, 49, 2, 1964.
- Беспалый В. И.** [1] Визначення напружень і деформацій у площині, ослабленій еліптичним отвором.— Прикладна механіка, 1958, 4, 4, 390—395.
- Бойм А. А.** [1] О концентрации напряжений в растянутой бесконечной пластине, ослабленной отверстием трапециoidalной формы.— В кн.: Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, 29, 3, 1955, 121—125.
- [2] О напряжениях в весоной полуплоскости, ослабленной сводчатым отверстием.— Докл. Львовск. политехн. ин-та, 1955, 1, 2, 64—68.
- [3] Про напруги у вагомій півплощині, ослабленій склепистим отвором.— Прикл. мех., 1956, 2, 4.
- Будняцкий И. М.** [1] Исследование концентрации напряжений в бесконечных пластинках с прямоугольными вырезами при чистом сдвиге и растяжении. Автореферат канд. диссерт., 1947.
- Буйвол В. Н.** [1] Застосування методу послідовних наближень до плоскої задачі для деяких багатозв'язних областей.— Прикладна механіка, 1961, 7, 6.
- [2] Бігармонічна задача для багатозв'язних систем з циклічною симетрією.— Прикл. мех., 1959, 5, 3.
- Бурмистров Е. Ф.** [1] Концентрация напряжений в пластинке с отверстием.— Изв. АН СССР, ОТН, 1958, 8, 41—47.
- [2] О концентрации напряжений около овальных отверстий некоторого вида.— В кн.: Инж. сб., 17. Изд-во АН СССР, М., 1953.
- [3] Некоторые задачи теории конструктивно ортотропных оболочек и концентрации напряжений в пластинах. Автореферат докт. диссерт. Институт мех. АН УССР, К., 1963.
- Бухаринов Г. Н.** [1] Пластинка, ослабленная  $n$  круговыми отверстиями.— В кн.: Тр. конф. по оптическому методу изучения напряжений. ОНТИ, М.—Л., 1937, 97—107.
- Вайнберг Д. В.** [1] Действие нагрузки на контур квадратного отверстия в плоском поле.— В кн.: Иссл. по вопр. устойчивости и прочности. Изд-во АН УССР, К., 1956.
- [2] Пластины, диски, балки-стенки (прочность, устойчивость и колебания). Госстройиздат, К., 1959.
- Вайнберг Д. В., Синявский А. Л.** [1] Концентрація напружень в дисках з отворами спеціальної форми.— ДАН УРСР, 1960, 10, 1358—1363.
- Ворovich И. И., Космодамианский А. С.** [1] Упругое равновесие изотропной пластинки, ослабленной рядом одинаковых криволинейных отверстий.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1959, 4.
- Ван Фо Фи Г. А.** [1] Про один з розв'язків плоскої двоякоперіодичної задачі теорії пружності.— ДАН УРСР, 1965, 9.
- Гурьев Н. Ф.** [1] Розподіл напружень у розтягнутій ізотропній скінченій прямокутній пластинці, послабленій круговим отвором.— В кн.:— Наук. зап. Полтавськ. пединституту, 8, 1955.
- [2] Растяжение прямоугольной пластинки, в круговое отверстие которой впаивается упругая шайба.— Прикл. мех., 1966, 2, 3.

- Гурьянов В. М. Космодамианский А. С. [1] Влияние кривизны на напряженный стан изотропной пластинки с криволинейным отверстием.— Прикл. мех., 1963, 9, 5, 487—495.  
[2] О напряженном состоянии изотропной пластинки, ослабленной криволинейным отверстием.— Прикл. мех., 1964, 4, 3.
- [3] Растяжение изотропной пластинки с двумя эллиптическими отверстиями.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел, 2. Изд-во Саратовск. ун-та, 1965.
- Гурса Э. [1] Курс мат. анализа, т. II. ОНТИ, М.— Л., 1937.
- Гутман С. Г. [1] К расчету тоннелей.— В кн.: Изв. н.-и. гидромех., 25, ГОНТИ, М.— Л., 1939, 148—168.
- Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. [1] Перфорированные пластины и оболочки и связанные с ними проблемы. Итоги науки. Упругость и пластичность, 1965. Изд. ВНИТИ, М., 1967.
- Грушко Г. С. [1] Распределение напряжений около отверстия, имеющего форму полукруга, край которого подвержен равномерному давлению.— В кн.: Научн. тр. Харьковск. горного ин-та, 12, 1962, 218—220.
- Динник А. Н., Моргаевский А. Б., Савин Г. Н. [1] Распределение напряжений вокруг подземных выработок.— В кн.: Совещания по управл. горным давлением. Изд-во АН СССР, М., 1938.
- Еганиян В. В. [1] Общее решение задачи теории упругости для бесконечной плоскости с двумя круглыми отверстиями, вдоль которых действуют заданные усилия.— Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат., 1965, 18, 6.
- Жуковский Н. Е. [1] О трении смазочного слоя между шипом и подшипником. Полн. собр. соч., т. IV. ОНТИ, М.— Л., 1937, 270—298.
- Журавлев П. А., Захаревич А. Ф. [1] О распределении напряжений в массиве горных пород с горизонтальной выработкой круглого сечения.— В кн.: Зап. Ленингр. горн. ин-та, 36, 3, 1958, 101—105.
- Заблудовский В. М. [1] Растяжение бесконечной пластинки, ослабленной двумя круговыми отверстиями.— В кн.: Бюл. научн. студ. конф. 1954 г. Изд-во Львовск. ун-та, 1955, 106—108.
- Замятина В. Н. [1] Плоская задача теории упругости для кругового кольца.— ПММ, 1942, 6, 2.
- Ионов В. А. [1] Определение напряженного состояния в пластинах с вырезами.— В кн.: Тр. Горьковск. политехн. ин-та, 15, 3, 1, 1959, 83—85.
- Каландия А. И., Манджavidze Г. Ф. [1] Методы теории аналитических функций в некоторых задачах теории упругости.— В кн.: Тр. II съезда по теор. и прикл. мех. 1964 г. Изд-во АН СССР, М., 1964, 99—100.
- Канторович Л. В., Крылов В. И. [1] Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М.— Л., 1962.
- Карпенко Л. Н. [1] Напряжения в полуплоскости с эллиптическим отверстием, близким к границе.— В кн.: Матем. методы в горн. деле, 2. Изд-во СО АН СССР, 1963, 96—112.
- Карцивадзе И. Н. [1] Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей.— Сообщ. АН ГрузССР, 1946, 7, 8.
- Кислер Л. Н. [1] О напряжениях в весомой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми несимметрично расположенными отверстиями.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1960, 3.  
[2] Об определении поля напряжений в весомой полуплоскости с эллиптическим и круговым отверстиями.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1961, 2.
- Коженикова В. Н. [1] Распределение напряжений возле прямоугольного отверстия в бесконечной пластинке, изгибаемой в своей плоскости.— В кн.: Научн. зап. Львовск. ун-та, 29, 1, 1954, 112—130.  
[2] Распределение напряжений на контуре прямоугольного отверстия при изгибе бесконечной пластины.— В кн.: Зап. Ленингр. горн. ин-та, 33, 3, 1956, 90—93.  
[3] Распределение напряжений возле прямоугольного отверстия в весомом массиве.— В кн.: Зап. Ленингр. горн. ин-та, 33, 1956, 99—106.
- Колосов Г. В. [1] Об одном приложении теории функций комплексного переменного к плоской задаче математической теории упругости. Юрьев, 1909.



- [2] Применение комплексной переменной к плоской задаче теории упругости, ГТИ, Л.— М., 1935.
- Космодамианский А. С.** [1] Приближенный метод определения напряженного состояния изотропной пластинки с конечным числом круговых отверстий.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1960, 2.
- [2] О напряженном состоянии упругого изотропного массива, в котором пройдены выработки круглого сечения.— В кн.: Тр. ВНИМИ, 42, Л., 1961.
- [3] Про напружений стан ізотропної пластинки, ослабленої скінченим числом нескінченних рядів кругових отворів.— ДАН УРСР, 1961, 11.
- [4] Пружна рівновага ізотропної пластинки, ослабленої скінченим числом криволинійних отворів.— Прикл. мех., 1961, 7, 6.
- [5] Приближенные методы определения напряженного состояния упругого горного массива, в котором пройдены выработки круглого сечения.— В кн.: Тр. ВНИМИ, 45, Л., 1962.
- [6] О напряженном состоянии горного массива, ослабленного большим количеством выработок квадратного сечения.— В кн.: Тр. ВНИМИ, 45, Л., 1962.
- [7] Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений. Автореферат докт. диссерт. Институт мех. АН УССР, К., 1963.
- [8] О напряженном состоянии изотропной пластинки, ослабленной бесконечным рядом эллиптических отверстий.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. Изд-во Саратовск. ун-та, 1964.
- [9] Растяжение изотропной пластинки с двумя неодинаковыми криволинейными отверстиями.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. Изд-во Саратовск. ун-та, 1964.
- [10] Про регулярність нескінченних систем, одержуваних при розгляді напруженого стану пружних середовищ з круговими отворами.— ДАН УРСР, 1964, 9.
- [11] О квазирегулярности бесконечных систем в задаче о концентрации напряжений возле криволинейных отверстий.— Прикл. мех., 1965, 1, 1.
- [12] Термопружна задача для цилиндра с порожнинами.— Прикл. мех., 1962, 8, 6.
- [13] Упругое равновесие изотропной пластинки с бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий, заполненных упругими ядрами или подкрепленными упругими кольцами.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. 1. Изд-во Саратовск. ун-та, 1964.
- [14] Действие сосредоточенных сил в многосвязных областях.— В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.
- [15] О квазирегулярности бесконечных систем в задаче о концентрации напряжений возле криволинейных отверстий.— Прикл. мех., 1965, 1, 1.
- [16] К вопросу о регулярности бесконечных систем, получаемых при определении напряженного состояния упругих сред с круговыми отверстиями.— Изв. АН СССР, мех., 1965, 5.
- Космодамианский А. С., Ложкин В. Н.**, [1] Некоторые случаи упругого равновесия изотропной пластинки с двумя круговыми отверстиями.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел, 2. Изд-во Саратовск. ун-та, 1965.
- Лехницкий С. Г.** [1] О некоторых случаях изгиба изотропной пластинки, ослабленной круговым отверстием.— Вестн. инж. и техн., 1936, 12.
- [2] Теоретическое исследование напряженного состояния анизотропной пластинки, ослабленной эллиптическим или круговым отверстием.— В кн.: Тр. конф. по оптическому методу изучения напряжений ЛГУ и МГУ. ОНТИ, М.— Л., 1937.
- [3] Определение напряжений в тяжелом анизотропном массиве вблизи горизонтальной цилиндрической выработки эллиптического и кругового сечения.— Изв. АН СССР, ОТН, 1938, 7.
- [4] Определение напряжений в упругом изотропном массиве вблизи вертикальной цилиндрической выработки кругового сечения.— Изв. АН СССР, ОТН, 1938, 6.
- Лозовой Б. А.** [1] Некоторые задачи растяжения и изгиба пластин с трещинами. Автореферат канд. диссерт. Львов, 1963.
- Лозовой Б. А., Панасюк В. В.** [1] Некоторые задачи изгиба полосы с прямой линией трещиной — Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1962, 1.

- Ложкин В. Н. [1] Растяжение изотропной пластинки с двумя круговыми отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел, 1. Изд-во Саратовск. ун-та, 1964.
- Лошкин А. С. [1] Sur l'influence d'un trou elliptique dans la poutre que eprouve une flexion, Comptes rendus, Paris, t. 190, p. 1178, 1930.
- Мамедова С. О. [1] Исследование напряженного состояния правильной четырехгранной трубы с круглым цилиндрическим отверстием, подверженной равномерному внутреннему давлению.— В кн.: Труды АПИ им. В. И. Ленина, 16, 1962.  
[2] Исследование концентрации напряжений в пластинке, ослабленной двумя круговыми отверстиями при чистом сдвиге.— В кн.: Тр. Ленинградск. кораблестроит. ин-та, 9, 1951.
- Матвиенко В. В. [1] Применение методов теории упругости к исследованию взаимовлияния двух горных выработок.— В кн.: Научн. сообщ. Ин-та горного дела АН СССР. Изд-во АН СССР, М., 1961.
- Машанов А. Ж. [1] Влияние структуры массива на характер концентрации напряжений вокруг горных выработок.— В кн.: Научн. тр. Казахс. горнометаллург. ин-та, 20. Изд-во АН СССР, М., 1959, 286—298.
- Михлин С. Г. [1] Метод последовательных приближений в применении к бигармонической проблеме.— В кн.: Труды Сейсм. ин-та АН СССР, 39. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1934.  
[2] Теория пластичности. Изд-во АН СССР, М., 1934.  
[3] Плоская задача теории упругости для неоднородной среды.— В кн.: Труды Сейсм. ин-та АН СССР, 66. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1935.  
[4] Плоская деформация в анизотропной среде. Труды Сейсм. ин-та АН СССР, 76. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1936.  
[5] Интегральные уравнения. Гостехиздат, М., 1947.
- Моссаковский В. И., Загубиженко П. А. [1] Об одной смешанной задаче теории упругости для плоскости, ослабленной прямолинейной щелью.— ДАН СССР, 1954, 94, 3.  
[2] Про стиснення ізотропної площини, ослабленої прямолінійною щілиною.— ДАН УРСР, 1954, 5.
- Мошкин П. Н. [1] Задача об упругой полуплоскости с двумя отверстиями, одно из которых есть круг, а второе—эллипс.— В кн.: Уч. зап. Новосиб. пединститута, 13, 1958.  
[2] Задача о весомой упругой полуплоскости с двумя эллиптическими отверстиями.— В кн.: Уч. зап. Новосиб. пединститута, 13, 1958.  
[3] Задача о напряжениях в весомой упругой полуплоскости, ослабленной конечным числом эллиптических отверстий.— В кн.: Уч. зап. Новосиб. пединститута, 13, 1963.
- Мухомелов Н. И. [1] Новый общий способ решения основных контурных задач плоской теории упругости.— ДАН СССР, 1934, 3, 1.  
[2] Исследование новых интегральных уравнений плоской теории упругости.— ДАН СССР, 1934, 3, 2.  
[3] Об одной новой контурной задаче теории упругости.— ДАН СССР, 1934, 3, 3.  
[4] Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., изд. 1-е, 1935.  
[5] Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1949.
- Нагибин Л. Н. [1] О напряжениях в весомой анизотропной полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями.— В кн.: Инж. сб., 25. Изд-во АН СССР, М., 1959.
- Найман М. И. [1] Распределение напряжений в пластинках, ослабленных отверстиями.— В кн.: ЦАГИ, 313, Л., 1937.
- Народецкий М. З. [1] Об одной задаче плоской теории упругости, разрешаемой в замкнутой форме.— Сообщ. АН ГрузССР, 1957, 19, 3.  
[2] Решение задач плоской теории упругости с помощью специальных функций.— ДАН СССР, 1957, 114, 4.  
[3] О напряжениях в бесконечной пластине, ослабленной двумя круговыми отверстиями. Научно-иссл. и эксперимент. ин-т подшипниковой пром., Отдел научно-техн. информ., М., 1956.

- [4] Растяжение квадратной пластинки, ослабленной круговым вырезом в центре.— В кн.: Инж. сб., 14. Изд-во АН СССР, М., 1953.
- [5] Симметричное нагружение бесконечной пластинки, ослабленной тремя круговыми отверстиями.— Сообщ. АН ГрузССР, 1965, 40, 2.
- Нейбер Г., Хан Г. [1] Проблема концентрации напряжений в научных исследованиях и технике.— Механика. Периодический сб. переводов иностранных статей, 3 (103). «Мир», М., 1967.
- Ободовский В. А. [1] Случай вращающегося диска, ослабленного игольчатым отверстием.— В кн.: Научн. труды Ждановск. металлург. ин-та, 3, 1955, 300—310.
- Орлов С. А. [1] Давление весомой упругой среды на цилиндрическую трубу.— В кн.: Иссл. по теории сооружений, 8. Госстройиздат, М., 1959, 473—483.
- Панасюк В. В., Лозовой Б. Л. [1] Згин полоси з прямолінійною щілиною.— Прикл. мех., 1961, 7, 6.
- Папкович П. Р. [1] Теория упругости. Оборонгиз, М.—Л., 1939.
- [2] Строительная механика корабля, т. II. Судпромгиз, М.—Л., 1939.
- Пенина Н. Н. [1] Напряженное состояние массива (неограниченной линейной деформированной среды) при наличии двух отверстий в форме круговых цилиндров.— В кн.: Тр. Дальневост. политехн. ин-та, 3, 1957.
- Подстригач Я. С. [1] Дія зосередженої сили на край півплощини з круговим отвором.— ДАН УРСР, 1954, 3, 217—219.
- [2] Напряжения около двух неравных круговых отверстий в плоском поле.— В кн.: Научн. зап. Ин-та машин и автомат. АН УССР, 4, 3. Изд-во АН УССР, К., 1955.
- [3] Напруження в площині, ослабленій двома нерівними круговими отворами.— ДАН УРСР, 1953, 6.
- Прусов И. А. [1] К вопросу о давлении на стержни, установленные внутри отверстия равномерно растянутой изотропной пластинки.— В кн.: Исследования горного давления. Госгортехиздат, М., 1960.
- Ракивненко В. М., Маховиков В. И. [1] Концентрація напружень навколо круглого отвору в квадратній пластинці.— ДАН УРСР, 1961, 4, 464—468.
- Родин И. В. [1] Влияние круглых отверстий на распределении напряжений в весомой полуплоскости.— В кн.: Тр. Дальневост. политехн. ин-та, 23, 1940.
- Рупнейт К. В., Гомес Ц. [1] О напряженном состоянии массива около подготовительной выработки.— В кн.: Вопр. горн. давления, 12. Изд-во АН СССР, 1962.
- Савин Г. Н. [1] Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном каким-либо отверстием.— В кн.: Труды Днепропетр. инж.-строит. ин-та, 10, 1936.
- [2] Концентрация напряжений возле эллиптического и кругового отверстия в анизотропной балке (полосе) при чистом изгибе.— Вестн. инж. и техн., 1937, 11.
- [3] Концентрация напряжений возле малых отверстий в неоднородно-напряженном плоском поле.— В кн.: Труды Днепропетр. инж.-строит. ин-та, 20, 1937.
- [4] Изгиб анизотропной балки с постоянной перерезывающей силой, ослабленной эллиптическим и круговым отверстием.— Вестн. инж. и техн., 1938, 4.
- [5] Некоторые задачи теории упругости анизотропной среды.— ДАН СССР, 1939, 23, 3.
- [6] Напряжения в упругой плоскости с бесконечным рядом равных вырезов.— ДАН СССР, 1939, 23, 6.
- [7] Влияние вставленного упругого кольца на картину напряженного состояния возле кругового отверстия.— Докл. ОТН АН УССР, 1947, 4.
- [8] О некоторых контактных задачах теории упругости.— В кн.: Труды Тбилисск. математ. ин-та, 14. Изд-во АН ГрузССР, Тбилиси, 1946.
- [9] Обобщенная задача G. Kirsch'a.— ДАН УРСР, 1946, 3—4.
- [10] Влияние крепления на распределение напряжений возле узких подземных горных выработок.— В кн.: Зап. Ин-та горн. мех. АН УССР, 5. Изд-во АН УССР, К., 1947.
- [11] Основная плоская статическая задача теории упругости для анизотропной среды.— В кн.: Труды Ин-та строит. мех. АН УССР, 32. Изд-во АН УССР, К., 1938.
- [12] Об одном методе решения основной статической задачи теории упругости анизотропной среды.— В кн.: Труды Ин-та математ. АН УССР, 3. Изд-во АН УССР, К., 1939.
- [13] Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М.—Л., 1951.

- Савин Г. Н., Саврук Н. А. [1] Чистий згин балки, ослабленої отвором у вигляді симетричної кругової луночки.— ДАН УРСР, 1952, 1.  
[2] Напряжения в балках и пластинках возле круговых и луночных вырезов.— В кн.: Научн. зап. Ин-та маш. и автомат. АН УССР, I. Изд-во АН УССР, К., 1953.
- Саврук Н. А. [1] Изгиб консольной балки, ослабленной двумя равными круговыми отверстиями.— В кн.: Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, 29, 1955.  
[2] Напряжения в плоскости, ослабленной двумя неравными круговыми отверстиями, при изгибе.— В кн.: Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, 29, 1955.  
[3] Напряжения в изотропной смузі, ослабленій двома нерівними круговими отворами при дії рівномірно розподіленого навантаження.— Прикл. мех., 1960, 6, 1.  
[4] Концентрація напружень в тонкій изотропній смузі, ослабленій двома нерівними круговими отворами, при чистому зсуві.— Прикл. мех., 1959, 5, 3.  
[5] Изгиб постоянной перерезывающей силой изотропной балки, ослабленной двумя неравными круговыми вырезами.— В кн.: Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, 29, 1955.  
[6] Вплив кругових та луночних отворів на напруження в смузі при чистому зсуві.— В кн.: Наук. зап. Львівськ. політехн. ін-ту, 38, 1956, 126—135.
- Соколов П. А. [1] Распределение напряжений в плоском поле, ослабленном каким-либо отверстием.— Бюлл. научно-техн. комиссии УВМС РККА, 4, 1930, 39—71.
- Угодчиков А. Г. [1] Электромоделирование задачи конформного преобразования круга наперед заданную односвязную область.— УМЖ, 1955, 7, 2, 221—230.
- Угодчиков А. Г., Крылов А. Я. [1] К расчету напряжений около смотровых галерей в гидротехнических сооружениях.— Инж. журнал, 1961, 4, 160—165.
- Устинов Ю. А. [1] Концентрация напряжений в полуплоскости и плоскости с круговыми отверстиями при растяжении.— Изв. АН СССР, мех., 1965, 1.  
[2] Решение некоторых задач для двусвязных областей со сближенными круговыми отверстиями.— В кн.: Концентрация напряжений, I. «Наукова думка», К., 1965, 270—275.
- Фильштинский Л. А. [1] Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круговых отверстий.— ПММ, 1964, 3.
- Хара И. С. [1] Дослідження концентрації напруг у безкінечних пластинках, ослаблених склепінчастим або трапецоїдальним отвором при розтягу.— ДАН УРСР, 1953, 4, 294—298.  
[2] Дослідження концентрації напруг у важкій півплощині біля склепінчастого і трапецоїдального отворів, підкріплених абсолютно жорсткими кільцями.— ДАН УРСР, 1953, 4.
- Хачян Э. Е. [1] Растяжение пластинки с овалообразным отверстием.— В кн.: Студ. научн. тр. Ереванск. ун-та, 8, 1958, 85—196.
- Чаплыгин С. А. [1] К вопросу о деформации трубы, ограниченной двумя эксцентрисическими цилиндрами и сжатой постоянным давлением. Полн. собр. соч., т. III. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1936, 323—338.
- Черепанов Г. П. [1] О выпучивании мембран с отверстиями при растяжении.— ПММ, 1963, 27, 2.
- Швецов В. А. [1] Растяжение изотропной пластинки с бесконечным числом квадратных отверстий, подкрепленных жесткими кольцами.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. Изд-во Саратовск. ун-та, 1964.
- Шевченко Н. И. [1] Плоская задача для бесконечной упругой среды, ослабленной круговой цилиндрической областью. ДАН СССР, 1953, 89, 5, 799—800.
- Шереметьев М. П. [1] Упругое равновесие эллиптического кольца.— ПММ, 1953, 17, 1, 107—113.  
[2] Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львовск. ун-та, 1960.
- Шереметьев М. П., Прусов И. А. [1] Определение давления на подкрепляющие стержни внутри отверстия бесконечной пластинки при ее растяжении в двух направлениях.— Прикл. мех., 1955, 1, 4.
- Шерман Д. И. [1] О напряжениях в весомай полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями.— ПММ, 1951, 15, 3.  
[2] О напряжениях в плоской весомай среде с двумя одинаковыми симметрично расположенными круговыми отверстиями.— ПММ, 1961, 15, 6.

[3] К вопросу о напряженном состоянии междукамерных целиков. Упругая весо-мая среда, ослабленная двумя отверстиями эллиптической формы.— Изв. АН СССР, ОТН, 1952, 6—7.

[4] Про один метод розв'язання деяких задач кручення, згину і плоскої теорії пружності для неоднов'язних областей.— Прикл. мех., 1957, 3, 4.

[5] К вопросу о напряженном состоянии весомай полуплоскости с двумя заглубленными круговыми отверстиями.— В кн.: Тр. Ин-та физики Земли АН СССР, 3. Изд-во АН СССР, М., 1959.

[6] О напряжениях в весомай среде, ослабленной эллиптическим и круговым отверстиями.— В кн.: Инж. сб., 27—28. Изд-во АН СССР, М., 1960.

[7] Весомай среда, ослабленная периодически расположенными отверстиями круговой формы, ч. 1.— В кн.: Инж. сб., 31. Изд-во АН СССР, М., 1961.

[8] Весомай среда, ослабленная периодически расположенными отверстиями круговой и некруговой формы, ч. 2.— Инж. журнал, 1962, 1.

[9] Плоская задача теории упругости для анизотропной среды.— В кн.: Труды Сейсм. Ин-та АН СССР, 86. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1938.

[10] Упругая весомай полуплоскость, ослабленная отверстием эллиптической формы, достаточно близко расположенным от ее границы.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. Изд-во АН СССР, М., 1961, 527—563.

[11] Весомай среда, ослабленная периодически расположенными отверстиями круговой и некруговой формы.— Инж. журнал, 1961, 1, 1.

[12] Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости.— В кн.: Труды Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. мех. (27 янв.—3 февр. 1960 г.). Изд-во АН СССР, М., 1962.

[13] Статическая плоская задача теории упругости для изотропных неоднородных сред.— В кн.: Труды Сейсм. ин-та АН СССР, 86, Изд-во АН СССР, М.—Л., 1938.

[14] К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях.— ДАН СССР, 1940, 27, 9.

[15] Плоская деформация в изотропной неоднородной среде.— ПММ, 1943, 7.

[16] О напряженном состоянии некоторых запрессованных деталей.— Изв. АН СССР, ОТН, 1948, 9.

[17] Основные плоские и контактные (смешанные) задачи статической теории упругости.— В кн.: Механика в СССР за тридцать лет. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1950.

Atsumi A. [1], On the stresses in a strip under tension and containing two equal circular holes placed longitudinally, J. Appl. Mech., v. 23, 4, 1956.

[2] On the stress in a strip under tension and containing two equal circular holes placed longitudinally, Paper. Amer. Soc. Mech. NADM-12, 1956, 8 pp, ill.

[3] Задача об изгибе бесконечной полосы с двумя равными круговыми отверстиями, расположенными симметрично относительно нейтральной оси.— Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs, 1955, 21, 107 (РЖМех, 1957, 8, 9284).

Bailey R., Hicke R. [1] Behaviour of Perforated Plates Under Plane Stress., v. Mech. Engr. Sci., 1960, 2, No 2.

Bailey R. W., Fidler R. [1] Stress analysis of plates and shells containing patterns of reinforced holes, «Nuck. Engng. and Design» (formerly «Nucl. Struct. Engng»), 1966, 3, 1 (РЖМех, 1966, ПВ 1939).

Barton Cliff Smith [1] A method for determining the stress distribution in a plate due to a uniform pressure applied over the boundary of a square hole, Proc. 2-nd U. S. Nat Congr, Appl. Mech. Ann. Arbor., Mich. 1954, New York, 1955, 283—289 (РЖМех, 1958, 6941).

Brilla Jozef [1] Napätia okolo otvorov od objemovych sil, Stavebnicky časopis Ročník 2, číslo 2, 1954.

Brock J. S. [1] The mean stress around a small opening of any shape in a uniformly loaded plate, J. Appl., Mech., 23, 2, 1956, 314—315 (РЖМех, 1957, 8, 9289).

Budin F. J. [1] Spannungsverteilung um einen kreisförmigen Querschnitt im perfekt elastischen Gebiete, Abhandl. Dtsch., Akad. Wiss. Berlin, Kl. Berglau, Hüttenwesen und Montangel. 1961, 1, 84—86 (РЖМех, 1962, 7, B252).

Chi N., Irwin L. K. [1] Elastic deformations in strips with holes loaded through pins, J. Res. Nat Bur. Standards, 1959, 62, 4, 147—151 (РЖМех, 1960, 8, 10584).

Conroy M. F. [1] The elastic stresses at the boundary of a symmetrically shaped hole

in an infinite plate loaded by normal boundary forces in the plane of the plate, Bull. Calcutta Math. Soc., 48, 1, 1956, 47—54. (PЖMех, 1958, 953).

- Czu Wej-szen [1] Wyteżenie gorotworu w poblizu wyrobiska o prozekroju kołowym, Przegl. nauk-techn. AGH, Krakowie, 9, 1961, 1—17 (PЖMех, 1962, 3 B 304).
- Czudek H. [1] Niektóre zagadnienia wytrzymałości tarczy nieogranczonej z ośrodkiem sztywnym, Rozprawy inżynierskie CLXYII, tom VIII, zeszyt. 3, rok 1960.
- Dvorak Jan. [1] Напряжения в пластине, ослабленной квадратной решеткой из круглых отверстий.— Aplikace mat, 1963, 8, 180—196.
- Dally J. W. and Durelli A. I. [1] Stresses in Perforated Panels. Product Engineering, March, 1956.
- Davies G. A. O. [1] Stresses in a square plate having a central circular hole, «J. Roy. Aeronaut. Soc.», 1965, 69, 654 (PЖMех, 1966, 5, B 56).
- Davies G. A. O., Hoddinott I. R. [1] Stresses in a plate pierced by two unequal circular holes, J. Roy. Aeronaut Soc. V. 67, 3 (PЖMех, 3B37 631, 1964).
- Davis E. A. [1] Extension of iteration method for determining strain distributions to the uniformly stressed plate with a hole. Trans, ASME, 2, 1963, 210—214 (PЖMех., 1964, 4, B 201).
- Edmunds Henry G. [1] Stresses due to shearing force in a holed plate, Engineer, 199, 5177, 1955, 518—519 (PЖMех., 1959, 11, 13878).
- Evan-Iwanowski R. M. [1] Distortion of Boussinesq field by circular hole, Quart, Appl. Math., 19, 4, 1962, 359—365 (PЖMех., 1963, 1 B 28, 1).
- Fuka Jaroslav [1] Rešení druhého problému pružnosti v excentrickém mezikruží pro nestlačitelné těleso, Aplikace mat, 7, 3, 9162 (PЖMех., 1963, 7, B28).
- [2] Rešení prvního problému pružnosti v excentrickém mezikruží, Aplikace mat, 3, 1, 1958, 45—66. (PЖMех., 1959, 7, 7942).
- [3] A theoretical investigation of the yield point loading of square plate with a central circular hole v. Mech, and Phys. Solids, 2, 3, 1954, 156—169. (PЖMех., 1956, 4, 2358).
- Geerlings J. J. [1] Complexe behandeling van het tweedimensionale elasticiteitsprobleem. IV. Plaat met vierkant gat met afgeronde hoeken. Ingenieur (Nederl), 72, 41, 1960, 031—037, Discuss 0,37 (PЖMех., 1962, 2B30).
- Gross William A. [1] The second fundamental problem of elasticity applied to a plane circular ring. Z. Angew. Math und Phys., 8, 1, 1957, 71—73 (PЖMех., 1957, 11, 13004).
- Gupta D. P. [1] Effect of a small circular hole on the stress distribution in a deep rectangular beam subject to flexure under shear, Indian, J. Theoret. Phys., 1962, 10, 2, 53—60 (PЖMех., 1964, 6B41).
- [2] Stresses in a semi-infinite plate with a circular hole due to a distributed load on the straight boundary, J. Technol., 1960, 5, 1, 7—13 (PЖMех., 1964, 2 B 46).
- William Griffel [1] Stress concentration factors for plates with holes, Product Engineering, September 16, 1963.
- [2] More concentration factors for stresses around holes. Product Engineering. November 11, 1963.
- [3] Коэффициенты концентрации напряжений для пластин с отверстиями.— Prod. Engng., 1963, 34, 19, 98—104.
- Hahn H. G. [1] Zur Spannungskonzentration in gezogenen Scheiben mit kreuzförmiger Öffnung, Forsch, Ind.— Wes. 30 (1964), Nr. 2, (50—53).
- Heller S. R. [1] The stresses around a small opening in a beam subjected to bending with shear, Proc. First. U. S. Nat. Congr. Appl. Mech. Publ. Amer. Soc. Mech. Engrs. N. Y., 1952, 239—245 (PЖMех., 1954, 5, 3417).
- Heller S. R., Jr, Brock J. S., Bart R. [1] The stresses around a rectangular opening with rounded corners in a uniformly loaded plate, Proc 3-rd U. S. Nat. Congr. Appl. Mechanics Providence, Rhode Island, 1958, New-York, 9, (1958, 357—368 PЖMех., 1962, 8 B 42).
- [2] The stresses around a rectangular opening with rounded corners in beam subjected to bending with shear, Proc. 4-th U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Berkeley, Calif., 1962, vol. 1, Oxford—London—New-York—Paris, Pergamon Press, 489—496 (PЖMех., 1964, 3, 3B35).
- Hirschfeld Kurt [1] Stollen mit elliptischem Querschnitt, Schweiz, Bauzeitung, 1955, 73, 8, 102—108 (PЖMех., 1956, 6, 3800).

- Hulbert L. E. [1] The numerical solution of two-dimensional problems of the theory of elasticity. «Bull. Engng. Experim. Stat. Ohio State Univ» s. a. N 198, XXIV, 178 p. p. ill. (РЖМех., 1966, 12 В 35).
- Hulbert L. E., Niedenfuhр F. W. [1] Accurate calculation of stress distributions in multiholed plates. Trans. ASME, 1965, B87, 3 (РЖМех., 1966, 3 В 22).
- Howland R. C. J. [1] On the Stresses in the Neighbourhood of a Circular Hole in a Strip under Tension, Phil. Trans. Roy., Soc., London. Ser. A, vol. 229, 1930, p. 49.  
[2] Stress in a Plate Containing an Infinite Row of Holes, Proceedings of Royal Soc. of London, Ser. A., vol. 148, 1935, pp. 471—491.
- Хокао З. [1] Распределение напряжений вокруг двух одинаково расположенных один над другим по вертикали тоннелей — J. Mining and Metallurg. Inst., Japan., v. 75, 852 (РЖМех., 1960, 10, 13485).
- Ногаи. [1] О коэффициенте формы для случаев растяжения и изгиба полосы с круговым отверстием, № 11, 1956, 84—91 (РЖМех., 1958, 4412).
- Horovitz В. [1] Influenta concentrării tensiunilor și dimensiunilor absolute asupra capacității portante a organolor de masini, Metalurgia și constr. masini, 1954, 4—5, 10—19 (РЖМех., 1959, 3, 1734).
- Inglis С. Е. [1] Engineering, vol. 95, 1913, p. 415.
- Ивана, Миао. [1] Напряжения в полубесконечной пластинке с круговым отверстием, опертой по прямолинейной кромке — Fac. Fechnol. Kanazava. Univ, 1954, 1, 3, 109—114 (РЖМех., 3378, 1957).
- Исида [1] Растяжение бесконечной полосы, содержащей квадратное отверстие со скругленными углами — Trans. Japan, Soc. Mech. Engrs. 1959, 159, 1110—1118 (РЖМех., 1961, 5, 5B45).  
[2] О растяжении полосы с центральным эллиптическим отверстием, Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs., 1955, 21, 107, 507—513 (РЖМех., 5865, 1957).  
[3] О растяжении полосы с центральным эллиптическим отверстием. — Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs., 1955, 21, 107, 517—518 (РЖМех., 5866, 1957).
- Isida Makoto [1] Некоторые плоские задачи о бесконечной пластине, содержащей бесконечный ряд круглых отверстий. — Trans. Japan. Soc. Mech., Engrs. t. 25, 159, 1959 (РЖМех., 1961, 11, 11В38).  
[2] On some plane problems of an infinite plate containing an infinite row of circular holes, Bull JSME, t. 3, 10, 1960.  
[3] On the tension of an infinite strip containing a square hole with rounded corners, Bull JSME, 1960, 3, 10, 254—259 (РЖМех., 5B46, 1961, 5).  
[4] Formulas for the circumferential stresses around an elliptic hole in a semiinfinite plate under some boundary conditions. Scient. Papers Fac. Engng Fokusima Univ, 1955, 6, 129—132 (РЖМех., 3, 3367, 1957).
- Isida Makoto, Tagami Sigemi [1] On the tension of on infinite strip containing a hole of an arbitrary profile, Proc. 9-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1959 (1959, Tokyo) Tokyo, 1960, 51—54 (РЖМех., 1962, 3332).
- Isida Mamoto [1] On the tension of a semiinfinite plate with an elliptic hole, Scient., Papers. Fac. Engng. Tokushima Univ, 1955, 6, 75—95 (РЖМех., 1959, 11, 13869).  
[2] О растяжении полубесконечной пластины с эллиптическим отверстием. — Scient. Papers. Fac. Engng, Tokushima Univ., 1955, 6, 75—95 (РЖМех., 1959, 11, 13869).  
[3] О растяжении полубесконечной пластины с эллиптическим отверстием. — Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs., 1956, 22, N 123, 803—809 (РЖМех., 1959, 11, 13870).
- Jeffery G. B. [1] Plate Stress and Plate Strain Bipolar Coordinates, Phil. Trans of the Royal Soc. of London, Ser. A, v. 221, 1921.
- Karunes B. [1] On the concentration of stress round the edge of a hole bounded by two intersecting circles in a large plate Indian I. Phys, 1953, 27, 4 (РЖМех., 843, 1957).  
[2] Stress distribution in an infinite plate with an elliptic hole acted upon by a force and a couple at an internal point, Indian J. Phys, 1953, 27, 9 439—446 (РЖМех., 1959, 11, 13871).
- Kirch G. [1] Die Theorie d. Elastizität u. d. Bedürfnisse d. Festigkeitslehre, v. D, j. m. 42, 29, 1898, S. 799.
- Koite: W. T. [1] Stress distribution in an infinite elastic sheel with a Doubly —

Periodic Set of Equal Holes. Boundary Problems Different Equat. Madison. Univ. Wisconsin Press., 1960, 191—210.

[2] An elementary solution of two stress concentration problems in the neighbourhood of a hole. Quart Appl. Math., 1957, 15, 3, 303—308 (РЖМех., 1958, 7941).

Kraus. [1] Pressure stresses in multihole bodies Internat. J. Mech. Sci 4, 1952, 14.

Kunert Karlheinz. [1] Die Spannungen in dreieckförmig und in viereckförmig gelochten Scheiben bei allseitigem Zug, Forsch. Geb Ingenieurwesens, 1963, 29, 2 (РЖМех., 2, 1964, 2B41).

Kyohai Mori. [1] On the tension of an infinite plate containing two circular holes connected by a slit, Buull. JSME, 7, N 28, 1964.

Лин Чжи-Бин. [1] Напряжения в перфорированной полосе.—Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1957, NAPN—8, 11 pp.

Ling C. B. [1] On the Stresses in a Plate Containing Two Circular Hole Journal of Applied Physics, v. 19, 1, 1948.

[2] The Stresses in a Plate Containing an Overlapped Circular Hole, Journal of Applied Physics v. 19, 4, 1948.

Лу Дянь-Кэ [1]. Применение метода определенных коэффициентов для решения задачи о напряжениях плоскости, ослабленной круглыми отверстиями (РЖМех., 1963, 3, 3B18).

Mindlin R. D. [1] Stress Distribution Around a Tunnel, Proceeding American Soc. of Civil Engineers, v. 65, 4, 1939.

Mindlin R. D. [2] Stress distribution around a hole near the edge of a plate under tension, Proc of the Soc. for Exper. Str. An. vol V, N 2, 1948, p. 58.

Mitchell L. H. [1] Stress concentration at semi-circular notch. «Trans ASME», 1965, E32, N 4, 938—939 (РЖМех., 1966, 10B51).

Мияо Кадзю [1] Напряжение в бесконечной пластинке, имеющей два соприкасающихся круговых отверстия.—Trans. Mech. Japan. Soc. Mech. Engrs, v. 22, 123, 1956 (РЖМех., 1958, 3, 3142).

[2] Напряжение в бесконечном диске, нагруженном двумя сосредоточенными силами вблизи отверстий.—Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs, v. 27, 179, 1961 (РЖМех., 1962, 6, 6B41).

[3] Stress in a circular disk with an eccentric circular hole under radial forces. Bull., JSME, 1958, 1, 3, 195—198 (РЖМех., 1960, 6, 7749).

[4] Stresses in a circular disk with an eccentric circular hole fixed at its center and under a tangential force on the outer edge, Bull. JSME, 2, 6, 271—276 (РЖМех., 1962, 6B45).

[5] The stresses in a circular disk with an inscribed circular hole having load on its edge, Tran. Soc. Mech. Engrs., 1957, 23, 127, 120—133 (РЖМех., 1958, 4, 4404).

Nisitani Hironobu. [1] On the tension of an infinite plate containing an infinite row of elliptic holes, Bull. J. S. M. E. t. 6, 24, 1963.

[2] Растяжение бесконечной пластинки, содержащей бесконечное число эллиптических отверстий.—Trans. Japan, Soc. Mech. Engrs, v. 29, 197, 163, 1B16, 1964.

Nishihara Toshio, Fujii Taichi [1] Stresses in an infinite plate with an overlapped hole, Proc 6-th Japan Nat. Congr. Appl, 1956, Tokyo, 1957 (РЖМех., 1958, 11393).

Окабаяси [1] Растяжение упругой тонкой плиты с одинаковыми и правильно расположенными круглыми отверстиями.—Trans. Japan. Soc. Civil. Engrs. 43, 1957 (РЖМех., 1960, 6, 7743).

Peterson R. E. [1]—Stress concentration design factors, N—Y, John Wiley Inc., L., Chapman and Hall, 1954, 155 pp., ill, 68 s (РЖМех., 1957, 9, 11031).

Poschl T. [1] Math. Zeitschrift, Bd, 11, 1921, S. 95.

Phillips H. Boyd F. Asce and Ira E. Allen. [1] Stresses around Rectangular Openings in a Plate, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, June, 1960.

Radrowski Peter P. [1] Stresses in a plate containing a ring of circular holes and a central circular hole, Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mech., Ann Arbor. Mich., 1954, New-York, 1955.

Rao Kishan [1] Gravitational stresses on deep tunnels, Proc 5th Congr. Theoret and Appl. Mech and Sympos. Non Linear Phys. Probl., Roor Kee, 1959, Kharagrur, s., a., c 103—110 (РЖМех., 1962, 8B41).



- Railey, Hinks [1] Поведение перфорированных пластин при плоском напряженном состоянии.— *J. Mech. Engng. Sci.*, 1960, 2, 2, 143—161.
- Rozsa L., Kovacs G., Kohlmann L. [1] Stresses and deformations due to tangential forces acting along the perimeter of a circular cut set in an elastic plane, *Acta techn., Acad. scient. hung.* 1962, 41, 3—4, 363—380 (РЖМех., 1964, 1, В23).
- Roy S. K. [1] On the stress concentrations for multiple opening in large structures, *Jrugat an Rower*, v. 13, 3, 1956.
- Sobey A. I. [1] Stress-concentration factors for rounded rectangular holes in infinite sheets. «Aeronaut. Res. Council Repts and Mem.», 1965, N 3407, 13 pp. илл (РЖМех., 1966, В30).
- Saito Hideo. [1] Stress in a plate containing Infinite Parallel Rows of Holes, *ZAMM*, v. 37, 3—4, 1957.
- Сайто [1] О напряжениях в круглой пластине с круговыми отверстиями, расположенными симметрично относительно центра, возникающих от статически приложенных сил и при вращении.— *Trans. Japan. Soc. Mech., Engrs.* 1954, 20, 95 (РЖМех., 1956, 6, 3806).
- Sen-Gupta A. M. [1] Stress distributions in a thin plate around a hole in the form of a loop of lemniscate of Bernoulli, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 1955, 47, 3, 153—156 (РЖМех., 1957, 11, 13009).
- [2] The effect of two equal circular holes on the stress distribution in a beam under uniform bending moment, *Bull. Calcutta, Math. Soc.* v. 45, 2, 1953 (РЖМех., 1954, 9, 4885).
- [3] Some problems of elastic plates containing circular holes, *H, Indian, J. Theoret. Phys.*, 1954, 2, 1, 37—46 (РЖМех., 1957, 8, 9285).
- [4] Stresses due to diametral forces on a circular disk with an eccentric hole, *J., Appl. Mech.*, 1955, 22, 2, 263—266 (РЖМех., 1956, 12, 8447).
- Schri I. N. [1] Some problems relating to stresses in an infinite plate containing circular holes, *Pros. Nat. Just. India*, A 23, 4, 1957.
- Showdon W. [1] The disturbance of stress in an infinite plate by a lemniscate-shaped hole, *Brit. J., Appl. Phys.* 1955, 6, 6, 220—223 (РЖМех., 1956, 7, 5339).
- Szelagowski Franciszek. [1] The Problem of the Infinite Disc with a Circular Hole under a Tangential Load, *Bull. Acad. polon. Sci. Ser. Sci tech.*, 1962, 10, 5 (РЖМех., 8, В27).
- [2] Rozciąganie silami skupionymi tarczy nieograniczonej z otworem kolowym, 1956, 4, 4, 507—513 (РЖМех., 1958, 11, 13001).
- [3] Działanie pary sil na obwodzie otworu kolowego tarczy nieograniczonej, *Arch. mech. Stosowan.*, 1955, 7, 3, 337—344 (РЖМех., 1956, 12, 8448).
- [4] The problem of a couple acting on the periphery of a circular hole in an infinite plate, *Biul. Acad. Polun sci.* 1955, cl. 4, 3, 3, 139—144 (РЖМех., 7008, 1957).
- Сэйка. [1] Напряжения в толстом цилиндре с квадратным отверстием, к контуру которого приложены две диаметрально противоположные сосредоточенные силы. *Trans. Japan, Soc. Mech. Engrs.* 1954, 20, 95, 510—511 (РЖМех., 8, 1955, 4450).
- [2] The stresses in an elliptic ring under concentrated load, *Z. angew. Math und Mech.*, 1958, 38, 3—4, 99—105 (РЖМех., 1959, 5, 5415).
- Такэути. [1] Метод определения распределения напряжений в пластинке с отверстием под действием многочисленных сосредоточенных нагрузок. *Trans. Japan. Soc., Mech. Engrs.*, 1955, 21, 111, 774—780 (РЖМех., 1957, 11, 13063).
- Чжао Гуан-Хень [1] «Acta scient. natur. scholar. super. sinens. P. archit. et hydraul.» 1965, 1, N 1 (РЖМех., 1966, 4В41).
- Чжоу Чен-ти. [1] Расчет напряжений в упругой плоскости, ослабленной бесчисленными рядами круглых отверстий.— В кн.: *Тр. Дальнинского политехн. института*, 1, 1960.
- Чен Лин-Си. [1] К вопросу о концентрации напряжений при наличии многих отверстий. В кн.: *проблемы механики сплошной среды*. Изд-во АН СССР, М., 1961.
- Tuzi Z. [1] Effect of a Circular Hole on the Stress distribution in a beam under uniform bending moment.— *Philosophical Magazine*, February 1930, 9, 56.
- Takluti Yoitiro, Yurikawa Takasi. [1] *Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs.*, 1957, 23, 127, 124—130 (РЖМех., 1958, 6942).

- Тан Ли-Минь. [1] О концентрации напряжений вблизи ряда круговых отверстий.— В кн.: Тр. Дальнинского политехн. ин-та. 6, 1959 (РЖМех., 1960, 10, 13484).  
[2] О напряжениях смежных круглых отверстий в упругой плоскости (РЖМех., 1960, 12, 196540).
- Тан Ли-Минь, Сунь Хуань-чунь. [1] Концентрация напряжений вокруг круговых отверстий, расположенных у краев области.— Тр. Дальнинского политехн. ин-та, 6, 1959, 81—87 (РЖМех., 1960, 9, 12021).
- Vaid D. K., Varma R. K., Awade S. T. [1] On the biharmonic analysis of stress distribution in square plates with hydrostatically loaded central circular opening, Irrigat and Power, 1960, 17, 2, 197—214 (РЖМех., 1961, 10, В29).
- Villaggio Piero [1] Limiti superiori del fattore di concentrazione della tensione intorno a fori ipotrocoidali, Aerotecnica, 1, 1963, 43, 3, 119—128 (РЖМех., 1964, 10, 10В40).
- Wang C. K. [1] Theoretical Analysis of Perforated Shear Webs, Journal of Applied Mechanics, June, 1946, vol. 13, N 2.
- Wilson R. G. [1] The stresses in an infinite strip containing a circular inclusion Matematika, 1964, 11, N 2, 155—170 (РЖМех., 1966, 1В29).
- Yeng S. F. [1] The use of complex variables to obtain stresses in a notched plate under tension. «Appl. Scient. Res.», 1964—1965, А14, N 3 (РЖМех., 1966, 2В38).

# ВЛИЯНИЕ АНИЗОТРОПИИ МАТЕРИАЛА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ СВОБОДНЫХ И ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОТВЕРСТИЙ

## § 1. Решение первой основной задачи для области с эллиптическим отверстием\*

Допустим, что в неограниченной анизотропной упругой плоскости сделано эллиптическое отверстие, по контуру которого заданы внешние усилия  $X_n, Y_n$  (первая основная задача) или компоненты  $u$  и  $v$  перемещения его точек (вторая основная задача). Требуется определить напряженное состояние в рассматриваемой плоскости возле отверстия. Направим оси координат  $Ox$  и  $Oy$  соответственно по осям эллипса. Обозначим полуоси эллипса через  $a$  и  $b$ .

Наряду с заданной плоскостью  $z = x + iy$  будем рассматривать плоскости  $z_1$  и  $z_2$ , которые получаются из нее аффинным преобразованием:

$$\begin{aligned} z_1 &= x + s_1 y = x_1 + i y_1, \\ z_2 &= x + s_2 y = x_2 + i y_2, \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

где  $s_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ ,  $s_2 = \alpha_2 + i\beta_2$  — корни уравнения (I.84);  $x_1 = x + \alpha_1 y$ ;  $y_1 = \beta_1 y$ ;  $x_2 = x + \alpha_2 y$ ;  $y_2 = \beta_2 y$ . При этом преобразовании заданный эллипс на плоскости  $z$  переходит в эллипсы на плоскостях  $z_1$  и  $z_2$  (рис. III.1).

Обозначим через  $S$ ,  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  соответственно области вне этих эллипсов. Определим функции, конформно отображающие области  $S$ ,  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  на внутренность единичного круга  $\gamma$ . Функция

$$z = \omega(\zeta) = \frac{a-b}{2} \zeta + \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{\zeta}, \quad (\text{III.2})$$

как известно (см. (I.42)), конформно отображает область  $S$  на внутренность единичного круга  $\gamma$ .

Координаты точек контура эллипса плоскости  $S$  согласно (III.2)

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = -b \sin \vartheta. \quad (\text{III.3})$$

При нашем преобразовании (III.1) точки контура  $L$  плоскости  $S$  перейдут в точки контура  $L_1$  плоскости  $S^{(1)}$ , т. е.

$$\begin{aligned} z_1 &= x + s_1 y = a \cos \vartheta - s_1 b \sin \vartheta = \frac{1}{2} \left[ a \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right) + i s_1 b \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \right] = \\ &= \frac{a + i s_1 b}{2} \sigma + \frac{a - i s_1 b}{2} \cdot \frac{1}{\sigma}. \end{aligned}$$

\* Решение этой задачи с помощью рядов дано С. Г. Лехницким [5], позднее другим методом — Г. Н. Савиным [2]; см. также Н. Д. Сопвай [1], С. Г. Лехницкий [7], С. Г. Лехницкий, В. В. Солдатов [1] и В. В. Солдатов [1].

Таким образом, функция, конформно отображающая область  $S^{(1)}$  на внутренность единичного круга  $\gamma$ ,

$$z_1 = \omega_1(\zeta) = \frac{a + is_1 b}{2} \zeta + \frac{a - is_1 b}{2} \cdot \frac{1}{\zeta}. \quad (\text{III.4})$$

Аналогично найдем функцию, конформно отображающую область  $S^{(2)}$  на внутренность единичного круга  $\gamma$ :

$$z_2 = \omega_2(\zeta) = \frac{a + is_2 b}{2} \zeta + \frac{a - is_2 b}{2} \cdot \frac{1}{\zeta}. \quad (\text{III.5})$$

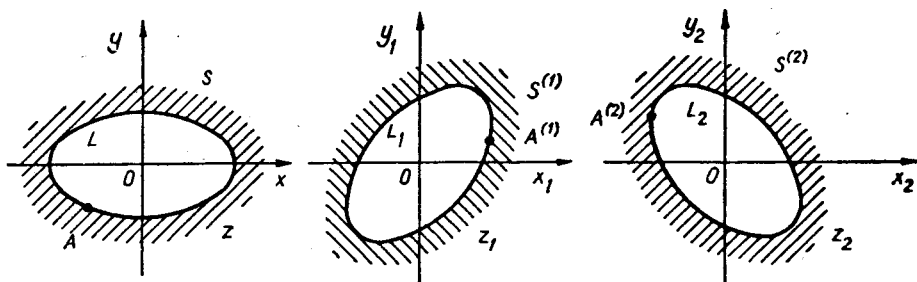


Рис. III.1.

Как следует из построения отображающих функций  $\omega_1(\zeta)$  и  $\omega_2(\zeta)$  (III.4) и (III.5) точкам  $A$ ,  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  контуров областей  $S$ ,  $S^{(1)}$ ,  $S^{(2)}$ , находящимся в аффинном соответствии (см. рис. III.1), соответствует одна точка на контуре единичного круга.

Допустим, что к контуру  $L$  области  $S$  (плоскость с эллиптическим отверстием) приложены внешние усилия  $X_n$ ,  $Y_n$ , главный вектор которых равен нулю. Предположим также, что и напряжения на бесконечности равны нулю\*. Согласно § 3 гл. I в этом случае функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  — голоморфны в своих областях  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  и контуре  $L$  области  $S$  удовлетворяют условиям (I.96):

$$2 \operatorname{Re} [\varphi(z_1) + \psi(z_2)] = - \int_0^s Y_n ds + C_1 = f_1, \quad (\text{III.6})$$

$$2 \operatorname{Re} [s_1 \varphi(z_1) + s_2 \psi(z_2)] = \int_0^s X_n ds + C_2 = f_2.$$

Подставим в уравнения (III.6) вместо  $z_1$  значение  $\omega_1(\zeta)$  (III.4), вместо  $z_2$  — значение  $\omega_2(\zeta)$  (III.5). Обозначив  $\Phi(\zeta) = \varphi[\omega_1(\zeta)]$  и  $\Psi(\zeta) = \psi[\omega_2(\zeta)]$ ,

\* Более общий случай будет рассмотрен ниже.

получим контурные условия для функций  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$ :

$$2 \operatorname{Re}[\Phi(\sigma) + \Psi(\sigma)] = f_1(\vartheta), \quad (III.7)$$

$$2 \operatorname{Re}[s_1\Phi(\sigma) + s_2\Psi(\sigma)] = f_2(\vartheta),$$

где  $f_1(\vartheta)$  и  $f_2(\vartheta)$  — значения правых частей (III.6), куда вместо  $x$  и  $y$  подставлены их значения из (III.3);  $\sigma = e^{i\vartheta}$  — значение  $\zeta$  на контуре единичного круга  $\gamma$ .

Для определения функций  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$ , голоморфных внутри единичного круга  $\gamma$  и удовлетворяющих на его контуре условию (III.7), применим формулу Шварца\*

$$F(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} U(\vartheta) \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0, \quad (III.8)$$

где  $U(\vartheta)$  — вещественная часть функции  $F(\zeta)$  на контуре единичного круга;  $\alpha_0$  — некоторая вещественная постоянная.

Помножим обе части уравнений (III.7) на  $\frac{1}{2\pi i} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma}$  и проинтегрируем по контуру  $\gamma$ . Согласно (III.8) получим\*\*

$$\Phi(\zeta) + \Psi(\zeta) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} f_1(\vartheta) \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0, \quad (III.9)$$

$$s_1\Phi(\zeta) + s_2\Psi(\zeta) = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} f_2(\vartheta) \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + i\beta_0.$$

Разрешив уравнения (III.9) относительно функций  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$ , получим

$$\Phi(\zeta) = \frac{i}{4\pi(s_1 - s_2)} \int_{\gamma} [s_2 f_1(\vartheta) - f_2(\vartheta)] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_1, \quad (III.10)$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{i}{4\pi(s_1 - s_2)} \int_{\gamma} [s_1 f_1(\vartheta) - f_2(\vartheta)] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_2,$$

где для сокращения обозначено:

$$\lambda_1 = i \frac{\beta_0 - \alpha_0 s_2}{s_1 - s_2}; \quad \lambda_2 = -i \frac{\beta_0 - \alpha_0 s_1}{s_1 - s_2}. \quad (III.11)$$

Возвращаясь к переменным  $z_1$  и  $z_2$ , т. е. подставляя в функцию  $\Phi(\zeta)$  вместо  $\zeta$  ее значение\*\*\*

$$\zeta_1 = \frac{z_1 - \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}}{a + i s_1 b} = \frac{a - i s_1 b}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \quad (III.12)$$

\* См. Н. И. Мухелишвили [1], стр. 284.

\*\* В формулах (III.9) переменная  $\zeta$  в функции  $\Phi$  должна пониматься, как  $\zeta_1$  (III.12), а в функции  $\Psi$  — как  $\zeta_2$  (III.13).

\*\*\* Функции (III.12) и (III.13) получаются обращением формул (III.4) и (III.5).

а в функцию  $\Psi(\zeta)$  — вместо  $\zeta$  ее значение

$$\zeta_2 = \frac{z_2 - \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}}{a + is_2 b} = \frac{a - is_2 b}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}}, \quad (\text{III.13})$$

найдем окончательно функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ . Поскольку постоянные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (III.10) не влияют на напряженное состояние, ими можно пренебречь.

Рассмотрим общий случай, когда главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру, не равен нулю и задано однородное\* напряженное состояние на бесконечности. Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  имеют вид (I.124), т. е.

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) &= A \ln z_1 + B^* z_1 + \varphi_0(z_1), \\ \psi(z_2) &= B \ln z_2 + (B'^* + iC'^*) z_2 + \psi_0(z_2), \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

где  $C^* = 0$ . Постоянные  $B^*$ ,  $C'^*$ ,  $B'^*$  (по заданным напряжениям на бесконечности) определяются по формулам (I.128), а постоянные  $A$  и  $B$  — из системы (I.116).

Подставив функции (III.14) в контурные условия (III.6), найдем

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[\varphi_0(z_1) + \psi_0(z_2)] &= f_1 - 2 \operatorname{Re}[A \ln z_1 + B^* z_1 + B \ln z_2 + (B'^* + iC'^*) z_2], \\ 2 \operatorname{Re}[s_1 \varphi_0(z_1) + s_2 \psi_0(z_2)] &= f_2 - 2 \operatorname{Re}[As_1 \ln z_1 + B^* s_1 z_1 + \\ &+ Bs_2 \ln z_2 + s_2 (B'^* + iC'^*) z_2]. \end{aligned} \quad (\text{III.15})$$

Очевидно, функции  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$  удовлетворяют тем же контурным условиям (III.6), но с измененными правыми частями. Обозначим правые части (III.15) через

$$\begin{aligned} f_1^0 &= f_1 - 2 \operatorname{Re}[A \ln z_1 + B^* z_1 + B \ln z_2 + (B'^* + iC'^*) z_2], \\ f_2^0 &= f_2 - 2 \operatorname{Re}[As_1 \ln z_1 + B^* s_1 z_1 + Bs_2 \ln z_2 + s_2 (B'^* + iC'^*) z_2] \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

и назовем их приведенными контурными условиями. Напомним, что в (III.16)  $z_1$  и  $z_2$  — точки контуров  $L^{(1)}$  и  $L^{(2)}$ . Таким образом, контурные условия для функций  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[\varphi_0(z_1) + \psi_0(z_2)] &= f_1^0, \\ 2 \operatorname{Re}[s_1 \varphi_0(z_1) + s_2 \psi_0(z_2)] &= f_2^0. \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

Из сравнения контурных условий (III.17) и (III.6) видим, что функции  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$  определяются из тех же формул (III.10), если заменить в их правых частях  $f_1$  и  $f_2$  на  $f_1^0$  и  $f_2^0$  (III.16).

\* Случай неоднородного напряженного состояния на бесконечности рассмотрены ниже.

Таким образом,

$$\Phi_0(\zeta) = \frac{i}{4\pi(s_1 - s_2)} \int_{\gamma} [s_2 f_1^0 - f_2^0] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_1, \quad (III.18)$$

$$\Psi_0(\zeta) = -\frac{i}{4\pi(s_1 - s_2)} \int_{\gamma} [s_1 f_1^0 - f_2^0] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_2.$$

Зная функции  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$  и переходя к переменным  $z_1$  (III.12) и  $z^2$  (III.13), находим функции  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$ . Подставив найденные значения этих функций в (III.14), получим окончательный вид искомых функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ . Компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  по найденным функциям  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  определяются\* из (I.90).

**Растяжение анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием, контур которого свободен от внешних усилий.** Пусть напряженное состояние на бесконечности представляет собой растяжение усилиями  $p$ , составляющими угол  $\alpha$  с осью  $Ox$  (рис. III.2). Следовательно, напряженное состояние в бесконечно удаленных частях плоскости

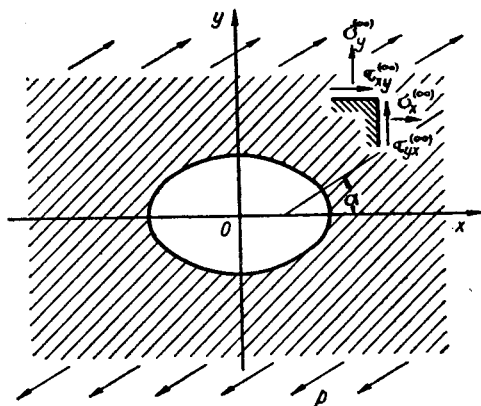


Рис. III.2.

$$\sigma_x^{(\infty)} = p \cos^2 \alpha; \quad \sigma_y^{(\infty)} = p \sin^2 \alpha; \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = p \sin \alpha \cos \alpha.$$

Определим правые части приведенных контурных условий (III.17). Поскольку контур отверстия свободен от внешних усилий, то  $x = y = 0$  и, следовательно, можно положить  $f_1 = f_2 = 0$  и  $A = B = 0$  (см. (I.64) и (I.116)). Подставляя вместо  $\sigma_x^{(\infty)}$ ,  $\sigma_y^{(\infty)}$  и  $\tau_{xy}^{(\infty)}$  их значения в формулы (I.128), получим

$$\begin{aligned} B^* &= p \frac{\cos^2 \alpha + (\alpha_2^2 + \beta_2^2) \sin^2 \alpha + \alpha_2 \sin 2\alpha}{2[\alpha_2 - \alpha_1]^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)}, \\ B'^* &= p \frac{[(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - 2\alpha_1 \alpha_2] \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha - \alpha_2 \sin 2\alpha}{2[(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]}, \\ C'^* &= p \left\{ \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \cos^2 \alpha + [\alpha_2 (\alpha_1^2 - \beta_1^2) - \alpha_1 (\alpha_2^2 - \beta_2^2)] \sin^2 \alpha}{2\beta_2 [(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{[(\alpha_1^2 - \beta_1^2) - (\alpha_2^2 - \beta_2^2)] \sin \alpha \cos \alpha}{2\beta_2 [(\alpha_2 - \alpha_1)^2 + (\beta_2^2 - \beta_1^2)]} \right\}. \end{aligned} \quad (III.19)$$

\* См. М. М. Фридман [3], где дан подробный обзор работ по теории упругости анизотропных сред.

Приведенные контурные условия (III.16) в данном случае

$$\begin{aligned} f_1^0 &= -2 \operatorname{Re} [B^* z_1 + (B'^* + iC'^*) z_2], \\ f_2^0 &= -2 \operatorname{Re} [B^* s_1 z_1 + s_2 (B'^* + iC'^*) z_2]. \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

Если подставить в (III.20) вместо  $z_1$  и  $z_2$  их значения через  $\sigma$  из (III.4) и (III.5) и обозначить

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{B^* (a + is_1 b) + (B'^* + iC'^*) (a + is_2 b)}{2}, \\ K_2 &= \frac{B^* (a - is_1 b) + (B'^* + iC'^*) (a - is_2 b)}{2}, \\ K_3 &= \frac{B^* s_1 (a + is_1 b) + s_2 (B'^* + iC'^*) (a + is_2 b)}{2}, \\ K_4 &= \frac{B^* s_1 (a - is_1 b) + s_2 (B'^* + iC'^*) (a - is_2 b)}{2}, \end{aligned}$$

то приведенные контурные условия (III.20)

$$\begin{aligned} f_1^0 &= -2 \operatorname{Re} \left[ K_1 \sigma + K_2 \frac{1}{\sigma} \right], \\ f_2^0 &= -2 \operatorname{Re} \left[ K_3 \sigma + K_4 \frac{1}{\sigma} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения  $f_1^0$  и  $f_2^0$  в (III.18) и замечая, что

$$\int_{\gamma} \sigma \frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi} \frac{d\sigma}{\sigma} = 4\pi i \xi \quad \text{и} \quad \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma + \xi}{\sigma - \xi} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \Phi_0(\xi) &= -\frac{(K_3 + \bar{K}_4) - s_2 (K_1 + \bar{K}_2)}{s_1 - s_2} \xi + \lambda_1, \\ \Psi_0(\xi) &= \frac{(K_3 + \bar{K}_4) - s_1 (K_1 + \bar{K}_2)}{s_1 - s_2} \xi + \lambda_2. \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Упрощая полученные выражения, найдем

$$\begin{aligned} \Phi_0(\xi) &= -\frac{\rho \xi}{4(s_1 - s_2)} [ib (s_2 \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha) - a (2s_2 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)] + \lambda_1, \\ \Psi_0(\xi) &= \frac{\rho \xi}{4(s_1 - s_2)} [ib (s_1 \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha) - a (2s_1 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)] + \lambda_2. \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$



Подставив в функцию  $\Phi_0(\zeta)$  (III.22) вместо  $\zeta$  ее значение из (III.12), а в функцию  $\Psi_0(\zeta)$  ее значение из (III.13), получим\*

$$\Phi_0(z_1) = -\frac{ip(a-is_1b)}{4(s_1-s_2)} \left\{ \frac{b(s_2 \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} + \frac{ia(2s_2 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right\}, \quad (\text{III.23})$$

$$\Psi_0(z_2) = \frac{ip(a-is_2b)}{4(s_1-s_2)} \left\{ \frac{6(s_1 \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} + \frac{ia(2s_1 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right\}.$$

В формулах (III.23) несущественные постоянные  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  (III.11) опущены.

Для того чтобы получить  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ , необходимо подставить найденные значения функций  $\Phi_0(z_1)$  и  $\Psi_0(z_2)$  из (III.23) в (III.14), положив в последних  $A=B=0$  (так как контур отверстия свободен от внешних усилий).

Итак, окончательно:

$$\varphi(z_1) = B^* z_1 + \Phi_0(z_1),$$

$$\psi(z_2) = (B'^* + iC'^*) z_2 + \Psi_0(z_2), \quad (\text{III.24})$$

где значения  $B^*$ ,  $B'^*$  и  $C'^*$  даны формулами (III.19). Подставляя найденные функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  в формулы (I.90) и упрощая, получим формулы для компонентов напряжений

$$\sigma_x = p \cos^2 \alpha + 2 \operatorname{Re} [s_1^2 \Phi_0'(z_1) + s_2^2 \Psi_0'(z_2)],$$

$$\sigma_y = p \sin^2 \alpha + 2 \operatorname{Re} [\Phi_0'(z_1) + \Psi_0'(z_2)], \quad (\text{III.25})$$

$$\tau_{xy} = p \sin \alpha \cos \alpha - 2 \operatorname{Re} [s_1 \Phi_0'(z_1) + s_2 \Psi_0'(z_2)],$$

где  $\Phi_0(z_1)$  и  $\Psi_0(z_2)$  — функции (III.23). Заменив в выражениях (III.23) и (III.25)  $p$  на  $-p$ , получим решение той же задачи для случая, когда пластинка на бесконечности сжата усилиями  $p$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи.

*Растяжение пластинки вдоль оси  $Ox$*  (см. рис. III.2). Положив в формулах (III.23)  $\alpha=0$ , получим

$$\Phi_0(z_1) = -\frac{ipb}{2(s_1-s_2)} \cdot \frac{a-is_1b}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}},$$

$$\Psi_0(z_2) = \frac{ipb}{2(s_1-s_2)} \cdot \frac{a-is_2b}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}}. \quad (\text{III.26})$$

Компоненты напряжений определим по формулам (III.25), положив в них  $\alpha=0$ .

\* Решение дано Г. Н. Савиним [2]. Для двухосного напряженного состояния, если  $N_1$  и  $N_2$  — главные напряжения на бесконечности, а  $\alpha_1$  — угол, который главная ось, соответствующая  $N_1$ , составляет с осью  $Ox$ , следует наложить два решения (III.23): одно — при  $p=N_1$  и  $\alpha=\alpha_1$ , а другое — при  $p=N_2$  и  $\alpha=\alpha_1+90^\circ$ . Эта же задача иным путем рассматривалась С. Г. Лехницким [5, 16].

Растяжение пластинки вдоль оси  $Oy$  (см. рис. III.2). Положив в формулах (III.23)  $\alpha = \pi/2$ , получим

$$\begin{aligned}\varphi_0(z_1) &= \frac{aps_2}{2(s_1 - s_2)} \cdot \frac{a - is_1b}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2b^2)}}, \\ \psi_0(z_2) &= -\frac{aps_1}{2(s_1 - s_2)} \cdot \frac{a - is_2b}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2b^2)}}.\end{aligned}\quad (\text{III.27})$$

Формулы для  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  выписывать не будем, так как они весьма просто получаются из формул (III.25), если положить в них  $\alpha = \pi/2$ . Налагая решения (III.26) и (III.27) одно на другое, получаем решение для случая всестороннего растяжения (сжатия) пластинки на бесконечности с интенсивностью усилий  $p$ .

Щель длиной  $2a$  (или  $2b$ ) вдоль оси  $Ox$  (или  $Oy$ ). Положив в (III.26)  $b=0$ , получим

$$\varphi_0(z_1) = 0, \quad \psi_0(z_2) = 0, \quad (\text{III.28})$$

т. е. прямолинейная щель в анизотропной среде, сделанная в направлении растяжения, не влияет на напряжения в этой среде. То же можно заключить из (III.27), положив  $a=0$ .

Рассмотрим щель длиной  $2a$  (или  $2b$ ), расположенную перпендикулярно к направлению растягивающих усилий на бесконечности.

Положив в функциях (III.27)  $a=0$ , получим функции для случая растяжения пластинки вдоль оси  $Oy$  со щелью длиной  $2a$ , расположенной по оси  $Ox$ :

$$\begin{aligned}\varphi_0(z_1) &= \frac{a^2ps_2}{2(s_1 - s_2)} \cdot \frac{1}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2}}, \\ \psi_0(z_2) &= -\frac{a^2ps_1}{2(s_1 - s_2)} \cdot \frac{1}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2}}.\end{aligned}\quad (\text{III.29})$$

Положив в формулах (III.25)  $\alpha = \pi/2$  и подставив в них найденные значения функций  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  (III.29), получим компоненты напряжений по сечению  $y=0$  при  $|x| > a$

$$\sigma_x = -\frac{a^2p}{\sqrt{x^2 - a^2}(x + \sqrt{x^2 - a^2})} \operatorname{Re}[s_1s_2], \quad (\text{III.30})$$

$$\sigma_y = \frac{a^2p}{\sqrt{x^2 - a^2}(x + \sqrt{x^2 - a^2})} + p,$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Интересно отметить, как это следует из (III.30), что  $\sigma_y$  не зависит от упругих постоянных материала.

Если в той же пластинке сделать щель длиной  $2b$  вдоль оси  $Oy$  и растягивать ее вдоль оси  $Ox$ , то компоненты напряжений при  $|y| > b$

$$\sigma_x = p + \frac{pb^2}{\sqrt{y^2 - b^2}(y + \sqrt{y^2 - b^2})}, \quad (III.31)$$

$$\sigma_y = - \frac{pb^2}{\sqrt{y^2 - b^2}(y + \sqrt{y^2 - b^2})} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 s_2} \right],$$

$$\tau_{xy} = 0.$$

Из (III.31) следует, что напряжения  $\sigma_x$  не зависят от упругих постоянных материала пластинки.

Напряжения же  $\sigma_y$  (III.31) не равны соответствующим напряжениям  $\sigma_x$  (III.30). При сравнении в обеих формулах надо положить  $a=b$ . Эти напряжения будут равны только в случае изотропной среды, когда уравнение (I.82) обращается в бигармоническое, корни характеристического уравнения которого  $s_1$  и  $s_2$  равны  $i$ :

$$\operatorname{Re} [s_1 s_2] = \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 s_2} \right] = -1.$$

Для того чтобы иметь представление о тех изменениях в распределении напряжений возле отверстия, которые вызваны анизотропией среды, достаточно изучить напряженное состояние по контуру отверстия и возле него для различных анизотропных материалов по некоторым сечениям.

Рассмотрим растяжение пластинки вдоль оси  $Ox$ . Дифференцируя функции  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$  (III.26), легко найдем \*

$$\varphi_0'(z_1) = - \frac{i}{2(s_1 - s_2)} \cdot \frac{pb}{a + is_1 b} \left[ 1 - \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right], \quad (III.32)$$

$$\psi_0'(z_2) = \frac{i}{2(s_1 - s_2)} \cdot \frac{pb}{a + is_2 b} \left[ 1 - \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right].$$

Вычислим напряжения возле эллиптического отверстия по некоторым сечениям, считая, что оси координат  $xOy$  совпадают с прямыми пересечения плоскостей упругой симметрии материала. Подставляя функции (III.32) в первую формулу (III.27), получаем \*\* напряжения по сечению  $x=0$

$$\sigma_x = p + \frac{pb}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ \frac{\beta_1^2}{a - \beta_1 b} \left( 1 - \frac{\beta_1 y}{\sqrt{a^2 + \beta_1^2 (y^2 - b^2)}} \right) - \frac{\beta_2^2}{a - \beta_2 b} \left( 1 - \frac{\beta_2 y}{\sqrt{a^2 + \beta_2^2 (y^2 - b^2)}} \right) \right\}. \quad (III.33)$$

\* См. С. Г. Лехницкий [6].

\*\* Как будет показано ниже, для всех рассматриваемых материалов  $s_1 = i\beta_1$  и  $s_2 = -i\beta_2$ . Эти значения и приняты при выводе формулы (III.33).

Положив в формуле (III.33)  $y = b$ , получим

$$\sigma_x = \rho \left[ 1 + (\beta_1 + \beta_2) \frac{b}{a} \right]. \quad (\text{III.34})$$

Если среда изотропна, то  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  и из формулы (III.34) получаем формулу (II.65):

$$\sigma_x = \rho \left( 1 + 2 \frac{b}{a} \right).$$

Определим  $\sigma_y$  по сечению  $y = 0$ . Подставляя в функции  $\Phi'_0(z_1)$  и  $\Phi'_0(z_2)$  (III.32)  $z_1 = z_2 = x$ , из второй формулы (I.53) найдем

$$\begin{aligned} \sigma_y = & - \frac{\rho b}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ \frac{1}{a - \beta_1 b} \times \right. \\ & \times \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2 + \beta_1^2 b^2}} \right) - \frac{1}{a - \beta_2 b} \times \\ & \left. \times \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2 + \beta_2^2 b^2}} \right) \right\}; \quad (\text{III.35}) \end{aligned}$$

при  $x = a$

$$\sigma_y = - \rho \frac{1}{\beta_1 \beta_2}. \quad (\text{III.36})$$

Полагая в (III.36)  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , получим в случае изотропной среды (см. формулу (II.66))  $\sigma_y = - \rho$ .

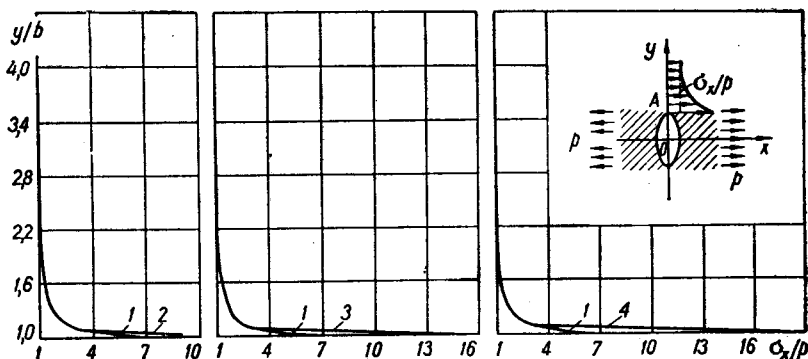


Рис. III.4

На рис. III.3 и III.4 представлены графики напряжений  $\sigma_x$  по сечению  $x = 0$ , подсчитанных по формуле (III.33) соответственно при  $a/b = 3$  и  $a/b = 1/3$  для различных анизотропных материалов:

1) для дуба, упругие постоянные которого\*

$$a_{11} = \frac{1}{E_x} = \frac{1}{582} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}, \quad a_{22} = \frac{1}{E_y} = \frac{1}{219} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81},$$

$$a_{12} = -\frac{\nu_x}{E_x} = -\frac{1}{1800} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{xy}} = \frac{1}{132} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81},$$

по этим значениям из уравнения (1.84) находим

$$s_1 = 1,679i, \quad s_2 = 0,971i, \quad s_3 = \bar{s}_1, \quad s_4 = \bar{s}_2;$$

2) для березы

$$a_{11} = \frac{1}{1670} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}, \quad a_{12} = -\frac{1}{3400} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}, \quad a_{22} = \frac{1}{113} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}, \quad a_{66} = \frac{1}{120} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81},$$

$$s_1 = 3,416i, \quad s_2 = 1,126i;$$

3) для ели

$$a_{11} = \frac{1}{1700} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}, \quad a_{12} = -\frac{1}{4600} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}, \quad a_{22} = \frac{1}{83} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}, \quad a_{66} = \frac{1}{64} \cdot \frac{10^{-6}}{0,81},$$

$$s_1 = 5,0007i, \quad s_2 = 0,905i.$$

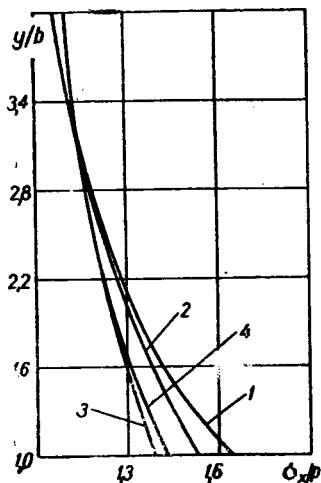


Рис. III.5

На рис. III.3—III.10 кривая 1 соответствует изотропной пластинке, 2 — дубовой, 3 — березовой и кривая 4 — еловой.

На рис. III.5 и III.6 представлены графики напряжений  $\sigma_x$  по сечению  $x=0$ , подсчитанные по формуле

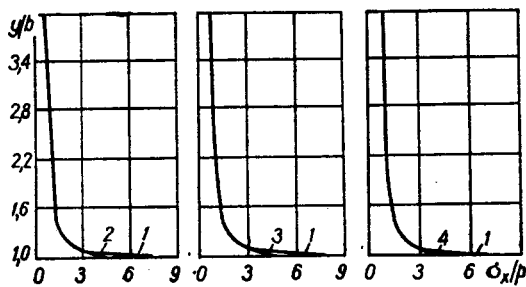


Рис. III.6.

(III.33) для тех же анизотропных материалов, что и на рис. III.3 и III.4, но для случая, когда ось  $Ox$  совпадает с направлением, соответствующим меньшему модулю упругости. Корни уравнения (1.83) при этом изменяются, так как произойдет замена одних упругих постоянных другими. Например:

для дуба

$$a_{22} = \frac{1}{E_y} = \frac{1}{582} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_y}{E_y} = -\frac{1}{1800} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}, \quad a_{11} = \frac{1}{E_x} = \frac{1}{219} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81};$$

$$a_{66} = \frac{1}{G_{xy}} = \frac{1}{132} \cdot \frac{10^{-6}}{9,81}, \quad s_1 = 1,030i, \quad s_2 = 0,595i;$$

\* Приведенные постоянные имеют размерность  $m^2/n$ .

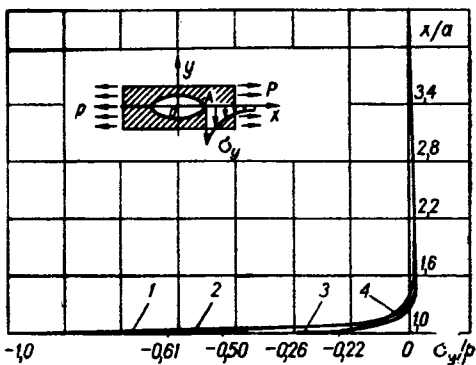


Рис. III.7

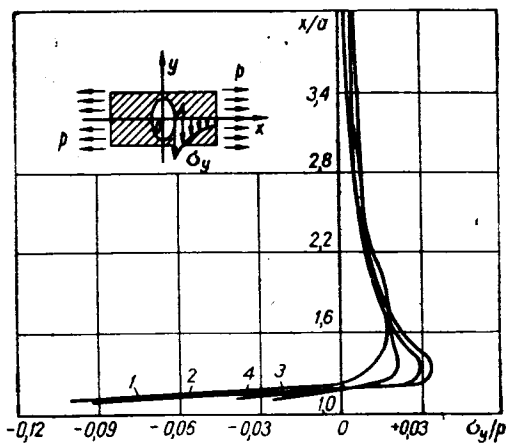


Рис. III.8

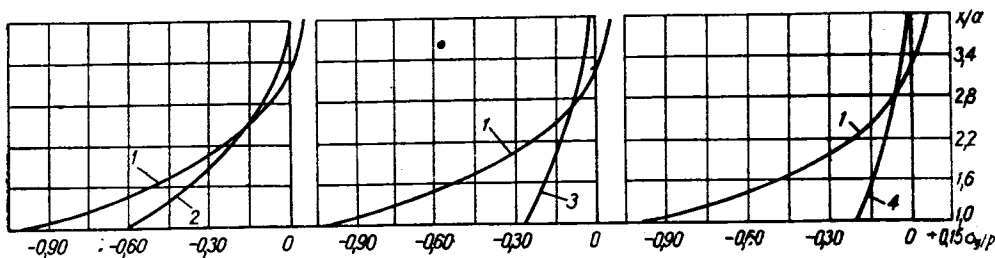


Рис. III.9

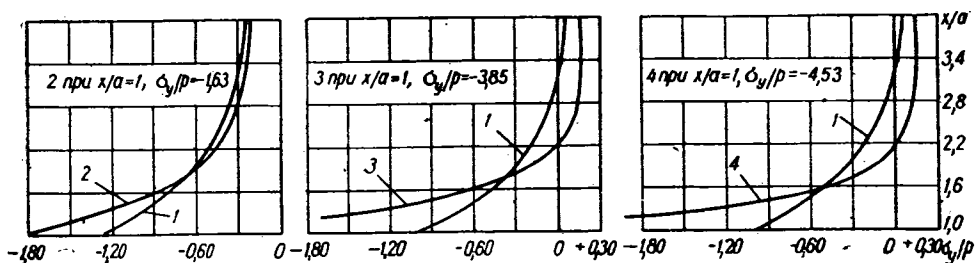


Рис. III.10

Таблица III.1

Материал	Растяжение			
	вдоль большого модуля		вдоль меньшего модуля	
	$a/b=3$	$a/b=1/3$	$a/b=3$	$a/b=1/3$
Дуб . . . . .	1,883	8,951	1,542	5,875
Береза . . . . .	2,514	14,626	1,394	4,546
Сосна . . . . .	2,522	14,698	1,395	4,558
Ель . . . . .	2,969	18,718	1,435	4,916
Изотропная среда . . . . .	1,667	7,000	1,667	7,000

для березы

$$s_1 = 0,889i, \quad s_2 = 0,293i;$$

для ели

$$s_1 = 1,105i, \quad s_2 = 0,200i.$$

На рис. III.7 и III.8 соответственно представлены графики напряжений  $\sigma_y$  по сечению  $y=0$ , подсчитанные по формуле (III.35) соответственно при  $a/b=3$  и  $a/b=1/3$  для тех же анизотропных материалов.

На рис. III.9 и III.10 показаны графики тех же напряжений  $\sigma_y$ , что и на рис. III.7 и III.8, но для осей, повернутых на угол  $90^\circ$  относительно положения в первом случае.

Из рис. III.3—III.10 видим, что концентрация напряжений возле эллиптического отверстия, так же как и в случае изотропной среды, имеет местный характер. Анизотропия среды вносит существенные поправки в величины напряжений в анизотропном материале лишь в небольшой области возле отверстия. По мере удаления от отверстия картина возмущения напряженного состояния исчезает\*.

В табл. III.1 приведены значения  $(\sigma_x/\rho)_A$  в точке  $A$  (см. рис. III.3 и III.4) возле эллиптического отверстия при  $a/b=3$  и  $a/b=1/3$  для различных анизотропных материалов. Подсчитывать напряжения возле эллиптического отверстия удобнее всего по конфокальным эллипсам

$$x = a\rho \cos \vartheta, \quad y = b\rho \sin \vartheta \quad (\rho e^{i\vartheta} = \zeta, \quad \rho \geq 1), \quad (\text{III.37})$$

перейдя\*\* к новой системе компонентов напряжений:  $\sigma_\vartheta$  — нормальное напряжение на площадках, перпендикулярных к рассматриваемым эллипсам,  $\sigma_\rho$  — нормальное напряжение на площадке, касательной к эллипсу, и  $\tau_{\rho\vartheta}$  — касательное напряжение на этих площадках. Формулы компонентов напряжений при растяжении вдоль оси  $Ox$  по контуру эллиптического отверстия ( $\rho=1$ )

$$\sigma_\vartheta = \rho \left\{ \frac{\sin^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta + k^2 \cos^2 \vartheta} + \frac{k}{\sin^2 \vartheta + k^2 \cos^2 \vartheta} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{-i\vartheta}}{s_1 - s_2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \frac{(s_1 \sin \vartheta + k \cos \vartheta)^2}{\sin \vartheta - s_1 k \cos \vartheta} - \frac{(s_2 \sin \vartheta + k \cos \vartheta)^2}{\sin \vartheta - s_2 k \cos \vartheta} \right) \right] \right\}, \quad (\text{III.38})$$

где  $k = b/a$ . Полагая в (III.38)  $s_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ ,  $s_2 = \alpha_2 + i\beta_2$  и отделяя действительную часть, найдем формулу для  $\sigma_\vartheta$  по контуру эллиптического отверстия. При  $k = b/a = 1$  получаем из (III.38) напряжения по контуру кругового отверстия.

Полагая в (III.38)  $s_1 = s_2 = 1$ , после предельного перехода получаем известную формулу (II.64) для  $\sigma_\vartheta$  в случае изотропной среды:

$$\sigma_\vartheta = \rho \frac{\sin^2 \vartheta + 2k \sin^2 \vartheta - k^2 \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta + k^2 \cos^2 \vartheta}. \quad (\text{III.39})$$

\* См. А. В. Степанов [1].

\*\* См. С. Г. Лехницкий [1].

Так как в общем случае анизотропии, т. е. при  $s_1 = \alpha_1 + i\beta_1$  и  $s_2 = \alpha_2 + i\beta_2$  формула (III.38) чрезвычайно громоздка, приведем формулы  $\sigma_\phi$  для наиболее характерных точек контура. Напряжения  $\sigma_\phi$  в точках  $x = \pm a$  и  $y = 0$ , т. е.  $\phi = 0$  и  $\phi = \pi$ , получим из (III.38) в виде

$$\sigma_\phi = p \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{s_1 s_2} \right] = p \frac{\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}.$$

Как видим, напряжение в этих точках не зависит от  $k = b/a$ , т. е. оно для всех эллипсов одинаково и зависит только от упругих характеристик анизотропного материала.

Если среда изотропна, то  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , и мы получаем известную формулу  $\sigma_\phi = -p$  (см. (II.66)). Напряжения в точках  $y = \pm b$ ,  $x = 0$ , т. е. при  $\phi = \pm \pi/2$  получим из (III.38):

$$\sigma_\phi = p \left[ 1 + \frac{b}{a} (\beta_1 + \beta_2) \right].$$

В случае изотропной среды  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ , и мы получаем известную формулу  $\sigma_\phi = p (1 + 2b/a)$  (см. (II.65)).

При растяжении изотропной пластинки вдоль оси  $Ox$  наибольшие напряжения  $\sigma_\phi$  на контуре эллиптического отверстия имеют место в точках  $\phi = \pm \pi/2$ . Если среда анизотропна, то это заключение, вообще говоря, неверно. В самом деле, даже в простейшем случае анизотропии материала, а именно при наличии в материале трех плоскостей упругой симметрии и при условии, что оси координат совмещены с прямыми пересечения этих плоскостей упругой симметрии, напряжения  $\sigma_\phi$  возле эллиптического (в частности, кругового) отверстия при  $\phi = 0$  и  $\phi = \pi$  могут оказаться по абсолютной величине значительно больше напряжений  $\sigma_\phi$  при  $\phi = \pm \pi/2$ . Это будет иметь место, например, при растяжении в направлении меньшего модуля  $E_1$  еловой пластинки, ослабленной круговым отверстием, для которой  $s_1 = 1,105i$  и  $s_2 = 0,200i$ . В этом случае  $(\sigma_\phi)_{\phi=0} \approx -4,5p$ , тогда как  $(\sigma_\phi)_{\phi=\pm\pi/2} = 2,3p$ . То же самое будем иметь и в случае растяжения березовой пластинки, ослабленной также круговым отверстием, а именно  $(\sigma_\phi)_{\phi=0} = -3,85p$ , тогда как  $(\sigma_\phi)_{\phi=\pm\pi/2} = 2,18p$ .

Для некоторых анизотропных материалов определены напряжения  $\sigma_\phi$  по контуру эллиптического отверстия при  $a/b = 3$  и  $a/b = 1/3$  (полуось  $a$  лежит на оси  $Ox$ , полуось  $b$  — на оси  $Oy$ ) для двух случаев:

- 1) когда за оси координат  $Ox$  и  $Oy$  взяты прямые пересечения плоскостей упругой симметрии анизотропного материала;
- 2) когда оси координат  $Ox$  и  $Oy$  повернуты по отношению к их положению в первом случае на угол  $\delta = 30^\circ$ .

В табл. III.2 и III.3 приведенные значения напряжений  $\sigma_\phi/p$  по контуру эллиптического отверстия соответственно при  $a/b = 3$  и  $a/b = 1/3$  относятся к фанере и ели.



Упругие постоянные фанеры I в первом случае ( $\delta=0$ ):

$$a_{11} = \frac{1}{1,4} \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{12} = -\frac{0,46}{1,4} \cdot \frac{10^{-9}}{9,81},$$

$$a_{22} = \frac{12}{1,4} \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{66} = \frac{11,667}{1,4} \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{16} = a_{26} = 0;$$

корни уравнения (1.84)

$$s_1 = 3,08i, \quad s_2 = 1,12i, \quad s_3 = \bar{s}_1, \quad s_4 = \bar{s}_2;$$

ось  $Ox$  направлена вдоль большего модуля  $E_1 : E_2 = 12$ . При повороте координатных осей на некоторый угол значения упругих постоянных  $a_{ik}$  изменяются. В новой системе координат значения  $a'_{ik}$  определяются по известным формулам преобразования упругих

Таблица III.2

$\phi^\circ$	Изотропная среда	Анизотропная среда					
		Фанера I ( $E_1/E_2=12$ )		Фанера II ( $E_1/E_2 \approx 2,1$ )		Ель ( $E_1/E_2 \approx 20,5$ )	
		$\delta=0$	$\delta=30^\circ$	$\delta=0$	$\delta=30^\circ$	$\delta=0$	$\delta=30^\circ$
0	-1,000	-0,290	-0,344	-0,689	-0,919	-0,221	-0,327
15	-0,077	-0,162	-1,132	0,018	-0,763	-0,114	-1,287
30	1,000	0,282	0,933	0,523	1,482	0,163	1,098
45	1,400	0,957	2,215	0,899	2,159	0,664	2,519
60	1,571	1,667	2,148	1,553	1,835	1,464	2,148
75	1,646	2,200	—	2,184	—	2,447	—
90	1,667	2,400	1,680	2,463	1,432	2,969	1,556
120	1,571	1,667	1,230	1,553	1,214	1,464	1,166
150	1,000	-0,282	0,672	0,523	1,077	0,163	0,720
180	-1,000	0,290	-0,344	-0,689	-0,919	-0,221	-0,327

Таблица III.3

$\phi^\circ$	Изотропная среда	Анизотропная среда					
		Фанера I ( $E_1/E_2=12$ )		Фанера II ( $E_1/E_2 \approx 2,1$ )		Ель ( $E_1/E_2 \approx 20,5$ )	
		$\delta=0$	$\delta=30^\circ$	$\delta=0$	$\delta=30^\circ$	$\delta=0$	$\delta=30^\circ$
0	-1,000	-0,290	-0,344	-0,689	-0,919	-0,221	-0,327
30	-0,714	-0,248	-1,493	-0,354	-0,833	-0,175	-1,200
60	1,000	-0,093	-1,214	-0,569	-0,224	0,078	-1,455
70	—	—	—	—	1,533	—	—
75	3,859	1,449	3,999	1,749	5,080	0,991	2,609
80	5,251	3,280	10,429	3,068	10,835	2,274	14,499
85	6,484	8,525	10,909	7,033	8,007	6,836	10,679
90	7,000	13,601	7,120	14,171	4,888	18,720	6,001
120	1,000	0,093	0,945	0,569	2,025	0,078	1,062
150	-0,714	-0,248	0,114	-0,354	-0,644	-0,175	0,147
180	-1,000	-0,290	-0,344	-0,689	-0,919	-0,221	-0,327

постоянных анизотропных тел\*. Для этой же фанеры упругие постоянные во втором случае ( $\delta=30^\circ$ ):

$$a'_{11} = 2,376 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a'_{22} = 6,305 \frac{10^{-9}}{9,81},$$

$$a'_{12} = 0,0267 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a'_{16} = 3,050 \frac{10^{-9}}{9,81},$$

$$a'_{26} = 3,746 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a'_{66} = 9,541 \frac{10^{-9}}{9,81},$$

$$s_1 = 1,1775 + i0,9875, \quad s_3 = \bar{s}_1,$$

$$s_2 = 0,1075 + i1,0519, \quad s_4 = \bar{s}_2.$$

Упругие постоянные фанеры II в первом случае:

$$a_{11} = \frac{1}{1,6} \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{12} = -\frac{0,05}{1,6} \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{22} = \frac{1}{0,765} \cdot \frac{10^{-9}}{9,81},$$

$$a_{66} = \frac{1}{0,097} \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{26} = a_{16} = 0;$$

$$s_1 = 4,03i, \quad s_2 = 0,36i, \quad s_3 = \bar{s}_1, \quad s_4 = \bar{s}_2;$$

во втором случае:

$$a'_{11} = 2,354 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a'_{22} = 2,695 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a'_{66} = 4,072 \frac{10^{-9}}{9,81},$$

$$a'_{12} = -1,590 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a'_{16} = 2,092 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a'_{26} = -1,530 \frac{10^{-9}}{9,81},$$

$$s_1 = 1,373 + i0,842, \quad s_3 = \bar{s}_1, \quad s_4 = \bar{s}_2, \quad s_2 = 0,483 + i0,454.$$

Упругие постоянные ели в первом случае

$$E_1 : E_2 = 20,5,$$

$$a_{11} = 0,588 \frac{10^{-7}}{9,81}, \quad a_{22} = 12,040 \frac{10^{-7}}{9,81},$$

$$a_{12} = -0,217 \frac{10^{-7}}{9,81}, \quad a_{66} = 15,630 \frac{10^{-7}}{9,81},$$

$$a_{16} = a_{26} = 0, \quad s_2 = 5,001i, \quad s_2 = 0,905i, \quad s_3 = \bar{s}_1, \quad s_4 = \bar{s}_2;$$

во втором случае:

$$a'_{11} = 3,932 \frac{10^{-7}}{9,81}, \quad a'_{22} = 9,658 \frac{10^{-7}}{9,81}, \quad a'_{66} = 13,704 \frac{10^{-7}}{9,81},$$

$$a'_{12} = -0,697 \frac{10^{-7}}{9,81}, \quad a'_{16} = 5,509 \frac{10^{-7}}{9,81}, \quad a'_{26} = 4,397 \frac{10^{-7}}{9,81},$$

$$s_1 = 1,483 + i0,718, \quad s_2 = -0,083 + i0,949, \quad s_3 = \bar{s}_1, \quad s_4 = \bar{s}_2.$$

\* См. С. Г. Лехницкий [1].

Данные табл. III.2 и III.3 показывают, что когда оси координат  $Ox$  и  $Oy$  совпадают с прямыми пересечения плоскостей упругой симметрии материала, наибольшее и наименьшее напряжения при растяжении вдоль оси  $Ox$  будут в тех же точках  $\vartheta = \pi/2$  и  $\vartheta = 0$ , что и для изотропной среды. Однако утверждать, что наибольшее значение по абсолютной величине  $\sigma_\vartheta$  будет при  $\vartheta = \pi/2$ , а наименьшее — при  $\vartheta = 0$ , уже нельзя. Необходимо вычислить и сравнить значения  $\sigma_\vartheta$  в этих двух точках.

Эллиптическое отверстие, край которого подвержен равномерному касательному усилию. В этом случае

$$X_n = T \cos(t, x) = T \frac{dx}{ds}, \quad Y_n = T \cos(t, y) = T \frac{dy}{ds}.$$

Следовательно, из (III.6)

$$f_1 = - \int_0^s Y_n ds + C_1 = -Ty + \text{const},$$

$$f_2 = \int_0^s X_n ds + C_2 = Tx + \text{const}.$$

Правые части контурных условий (III.7), учитывая (III.3), получим в виде

$$f_1(\vartheta) = Tb \sin \vartheta = -i \frac{Tb}{2} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right),$$

$$f_2(\vartheta) = Ta \cos \vartheta = \frac{Ta}{2} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right).$$

Из уравнений (III.10), принимая во внимание, что

$$\int_{\gamma} \sigma \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = 4\pi i \zeta, \quad \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = 0,$$

найдем функции

$$\Phi(\zeta) = \frac{T(a + is_2 b)}{2(s_1 - s_2)} \zeta,$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{T(a + is_1 b)}{2(s_1 - s_2)} \zeta,$$

или в переменных  $z_1$  и  $z_2$ :

$$\varphi(z_1) = \frac{T(a + is_2 b)}{2(s_1 - s_2)} \cdot \frac{a - is_1 b}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}},$$

$$\psi(z_2) = -\frac{T(a + is_1 b)}{2(s_1 - s_2)} \cdot \frac{a - is_2 b}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}}. \quad (\text{III.40})$$

Если в формулах (III.40) положить  $a=b=R$  и обозначить  $M=$   
 $= -2\pi R^2 T$ , а потом перейти к пределу так, чтобы величина момента  
 $M$  не изменилась, когда радиус отверстия  $R$  устремить к нулю, то по-  
 лучим формулы

$$\varphi(z_1) = -\frac{M(1+is_2)(1-is_1)}{8\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{1}{z_1},$$

$$\psi(z_2) = \frac{M(1+is_1)(1-is_2)}{8\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{1}{z_2^2},$$

которые выражают собой действие сосредоточенной пары с моментом  
 $M$ , приложенной в начале координат неограниченной анизотропной пла-  
 стинки.

**Эллиптическое отверстие, край которого подвержен равномерному  
 давлению  $p$ .** В этом случае

$$X_n = -p \cos(n, x) = -p \frac{dy}{ds}, \quad Y_n = -p \cos(n, y) = p \frac{dx}{ds}.$$

Следовательно, из (III.7) для данной задачи

$$f_1(\vartheta) = -pa \cos \vartheta + \text{const} = -\frac{pa}{2} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right) + \text{const},$$

$$f_2(\vartheta) = pb \sin \vartheta + \text{const} = -i \frac{pb}{2} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right) + \text{const}.$$

Подставив найденные значения  $f_1(\vartheta)$  и  $f_2(\vartheta)$  в уравнения (III.10),  
 найдем

$$\Phi(\zeta) = -\frac{ip(b+ias_2)}{2(s_1-s_2)} \zeta, \quad \Psi(\zeta) = \frac{ip(b+ias_1)}{2(s_1-s_2)} \zeta.$$

Переходя к переменным  $z_1$  и  $z_2$ , получим

$$\varphi(z_1) = -\frac{ip(b+ias_2)}{2(s_1-s_2)} \cdot \frac{a-is_1b}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}}, \quad (III.41)$$

$$\psi(z_2) = \frac{ip(b+ias_1)}{2(s_1-s_2)} \cdot \frac{a-is_2b}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}}.$$

**Прямолинейная щель, край которой подвержен равномерному дав-  
 лению  $p$ .** Решение получим из предыдущей задачи, положив в функциях  
 $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (III.41)  $b=0$  или  $a=0$ . В первом случае будем иметь  
 щель длиной  $2a$  вдоль действительной оси, а во втором — щель длиной  
 $2b$  по мнимой оси.

Функции для щели длиной  $2a$ , лежащей по действительной оси,

$$\varphi(z_1) = \frac{a^2 s_2 p}{2(s_1-s_2)} \cdot \frac{1}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - a^2}},$$

$$\psi(z_2) = -\frac{a^2 s_2 p}{2(s_1-s_2)} \cdot \frac{1}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - a^2}}. \quad (III.42)$$

Сравнивая функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (III.42) с функциями  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$  (III.29), видим их полное совпадение.

Общее решение задачи об упругом равновесии анизотропной плоскости с разрезами, расположенными вдоль прямой, рассмотрено С. Г. Михлиным [1] и другим путем П. А. Загубиженко [1], который рассмотрел также случай сжатия анизотропной плоскости с одной прямолинейной щелью\*.

Эллиптическое отверстие, часть края которого подвержена нормальному давлению.

**Случай сосредоточенных сил.** Допустим, что равномерное давление  $p$  (рис. III.11) приложено только к участку  $AB$  контура отверстия, а остальная часть контура  $BCA$  свободна от внешних усилий. Напряжения на бесконечности по-прежнему считаем равными нулю.

Поскольку главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру эллиптического отверстия, не равен нулю, в формулах (III.10) вместо  $f_1$  и  $f_2$  следует брать приведенные контурные условия  $f_1^0$  и  $f_2^0$  (III.16).

Определим сначала  $f_1$  и  $f_2$ . Возьмем точку  $A$  за начало отсчета и положим в ней  $f_1 = f_2 = 0$ . Как и в предыдущем примере на участке  $AB$

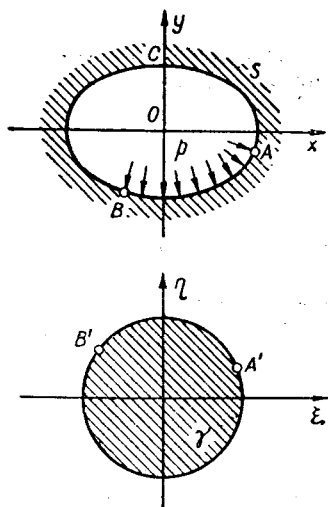


Рис. III.11.

$$f_1 = -pa \cos \vartheta + C_1 = -\frac{pa}{2} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right) + C_1,$$

$$f_2 = pb \sin \vartheta + C_2 = -i \frac{pb}{2} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right) + C_2.$$

Точкам  $A$  и  $B$  на плоскости  $S$  будут соответствовать точки  $A'$  и  $B'$ , т. е.  $\sigma_1 = e^{i\vartheta_1}$ , и  $\sigma_2 = e^{i\vartheta_2}$  на контуре единичного круга  $\gamma$ .

Относительно постоянных  $C_1$  и  $C_2$  нельзя в данном случае делать произвольных допущений (т. е. полагать  $C_1 = C_2 = 0$ ), так как функции  $f_1$  и  $f_2$  должны быть непрерывными.

Согласно допущению в точке  $A$   $f_1 = f_2 = 0$ , т. е.  $pa \cos \vartheta_1 + C_1 = 0$ ;  $pb \sin \vartheta_1 + C_2 = 0$  или  $C_1 = pa \cos \vartheta_1$ ;  $C_2 = -pb \sin \vartheta_1$ . Следовательно, на участке  $AB$  функции

$$f_1 = -pa (\cos \vartheta - \cos \vartheta_1) = -\frac{pa}{2} \left[ \sigma + \frac{1}{\sigma} - \left( \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} \right) \right],$$

$$f_2 = pb (\sin \vartheta - \sin \vartheta_1) = -i \frac{pb}{2} \left[ \sigma - \frac{1}{\sigma} - \left( \sigma_1 - \frac{1}{\sigma_1} \right) \right];$$

\* См. также Г. П. Черепанов [1] и И. А. Прусов [1].

на участке  $BCA$

$$f_1 = -\rho a (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1) = -\frac{\rho a}{2} \left[ \left( \sigma_2 + \frac{1}{\sigma_2} \right) - \left( \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} \right) \right],$$

$$f_2 = \rho b (\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1) = -i \frac{\rho b}{2} \left[ \left( \sigma_2 - \frac{1}{\sigma_2} \right) - \left( \sigma_1 - \frac{1}{\sigma_1} \right) \right].$$

Обойдя по контуру отверстия один раз в положительном направлении, найдем, что функции  $f_1$  и  $f_2$  получают приращения

$$[f_1]_L = -\rho a (\cos \vartheta_2 - \cos \vartheta_1),$$

$$[f_2]_L = \rho b (\sin \vartheta_2 - \sin \vartheta_1).$$

Но  $f_1 = -\int_0^s Y_n ds + C_1$  и  $f_2 = \int_0^s X_n ds + C_2$ .

Следовательно,

$$Y = -[f_1]_L = \frac{\rho a}{2} \left[ \left( \sigma_2 + \frac{1}{\sigma_2} \right) - \left( \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} \right) \right],$$

$$X = [f_2]_L = -\frac{\rho b}{2} i \left[ \left( \sigma_2 - \frac{1}{\sigma_2} \right) - \left( \sigma_1 - \frac{1}{\sigma_1} \right) \right].$$

Эти значения проекции главного вектора внешних усилий должны быть подставлены в постоянные  $A_k$  и  $B_k$ , определяемые из системы (I.116).

Обозначив  $A = A' + iA''$ ,  $B = B' + iB''$  и подставив в (III.14) вместо  $z_1$  и  $z_2$  их значения через  $\sigma$  из (III.4) и (III.5), получим

$$\Phi(\zeta) = -(A' + iA'') \ln \zeta + \Phi_0(\zeta),$$

$$\Psi(\zeta) = -(B' + iB'') \ln \zeta + \Psi_0(\zeta),$$

где  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$  — функции, голоморфные внутри  $\gamma$ . Подставляя значения этих функций в контурные условия (III.6), найдем\*

$$2\operatorname{Re}[\Phi_0(\sigma) + \Psi_0(\sigma)] = f_1 + 2\operatorname{Re}[(A' + iA'') \ln \sigma + (B' + iB'') \ln \sigma] = f_1^0,$$

$$2\operatorname{Re}[s_1 \Phi_0(\sigma) + s_2 \Psi_0(\sigma)] = f_2 + 2\operatorname{Re}[s_1 (A' + iA'') \ln \sigma + s_2 (B' + iB'') \ln \sigma] = f_2^0,$$

откуда

$$f_1^0 = f_1 + 2i(A' + B'') \ln \sigma,$$

$$f_2^0 = f_2 + 2i(A' \beta_1 + A'' \alpha_1 + B' \beta_2 + B'' \alpha_2) \ln \sigma.$$

Из формулы (III.18) находим функции

$$\begin{aligned} \Phi_0(\zeta) &= \frac{i}{4\pi(s_1 - s_2)} \int_{\gamma} [s_2 f_1^0 - f_2^0] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = \\ &= \frac{i}{4\pi(s_1 - s_2)} \left\{ M_1 \int_{\gamma} \ln \sigma \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{\rho}{2} \left[ a s_2 \left( \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} \right) - i b \left( \sigma_1 - \frac{1}{\sigma_1} \right) \right] \right\} \times \end{aligned}$$

\* Для  $\ln \sigma$  следует выбрать какую-нибудь одну ветвь этой функции.

$$\begin{aligned}
& \times \int_{\gamma} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{p}{2} \left[ a s_2 \left( \sigma_2 + \frac{1}{\sigma_2} \right) - i b \left( \sigma_2 - \frac{1}{\sigma_2} \right) \right] \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} - \\
& - \frac{p}{2} (a s_2 - i b) \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sigma \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{p}{2} (a s_2 + i b) \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} \}; \quad (\text{III.43}) \\
\Psi_0(\zeta) &= - \frac{i}{4\pi(s_1 - s_2)} \int_{\gamma} [s_1 f_1^0 - f_2^0] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = \\
&= - \frac{i}{4\pi(s_1 - s_2)} \left\{ M_2 \int_{\gamma} \ln \sigma \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \frac{p}{2} \left[ a s_1 \left( \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} \right) - i b \left( \sigma_1 - \frac{1}{\sigma_1} \right) \right] \times \right. \\
& \times \int_{\gamma} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{p}{2} \left[ a s_1 \left( \sigma_2 + \frac{1}{\sigma_2} \right) - i b \left( \sigma_2 - \frac{1}{\sigma_2} \right) \right] \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} - \\
& \left. - \frac{p}{2} (a s_1 - i b) \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} \sigma \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} - \frac{p}{2} (a s_1 + i b) \int_{\sigma_2}^{\sigma_1} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} \right\},
\end{aligned}$$

где

$$M_1 = 2i [s_2 (A'' + B'') - (A' \beta_1 + A'' \alpha_1 + B' \beta_2 + B'' \alpha_2)],$$

$$M_2 = 2i [s_1 (A'' + B'') - (A' \beta_1 + A'' \alpha_2 + B' \beta_2 + B'' \alpha_2)].$$

В выражениях (III.43) встречаются интегралы

$$\int_{\gamma} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = 2\pi i; \quad \int_{\gamma} \sigma \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = 4\pi i \zeta;$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = 0;$$

$$\begin{aligned}
\int \ln \sigma \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} &= 2 \int \frac{\ln \sigma}{\sigma - \zeta} d\sigma - \int \frac{\ln \sigma}{\sigma} d\sigma = \\
&= 2\pi^2 + 4\pi i \ln(\sigma - \zeta) + \text{const};
\end{aligned}$$

$$\int \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = \int \left[ \frac{2}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{\sigma} \right] d\sigma = 2 \ln(\sigma - \zeta) - \ln \sigma + \text{const};$$

$$\int \sigma \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = \int \left[ 1 + \frac{2\zeta}{\sigma - \zeta} \right] d\sigma = \sigma + 2\zeta \ln(\sigma - \zeta) + \text{const};$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} &= \int \left[ \frac{2}{\zeta} \cdot \frac{1}{\sigma - \zeta} - \frac{1}{\sigma^2} - \frac{2}{\zeta} \cdot \frac{1}{\sigma} \right] d\sigma = \\
&= \frac{2}{\zeta} \ln(\sigma - \zeta) + \frac{1}{\sigma} - \frac{2}{\zeta} \ln \sigma + \text{const}.
\end{aligned}$$

Учитывая значения последних интегралов, нетрудно получить окончательные выражения для  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$ . Мы не будем их выписывать ввиду их громоздкости, а укажем только, что если положить в них  $\sigma_2 = \sigma_1$  (весь контур загружен), получим простые формулы, выведенные выше для этого случая.

Подставляя найденные выражения  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$  в формулы

$$\Phi(\zeta) = -(A' + iA'') \ln \zeta + \Phi_0(\zeta),$$

$$\Psi(\zeta) = -(B' + iB'') \ln \zeta + \Psi_0(\zeta)$$

и возвращаясь по формулам (III.12) и (III.13) к переменным  $z_1$  и  $z_2$ , получим искомые функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ . Простым предельным переходом в найденных функциях можно получить решение для случая сосредоточенной силы  $P$ , приложенной (нормально) к контуру в любой его точке. Для этого необходимо уменьшать дугу  $AB$  так, чтобы

$\lim_{AB \rightarrow 0} \{p \cdot \overline{AB}\} = P$ . Таким путем можно составить решение для не-

скольких отдельных сил. Складывая между собой эти решения, очевидно, получим решение для любого конечного числа произвольных, но перпендикулярных к контуру отверстия, сосредоточенных сил. Например, случай двух сосредоточенных сил  $P$ , приложенных в точках  $(O, -b)$  и  $(O, +b)$  контура эллиптического отверстия (рис. III.12), получим как предельный случай равномерно распределенного давления  $p$ , приложенного к контуру эллиптического отверстия на некоторых его участках, симметрично расположенных относительно оси  $Oy$ .

Обозначим через  $\sigma_1 = e^{i\theta_1}$  и  $\sigma_2 = e^{i\theta_2}$  точки на единичной окружности, соответствующие точкам  $A$  и  $B$  участка  $AB$  на контуре эллиптического отверстия (см. рис. III. 11, где точки  $A$  и  $B$  в рассматриваемом случае должны быть расположены симметрично относительно оси  $Oy$ ). Такой же участок контура загружен равномерно распределенным давлением  $p$  и в верхней части контура отверстия (рис. III. 11). Обозначим его через  $CD$ . Точкам  $C$  и  $D$ , очевидно, будут соответствовать на единичной окружности точки  $\sigma_3 = e^{i\theta_3}$  и  $\sigma_4 = e^{i\theta_4}$ .

Функции  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$ , когда на указанных выше участках  $AB$  и  $CD$  контура эллиптического отверстия приложено равномерно распределенное давление  $p$ , найдем по формулам (III. 10):

$$\Phi(\zeta) = -\frac{p}{8\pi(s_1 - s_2)} \left\{ (b + ibs_2) \left[ \sigma_2 - \sigma_1 + 2\zeta \ln \frac{\sigma_2 - \zeta}{\sigma_1 - \zeta} \right] - \right.$$

$$\left. - (b - ias_2) \times \left[ \frac{2}{\zeta} \ln \frac{\sigma_2 - \zeta}{\sigma_1 - \zeta} + \frac{1}{\sigma_2} - \frac{1}{\sigma_1} - \frac{2}{\zeta} \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] - K_1 \left[ 2 \ln \frac{\sigma_2 - \zeta}{\sigma_1 - \zeta} - \ln \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \right] + \right.$$

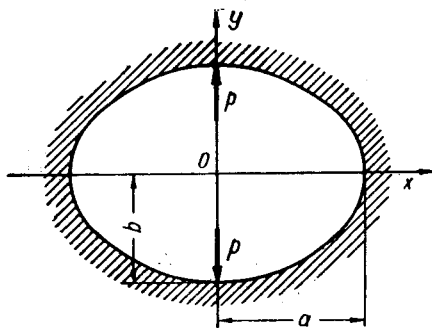


Рис. III.12.



$$\begin{aligned}
& + (K_2 - K_1) \left[ 2 \ln \frac{\sigma_3 - \zeta}{\sigma_2 - \zeta} - \ln \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \right] + (b + ias_2) \left[ \sigma_4 - \sigma_3 + 2\zeta \ln \frac{\sigma_4 - \zeta}{\sigma_3 - \zeta} \right] - \\
& - (b - ias_2) \left[ \frac{2}{\zeta} \ln \frac{\sigma_4 - \zeta}{\sigma_3 - \zeta} - \frac{1}{\sigma_4} - \frac{1}{\sigma_3} - \frac{2}{\zeta} \ln \frac{\sigma_4}{\sigma_3} \right] + (K_2 - K_1 - K_3) \times \\
& \times \left[ 2 \ln \frac{\sigma_4 - \zeta}{\sigma_3 - \zeta} - \ln \frac{\sigma_4}{\sigma_3} \right] + (K_4 + K_2 - K_3 - K_1) \left[ 2 \ln \frac{\sigma_1 - \zeta}{\sigma_4 - \zeta} - \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_4} \right],
\end{aligned}$$

где

$$K_1 = (b + ias_2)\sigma_1 - (b - ias_2)\frac{1}{\sigma_1},$$

$$K_2 = (b + ias_2)\sigma_2 - (b - ias_2)\frac{1}{\sigma_2},$$

$$K_3 = (b + ias_2)\sigma_3 - (b - ias_2)\frac{1}{\sigma_3},$$

$$K_4 = (b + ias_2)\sigma_4 - (b - ias_2)\frac{1}{\sigma_4}.$$

Аналогичное выражение для  $\Psi(\zeta)$  легко получается из  $\Phi(\zeta)$  заменой  $s_2$  на  $s_1$ .

Переходя теперь к пределу так, чтобы  $\lim_{\substack{\widehat{AB} \rightarrow 0 \\ \widehat{CD} \rightarrow 0}} \{p \cdot \widehat{AB}\} = P$  и  $\lim_{\substack{\widehat{AB} \rightarrow 0 \\ \widehat{CD} \rightarrow 0}} \{p \cdot \widehat{CD}\} = P$ , найдем функции  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$  в случае, когда к контуру эллиптического отверстия в точках  $(0, -b)$  и  $(0, +b)$  приложены две взаимно уравновешивающиеся сосредоточенные силы (см. рис. III. 12):

$$\Phi(\zeta) = -\frac{iP}{2\pi(s_1 - s_2)} as_2 \ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i} + \text{const}, \quad (\text{III.44})$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{iP}{2\pi(s_1 - s_2)} as_1 \ln \frac{\zeta - i}{\zeta + i} + \text{const}.$$

Подставляя в  $\Phi(\zeta)$  (III.44) вместо  $\zeta$  ее значение (III.12), а в  $\Psi(\zeta)$  (III.44) — значение  $\zeta$  (III.13), найдем функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ . По найденным функциям определим по формулам (I.90) компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ .

Наибольший интерес представляют напряжения  $\sigma_y$  в точках  $(\pm a, 0)$ , т. е. в точках пересечения контура отверстия с осью  $Ox$ . Если принять, что  $s_1 = i\beta_1$  и  $s_2 = i\beta_2$ , то в этих точках

$$\sigma_y = \frac{P}{a\pi} \cdot \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1\beta_2} \cdot \frac{a}{b} = \frac{P}{\pi} \cdot \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1\beta_2} \cdot \frac{1}{b}. \quad (\text{III.45})$$

Если среда изотропна, то  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  и из (III.45) получаем \* не зависящие от  $a$  напряжения

$$\sigma_y = 2 \frac{P}{a\pi} \cdot \frac{a}{b} = \frac{2P}{\pi} \cdot \frac{1}{b}.$$

На рис. III.13 приведены кривые для различных анизотропных материалов: дуба ( $s_1 = 1,679i$ ,  $s_2 = 0,971i$ ); ели ( $s_1 = 5,0007i$ ,  $s_2 = 0,905i$ ); березы ( $s_1 = 3,416i$ ,  $s_2 = 1,126i$ ). Кривая 1 соответствует изотропной пластинке, 2 — дубовой, 3 — еловой и 4 — березовой.

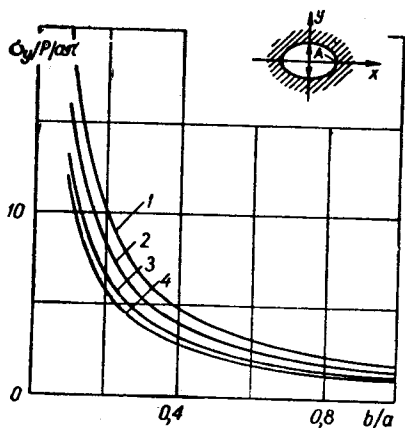


Рис. III.13

**Напряжения возле эллиптического или кругового отверстия в анизотропной полосе (балке) при чистом изгибе\*\*.** Допустим, что анизотропная полоса (балка) с эллиптическим отверстием (рис. III.14) находится в состоянии чистого изгиба. Изгибающий момент  $M$ , его направление и положение отверстия указаны на рис. III.14. Найдем напряженное состояние возле отверстия, считая контур отверстия свободным от внешних напряжений. Решение этой задачи будем вести при тех же предположениях, что и для изотропной среды, т. е. будем считать пластинку неограниченной и напряженное состояние в удаленных от отверстия частях не зависящим от наличия эллиптического отверстия в изгибаемой балке. Напряженное состояние возле отверстия представим в виде

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \sigma_x^*,$$

$$\sigma_y = \sigma_y^0 + \sigma_y^*,$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}^*,$$

где  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$  и  $\tau_{xy}^0$  — напряжения основного состояния в неослабленной эллиптическим отверстием анизотропной полосе (балке) при чистом изгибе.

\* Сложное и неудобное решение в форме бесконечных тригонометрических рядов для изотропной среды дал Р. S. Symonds [1]. Полученные им ряды очень медленно сходятся, и график для  $\sigma_\phi$  представляет грубое приближение.

\*\* Решение дано С. Г. Лехническим [1] и другим путем Г. Н. Савиным [3]. См. также В. Б. Липкин [1].

а  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$  и  $\tau_{xy}^*$  — дополнительные компоненты напряжений, вызванные наличием отверстия. При этом

$$\begin{aligned}\sigma_x^0 &= -\frac{M}{J}(x \sin \alpha + y \cos \alpha + d) \cos^2 \alpha, \\ \sigma_y^0 &= -\frac{M}{J}(x \sin \alpha + y \cos \alpha + d) \sin^2 \alpha, \\ \tau_{xy}^0 &= \frac{M}{J}(x \sin \alpha + y \cos \alpha + d) \sin \alpha \cos \alpha,\end{aligned}\quad (\text{III.46})$$

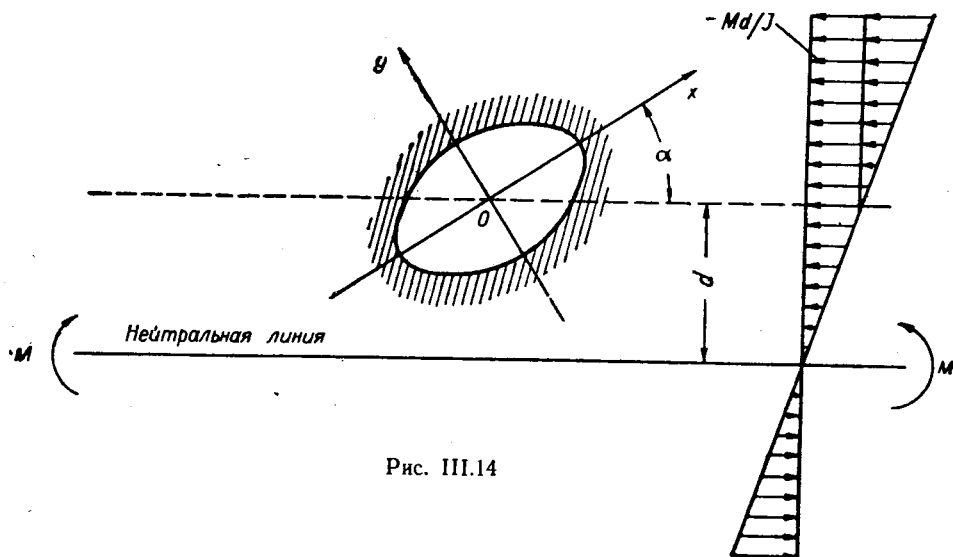


Рис. III.14

где  $J$  — момент инерции поперечного сечения балки;  $d$  — расстояние от центра эллиптического отверстия до нейтральной оси балки (полосы);  $\alpha$  — угол, образуемый осью  $Ox$  с нейтральной линией балки (полосы). Соответствующая функция напряжений для чистого изгиба \*

$$\begin{aligned}U_0(x, y) &= -\frac{M}{6J} [y^3 \cos^3 \alpha + 3xy \cos^2 \alpha \sin \alpha + 3y^2 d \cos^2 \alpha + 3x^2 y \sin^2 \alpha \cos \alpha + \\ &+ 3xyd \sin 2\alpha + 3x^2 d \sin^2 \alpha + x^3 \sin^3 \alpha];\end{aligned}\quad (\text{III.47})$$

$$U(x, y) = U_0(x, y) + U^*(x, y),\quad (\text{III.48})$$

где  $U_0(x, y)$  — известная функция (III.47);  $U^*(x, y)$  — неизвестная функция напряжений, соответствующая напряженному состоянию  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$  и  $\tau_{xy}^*$ .

Вследствие линейности основного уравнения (I.82) подстановка в него вместо функции  $U(x, y)$  ее значения из (III.48) приводит к тому,

\* Для более сложных видов внешней нагрузки, приложенной к анизотропной балке по верхней и нижней ее кромкам, функцию Эри  $U(x, y)$  следует определять методом А. А. Курдюмова [1].

что функция  $U^*(x, y)$  будет удовлетворять тому же уравнению (I.82):

$$a_{22} \frac{\partial^4 U^*}{\partial x^4} - 2a_{28} \frac{\partial^4 U^*}{\partial x^3 \partial y} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^4 U^*}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a_{18} \frac{\partial^4 U^*}{\partial x \partial y^3} + a_{11} \frac{\partial^4 U^*}{\partial y^4} = 0. \quad (\text{III.49})$$

Общий интеграл этого уравнения будет иметь вид (I.85):

$$U^*(x, y) = F_1^*(z_1) + F_2^*(z_2) + \overline{F_1^*(z_1)} + \overline{F_2^*(z_2)}. \quad (\text{III.50})$$

Подставляя в (1.95) вместо  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  их значения

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + \frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2},$$

$$\sigma_y = \sigma_y^0 + \frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2},$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^0 - \frac{\partial^2 U^*}{\partial x \partial y}$$

и принимая во внимание, что контур отверстия свободен от внешних усилий, т. е. полагая  $X_n = Y_n = 0$ , получаем контурные условия для функции  $U^*(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial y^2} \cos(n, x) - \frac{\partial^2 U^*}{\partial x \partial y} \cos(n, y) = -[\sigma_x^0 \cos(n, x) + \tau_{xy}^0 \cos(n, y)],$$

$$-\frac{\partial^2 U^*}{\partial x \partial y} \cos(n, x) + \frac{\partial^2 U^*}{\partial x^2} \cos(n, y) = -[\tau_{xy}^0 \cos(n, x) + \sigma_y^0 \cos(n, y)].$$

Вспоминая, что  $\cos(n, x) = dy/ds$  и  $\cos(n, y) = -dx/ds$ , найдем

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = \int_0^s (\tau_{xy}^0 dy - \sigma_y^0 dx) + C_1, \quad (\text{III.51})$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial x} = - \int_0^s (\sigma_x^0 dy - \tau_{xy}^0 dx) + C_2.$$

Вводя, как и раньше, обозначения

$$\frac{dF_1^*}{dz_1} = \Phi_0(z_1), \quad \frac{dF_2^*}{dz_2} = \Psi_0(z_2),$$

получим для этих функций контурные условия в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0(z_1) + \overline{\Phi_0(z_1)} + \Psi_0(z_2) + \overline{\Psi_0(z_2)} &= \\ &= \int_0^s (\tau_{xy}^0 dy - \sigma_y^0 dx) + C_1 = f_1, \end{aligned} \quad (\text{III.52})$$

$$\begin{aligned} s_1 \Phi_0(z_1) + \overline{s_1} \cdot \overline{\Phi_0(z_1)} + s_2 \cdot \Psi_0(z_2) + \overline{s_2} \cdot \overline{\Psi_0(z_2)} = \\ = - \int_0^s (\sigma_x^0 dy - \tau_{xy}^0 dx) + C_2 = f_2, \end{aligned} \quad (\text{III. 52})$$

где  $C_1, C_2$  — произвольные вещественные постоянные, а  $\sigma_x^0, \sigma_y^0$  и  $\tau_{xy}^0$  — известные функции координат точек контура, данные уравнениями (III.46).

Контурные условия для  $\Phi_0(z_1)$  и  $\Psi_0(z_2)$  (III.52) имеют тот же вид (III.6), что и для функций  $\Phi(z_1)$  и  $\Psi(z_2)$ . Таким образом, решение поставленной задачи сведено к уже решенной задаче.

Перейдем к нашей задаче. Определим правые части (III.52). Подставляя вместо  $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$  их значения из (III.46), найдем

$$f_1 = \frac{M}{J} \left[ \frac{y^2}{2} \sin \alpha \cos^2 \alpha + \frac{x^2}{2} \sin^3 \alpha + xy \sin^2 \alpha \cos \alpha + \right. \\ \left. + xd \sin^2 \alpha + yd \sin \alpha \cos \alpha \right] + \text{const},$$

$$f_2 = \frac{M}{J} \left[ \frac{y^2}{2} \cos^3 \alpha + \frac{x^2}{2} \sin^2 \cos \alpha + xy \sin \alpha \cos^2 \alpha + \right. \\ \left. + xd \sin \alpha \cos \alpha + yd \cos^2 \alpha \right] + \text{const}.$$

Подставляя в выражения для  $f_1$  и  $f_2$  вместо  $x$  и  $y$  их значения

$$x = \frac{a}{2} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad y = \frac{ib}{2} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right),$$

получим

$$f_1 = \frac{M}{J} \left[ \frac{\sin \alpha}{8} (a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha + iab \sin 2\alpha) \sigma^2 + \right. \\ \left. + \frac{d \sin \alpha}{2} (a \sin \alpha + ib \cos \alpha) \sigma + \frac{d \sin \alpha}{2} (a \sin \alpha - ib \cos \alpha) \frac{1}{\sigma} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \alpha}{8} (a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha - iab \sin 2\alpha) \frac{1}{\sigma^2} \right] + \text{const},$$

$$f_2 = \frac{M}{J} \left[ \frac{\cos \alpha}{8} (a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha + iba \sin 2\alpha) \sigma^2 + \right. \\ \left. + \frac{d \cos \alpha}{2} (a \sin \alpha + ib \cos \alpha) \sigma + \frac{d \cos \alpha}{2} (a \sin \alpha - ib \cos \alpha) \frac{1}{\sigma} + \right. \\ \left. + \frac{\cos \alpha}{8} (a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha - iab \sin 2\alpha) \frac{1}{\sigma^2} \right] + \text{const}.$$

Подставляя найденные значения  $f_1$  и  $f_2$  в формулы (III.10) и замечая, что

$$\int_{\gamma} \sigma^2 \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = 4\pi i \zeta^2, \quad \int_{\gamma} \sigma \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = 4\pi i \zeta,$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = 0, \quad \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma^2} \cdot \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} = 0,$$

найдем

$$\Phi(\zeta) = -\frac{M}{8J(s_1 - s_2)} [(s_2 \sin \alpha - \cos \alpha)(a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha + iab \sin 2\alpha) \zeta^2 + 4d(s_2 \sin \alpha - \cos \alpha)(a \sin \alpha + ib \cos \alpha) \zeta] + \text{const},$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{M}{8J(s_1 - s_2)} [(s_1 \sin \alpha - \cos \alpha)(a^2 \sin^2 \alpha - b^2 \cos^2 \alpha + iab \sin 2\alpha) \zeta^2 + 4d(s_1 \sin \alpha - \cos \alpha)(a \sin \alpha + ib \cos \alpha) \zeta] + \text{const}. \quad (\text{III.53})$$

Подставляя в функции  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$  вместо  $\zeta$  их значения соответственно из (III.12) и (III.13), получим окончательный вид искомых функций  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$ . Компоненты напряжений по найденным функциям определим из формул

$$\sigma_x = \sigma_x^0 + 2 \operatorname{Re} [s_1^2 \varphi_0'(z_1) + s_2^2 \psi_0'(z_2)],$$

$$\sigma_y = \sigma_y^0 + 2 \operatorname{Re} [\varphi_0'(z_1) + \psi_0'(z_2)],$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^0 - 2 \operatorname{Re} [s_1 \varphi_0'(z_1) + s_2 \psi_0'(z_2)]. \quad (\text{III.54})$$

Не будем выписывать функций  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$  в общем случае, так как подстановка эта очевидна, а выпишем их для случая, когда  $\alpha=0$  (рис. III.15).

Для этого случая

$$\varphi_0(z_1) = \frac{Mdb}{2J} \cdot \frac{i}{s_1 - s_2} \cdot \frac{a - is_1 b}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} - \frac{Mb^2}{8J} \cdot \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ \frac{a - is_1 b}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right]^2,$$

$$\psi_0(z_2) = -\frac{Mdb}{2J} \cdot \frac{i}{s_1 - s_2} \cdot \frac{a - is_2 b}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} + \frac{Mb^2}{8J} \cdot \frac{1}{s_1 - s_2} \left[ \frac{a - is_2 b}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right]^2. \quad (\text{III.55})$$

Сравнивая функции (III.55) с (III.26), видим, что первые слагаемые в (III.55) дают решение задачи в случае растяжения (сжатия) анизотропной полосы, ослабленной эллиптическим отверстием, вдоль оси  $Ox$  с интенсивностью усилий  $p = -\frac{Md}{J}$  (рис. III.15); вторые же сла-

гаемые в (III.55) соответствуют чистому изгибу балки (полосы), когда нейтральной линией служит ось  $Ox$ .

По функциям (III.55) можно определить дополнительные компоненты напряжений  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$ ,  $\tau_{xy}^*$ .

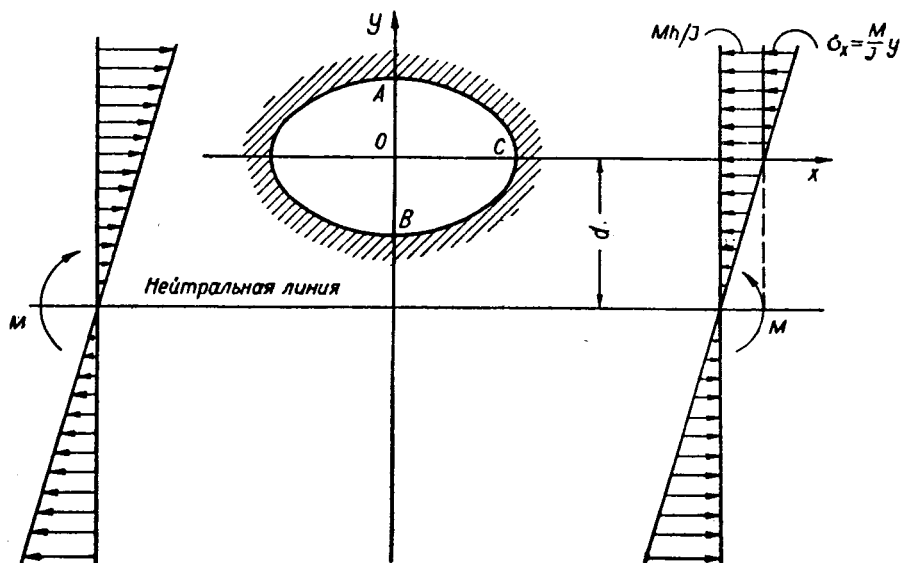


Рис. III.15

Из (III.55) легко видеть, что дополнительные компоненты напряжений, вызванные чистым изгибом полосы (вторые слагаемые в (III.55)), будут по мере удаления от отверстия затухать быстрее, чем дополнительные компоненты напряжений, вызванные растяжением (сжатием) полосы (первые слагаемые в (III.55)). Отсюда уже можно сделать заключение, что при чистом изгибе зона возмущения напряженного состояния возле эллиптического отверстия при  $d=0$  в анизотропной полосе будет меньше соответствующей зоны при растяжении этой полосы.

Приведем значения напряжений  $\sigma_\phi$  в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  (см. рис. III.15) эллиптического отверстия. Предполагаем, что  $s_1 = a_1 + i\beta_1$  и  $s_2 = a_2 + i\beta_2$ , т. е. общий случай анизотропии.

Напряжение в точке  $A$

$$\sigma_\phi = -\frac{M}{J} \left[ (b + d) + k \frac{b + 2d}{2} (\beta_1 + \beta_2) \right], \quad (\text{III.56})$$

где  $k = b/a$  — отношение полуосей эллиптического отверстия. Если среда изотропна, то  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  и из (III.56) имеем

$$\sigma_\phi = -\frac{M}{J} \left[ (b + d) + \frac{b}{a} (b + 2d) \right]. \quad (\text{III.57})$$

Если  $\alpha = 0$ , т. е. центр эллиптического отверстия лежит на нейтральной линии, то из (III.57) получаем формулу (II.102)

$$\sigma_{\theta} = -\frac{Mb}{J} \left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Напряжение в точке В

$$\sigma_{\theta} = -\frac{M}{J} \left[ (d-b) + \frac{2d-b}{2} k (\beta_1 + \beta_2) \right]. \quad (\text{III.58})$$

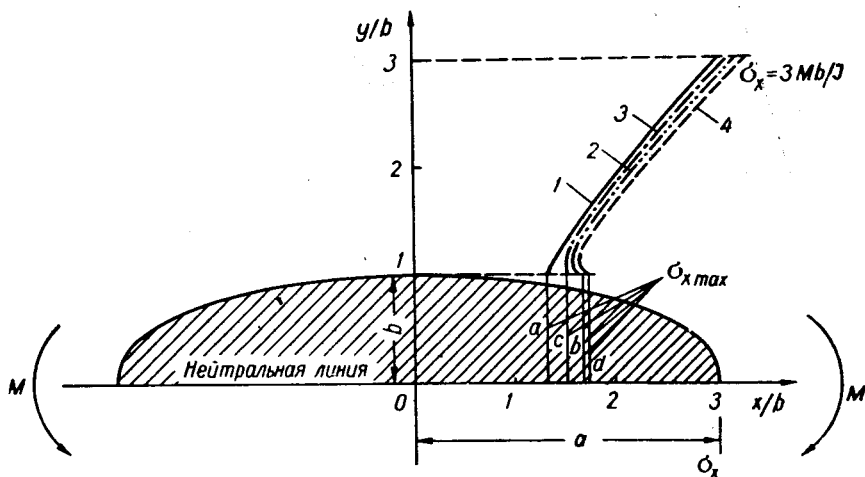


Рис. III.16

Напряжение в точке С

$$\sigma_{\theta} = \frac{M}{J} \left[ \frac{(\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2)d}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} + \frac{b}{2} \cdot \frac{\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)} \right]. \quad (\text{III.59})$$

В случае изотропной среды ( $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$  и  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ) получим

$$\sigma_{\theta} = \frac{Md}{J}.$$

Из (III.59) следует, что при  $d = 0$  в общем случае анизотропии напряжение в точке С, лежащей на центральной оси балки, будет отличным от нуля:

$$\sigma_{\theta} = \frac{M_b}{2J} \cdot \frac{\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2}{(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)}. \quad (\text{III.60})$$

На рис. III.16 представлены эпюры \* напряжений  $\sigma_x$  по сечению  $x=0$  в анизотропной балке, ослабленной эллиптическим отверстием при  $a/b=3$ . Материал балки — три вида фанеры \*\*.

\* На рис. III.16 совпадающие числовые значения представлены (для ясности) в виде параллельных кривых.

\*\* См. В. Г. Ченцов [1], стр. 24 и С. В. Серенсен [1], стр. 187.



Кривая 1 соответствует изотропной пластинке

$$\sigma_{x, \max} = 1,33 \frac{Mb}{J}.$$

Кривая 2 — для материала с упругими постоянными

$$E_x = 1,6 \cdot 9,81 \cdot 10^9 \text{ н/см}^2, \quad E_y = 0,905 \cdot 9,81 \cdot 10^9 \text{ н/см}^2, \quad G_{xy} = 0,097 \cdot 9,81 \cdot 10^9 \text{ н/см}^2,$$

$$\nu_x = 0,05;$$

$$\sigma_{x, \max} = 1,727 \frac{Mb}{J}.$$

Кривая 3 — для материала с упругими постоянными

$$E_x = 0,5 \cdot 9,81 \cdot 10^9 \text{ н/см}^2, \quad E_y = 1,6 \cdot 9,81 \cdot 10^9 \text{ н/см}^2, \quad G_{xy} = 0,097 \cdot 9,81 \cdot 10^9 \text{ н/см}^2,$$

$$\nu_y = 0,05;$$

$$\sigma_{x, \max} = 1,51 \frac{Mb}{J}.$$

Кривая 4 — для материала с упругими постоянными

$$E_x = 1,4 \cdot 9,81 \cdot 10^9 \text{ н/см}^2, \quad E_y = \frac{1,4}{12} \cdot 9,81 \cdot 10^9 \text{ н/см}^2, \quad G_{xy} = 0,12 \cdot 9,81 \cdot 10^9 \text{ н/см}^2,$$

$$\nu_x = 0,46.$$

$$\sigma_{x, \max} = 1,70 \frac{Mb}{J}.$$

Из приведенных на рис. III.16 эпюр напряжений заключаем, что:

- 1) зона возмущения напряжений, вызванная отверстием, мала;
- 2) по мере удаления от отверстия возмущения быстро затухают и напряженное состояние в балке стремится к основному (III.46);
- 3) существенное влияние на напряжения оказывает анизотропия непосредственно возле отверстия\*.

Картину напряженного состояния в ортотропной пластинке с круговым отверстием при чистом сдвиге рассматривал А. С. Дорогобед [1].

**Упругое равновесие анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием при действии силы или момента, приложенных в какой-либо точке пластинки\*\*.** Определим функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  в бесконечной однородной анизотропной пластинке, ослабленной эллиптическим отверстием и деформируемой силой или моментом, приложенным в произвольной ее точке. Край отверстия предполагается загруженным действующими в срединной плоскости усилиями, главный вектор которых имеет составляющие  $X$  и  $Y$ . Оси координат  $x, y$  направим соответственно по осям эллипса. Через  $a$  и  $b$  обозначим его полуоси. Толщину анизотропной, но вообще не ортотропной, пластинки принимаем равной единице.

\* Аналогичную картину мы имеем (см. Г. Н. Савин [4]) и при изгибе анизотропной балки с эллиптическим или круговым отверстием постоянной перерезывающей силой.

\*\* Решение дано Д. В. Грилицким [1]. Попутно исправляем вкрашившуюся туда неточность. Для изотропной среды решение этой задачи получено В. Капулес [1].

Граничные условия при заданных внешних усилиях  $X_n$  и  $Y_n$  даны формулами (I.96), которые можно представить в виде

$$(1 + is_1) \varphi(z_1) + (1 + is_2) \psi(z_2) + (1 + i\bar{s}_1) \overline{\varphi(z_1)} + (1 + i\bar{s}_2) \overline{\psi(z_2)} = f_1 + if_2 = f, \quad (\text{III.61})$$

$$(1 - s_1 i) \varphi(z_1) + (1 - is_2) \psi(z_2) + (1 - i\bar{s}_1) \overline{\varphi(z_1)} + (1 - i\bar{s}_2) \overline{\psi(z_2)} = f_1 - if_2 = \bar{f},$$

где

$$f = f_1 + if_2 = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \text{const}. \quad (\text{III.62})$$

Постоянную в правой части соотношения (III.62) в рассматриваемых ниже случаях можно положить равной нулю.

Результаты данного раздела будут использованы в § 3 и частично в § 5 настоящей главы.

Действие силы. Допустим, что в произвольной точке анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием приложена в ее плоскости сосредоточенная сила  $\bar{P}(P_x, P_y)$ . Определим вид функций напряжений, предполагая, что и край отверстия загружен распределенными усилиями, главный вектор которых имеет составляющие  $X$  и  $Y$ .

Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  от нагружения только края эллиптического отверстия имеют вид (I.124), где  $B^* = B'^* = C'^* = C^* = 0$ , т. е.

$$\varphi_1(z_1) = A^{(1)} \ln z_1 + \varphi_{10}(z_1), \quad (\text{III.63})$$

$$\psi_1(z_2) = B^{(1)} \ln z_2 + \psi_{10}(z_2).$$

Здесь  $\varphi_{10}(z_1)$  и  $\psi_{10}(z_2)$  — голоморфные функции вне эллиптических отверстий соответственно в плоскостях  $z_1$  и  $z_2$ . Постоянные  $A^{(1)}$  и  $B^{(1)}$  определяются по формулам (I.116).

Теперь предположим, что край отверстия свободен от усилий, а в некоторой точке  $z_0 = x_0 + iy_0$  пластинки приложена сосредоточенная сила  $\bar{P}$ , имеющая составляющие  $P_x$  и  $P_y$ . Установим вид функций  $\varphi_1(z_1)$  и  $\psi_1(z_2)$  в этом случае.

Если сосредоточенная сила приложена в начале координат сплошной бесконечной анизотропной пластинки, то, как известно,

$$\varphi_2(z_1) = A^{(2)} \ln z_1, \quad \psi_2(z_2) = B^{(2)} \ln z_2, \quad (\text{III.64})$$

где  $A^{(2)}$  и  $B^{(2)}$  определяются по формулам (I.116), куда вместо  $X$  и  $Y$  нужно подставить \* соответственно  $P_x$  и  $P_y$ .

\* Здесь для отличия введены разные обозначения для составляющих главного вектора внешних усилий, приложенных к контуру отверстия, и составляющих сосредоточенной силы  $\bar{P}$ , приложенной к внутренней точке пластинки. Но если в этом не будет необходимости, то и составляющие силы  $\bar{P}$  будем обозначать через  $X$  и  $Y$ .

Легко показать\*, что обе функции для анизотропной среды являются инвариантными при параллельном переносе начала системы координат в новую точку. Поэтому если сила приложена в произвольной точке, определяемой координатами  $x_0, y_0$ , то функции

$$\varphi_2(z_1) = A^{(2)} \ln(z_1 - z_{10}), \quad \psi_2(z_2) = B^{(2)} \ln(z_2 - z_{20}), \quad (\text{III.65})$$

где

$$z_{10} = x_0 + s_1 y_0, \quad z_{20} = x_0 + s_2 y_0 \quad (\text{III.66})$$

— точки, соответствующие точке  $z_0$  приложения силы в физической плоскости.

При наличии отверстия функции

$$\varphi_2(z_1) = A^{(2)} \ln(z_1 - z_{10}) + \varphi_{20}(z_1), \quad (\text{III.67})$$

$$\psi_2(z_2) = B^{(2)} \ln(z_2 - z_{20}) + \psi_{20}(z_2),$$

где  $\varphi_{20}(z_1)$  и  $\psi_{20}(z_2)$  — голоморфные на бесконечности функции.

Таким образом, в общем случае

$$\varphi(z_1) = A^{(1)} \ln z_1 + A^{(2)} \ln(z_1 - z_{10}) + \varphi_0(z_1), \quad (\text{III.68})$$

$$\psi(z_2) = B^{(1)} \ln z_2 + B^{(2)} \ln(z_2 - z_{20}) + \psi_0(z_2).$$

Отобразим внешность единичного круга в плоскости  $\zeta$  на внешность эллиптических отверстий в плоскостях  $z_1$  и  $z_2$ . Функции, осуществляющие это отображение, имеют вид (III.4) и (III.5). Обратные преобразования даны формулами (III.12) и (III.13).

Подставив в условия (III.61) вместо  $z_1$  и  $z_2$  их значения из (III.4) и (III.5) и обозначив  $\Phi(\zeta) = \varphi[\omega_1(\zeta)]$ ,  $\Psi(\zeta) = \psi[\omega_2(\zeta)]$ , получим контурные условия для функций  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$ :

$$(1 + is_1) \Phi(\sigma) + (1 + is_2) \Psi(\sigma) + (1 + i\bar{s}_1) \overline{\Phi(\sigma)} + (1 + i\bar{s}_2) \overline{\Psi(\sigma)} = f(\sigma), \quad (\text{III.69})$$

$$(1 - is_1) \Phi(\sigma) + (1 - is_2) \Psi(\sigma) + (1 - i\bar{s}_1) \overline{\Phi(\sigma)} + (1 - i\bar{s}_2) \overline{\Psi(\sigma)} = \overline{f(\sigma)}.$$

Из (III.68), приняв во внимание формулы преобразования (III.4) и (III.5), находим функции

$$\Phi(\zeta) = A^{(1)} \ln \zeta + A^{(2)} \ln \frac{(\zeta - \zeta_{10}) [(a - is_1 b) \zeta \zeta_{10} - (a + is_1 b)]}{\zeta \zeta_{10}} + \Phi_0(\zeta), \quad (\text{III.70})$$

$$\Psi(\zeta) = B^{(1)} \ln \zeta + B^{(2)} \ln \frac{(\zeta - \zeta_{10}) [(a - is_2 b) \zeta \zeta_{20} - (a + is_2 b)]}{\zeta \zeta_{20}} + \Psi_0(\zeta),$$

где  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$  — голоморфные функции вне единичной окружности  $\gamma$  плоскости  $\zeta$ ;

\* См. Д. В. Грилицкий [1].

$$\zeta_{10} = \frac{z_{10} + \sqrt{z_{10}^2 - a^2 - s_1^2 b^2}}{a - is_1 b}, \quad \zeta_{20} = \frac{z_{20} + \sqrt{z_{20}^2 - a^2 - s_2^2 b^2}}{a - is_2 b}. \quad (\text{III.71})$$

Подставляя функции (III.70) в условия (III.69) и производя некоторые преобразования, будем иметь на  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \Phi_0(\sigma) + \frac{\bar{s}_1 - s_2}{s_1 - s_2} \bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{\bar{s}_2 - s_2}{s_1 - s_2} \bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) &= \frac{1 - is_2}{2i(s_1 - s_2)} \bar{f} - \frac{1 + is_2}{2i(s_1 - s_2)} \bar{f} - \\ &- \left[ A^{(1)} - \frac{\bar{A}^{(1)}(\bar{s}_1 - s_2) + \bar{B}^{(1)}(\bar{s}_2 - s_2)}{s_1 - s_2} \right] \ln \sigma - \\ &- A^{(2)} \ln \frac{(\sigma - \zeta_{10})[(a - is_1 b)\sigma \zeta_{10} - (a + is_1 b)]}{\sigma \zeta_{10}} - \\ &- \frac{\bar{s}_1 - s_2}{s_1 - s_2} \bar{A}^{(2)} \ln \frac{(1 - \sigma \bar{\zeta}_{10})[(a + i\bar{s}_1 b)\bar{\zeta}_{10} - (a - i\bar{s}_1 b)\sigma]}{\sigma \bar{\zeta}_{10}} - \\ &- \frac{\bar{s}_2 - s_2}{s_1 - s_2} \bar{B}^{(2)} \ln \frac{(1 - \sigma \bar{\zeta}_{20})[(a + i\bar{s}_2 b)\bar{\zeta}_{20} - (a - i\bar{s}_2 b)\sigma]}{\sigma \bar{\zeta}_{20}}; \\ \Psi_0(\sigma) - \frac{\bar{s}_1 - s_1}{s_1 - s_2} \bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{\bar{s}_2 - s_1}{s_1 - s_2} \bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) &= \\ = -\frac{1 - is_1}{2i(s_1 - s_2)} \bar{f} + \frac{1 + is_1}{2i(s_1 - s_2)} \bar{f} - \left[ B^{(1)} + \frac{\bar{A}^{(1)}(\bar{s}_1 - s_1) + \bar{B}^{(1)}(\bar{s}_2 - s_1)}{s_1 - s_2} \right] \ln \sigma - \\ &- B^{(2)} \ln \frac{(\sigma - \zeta_{20})[(a - is_2 b)\sigma \zeta_{20} - (a + is_2 b)]}{\sigma \zeta_{20}} + \\ &+ \frac{\bar{s}_1 - s_1}{s_1 - s_2} \bar{A}^{(2)} \ln \frac{(1 - \sigma \bar{\zeta}_{20})[(a + i\bar{s}_1 b)\bar{\zeta}_{10} - (a - i\bar{s}_1 b)\sigma]}{\sigma \bar{\zeta}_{10}} + \\ &+ \frac{\bar{s}_2 - s_1}{s_1 - s_2} \bar{B}^{(2)} \ln \frac{(1 - \sigma \bar{\zeta}_{20})[(a + i\bar{s}_2 b)\bar{\zeta}_{20} - (a - i\bar{s}_2 b)\sigma]}{\sigma \bar{\zeta}_{20}}. \end{aligned} \quad (\text{III.72})$$

Умножая уравнения (III.72) на  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ , где  $\zeta$  находится вне окружности  $\gamma$ , и интегрируя вдоль  $\gamma$ , найдем

$$\begin{aligned} \Phi_0(\zeta) &= \frac{I_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f d\sigma}{\sigma - \zeta} - \frac{m_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} d\sigma}{\sigma - \zeta} + (A^{(1)} - C_2) \ln \frac{\sigma_1 - \zeta}{\zeta} + \\ &+ A^{(2)} \ln \frac{\zeta \zeta_{10}}{(a - is_1 b) \zeta \zeta_{10} - (a + is_1 b)} + A_2 \ln \frac{\zeta \bar{\zeta}_{10}}{\zeta \bar{\zeta}_{10} - 1} + B_2 \ln \frac{\zeta \bar{\zeta}_{20}}{\zeta \bar{\zeta}_{20} - 1}; \end{aligned} \quad (\text{III.73})$$

$$\Psi_0(\zeta) = -\frac{l_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f d\sigma}{\sigma - \zeta} + \frac{m_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} d\sigma}{\sigma - \zeta} + (B^{(1)} + C_1) \ln \frac{\sigma_1 - \zeta}{\zeta} +$$

$$+ B^{(2)} \ln \frac{\zeta \bar{\zeta}_{20}}{(a - is_2 b) \zeta \bar{\zeta}_{20} - (a + is_2 b)} - A_1 \ln \frac{\zeta \bar{\zeta}_{10}}{\zeta \bar{\zeta}_{10} - 1} - B_1 \ln \frac{\zeta \bar{\zeta}_{20}}{\zeta \bar{\zeta}_{20} - 1}, \quad (\text{III.73})$$

где  $\sigma_1$  — произвольная на  $\gamma$  точка, принятая за начало отсчета;

$$C_k = \frac{(\bar{s}_1 - s_k) \bar{A}^{(1)} + (\bar{s}_2 - s_k) \bar{B}^{(1)}}{s_1 - s_2}, \quad l_k = \frac{i(1 - is_k)}{2(s_1 - s_2)}, \quad (\text{III.74})$$

$$m_k = \frac{i(1 + is_k)}{2(s_1 - s_2)}, \quad A_k = \frac{(\bar{s}_1 - s_k) \bar{A}^{(2)}}{s_1 - s_2}, \quad B_k = \frac{(\bar{s}_2 - s_k) \bar{B}^{(2)}}{s_1 - s_2}$$

$$(k = 1, 2).$$

Из (III.70), учитывая выражения (III.73), получаем

$$\Phi(\zeta_1) = \frac{l_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f d\sigma}{\sigma - \zeta_1} - \frac{m_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} d\sigma}{\sigma - \zeta_1} + C_2 \ln \zeta_1 + (A^{(1)} - C_2) \ln(\sigma_1 - \zeta_1) +$$

$$+ A^{(2)} \ln(\zeta_1 - \zeta_{10}) + A_2 \ln \frac{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10} - 1} + B_2 \ln \frac{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20} - 1}; \quad (\text{III.75})$$

$$\Psi(\zeta_2) = -\frac{l_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f d\sigma}{\sigma - \zeta_2} + \frac{m_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} d\sigma}{\sigma - \zeta_2} - C_1 \ln \zeta_2 + (B^{(1)} + C_1) \ln(\sigma_1 - \zeta_2) +$$

$$+ B^{(2)} \ln(\zeta_2 - \zeta_{20}) - A_1 \ln \frac{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10} - 1} - B_1 \ln \frac{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20} - 1}. \quad (\text{III.76})$$

Выведенные формулы дают возможность получить решение для ряда частных случаев:

1) при силе, равной нулю, в формулах (III.74), (III.75) и (III.76) нужно положить  $A^{(2)} = B^{(2)} = 0$ ;

2) при главном векторе внешних усилий, приложенных к контуру эллиптического отверстия, равном нулю; в этом случае в формулах (III.75) и (III.76) следует положить  $A^{(1)} = B^{(1)} = C_1 = C_2 = 0$ ;

3) если, кроме того, контур отверстия свободен от усилий, то  $f = \bar{f} = 0$  и интегралы в предыдущих формулах исчезают; в этом случае получаем простые выражения

$$\Phi(\zeta_1) = A^{(2)} \ln(\zeta_1 - \zeta_{10}) + A_2 \ln \frac{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10} - 1} + B_2 \ln \frac{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20} - 1}, \quad (\text{III.77})$$

$$\Psi(\zeta_2) = B^{(2)} \ln(\zeta_2 - \zeta_{20}) - A_1 \ln \frac{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10} - 1} - B_1 \ln \frac{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20} - 1}.$$

В частности, если сила приложена в точке контура отверстия, то, полагая в формулах (III.77)  $\zeta_{10} = \zeta_{20} = \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  — точка на единичной окружности, находим

$$\Phi(\zeta_1) = (A^{(2)} - A_2 - B_2) \ln(\zeta_1 - \sigma_0) + (A_2 + B_2) \ln \zeta_1, \quad (III.78)$$

$$\Psi(\zeta_2) = (B^{(2)} + A_1 + B_1) \ln(\zeta_2 - \sigma_0) - (A_1 + B_1) \ln \zeta_2.$$

Зная функции  $\Phi(\zeta_1)$  и  $\Psi(\zeta_2)$  и возвращаясь к переменным  $z_1$  и  $z_2$  (III.12) и (III.13), найдем функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ , при помощи которых компоненты напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  определяются по формулам (I.90).

Нормальное напряжение по контуру отверстия

$$\sigma_\theta = \frac{2}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \operatorname{Re} [(b \cos \theta + s_1 a \sin \theta)^2 \varphi'(z_1) + (b \cos \theta + s_2 a \sin \theta)^2 \psi'(z_2)]. \quad (III.79)$$

В случае кругового отверстия  $a = b$  и формула (III.79) принимает вид

$$\sigma_\theta = 2 \operatorname{Re} [(\cos \theta + s_1 \sin \theta)^2 \varphi'(z_1) + (\cos \theta + s_2 \sin \theta)^2 \psi'(z_2)]. \quad (III.80)$$

Для фанеры I сорта, направляя ось  $x$  вдоль волокон рубашки, т. е. совмещая ее с направлением, соответствующим большому модулю упругости, получим упругие постоянные \*

$$E_1 = 1,4 \cdot 9,81 \cdot 10^9, \quad E_2 = \frac{1,4}{12} 9,81 \cdot 10^9; \quad \nu_1 = 0,46,$$

$$\nu_2 = \frac{0,46}{12}; \quad s_1 = \beta_1 i = 3,08i, \quad s_2 = \beta_2 i = 1,12i.$$

По формуле (III.80) подсчитаны напряжения  $\sigma_\theta$  по контуру кругового отверстия, когда сила приложена на контуре в точке пересечения оси  $x$  с контуром. При этом рассмотрено два случая действия силы: по направлению положительной оси  $x$  и по направлению отрицательной оси  $y$ . Для сравнения приведены соответствующие данные для изотропной пластинки при  $\nu = 0,3$ . Результаты этих подсчетов для угла  $\theta$  представлены в табл. III.4, где указаны значения напряжения  $\sigma_\theta$  в долях  $P/R$  ( $P$  — сила,  $R$  — радиус отверстия).

Из приведенных в табл. III.4 данных можно сделать следующие выводы:

- 1) для силы, направленной вдоль положительной оси  $x$  значения  $\sigma_\theta$  будут равны по величине и знаку соответствующим значениям  $\sigma_\theta$  в пределах  $0-180^\circ$ ;
- 2) для силы, направленной вдоль отрицательной оси  $y$  значения  $\sigma_\theta$  будут равны по величине и противоположны по знаку соответствующим значениям  $\sigma_\theta$  в пределах  $0-180^\circ$ .

Действие момента. Определим функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  для анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием, когда в произвольной точке ее приложена сосредоточенная пара с моментом  $M$ . Как и ранее, будем предполагать, что край отверстия загружен внешними усилиями с отличным от нуля главным вектором.

\* См. С. Г. Лехницкий [1], гл. II, § 11, а также Г. Н. Савин [4], гл. III, § 1.

Следуя предыдущей схеме, установим сначала вид функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ .

Если к контуру кругового отверстия радиуса  $R$  в бесконечной анизотропной среде приложены постоянные касательные усилия интенсивности  $T$ , то, как следует из (III.40),

$$\varphi(z_1) = \frac{TR^2(1+i s_2)(1-i s_1)}{2(s_1-s_2)(z_1 + \sqrt{z_1^2 - R^2(1+s_1^2)})},$$

$$\psi(z_2) = -\frac{TR^2(1+i s_1)(1-i s_2)}{2(s_1-s_2)(z_2 + \sqrt{z_2^2 - R^2(1+s_2^2)})}.$$
(III.81)

Таблица III.4

$\phi^\circ$	Сила направлена вдоль положительной оси $x$		Сила направлена вдоль отрицательной оси $y$		$\phi^\circ$	Сила направлена вдоль положительной оси $x$		Сила направлена вдоль отрицательной оси $y$	
	Фанерная пластинка	Изотропная пластинка	Фанерная пластинка	Изотропная пластинка		Фанерная пластинка	Изотропная пластинка	Фанерная пластинка	Изотропная пластинка
0	0,152	0,748	$\infty$	$\infty$	100	0,371	0,244	-0,636	-0,156
10	0,156	0,742	2,247	3,561	110	0,135	0,171	-0,487	-0,181
20	0,168	0,722	1,166	1,658	120	0,0289	0,103	-0,325	-0,188
30	0,189	0,690	0,822	0,973	130	-0,0135	0,0421	-0,212	-0,181
40	0,225	0,648	0,662	0,598	140	-0,0303	-0,0109	-0,138	-0,160
50	0,282	0,594	0,565	0,353	150	-0,0368	-0,0538	-0,0881	-0,130
60	0,374	0,533	0,477	0,179	160	-0,0392	-0,0855	-0,0524	-0,0908
70	0,516	0,465	0,331	0,0508	170	-0,0399	-0,105	-0,0244	-0,0468
80	0,685	0,393	0,0067	-0,0438	180	-0,0400	-0,111	0	0
90	0,668	0,318	-0,476	-0,111					

Если в (III.81) положить

$$T = -\frac{M}{2\pi R^2},$$

где  $M$  — главный момент внешних усилий относительно центра отверстия и перейти к пределу, устремляя  $R \rightarrow 0$  так, чтобы  $M$  оставался неизменным, то получим

$$\varphi(z_1) = -\frac{M(1+i s_2)(1-i s_1)}{8\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{1}{z_1},$$

$$\psi(z_2) = \frac{M(1+i s_1)(1-i s_2)}{8\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{1}{z_2}.$$
(III.82)

Функции (III.82) представляют собой функции напряжений для неограниченной анизотропной упругой плоскости в случае, когда в начале координат приложена сосредоточенная пара с моментом  $M$ .

На основании предыдущих формул легко можно получить функции

для анизотропной пластинки с эллиптическим отверстием, в точке  $(x_0, y_0)$  которой приложен сосредоточенный момент  $M$ :

$$\begin{aligned}\varphi_2(z_1) &= -\frac{M(1+is_2)(1-is_1)}{8\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{1}{z_1-z_{10}} + \varphi_{20}(z_1), \\ \psi_2(z_2) &= \frac{M(1+is_1)(1-is_2)}{8\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{1}{z_2-z_{20}} + \psi_{20}(z_2),\end{aligned}\quad (\text{III.83})$$

где  $\varphi_{20}(z_1)$  и  $\psi_{20}(z_2)$  — голоморфные функции вне отверстия.

В общем случае, т. е. когда и край отверстия загружен усилиями, имеющими отличный от нуля главный вектор, функции  $\varphi(z_1)$ ,  $\psi(z_2)$  представляются суммой выражений (III.63) и (III.83):

$$\begin{aligned}\varphi(z_1) &= A^{(1)} \ln z_1 - \frac{M(1+is_2)(1-is_1)}{8\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{1}{z_1-z_{10}} + \varphi_0(z_1), \\ \psi(z_2) &= B^{(1)} \ln z_2 + \frac{M(1+is_1)(1-is_2)}{8\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{1}{z_2-z_{20}} + \psi_0(z_2).\end{aligned}\quad (\text{III.84})$$

Переходя в (III.84) к переменной  $\zeta$ , получаем

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta_1) &= A^{(1)} \ln \zeta - \frac{M(1+is_2)(1-is_1)}{4\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{\zeta \bar{\zeta}_{10}}{(\zeta - \zeta_{10}) [(a - is_1 b) \zeta \bar{\zeta}_{10} - (a + is_1 b)]} + \Phi_0(\zeta), \\ \Psi(\zeta_2) &= B^{(1)} \ln \zeta + \frac{M(1+is_1)(1-is_2)}{4\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{\zeta \bar{\zeta}_{20}}{(\zeta - \zeta_{20}) [(a - is_2 b) \zeta \bar{\zeta}_{20} - (a + is_2 b)]} + \Psi_0(\zeta).\end{aligned}\quad (\text{III.85})$$

Подставив выражения (III.85) в граничные условия (III.69), получим на единичной окружности  $\gamma$ :

$$\begin{aligned}\Phi_0(\sigma) &+ \frac{\bar{s}_1 - s_2}{s_1 - s_2} \bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{\bar{s}_2 - s_1}{s_1 - s_2} \bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \\ &= \frac{1-is_2}{2i(s_1-s_2)} \bar{f} - \frac{1+is_2}{2i(s_1-s_2)} \bar{f} - (A^{(1)} - C_2) \ln \sigma + \\ &+ \frac{M(1+is_2)(1-is_1)}{4\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{\sigma \bar{\zeta}_{10}}{(\sigma - \zeta_{10}) [(a - is_1 b) \sigma \bar{\zeta}_{10} - (a + is_1 b)]} + \\ &+ \frac{\bar{s}_1 - s_2}{s_1 - s_2} \cdot \frac{M(1-i\bar{s}_2)(1+i\bar{s}_1)}{4\pi(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)} \cdot \frac{\sigma \bar{\zeta}_{10}}{(1 - \sigma \bar{\zeta}_{10}) [(a + i\bar{s}_1 b) \bar{\zeta}_{10} - (a - i\bar{s}_1 b) \sigma]} - \\ &- \frac{\bar{s}_2 - s_1}{s_1 - s_2} \cdot \frac{M(1-i\bar{s}_1)(1+i\bar{s}_2)}{4\pi(\bar{s}_1 - \bar{s}_2)} \cdot \frac{\sigma \bar{\zeta}_{20}}{(1 - \sigma \bar{\zeta}_{20}) [(a + i\bar{s}_2 b) \bar{\zeta}_{20} - (a - i\bar{s}_2 b) \sigma]};\end{aligned}\quad (\text{III.86})$$

$$\begin{aligned}\Psi_0(\sigma) &- \frac{\bar{s}_1 - s_1}{s_1 - s_2} \bar{\Phi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \frac{\bar{s}_2 - s_1}{s_1 - s_2} \bar{\Psi}_0\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \\ &= -\frac{1-is_1}{2i(s_1-s_2)} \bar{f} + \frac{1+is_1}{2i(s_1-s_2)} \bar{f} - (B^{(1)} + C_1) \ln \sigma -\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & - \frac{M(1+is_1)(1-is_2)}{4\pi(s_1-s_2)} \cdot \frac{\sigma \zeta_{20}}{(\sigma-\zeta_{20})[(a-is_2b)\sigma \zeta_{20}-(a+is_2b)]} \\ & - \frac{\bar{s}_1-s_1}{s_1-s_2} \cdot \frac{M(1-i\bar{s}_2)(1+i\bar{s}_1)}{4\pi(\bar{s}_1-\bar{s}_2)} \cdot \frac{\sigma \bar{\zeta}_{10}}{(1-\sigma \bar{\zeta}_{10})[(a+i\bar{s}_1b)\bar{\zeta}_{10}-(a-i\bar{s}_1b)\sigma]} + \\ & + \frac{\bar{s}_2-s_1}{s_1-s_2} \cdot \frac{M(1-i\bar{s}_1)(1+i\bar{s}_2)}{4\pi(\bar{s}_1-\bar{s}_2)} \cdot \frac{\sigma \bar{\zeta}_{20}}{(1-\sigma \bar{\zeta}_{20})[(a+i\bar{s}_2b)\bar{\zeta}_{20}-(a-i\bar{s}_2b)\sigma]} \end{aligned}$$

Из граничных условий (III.86) находим функции

$$\begin{aligned} \Phi_0(\zeta) = & \frac{l_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{fd\sigma}{\sigma-\zeta} - \frac{m_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}d\sigma}{\sigma-\zeta} + (A^{(1)} - C_2) \ln \frac{\sigma_1-\zeta}{\zeta} - \\ & - \frac{Mn_1(a+is_1b)\zeta_{10}}{4\pi[(a-is_1b)\zeta \zeta_{10}-(a+is_1b)]} - \frac{M\gamma_1 \bar{\zeta}_{10}}{4\pi(\zeta \bar{\zeta}_{10}-1)} + \frac{M\gamma_2 \bar{\zeta}_{20}}{4\pi(\zeta \bar{\zeta}_{20}-1)}, \end{aligned} \quad (\text{III.87})$$

$$\begin{aligned} \Psi_0(\zeta_2) = & - \frac{l_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{fd\sigma}{\sigma-\zeta} + \frac{m_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}d\sigma}{\sigma-\zeta} + (B^{(1)} + C_1) \ln \frac{\sigma_1-\zeta}{\zeta} + \\ & + \frac{Mn_2(a+is_2b)\zeta_{20}}{4\pi[(a-is_2b)\zeta \zeta_{20}-(a+is_2b)]} + \frac{M\delta_1 \bar{\zeta}_{10}}{4\pi(\zeta \bar{\zeta}_{10}-1)} - \frac{M\delta_2 \bar{\zeta}_{20}}{4\pi(\zeta \bar{\zeta}_{20}-1)}, \end{aligned}$$

где  $C_1$  и  $C_2$  определяются формулой (III.74).

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} n_k = & \frac{(1-is_k)(1+is_{k+1})}{(s_1-s_2)[(a-is_kb)\zeta_{k0}^2-(a+is_kb)]} \quad (s_3=s_1); \\ \gamma_k = & \bar{n}_k \frac{\bar{s}_k-s_2}{s_1-s_2}; \quad \delta_k = \bar{n}_k \frac{\bar{s}_k-s_1}{s_1-s_2} \quad (k=1, 2). \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

На основании (III.85) и (III.87) окончательно имеем

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta_1) = & \frac{l_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{fd\sigma}{\sigma-\zeta_1} - \frac{m_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}d\sigma}{\sigma-\zeta_1} + C_2 \ln \zeta_1 + \\ & + (A^{(1)} - C_2) \ln(\sigma_1 - \zeta_1) - \frac{M}{4\pi} \left( \frac{n_1 \zeta_{10}^2}{\zeta_1 - \zeta_{10}} + \frac{\gamma_1 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10} - 1} - \frac{\gamma_2 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20} - 1} \right), \\ \Psi(\zeta_2) = & - \frac{l_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{fd\sigma}{\sigma-\zeta_2} + \frac{m_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}d\sigma}{\sigma-\zeta_2} - C_1 \ln \zeta_2 + \\ & + (B^{(1)} + C_1) \ln(\sigma_1 - \zeta_2) + \frac{M}{4\pi} \left( \frac{n_2 \zeta_{20}^2}{\zeta_2 - \zeta_{20}} + \frac{\delta_1 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10} - 1} - \frac{\delta_2 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20} - 1} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

Когда контур эллиптического отверстия свободен от внешних усилий, формулы (III.89) принимают вид

$$\Phi(\zeta_1) = -\frac{M}{4\pi} \left( \frac{n_1 \zeta_{10}^2}{\zeta_1 - \zeta_{10}} + \frac{\gamma_1 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10} - 1} - \frac{\gamma_2 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20} - 1} \right),$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{M}{4\pi} \left( \frac{n_2 \zeta_{20}^2}{\zeta_2 - \zeta_{20}} + \frac{\delta_1 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10} - 1} - \frac{\delta_2 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20} - 1} \right).$$
(III.90)

Если момент приложен к точке контура отверстия, то, полагая в (III.88) и (III.90)  $\zeta_{10} = \zeta_{20} = \sigma_0$ , получаем

$$\Phi(\zeta_1) = -\frac{M}{4\pi} \cdot \frac{n_1 \sigma_0^2 + \gamma_1 - \gamma_2}{\zeta_1 - \sigma_0},$$

$$\Psi(\zeta_2) = \frac{M}{4\pi} \cdot \frac{n_2 \sigma_0^2 + \delta_1 - \delta_2}{\zeta_2 - \sigma_0}.$$
(III.91)

В табл. III.5 приведены значения нормального напряжения  $\sigma_\phi$  по контуру кругового отверстия в той же фанерной пластинке, для которой подсчитана табл. III.4 для угла  $\phi$ , изменяющегося в пределах  $0-180^\circ$ , когда момент приложен на контуре отверстия в точке пересечения с осью  $x$ . Значения  $\sigma_\phi$  в пределах изменения угла  $\phi$  от  $0$  до  $(-180^\circ)$  равны по величине и обратны по знаку соответствующим значениям при изменении угла  $\phi$  от  $0$  до  $180^\circ$ . Значения напряжений  $\sigma_\phi$  приведены в долях  $M/R^2$ .

Таблица III.5

$\phi^\circ$	Фанерная пластинка	Изотропная пластинка	$\phi^\circ$	Фанерная пластинка	Изотропная пластинка
0	$-\infty$	$-\infty$	100	-0,443	-0,267
10	-0,664	-3,638	110	-0,228	-0,223
20	-0,364	-1,805	120	-0,166	-0,184
30	-0,284	-1,188	130	-0,0626	-0,148
40	-0,267	-0,874	140	-0,0354	-0,116
50	-0,288	-0,683	150	-0,0204	-0,0853
60	-0,349	-0,551	160	-0,0113	-0,0561
70	-0,465	-0,455	170	-0,0051	-0,0278
80	-0,630	-0,379	180	0	0
90	-0,668	-0,318	—	—	—

В случае изотропной пластинки при свободном крае отверстия аналогичная задача рассмотрена В. Карнес [1]. Некоторые частные случаи задачи, решенной В. Карнес, позднее рассматривались Ф. Szelagowski [1, 2].

## § 2. Решение второй основной задачи для области с эллиптическим отверстием \*

Допустим, что заданы смещения точек контура  $L$  эллиптического отверстия. Контурные условия для функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  в этом случае имеют вид (I.97):

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [\rho_1 \varphi(z_1) + \rho_2 \psi(z_2)] &= g_1(s), \\ 2 \operatorname{Re} [q_1 \varphi(z_1) + q_2 \psi(z_2)] &= g_2(s). \end{aligned} \quad (\text{III.92})$$

Предположим, что главный вектор внешних усилий, которые вызвали заданные смещения точек контура  $L$ , и напряжения на бесконечности равны нулю. Тогда  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  — голоморфные функции в областях  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$ .

Поступая так же, как и в случае первой основной задачи, получаем

$$\begin{aligned} \rho_1 \Phi(\zeta) + \rho_2 \Psi(\zeta) &= \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} g_1(\vartheta) \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + i\alpha_0, \\ q_1 \Phi(\zeta) + q_2 \Psi(\zeta) &= \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} g_2(\vartheta) \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + i\beta_0. \end{aligned} \quad (\text{III.93})$$

или

$$\Phi(\zeta) = \frac{i}{4\pi (\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1)} \int_{\gamma} [\rho_2 g_2(\vartheta) - q_2 g_1(\vartheta)] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_1, \quad (\text{III.94})$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{i}{4\pi (\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1)} \int_{\gamma} [\rho_1 g_2(\vartheta) - q_2 g_1(\vartheta)] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_2,$$

где

$$\lambda_1 = i \frac{\alpha_0 q_2 - \beta_0 \rho_2}{\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1}, \quad \lambda_2 = -i \frac{\alpha_0 q_1 - \beta_0 \rho_1}{\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1}. \quad (\text{III.95})$$

Заменяя  $\zeta$  в функциях (III.94) соответственно ее значениями через  $z_1$  и  $z_2$  по формулам (III.12) и (III.13), получаем окончательный вид искоемых функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ .

Поскольку контурные условия (III.92) удовлетворяются функциями  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  при любых  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , будем в дальнейшем полагать их равными нулю.

Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  голоморфны в своих областях  $S^{(1)}$  и  $S^{(2)}$  (см. рис. III.1). Следовательно, перемещения  $u$  и  $v$  будут ограниченными на бесконечности.

Возвратимся к общему случаю, когда главный вектор внешних усилий, вызвавших заданные перемещения точек контура  $L$ , и напряжения

\* Решение дано Г. Н. Савиным [2]; ранее решение этой задачи с помощью рядов дано С. Г. Лехницким [1, 5]

на бесконечности не равны нулю. Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  в этом случае будут иметь вид (III.14). Постоянные  $A, B, B^*, B'^*$  и  $C'^*$  определяются из тех же уравнений (I.116) и (I.127), что и в случае первой основной задачи.

Отсюда видим, что для определенности решения второй основной задачи необходимо знать еще главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру  $L$  отверстия. Подставив функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  из (III.14) в контурные условия (III.92) и перенеся известные функции в правые части, получим

$$2\operatorname{Re}[\rho_1\varphi_0(z_1) + \rho_2\psi_0(z_2)] = g_1^0(s), \quad (\text{III.96})$$

$$2\operatorname{Re}[q_1\varphi_0(z_1) + q_2\psi_0(z_2)] = g_2^0(s),$$

где

$$g_1^0(s) = g_1(\vartheta) - 2\operatorname{Re}[A\rho_1 \ln z_1 + B^*\rho_1 z_1 + B\rho_2 \ln z_2 + \rho_2(B'^* + iC'^*)z_2], \quad (\text{III.97})$$

$$g_2^0(s) = g_2(\vartheta) - 2\operatorname{Re}[Aq_1 \ln z_1 + B^*q_1 z_1 + Bq_2 \ln z_2 + q_2(B'^* + iC'^*)z_2].$$

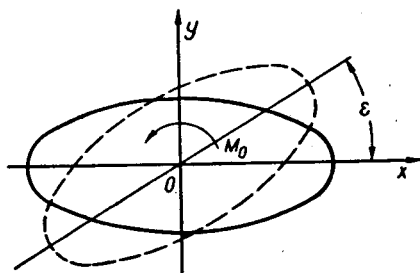


Рис. III.17

Из (III.96) видно, что если подставить в формулы (III.94) вместо  $g_1(s)$  и  $g_2(s)$  функции  $g_1^0(s)$  и  $g_2^0(s)$  (III.97), получим искомые функции  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$ . Возвращаясь к переменным  $z_1$  и  $z_2$  по формулам (III.12) и (III.13), получим функции  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$ , а, внося их в формулы (III.14), получим окончательный вид функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ .

Напряжение в анизотропной пластинке возле абсолютно жесткого эллиптического ядра (или кольца), находящегося под действием пары  $M_0$ . Допустим, что напряжения на бесконечности равны нулю. Под действием пары  $M_0$  жесткое ядро может только повернуться на некоторый угол  $\varepsilon$  (рис. III.17), который нужно определить. Следовательно, перемещения точек контура

$$u = -\varepsilon y, \quad v = \varepsilon x,$$

т. е.

$$g_1 = -\varepsilon y = -i \frac{\varepsilon b}{2} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \quad (\text{III.98})$$

$$g_2 = \varepsilon x = \frac{\varepsilon a}{2} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right).$$

Подставляя найденные значения  $g_1$  и  $g_2$  в формулы (III.94), найдем

$$\Phi(\zeta) = -\frac{\varepsilon(a\rho_2 + ibq_2)}{2(\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1)} \zeta,$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{\varepsilon(a\rho_1 + ibq_1)}{2(\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1)} \zeta.$$

Подставляя сюда вместо  $\zeta$  ее значения через  $z_1$  и  $z_2$  из (III.12) и (III.13), получим

$$\varphi(z_1) = -\frac{\varepsilon(ap_2 + ibq_2)}{2(p_1q_2 - p_2q_1)} \cdot \frac{a - is_1b}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2b^2)}}; \quad (III.99)$$

$$\psi(z_2) = \frac{\varepsilon(ap_1 + ibq_1)}{2(p_1q_2 - p_2q_1)} \cdot \frac{a - is_2b}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2b^2)}}.$$

Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (III.99), очевидно, удовлетворяют условию  $\varphi(\infty) = \psi(\infty) = 0$ , и, следовательно, перемещения на бесконечности равны нулю.

Определим величину  $\varepsilon$  из условия равенства момента  $M_0$ , приложенного к ядру, и момента усилий, передающихся от ядра на контур эллиптического отверстия. Выражение для момента дано формулой (I.101). Так как функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  однозначные, то в нашем случае формула примет вид

$$M_0 = 2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)]. \quad (III.100)$$

Отсюда следует, что главный момент  $M$  усилий, действующих со стороны ядра на окружающую среду, будет равен приращению выражения

$$2\text{Re} \left\{ \int_{L^{(1)}} \varphi(z_1) dz_1 + \int_{L^{(2)}} \psi(z_2) dz_2 \right\}$$

при обходе по контуру эллипса по часовой стрелке. Очевидно,

$$\int_{L^{(1)}} \varphi(z_1) dz_1 = \int_{\gamma} \Phi(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma,$$

$$\int_{L^{(2)}} \psi(z_2) dz_2 = \int_{\gamma} \Psi(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \Phi(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma &= -\frac{\varepsilon(ap_2 + ibq_2)}{2(p_1q_2 - p_2q_1)} \int_{\gamma} \sigma \left[ \frac{a + is_1b}{2} - \frac{a - is_1b}{2} \frac{1}{\sigma^2} \right] d\sigma = \\ &= \left[ \frac{\varepsilon(ap_2 + ibq_2)(a - is_1b)}{4(p_1q_2 - p_2q_1)} \ln \sigma \right]_{\gamma} = i \frac{\varepsilon\pi(ap_2 + ibq_2)(a - is_1b)}{2(p_1q_2 - p_2q_1)}. \end{aligned}$$

Поступая аналогично, найдем

$$\int_{\gamma} \Psi(\sigma) \omega'(\sigma) d\sigma = -i \frac{\varepsilon\pi(ap_1 + ibq_1)(a - is_2b)}{2(p_1q_2 - p_2q_1)}.$$

Следовательно,

$$M_0 = \varepsilon \text{Re} \left\{ i \frac{\pi [(ap_2 + ibq_2)(a - is_1b) - (ap_1 + ibq_1)(a - is_2b)]}{p_1q_2 - p_2q_1} \right\}. \quad (III.101)$$

Обозначим для сокращения записи через  $N$  выражение, стоящее в фигурных скобках (III.101); тогда

$$\varepsilon = \frac{M_0}{\operatorname{Re} N}. \quad (\text{III.102})$$

Подставив найденное значение  $\varepsilon$  из (III.102) в функции (III.99), найдем окончательный вид функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ .

Растяжение анизотропной бесконечной пластинки с эллиптическим абсолютно жестким ядром (или кольцом). Допустим, что анизотропная пластинка с впаиванным абсолютно жестким эллиптическим ядром растягивается на бесконечности усилиями  $p$ , составляющими с осью  $Ox$  угол  $\alpha$  (рис. III.18). Жесткое ядро в этой пластинке может поступательно переместиться и повернуться на некоторый угол  $\varepsilon$ . Поступательным перемещением ядра можно пренебречь, так как при нем упругое состояние материала, окружающего ядро, не изменится. Следовательно, как и в предыдущей задаче, перемещения точек контура

$$u = -\varepsilon y, \quad v = \varepsilon x. \quad (\text{III.103})$$

Рис. III.18.

Для решения поставленной задачи надо брать не  $g_1$  и  $g_2$  (III.98), а  $g_1^0$  и  $g_2^0$  (III.97),

положив в них  $A = B = 0$ , так как главный вектор внешних усилий равен нулю; значения  $B^*$ ,  $B'^*$ ,  $C'^*$  даны формулами (III.19).

Итак,

$$\begin{aligned} g_1^0 &= -\varepsilon y - 2\operatorname{Re}[B^* \rho_1 z_1 + \rho_2 (B'^* + iC'^*) z_2], \\ g_2^0 &= \varepsilon x - 2\operatorname{Re}[B^* q_1 z_1 + q_2 (B'^* + iC'^*) z_2], \end{aligned} \quad (\text{III.104})$$

или

$$\begin{aligned} g_1^0 &= -i \frac{\varepsilon b}{2} \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right) - \left\{ B^* \rho_1 \left( \frac{a + is_1 b}{2} \sigma + \frac{a - is_1 b}{2} \frac{1}{\sigma} \right) + \right. \\ &+ B^* \bar{\rho}_1 \left( \frac{a - i\bar{s}_1 b}{2} \cdot \frac{1}{\sigma} + \frac{a + i\bar{s}_1 b}{2} \sigma \right) + \rho_2 (B'^* + iC'^*) \left( \frac{a + is_2 b}{2} \sigma + \frac{a - is_2 b}{2} \frac{1}{\sigma} \right) + \\ &\left. + \bar{\rho}_2 (B'^* - iC'^*) \left( \frac{a - i\bar{s}_2 b}{2} \frac{1}{\sigma} + \frac{a + i\bar{s}_2 b}{2} \sigma \right) \right\}; \\ g_2^0 &= \frac{a\varepsilon}{2} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right) - \left\{ B^* q_1 \left( \frac{a + is_1 b}{2} \sigma + \frac{a - is_1 b}{2} \frac{1}{\sigma} \right) + \right. \\ &+ B^* \bar{q}_1 \left( \frac{a - i\bar{s}_1 b}{2} \frac{1}{\sigma} + \frac{a + i\bar{s}_1 b}{2} \sigma \right) + q_2 (B'^* + iC'^*) \left( \frac{a + is_2 b}{2} \sigma + \frac{a - is_2 b}{2} \frac{1}{\sigma} \right) + \\ &\left. + \bar{q}_2 (B'^* - iC'^*) \left( \frac{a - i\bar{s}_2 b}{2} \frac{1}{\sigma} + \frac{a + i\bar{s}_2 b}{2} \sigma \right) \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя в формулы (III.94) вместо  $g_1(\vartheta)$  и  $g_2(\vartheta)$  найденные выражения для  $g_1^0$  и  $g_2^0$  и замечая, что

$$\int_{\gamma} \sigma \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \frac{d\sigma}{\sigma} = 4\pi i \zeta; \quad \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \frac{d\sigma}{\sigma} = 0,$$

получаем

$$\begin{aligned} \Phi_0(\zeta) &= -(P_1 \varepsilon + Q_1) \zeta, \\ \Psi_0(\zeta) &= (P_2 \varepsilon + Q_2) \zeta, \end{aligned} \quad (\text{III.105})$$

где

$$P_1 = \frac{ap_2 + ibq_2}{2(p_1q_2 - p_2q_1)}; \quad P_2 = \frac{ap_1 + ibq_1}{2(p_1q_2 - p_2q_1)};$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{2(p_1q_2 - p_2q_1)} \{B^* [(a + is_1b)(p_1q_2 - q_1p_2) + \\ &+ (a + is_1\bar{b})(\bar{p}_1q_2 - \bar{q}_1p_2)] + (B'^* - iC'^*)(a + i\bar{s}_2b)(\bar{p}_2q_2 - p_2\bar{q}_2)\}; \end{aligned} \quad (\text{III.106})$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{1}{2(p_1q_2 - p_2q_1)} \{B^* (a + i\bar{s}_1b)(\bar{p}_1q_1 - \bar{q}_1p_1) + \\ &+ (B'^* + iC'^*)(a + is_2b)(p_2q_1 - p_1q_2) + (B'^* - iC'^*)(a + i\bar{s}_2b)(\bar{p}_2q_1 - \bar{q}_2p_1)\}. \end{aligned}$$

Переходя в функциях  $\Phi_0(\zeta)$  и  $\Psi_0(\zeta)$  (III.105) к переменным  $z_1$  и  $z_2$ , получаем

$$\Phi_0(z_1) = -\frac{(P_1 \varepsilon + Q_1)(a - is_1b)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}},$$

$$\Psi_0(z_2) = \frac{(P_2 \varepsilon + Q_2)(a - is_2b)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}}.$$

Следовательно, функции

$$\varphi(z_1) = B^* z_1 - \frac{(P_1 \varepsilon + Q_1)(a - is_1b)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}}, \quad (\text{III.107})$$

$$\psi(z_2) = (B'^* + iC'^*) z_2 + \frac{(P_2 \varepsilon + Q_2)(a - is_2b)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}}.$$

Для того чтобы окончательно определить функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (III.107), необходимо еще определить угол поворота ядра  $\varepsilon$  из условия равенства нулю момента усилий, действующих на ядро со стороны окружающего материала. Этот момент определим по формуле (I.101). Так как функции (III.107) — однозначные, то остается вычислить приращение выражения

$$2\text{Re}[F_1(z_1) + F_2(z_2)] \quad (\text{III.108})$$

при обходе по контуру эллиптического отверстия и приравнять его к нулю. Здесь

$$F_1(z_1) = \int_{L^{(1)}} \varphi(z_1) dz_1, \quad F_2(z_2) = \int_{L^{(2)}} \psi(z_2) dz_2.$$

Подобные выражения были вычислены нами в предыдущем разделе. Приравнявая нулю приращение выражения (III.108), получаем

$$2\operatorname{Re} \{(P_1\varepsilon + Q_1)(a - is_1b)i - (P_2\varepsilon + Q_2)(a - is_2b)i\} = 0.$$

Разрешая последнее уравнение относительно  $\varepsilon$ , находим

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{Re} \{i[Q_2(a - is_2b) - Q_1(a - is_1b)]\}}{\operatorname{Re} \{i[P_1(a - is_1b) - P_2(a - is_2b)]\}}. \quad (\text{III.109})$$

Подставляя найденное значение  $\varepsilon$  из (III.109) в функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (III.107), найдем окончательный их вид.

Если ядро удерживается от поворота, то  $\varepsilon=0$ . Положив в функциях  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  (III.109)  $\varepsilon=0$ , получим решение для последнего случая. Продифференцировав функции  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$  соответственно по  $z_1$  и по  $z_2$  при  $\varepsilon=0$  и положив

$$z_1 = a \cos \vartheta + s_1 b \sin \vartheta, \quad z_2 = a \cos \vartheta + s_2 b \sin \vartheta,$$

получим выражения для функций по контуру спая между пластинкой и эллиптическим ядром:

$$\varphi_0'(z_1) = -Q_1 \frac{\sin \vartheta + i \cos \vartheta}{a \sin \vartheta - s_1 b \cos \vartheta}, \quad (\text{III.110})$$

$$\psi_0'(z_2) = Q_2 \frac{\sin \vartheta + i \cos \vartheta}{a \sin \vartheta - s_2 b \cos \vartheta}.$$

Подставляя (III.110) в (III.37) при  $s_1 = i\beta_1$  и  $s_2 = i\beta_2$  и принимая во внимание, что  $Q_1$  и  $Q_2$  действительные числа\*, получим формулы для компонентов напряжений по контуру спая:

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta} &= p \frac{b^2 \cos^2 \vartheta}{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta} + \frac{2[(Q_2 - Q_1) a \sin^2 \vartheta + (Q_2 \beta_2 - Q_1 \beta_1) b \cos^2 \vartheta]}{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta}; \\ \sigma_{\vartheta} &= \frac{1}{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta} \left\{ pa^2 \sin^2 \vartheta + 2\operatorname{Re} \left[ \frac{\sin \vartheta + i \cos \vartheta}{a \sin \vartheta - s_2 b \cos \vartheta} Q_2 (as_2 \sin \vartheta + b \cos \vartheta)^2 - \frac{\sin \vartheta + i \cos \vartheta}{a \sin \vartheta - s_1 b \cos \vartheta} Q_1 (as_1 \sin \vartheta + b \cos \vartheta)^2 \right] \right\}; \\ \tau_{\vartheta\vartheta} &= -\frac{1}{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta} \{ pab \sin \vartheta \cos \vartheta - 2\operatorname{Re} \{ [Q_2 (s_2 a \sin \vartheta + b \cos \vartheta) - Q_1 (s_1 a \sin \vartheta + b \cos \vartheta)] (\sin \vartheta + i \cos \vartheta) \} \}. \quad (\text{III.111}) \end{aligned}$$

\* Величины  $P_1$  и  $P_2$  (III.106) при этом будут чисто мнимыми; следовательно,  $\varepsilon$  (III.109) при этих значениях  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $P_1$  и  $P_2$  будет равно нулю.



Если среда изотропна, то  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ ;  $a_{11} = a_{12} = 1/E$ ,  $a_{12} = -\nu/E$ , и формула (III.111) примет вид

$$\sigma_{\theta} = \frac{p}{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} \times \left\{ b^2 \cos^2 \theta + \frac{[a(1-\nu) - 2b\nu] a \sin^2 \theta + [2a - \nu b(1-\nu)] b \cos^2 \theta}{3 + 2\nu - \nu^2} \right\}. \quad (\text{III.112})$$

Распределение напряжений в анизотропной пластинке с впаиваемым жестким эллиптическим ядром (или кольцом) при действии силы или момента, приложенных в какой-либо точке пластинки \*. Предположим, что указанная анизотропная пластинка находится под действием силы или момента, приложенных в произвольной точке ее. Жесткое ядро может поступательно сместиться и повернуться на некоторый угол  $\varepsilon$ . Абстрагируясь от поступательного перемещения ядра, смещения контурных точек пластинки можно представить в виде (III.103). Для решения задачи выберем декартову систему координат, как показано на рис. III.17 или III.18. Действие силы. Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, приходим к следующим выражениям для функций напряжений:

$$\Phi(\zeta_1) = A^{(2)} \ln(\zeta_1 - \zeta_{10}) + Q_1^{(1)} \ln \frac{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10} - 1} + Q_1^{(2)} \ln \frac{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20} - 1} - \varepsilon \frac{P_1}{\zeta_1}, \quad (\text{III.113})$$

$$\Psi(\zeta_2) = B^{(2)} \ln(\zeta_2 - \zeta_{20}) - Q_2^{(1)} \ln \frac{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10} - 1} - Q_2^{(2)} \ln \frac{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20} - 1} + \varepsilon \frac{P_2}{\zeta_2},$$

где  $P_1$  и  $P_2$  имеют значения (III.106);

$$Q_1^{(1)} = \bar{A}^{(2)} \frac{\bar{p}_1 q_2 - p_2 \bar{q}_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1}; \quad Q_1^{(2)} = \bar{B}^{(2)} \frac{\bar{p}_2 q_2 - p_2 \bar{q}_2}{p_1 q_2 - p_2 q_1}; \quad (\text{III.114})$$

$$Q_2^{(1)} = \bar{A}^{(2)} \frac{\bar{p}_1 q_1 - p_1 \bar{q}_1}{p_1 q_2 - p_2 q_1}; \quad Q_2^{(2)} = \bar{B}^{(2)} \frac{\bar{p}_2 q_1 - p_1 \bar{q}_2}{p_1 q_2 - p_2 q_1};$$

величина  $\varepsilon$ , как и ранее, определяется из условия равенства нулю момента усилий, действующих на ядро со стороны упругого материала:

$$\varepsilon = \frac{1}{\text{Re} \{ i [P_1 (a - is_1 b) - P_2 (a - is_2 b)] \}} \times \left\{ \text{Re} \left[ i \left[ \frac{(a + is_1 b) A^{(2)} + (a - is_1 b) Q_1^{(1)} - (a - is_2 b) Q_2^{(1)}}{\zeta_{10}} + \frac{(a + is_2 b) B^{(2)} + (a - is_1 b) Q_1^{(2)} - (a - is_2 b) Q_2^{(2)}}{\zeta_{20}} \right] \right\}. \quad (\text{III.115})$$

\* Решение дано Д. В. Грилишким [2].

Действие момента. Функции

$$\Phi(\zeta_1) = -\frac{M}{2\pi} \left[ \frac{n_1 \zeta_{10}^2}{\zeta_1 - \bar{\zeta}_{10}} + \frac{L_1^{(1)} \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10} - 1} - \frac{L_1^{(2)} \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20} - 1} \right] - \varepsilon \frac{P_1}{\zeta_1}, \quad (III.116)$$

$$\Psi(\zeta_2) = \frac{M}{2\pi} \left[ \frac{n_2 \zeta_{20}^2}{\zeta_2 - \bar{\zeta}_{20}} + \frac{L_2^{(1)} \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10} - 1} - \frac{L_2^{(2)} \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20} - 1} \right] + \varepsilon \frac{P_2}{\zeta_2},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  имеют значения (III.88);

$$L_1^{(1)} = \bar{n}_1 \frac{\bar{p}_1 q_2 - p_2 \bar{q}_1}{p_1 q_2 - p_2 \bar{q}_1}; \quad L_2^{(1)} = \bar{n}_1 \frac{\bar{p}_1 q_1 - p_1 \bar{q}_1}{p_1 q_2 - p_2 \bar{q}_1};$$

$$L_1^{(2)} = \bar{n}_2 \frac{\bar{p}_2 q_2 - p_2 \bar{q}_2}{p_1 q_2 - p_2 \bar{q}_1}; \quad L_2^{(2)} = \bar{n}_2 \frac{\bar{p}_2 q_1 - q_2 p_1}{p_1 q_2 - p_2 \bar{q}_1}; \quad (III.117)$$

$$\varepsilon = \frac{M \operatorname{Re} \{ i [(a + is_1 b) n_1 - (a + is_2 b) n_2 + (a - is_1 b) (L_1^{(1)} - L_1^{(2)}) - (a - is_2 b) (L_2^{(1)} - L_2^{(2)})] \}}{4\pi \operatorname{Re} \{ i [P_1 (Q - is_1 b) - P_2 (Q - is_2 b)] \}} \quad (III.118)$$

### § 3. Анизотропная пластинка с впаянной круговой изотропной шайбой \*

Анизотропные пластинки с упругим или жестким ядром находят применение в качестве элементов конструкций в технике. Задача об упругом равновесии такой неоднородной пластинки рассматривалась рядом авторов \*\*. Так, С. Г. Лехницкий [1, 3] дал общее решение задачи о распределении напряжений в анизотропной пластинке с впаянным или вклеенным эллиптическим анизотропным ядром, когда пластинка находится под действием произвольных усилий, распределенных по краям. В этих же работах исследуется также ряд практически важных частных случаев растяжения, изгиба и сдвига пластинки. Растяжение изотропной пластинки с впаянным изотропным эллиптическим ядром рассмотрено G. Kaiser [1] с помощью метода эллиптических координат. М. П. Шереметьевым [1, 2] получено решение для анизотропной пластинки с круговым отверстием, край которого подкреплен тонким упругим изотропным кольцом, при растяжении в двух направлениях.

В настоящем параграфе излагается методика решения задачи об упругом равновесии анизотропной пластинки с впаянной круговой изотропной шайбой при действии сосредоточенных нагрузок, приложенных в произвольной точке пластинки или ядра. Предложенный прием является обобщением способа решения аналогичных задач для изотроп-

\* Решение дано Г. Н. Савиным и Д. В. Грилицким [2].

\*\* См. например работы J. Dundurs, M. Hetenyi [1] и M. Hetenyi, J. Dundurs [1].

ной пластинки с впаянным упругим ядром. При решении задач мы пользовались таблицей интегралов, приведенной в § 4 гл. I.

**Сила, приложенная к пластинке.** С помощью данных, полученных в § 1 гл. III, можно построить решение более общей задачи о взаимодействии однородной анизотропной пластинки с впаянным круглым изотропным ядром. Здесь мы рассмотрим действие силы, приложенной в точке пластинки.

Функции для ядра (шайбы)

$$\begin{aligned}\varphi_1(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f dt}{t - \zeta} - \bar{a}_1 \zeta, \\ \psi_1(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} dt}{t - \zeta} - \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f dt}{t - \zeta} + \frac{a_1 + \bar{a}_1}{\zeta},\end{aligned}\quad (\text{III.119})$$

где  $a_1$  — постоянная, подлежащая определению;  $t$  — точка на единичной окружности.

Функции  $\varphi_2(z_1)$ ,  $\psi_2(z_2)$  для пластинки определяются на основании формул (III.75) и (III.76), где в данном случае следует положить

$$A^{(1)} = B^{(1)} = C_1 = C_2 = 0:$$

$$\begin{aligned}\varphi_2(z_1) &= A^{(2)} \ln(\zeta_1 - \zeta_{10}) + A_2 \ln \frac{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_1 \zeta_{10} - 1} + B_2 \ln \frac{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_1 \zeta_{20} - 1} + \\ &+ \frac{l_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f dt}{t - \zeta_1} - \frac{m_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} dt}{t - \zeta_1},\end{aligned}\quad (\text{III.120})$$

$$\begin{aligned}\psi_2(z_2) &= B^{(2)} \ln(\zeta_2 - \zeta_{20}) - A_1 \ln \frac{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_2 \zeta_{10} - 1} - B_1 \ln \frac{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_2 \zeta_{20} - 1} - \\ &- \frac{l_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f dt}{t - \zeta_2} + \frac{m_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} dt}{t - \zeta_2}.\end{aligned}$$

Здесь  $\zeta_k$  и  $\zeta_{k0}$  ( $k=1,2$ ) даны формулами (III.12), (III.13) и (III.71), если положить в них  $a=b=R$ .

Условие непрерывности вектора смещения на линии спая найдем из (I.10) и (I.97). Это условие удобно представить в виде двух соотношений:

$$\begin{aligned}[\kappa_1 \varphi_1(\sigma) + \kappa_1 \overline{\varphi_1(\sigma)} - \sigma \overline{\varphi_1'(\sigma)} - \overline{\sigma \varphi_1'(\sigma)} - \overline{\psi_1(\sigma)} - \psi_1(\sigma)]^+ &= \\ = 4\mu_1 [p_1 \varphi_2(\sigma) + \overline{p_1 \varphi_2(\sigma)} + p_2 \psi_2(\sigma) + \overline{p_2 \psi_2(\sigma)}]^- & \text{ (на } \gamma); \quad (\text{III.121}) \\ [\kappa_1 \varphi_1(\sigma) - \kappa_1 \overline{\varphi_1(\sigma)} - \sigma \overline{\varphi_1'(\sigma)} + \overline{\sigma \varphi_1'(\sigma)} - \overline{\psi_1(\sigma)} + \psi_1(\sigma)]^+ &= \\ = 4\mu i [q_1 \varphi_2(\sigma) + \overline{q_1 \varphi_2(\sigma)} + q_2 \psi_2(\sigma) + \overline{q_2 \psi_2(\sigma)}]^- & \text{ (на } \gamma).\end{aligned}$$

Удовлетворив соотношениям (III.121) на единичной окружности  $\gamma$ , получим систему двух сингулярных интегральных уравнений для определения искомых функций  $f(t)$  и  $\bar{f}(\bar{t})$ :

$$af(\sigma) + \bar{a}\bar{f}(\bar{\sigma}) + \frac{b}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t-\sigma} - \frac{\bar{b}}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}(\bar{t}) d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{\sigma}} = F_1(\sigma) \quad (\sigma \in \gamma);$$

$$cf(\sigma) - \bar{c}\bar{f}(\bar{\sigma}) + \frac{d}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t-\sigma} + \frac{\bar{d}}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}(\bar{t}) d\bar{t}}{\bar{t}-\bar{\sigma}} = F_2(\sigma) \quad (\sigma \in \gamma). \quad (\text{III.122})$$

В формулах (III.122) введены обозначения:

$$p_1 A^{(2)} - \bar{p}_1 \bar{A}_2 + \bar{p}_2 \bar{A}_1 = A_3, \quad q_1 A^{(2)} - \bar{q}_1 \bar{A}_2 + \bar{q}_2 \bar{A}_1 = A_4, \quad (\text{III.123})$$

$$p_2 B^{(2)} - \bar{p}_1 \bar{B}_2 + \bar{p}_2 \bar{B}_1 = B_3, \quad q_2 B^{(2)} - \bar{q}_1 \bar{B}_2 + \bar{q}_2 \bar{B}_1 = B_4;$$

$$\bar{p}_1 \bar{m}_2 - \bar{p}_2 \bar{m}_1 - p_1 l_2 + p_2 l_1 = 2d_1, \quad \bar{q}_1 \bar{m}_2 - \bar{q}_2 \bar{m}_1 - q_1 l_2 + q_2 l_1 = 2d_2, \quad (\text{III.124})$$

$$\bar{p}_1 \bar{m}_2 - \bar{p}_2 \bar{m}_1 + p_1 l_2 - p_2 l_1 = d_3, \quad \bar{q}_1 \bar{m}_2 - \bar{q}_2 \bar{m}_1 + q_1 l_2 - q_2 l_1 = d_4;$$

$$\frac{\kappa_1 - 1}{2} - 4\mu_1 d_1 = a, \quad \frac{\kappa_1 + 1}{2} - 2\mu_1 d_3 = b,$$

$$(\text{III.125})$$

$$\frac{\kappa_1 - 1}{2} - 4\mu_1 i d_2 = c, \quad \frac{\kappa_1 + 1}{2} - 2\mu_1 i d_4 = d;$$

$$F_1(\sigma) = (\kappa_1 + 1)(\bar{a}_1 \sigma + a_1 \bar{\sigma}) + 4\mu_1 i \left[ A_3 \ln(\sigma - \zeta_{10}) + B_3 \ln(\sigma - \zeta_{20}) + \bar{A}_3 \ln \frac{1 - \sigma \bar{\zeta}_{10}}{\sigma} + \bar{B}_3 \ln \frac{1 - \sigma \bar{\zeta}_{20}}{\sigma} \right], \quad (\text{III.126})$$

$$F_2(\sigma) = (\kappa_1 + 1)(\bar{a}_1 \sigma - a_1 \bar{\sigma}) + 4\mu_1 i \left[ A_4 \ln(\sigma - \zeta_{10}) + B_4 \ln(\sigma - \zeta_{20}) + \bar{A}_4 \ln \frac{1 - \sigma \bar{\zeta}_{10}}{\sigma} + \bar{B}_4 \ln \frac{1 - \sigma \bar{\zeta}_{20}}{\sigma} \right].$$

Систему уравнений (III.122) можно свести с помощью некоторого специальным образом подобранного параметра  $N$  к двум независимым уравнениям. Для этого поступим следующим образом\*.

Умножим второе уравнение системы (III.122) на  $N$  и сложим с первым уравнением:

$$(\alpha + Nc)f(\sigma) + (\bar{\alpha} - N\bar{c})\bar{f}(\bar{\sigma}) + \frac{b + Nd}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t-\sigma} + \frac{-\bar{b} + N\bar{d}}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t-\sigma} =$$

$$= F_1(\sigma) + NF_2(\sigma) \quad (\sigma \in \gamma). \quad (\text{III.127})$$

\* См. Д. В. Грилицкий [6].

Поскольку постоянная  $N$  произвольная, подберем ее таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{a + Nc}{a - Nc} = \frac{b + Nd}{-b + Nd} = \frac{1}{\lambda}, \quad (III.128)$$

которое приводит к следующему квадратному уравнению относительно  $N$ :

$$(c\bar{d} + \bar{c}d)N^2 + (a\bar{d} - \bar{c}b - \bar{a}d + \bar{c}b)N - (a\bar{b} + \bar{a}b) = 0. \quad (III.129)$$

Решив уравнение (III.129), получим два значения для  $N$ :

$$N_{1,2} = \frac{-(a\bar{d} - \bar{c}b - \bar{a}d + \bar{c}b) \pm \sqrt{(a\bar{d} - \bar{c}b - \bar{a}d + \bar{c}b)^2 + 4(c\bar{d} + \bar{c}d)(a\bar{b} + \bar{a}b)}}{2(c\bar{d} + \bar{c}d)}. \quad (III.130)$$

Если ввести обозначения

$$\begin{aligned} a + N_k c &= Q_k, & \bar{a} - N_k \bar{c} &= \lambda_k Q_k, \\ b + N_k d &= K_k, & -\bar{b} + N_k \bar{d} &= \lambda_k K_k \end{aligned} \quad (III.131)$$

$(k = 1, 2),$

то уравнение (III.127) приведет к двум независимым уравнениям:

$$Q_k(f + \lambda_k \bar{f}) + \frac{K_k}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{(f + \lambda_k \bar{f}) dt}{t - \sigma} = F_1(\sigma) + N_k F_2(\sigma) \quad (III.132)$$

$(\sigma \in \gamma) \quad (k = 1, 2);$

$\lambda_k$  определяется из соотношения (III.128). К каждому из уравнений (III.132) теперь применима формула

$$f(\sigma) = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[ aF(\sigma) - \frac{b}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(t) dt}{t - \sigma} \right] \quad (\sigma \in \gamma),$$

на основании которой

$$f + \lambda_k \bar{f} = \frac{1}{Q_k^2 - K_k^2} \left[ Q_k(F_1 + N_k F_2) - \frac{K_k}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{(F_1 + N_k F_2) dt}{t - \sigma} \right] \quad (\sigma \in \gamma). \quad (III.133)$$

Разрешая уравнения (III.133) относительно  $f(\sigma)$  и  $\bar{f}(\sigma)$ , находим искомые функции

$$\begin{aligned} f(\sigma) &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \frac{\lambda_2}{Q_1^2 - K_1^2} \left[ Q_1(F_1(\sigma) + N_1 F_2(\sigma)) - \frac{K_1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1(t) + N_1 F_2(t)}{t - \sigma} dt \right] - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda_1}{Q_2^2 - K_2^2} \left[ Q_2(F_1(\sigma) + N_2 F_2(\sigma)) - \frac{K_2}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1(t) + N_2 F_2(t)}{t - \sigma} dt \right] \right\}; \end{aligned} \quad (III.134)$$

$$\overline{f}(\sigma) = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left\{ \frac{1}{Q_1^2 - K_1^2} \left[ Q_1 (F_1(\sigma) + N_1 F_2(\sigma)) - \frac{K_1}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1(t) + N_1 F_2(t)}{t - \sigma} dt \right] - \frac{1}{Q_2^2 - K_2^2} \left[ Q_2 (F_1(\sigma) + N_2 F_2(\sigma)) - \frac{K_2}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_1(t) + N_2 F_2(t)}{t - \sigma} dt \right] \right\}.$$

По известным функциям  $f(\sigma)$  и  $\overline{f}(\sigma)$  функции напряжений для шайбы и пластинки определяются \* на основании формул (III.119) и (III.120):

$$f(\sigma) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ H_1 \ln(\sigma - \zeta_{10}) + H_2 \ln(\sigma - \zeta_{20}) + H_3 \ln \frac{1 - \sigma \bar{\zeta}_{10}}{\sigma} + H_4 \ln \frac{1 - \sigma \bar{\zeta}_{20}}{\sigma} + H_5 \bar{a}_1 \sigma + H_6 \frac{a_1}{\sigma} \right],$$

$$\overline{f}(\sigma) = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ h_1 \ln(\sigma - \zeta_{10}) + h_2 \ln(\sigma - \zeta_{20}) + h_3 \ln \frac{1 - \sigma \bar{\zeta}_{10}}{\sigma} + h_4 \ln \frac{1 - \sigma \bar{\zeta}_{20}}{\sigma} + h_5 \bar{a}_1 \sigma + h_6 \frac{a_1}{\sigma} \right]; \quad (\text{III.135})$$

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} [H_1 \ln(\zeta - \zeta_{10}) + H_2 \ln(\zeta - \zeta_{20})] + \left( \frac{H_5}{\lambda_2 - \lambda_1} - 1 \right) \bar{a}_1 \zeta,$$

$$\psi_1(\zeta) = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} [h_1 \ln(\zeta - \zeta_{10}) + h_2 \ln(\zeta - \zeta_{20}) + h_3 \bar{a}_1 \zeta] - \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1) \zeta} \left[ \frac{H_1}{\zeta - \zeta_{10}} + \frac{H_2}{\zeta - \zeta_{20}} + H_5 \bar{a}_1 \right] + \frac{a_1 + \bar{a}_1}{\zeta}; \quad (\text{III.136})$$

$$\varphi_2(z_1) = A^{(2)} \ln(\zeta_1 - \zeta_{10}) + \left( A_2 + \frac{l_2 H_3 - m_2 h_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \ln \frac{\zeta_1}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10} - 1} + \left( B_2 + \frac{l_2 H_4 - m_2 h_4}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \ln \frac{\zeta_1}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20} - 1} - \frac{l_2 H_6 - m_2 h_6}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{a_1}{\zeta_1}, \quad (\text{III.137})$$

$$\psi_2(z_2) = B^{(2)} \ln(\zeta_2 - \zeta_{20}) - \left( A_1 + \frac{l_1 H_3 - m_1 h_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \ln \frac{\zeta_2}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10} - 1} - \left( B_1 + \frac{l_1 H_4 - m_1 h_4}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \ln \frac{\zeta_2}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20} - 1} + \frac{l_1 H_6 - m_1 h_6}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{a_1}{\zeta_2};$$

\* Здесь и далее в этом параграфе мы приведем окончательные результаты, опуская промежуточные выкладки вследствие их громоздкости.

$a_1$  — коэффициент при  $\zeta$  в разложении функции  $\varphi_1(\zeta)$  в окрестности точки  $\zeta = 0$ :

$$a_1 = \frac{\frac{H_1 \zeta_{20} + H_2 \zeta_{10}}{(\lambda_2 - \lambda_1) \zeta_{10} \zeta_{20}} - \left(1 - \frac{H_5}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \frac{\bar{H}_1 \bar{\zeta}_{20} + \bar{H}_2 \bar{\zeta}_{10}}{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1) \bar{\zeta}_{10} \bar{\zeta}_{20}}}{\left(1 - \frac{H_5}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \left(1 - \frac{\bar{H}_5}{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1}\right) - 1}, \quad (\text{III.138})$$

где

$$\begin{aligned} H_1 &= 4\mu_1 \left[ \frac{\lambda_2 (A_3 + N_1 i A_4)}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 (A_3 + N_2 i A_4)}{Q_2 + K_2} \right], \\ H_2 &= 4\mu_1 \left[ \frac{\lambda_2 (B_3 + N_1 i B_4)}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 (B_3 + N_2 i B_4)}{Q_2 + K_2} \right], \\ H_3 &= 4\mu_1 \left[ \frac{\lambda_2 (\bar{A}_3 + N_1 i \bar{A}_4)}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1 (\bar{A}_3 + N_2 i \bar{A}_4)}{Q_2 - K_2} \right], \\ H_4 &= 4\mu_1 \left[ \frac{\lambda_2 (\bar{B}_3 + N_1 i \bar{B}_4)}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1 (\bar{B}_3 + N_2 i \bar{B}_4)}{Q_2 - K_2} \right], \\ H_5 &= (\alpha_1 + 1) \left[ \frac{\lambda_2 (1 + N_1)}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 (1 + N_2)}{Q_2 + K_2} \right], \\ H_6 &= (\alpha_1 + 1) \left[ \frac{\lambda_2 (1 - N_1)}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1 (1 - N_2)}{Q_2 - K_2} \right]; \end{aligned} \quad (\text{III.139})$$

$h_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 6$ ) получаются соответственно из  $H_j$ , если положить  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ .

Момент приложен к пластинке. Функции  $\varphi_1(\zeta)$ ,  $\psi_1(\zeta)$  для шайбы определяются по формулам (III.119). Функции  $\varphi_2(z)$ ,  $\psi_2(z_2)$  для пластинки получим из формул (III.89), полагая в них  $A^{(1)} = B^{(1)} = C_1 = C_2 = 0$ :

$$\varphi_2(z_1) = -\frac{M}{4\pi} \left( \frac{n_1 \zeta_{10}^2}{\zeta_1 - \zeta_{10}} + \frac{\gamma_1 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{10} - 1} - \frac{\gamma_2 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_1 \bar{\zeta}_{20} - 1} \right) + \frac{l^3}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_1} - \frac{m_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}(t) dt}{t - \zeta_1}, \quad (\text{III.140})$$

$$\psi_2(z_2) = \frac{M}{4\pi} \left( \frac{n_2 \zeta_{20}^2}{\zeta_2 - \zeta_{20}} + \frac{\delta_1 \bar{\zeta}_{10}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{10} - 1} - \frac{\delta_2 \bar{\zeta}_{20}}{\zeta_2 \bar{\zeta}_{20} - 1} \right) - \frac{l_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t - \zeta_2} + \frac{m_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}(t) dt}{t - \zeta_2}.$$

Условия непрерывности смещений на спале (III.121) приводят к системе двух сингулярных интегральных уравнений (III.122) с правыми частями:

$$\begin{aligned} F_3(\sigma) &= (\alpha_1 + 1) (\bar{a}_1 \sigma + a_1 \bar{\sigma}) + \frac{M\mu_1}{\pi} \left[ \frac{l_2}{\sigma - \zeta_{20}} - \frac{l_1}{\sigma - \zeta_{10}} + \right. \\ &+ \left. \frac{\bar{l}_2 \sigma}{1 - \bar{\zeta}_{20} \sigma} - \frac{\bar{l}_1 \sigma}{1 - \bar{\zeta}_{10} \sigma} - \frac{l_3}{1 - \bar{\zeta}_{10} \sigma} + \frac{l_4}{1 - \bar{\zeta}_{20} \sigma} - \frac{\bar{l}_3 \sigma}{\sigma - \zeta_{10}} + \frac{\bar{l}_4 \sigma}{\sigma - \zeta_{20}} \right], \end{aligned} \quad (\text{III.141})$$

$$F_4(\sigma) = (\kappa_1 + 1)(\bar{a}_1\sigma - a_1\bar{\sigma}) + \frac{M\mu_1 i}{\pi} \left[ \frac{f_2}{\sigma - \bar{\zeta}_{20}} - \frac{f_1}{\sigma - \bar{\zeta}_{10}} + \frac{\bar{f}_2\sigma}{1 - \bar{\zeta}_{20}\sigma} - \frac{\bar{f}_1\sigma}{1 - \bar{\zeta}_{10}\sigma} - \frac{f_3}{1 - \bar{\zeta}_{10}\sigma} + \frac{f_4}{1 - \bar{\zeta}_{20}\sigma} - \frac{\bar{f}_3\sigma}{\sigma - \bar{\zeta}_{10}} + \frac{\bar{f}_4\sigma}{\sigma - \bar{\zeta}_{20}} \right],$$

где

$$l_k = \rho_k \mu_k \bar{\zeta}_{k0}^2, \quad l_{k+2} = (\rho_2 \delta_k - \rho_1 \gamma_k) \bar{\zeta}_{k0} \quad (k = 1, 2); \quad (\text{III.142})$$

$f_j$  ( $j = 1, 2, 3, 4$ ) — получаются из выражения для  $l_j$  заменой  $\rho_k$  на  $q_k$ .

На основании формул (III.134) находим искомые функции:

$$f(\sigma) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{G_1 + G_4\sigma}{\sigma - \bar{\zeta}_{20}} - \frac{G_2 + G_3\sigma}{\sigma - \bar{\zeta}_{10}} + \frac{G_5\sigma + G_8}{1 - \bar{\zeta}_{20}\sigma} - \frac{G_6\sigma + G_7}{1 - \bar{\zeta}_{10}\sigma} + H_5\bar{a}_1\sigma + H_6a_1 \frac{1}{\sigma} \right), \quad (\text{III.143})$$

$$\bar{f}(\sigma) = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{g_1 + g_4\sigma}{\sigma - \bar{\zeta}_{20}} - \frac{g_2 + g_3\sigma}{\sigma - \bar{\zeta}_{10}} + \frac{g_5\sigma + g_8}{1 - \bar{\zeta}_{20}\sigma} - \frac{g_6\sigma + g_7}{1 - \bar{\zeta}_{10}\sigma} + h_5\bar{a}_1\sigma + h_6a_1 \frac{1}{\sigma} \right).$$

Функции напряжений для шайбы и пластинки

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{G_1 + G_4\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}_{20}} - \frac{G_2 + G_3\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}_{10}} \right) + (\lambda_2 - \lambda_1 - 1) \bar{a}_1\zeta, \quad (\text{III.144})$$

$$\psi_1(\zeta) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{g_1 + g_4\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}_{20}} - \frac{g_2 + g_3\zeta}{\zeta - \bar{\zeta}_{10}} + h_5\bar{a}_1\zeta \right) - \frac{1}{(\lambda_2 - \lambda_1)\zeta} \left[ \frac{G_2 + G_3\bar{\zeta}_{10}}{(\zeta - \bar{\zeta}_{10})^2} - \frac{G_1 + G_4\bar{\zeta}_{20}}{(\zeta - \bar{\zeta}_{20})^2} + H_5\bar{a}_1 \right] + \frac{a_1 + \bar{a}_1}{\zeta};$$

$$\varphi_2(z_1) = -\frac{M}{4\pi} \left( \frac{n_1\bar{\zeta}_{10}^2}{\bar{\zeta}_1 - \bar{\zeta}_{10}} - \frac{\gamma_1\bar{\zeta}_{10}}{1 - \bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_{10}} + \frac{\gamma_2\bar{\zeta}_{20}}{1 - \bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_{20}} \right) + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ (m_2g_5 - l_2G_5) \frac{\bar{\zeta}_1}{1 - \bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_{20}} - (m_2g_6 - l_2G_6) \frac{\bar{\zeta}_1}{1 - \bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_{10}} - \frac{m_2g_7 - l_2G_7}{1 - \bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_{10}} + \frac{m_2g_8 - l_2G_8}{1 - \bar{\zeta}_1\bar{\zeta}_{20}} + \frac{(m_2h_6 - l_2H_6)a_1}{\bar{\zeta}_1} \right], \quad (\text{III.145})$$

$$\psi_2(z_2) = \frac{M}{4\pi} \left( \frac{n_2\bar{\zeta}_{20}^2}{\bar{\zeta}_2 - \bar{\zeta}_{20}} - \frac{\delta_1\bar{\zeta}_{10}}{1 - \bar{\zeta}_2\bar{\zeta}_{10}} + \frac{\delta_2\bar{\zeta}_{20}}{1 - \bar{\zeta}_2\bar{\zeta}_{20}} \right) - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \times$$



$$\times \left[ (m_1 g_5 - l_1 G_5) \frac{\zeta_2}{1 - \zeta_2 \bar{\zeta}_{20}} - (m_1 g_6 - l_1 G_6) \frac{\zeta_2}{1 - \zeta_2 \bar{\zeta}_{10}} - \frac{m_1 g_7 - l_1 G_7}{1 - \zeta_2 \bar{\zeta}_{10}} + \frac{m_1 g_8 - l_1 G_8}{1 - \zeta_2 \bar{\zeta}_{20}} + \frac{(m_1 h_6 - l_1 H_6) a_1}{\zeta_2} \right].$$

В формулах (III.143) — (III.145) введены обозначения:

$$G_1 = \frac{M\mu_1}{\pi} \left[ \frac{\lambda_2 (l_2 + N_1 f_2)}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 (l_2 + N_2 i f_2)}{Q_2 + K_2} \right],$$

$$G_2 = \frac{M\mu_1}{\pi} \left[ \frac{\lambda_2 (l_1 + N_1 i f_1)}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 (l_1 + N_2 i f_1)}{Q_2 + K_2} \right],$$

$$G_3 = \frac{M\mu_1}{\pi} \left[ \frac{\lambda_2 (\bar{l}_3 + N_1 i \bar{f}_3)}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 (\bar{l}_3 + N_2 i \bar{f}_3)}{Q_2 + K_2} \right],$$

$$G_4 = \frac{M\mu_1}{\pi} \left[ \frac{\lambda_2 (\bar{l}_4 + N_1 i \bar{f}_4)}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 (\bar{l}_4 + N_2 i \bar{f}_4)}{Q_2 + K_2} \right], \quad (\text{III.146})$$

$$G_5 = \frac{M\mu_1}{\pi} \left[ \frac{\lambda_2 (\bar{l}_2 + N_1 i \bar{f}_2)}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1 (\bar{l}_2 + N_2 i \bar{f}_2)}{Q_2 - K_2} \right],$$

$$G_6 = \frac{M\mu_1}{\pi} \left[ \frac{\lambda_2 (\bar{l}_1 + N_1 i \bar{f}_1)}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1 (\bar{l}_1 + N_2 i \bar{f}_1)}{Q_2 - K_2} \right],$$

$$G_7 = \frac{M\mu_1}{\pi} \left[ \frac{\lambda_2 (l_3 + N_1 i f_3)}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1 (l_3 + N_2 i f_3)}{Q_2 - K_2} \right],$$

$$G_8 = \frac{M\mu_1}{\pi} \left[ \frac{\lambda_2 (l_4 + N_1 i f_4)}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1 (l_4 + N_2 i f_4)}{Q_2 - K_2} \right];$$

$$a_1 = \left[ \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( \frac{G_1 + \zeta_{20} G_4}{\zeta_{20}^2} - \frac{G_2 + \zeta_{10} G_3}{\zeta_{10}^2} \right) - \frac{1}{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1} \left( \frac{\bar{G}_1 + \bar{\zeta}_{20} \bar{G}_4}{\bar{\zeta}_{20}^2} - \frac{\bar{G}_2 + \bar{\zeta}_{10} \bar{G}_3}{\bar{\zeta}_{10}^2} \right) \left( 1 - \frac{H_5}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \right] \times$$

$$\times \left[ \left( 1 - \frac{H_5}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \left( 1 - \frac{\bar{H}_5}{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1} \right) - 1 \right]^{-1}; \quad (\text{III.147})$$

$g_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 8$ ) получаются соответственно из  $G_j$  при  $\lambda_2 = \lambda_1 = 1$ .

Сила, приложенная к шайбе. Пусть в произвольной точке упругой шайбы приложена сосредоточенная сила  $\bar{P}(x, y)$ .

Функции напряжений для шайбы

$$\begin{cases} f_1^0 = \bar{f} + \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa_1)} \ln(t - \zeta_0) - \frac{\kappa_1(X + iY)}{2\pi(1 + \kappa_1)} \ln \frac{1 - \bar{\zeta}_0 t}{t} + \frac{X - iY}{2\pi(1 + \kappa_1)} \cdot \frac{t(t - \zeta_0)}{1 - \bar{\zeta}_0 t}, \\ f_1^0 = \bar{f} + \frac{X - iY}{2\pi(1 + \kappa_1)} \ln \frac{1 - \bar{\zeta}_0 t}{t} - \frac{\kappa_1(X - iY)}{2\pi(1 + \kappa_1)} \ln(t - \zeta_0) + \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa_1)} \cdot \frac{1 - \bar{\zeta}_0 t}{t(t - \zeta_0)}; \end{cases}$$

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa_1)} \ln(\zeta - \zeta_0) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0(t) dt}{t - \zeta} - \bar{a}_1 \zeta,$$

$$\begin{aligned} \psi_1(\zeta) &= \frac{\kappa_1(X - iY)}{2\pi(1 + \kappa_1)} \ln(\zeta - \zeta_0) + \frac{X + iY}{2\pi(1 + \kappa_1)} \frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}_1^0(t) dt}{t - \zeta} - \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^0(t) dt}{t - \zeta} + \frac{a_1 + \bar{a}_1}{\zeta}. \end{aligned}$$

Для пластинки функции напряжений определяются на основании выражений (III.75) и (III.76), в которых нужно положить

$$A^{(2)} = B^{(2)} = A_2 = B_2 = 0:$$

$$\varphi_2(z_1) = C_2 \ln \zeta_1 + (A^{(1)} - C_2) \ln(\sigma_1 - \zeta_1) + \frac{l_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f dt}{f - \zeta_1} - \frac{m_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} dt}{t - \zeta_1}, \quad (\text{III.148})$$

$$\psi_2(z_2) = -C_1 \ln \zeta_2 + (B^{(1)} + C_1) \ln(\sigma_1 - \zeta_{12}) - \frac{l_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f dt}{t - \zeta_2} + \frac{m_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} dt}{t - \zeta_2}.$$

Правые части уравнений (III.122) имеют вид

$$\begin{aligned} F_5(\sigma) &= (\kappa_1 + 1)(\bar{a}_1\sigma + a_1\bar{\sigma}) - \frac{X - iY}{2\pi} \frac{\sigma(\sigma - \zeta_0)}{1 - \bar{\zeta}_0\sigma} - \frac{X + iY}{2\pi} \cdot \frac{1 - \bar{\zeta}_0\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta_0)} + \\ &+ \frac{iY(\kappa_1 - 1) + X(\kappa_1 + 1)}{2\pi} \ln(1 - \bar{\zeta}_0\sigma) - \frac{iY(\kappa_1 - 1) - X(\kappa_1 + 1)}{2\pi} \ln(\sigma - \zeta_0) + \\ &+ 4\mu_1 D_1 \ln \sigma - \left[ \frac{X(\kappa_1 + 1)}{\pi} + 4\mu_1(D_1 + \bar{D}_1) \right] \ln(\sigma - \sigma_1), \end{aligned} \quad (\text{III.149})$$

$$\begin{aligned} F_6(\sigma) &= (\kappa_1 + 1)(\bar{a}_1\sigma - a_1\bar{\sigma}) - \frac{X - iY}{2\pi} \frac{\sigma(\sigma - \zeta_0)}{1 - \bar{\zeta}_0\sigma} + \frac{X + iY}{2\pi} \cdot \frac{1 - \bar{\zeta}_0\sigma}{\sigma(\sigma - \zeta_0)} + \\ &+ \frac{iY(\kappa_1 + 1) + X(\kappa_1 - 1)}{2\pi} \ln(1 - \bar{\zeta}_0\sigma) + \frac{iY(\kappa_1 + 1) - X(\kappa_1 - 1)}{2\pi} \ln(\sigma - \zeta_0) + \\ &+ 4\mu_1 i D_2 \ln \sigma - \left[ \frac{iY(\kappa_1 + 1)}{\pi} + 4\mu_1 i(D_2 + \bar{D}_2) \right] \ln(\sigma - \sigma_1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} D_1 &= p_1 C_2 - p_2 C_1 - \bar{p}_1 \bar{A}^{(1)} - \bar{p}_2 \bar{B}^{(1)}, \\ D_2 &= q_1 C_2 - q_2 C_1 - \bar{q}_1 \bar{A}^{(1)} - \bar{q}_2 \bar{B}^{(1)}. \end{aligned} \quad (\text{III.150})$$

Получаем формулы для функций  $f(\sigma)$ ,  $\bar{f}(\bar{\sigma})$  и  $\varphi_1(\zeta)$ ,  $\psi_1(\zeta)$ :

$$f(\sigma) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ R_1 \bar{a}_1 \sigma + R_2 a_1 \frac{1}{\sigma} - R_3 \frac{\sigma(\sigma - \zeta_0)}{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma} - R_4 \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma}{\sigma(\sigma - \zeta_0)} + \right. \\ \left. + R_5 \ln(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma) - R_6 \ln(\sigma - \zeta_0) + R_7 \ln \sigma \right], \quad (\text{III.151})$$

$$\bar{f}(\bar{\sigma}) = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ r_1 \bar{a}_1 \sigma + r_2 a_1 \frac{1}{\sigma} - r_3 \frac{\sigma(\sigma - \zeta_0)}{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma} - r_4 \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma}{\sigma(\sigma - \zeta_0)} + \right. \\ \left. + r_5 \ln(1 - \bar{\zeta}_0 \sigma) - r_6 \ln(\sigma - \zeta_0) + r_7 \ln \sigma \right];$$

$$\varphi_1(\zeta) = -\frac{X + iY}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \ln(\zeta - \zeta_0) + \left( \frac{R_1}{\lambda_2 - \lambda_1} - 1 \right) \bar{a}_1 \zeta + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left[ (R_5 - \right. \\ \left. - \frac{\kappa_1(\lambda_2 - \lambda_1)(X + iY)}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \ln(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta) - \left( R_3 - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)(X - iY)}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \right) \frac{\zeta(\zeta - \zeta_0)}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} \right],$$

$$\psi_1(\zeta) = \frac{\kappa_1(X - iY)}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \ln(\zeta - \zeta_0) + \frac{X + iY}{2\pi(\kappa_1 + 1)} \frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta - \zeta_0} + \left( a_1 + \bar{a}_1 - \frac{R_1 \bar{a}_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \times \quad (\text{III.152})$$

$$\times \frac{1}{\zeta} - \frac{r_1 \bar{a}_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \zeta + \frac{r_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\zeta(\zeta - \zeta_0)}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} - \left( \frac{\kappa_1(X + iY)}{2\pi(\kappa_1 + 1)} - \frac{R_5}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \frac{\bar{\zeta}_0}{\zeta(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta)} - \\ - \left( \frac{X - iY}{2\pi(\kappa_1 + 1)} - \frac{R_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \frac{2\zeta - \zeta^2 \bar{\zeta}_0 - \zeta_0}{\zeta(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta)^2} + \left( \frac{X - iY}{2\pi(\kappa_1 + 1)} - \frac{r_5}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \ln(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta);$$

$$\varphi_2(z_1) = \left( C_2 - \frac{l_2 R_7 + m_2 r_7}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \ln \zeta_1 + \frac{l_2 R_6 + m_2 r_6}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln(\zeta_1 - \zeta_0) + \\ + \frac{l_2 R_4 + m_2 r_4}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta_1}{\zeta_1(\zeta_1 - \zeta_0)} - \frac{l_2 R_2 + m_2 r_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{a_1}{\zeta}, \quad (\text{III.153})$$

$$\varphi_2(z_2) = -\left( C_1 - \frac{l_1 R_7 + m_1 r_7}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \ln \zeta_2 - \frac{l_1 R_6 + m_1 r_6}{\lambda_2 - \lambda_1} \ln(\zeta_2 - \zeta_0) - \\ - \frac{l_1 R_4 + m_1 r_4}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta_2}{\zeta_2(\zeta_2 - \zeta_0)} + \frac{l_1 R_2 + m_1 r_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{a_1}{\zeta_2},$$

где

$$R_1 = \frac{\lambda_2 W_1}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 U_1}{Q_2 + K_2}; \quad R_2 = \frac{\lambda_2 W_2}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1 U_2}{Q_2 - K_2};$$

$$\begin{aligned}
 R_3 &= \frac{\lambda_2 W_3}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 U_3}{Q_2 + K_2}; & R_4 &= \frac{\lambda_2 W_4}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1 U_4}{Q_2 - K_2}; \\
 R_5 &= \frac{\lambda_2 W_5}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 U_5}{Q_1 + K_2}; & R_6 &= \frac{\lambda_2 W_6}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1 U_6}{Q_2 - K_2}; \\
 R_7 &= \frac{\lambda_2 W_7}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 U_7}{Q_2 + K_2};
 \end{aligned}
 \tag{III.154}$$

$r_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) получаются соответственно из  $R_j$  при  $\lambda_2 = \lambda_1 = 1$ .

В формулах (III.154) введены обозначения:

$$\begin{aligned}
 W_1 &= (\kappa_1 + 1)(1 + N_1); & W_2 &= (\kappa_1 + 1)(1 - N_1); \\
 W_3 &= \frac{1}{2\pi}(1 + N_1)(X - iY); & W_4 &= \frac{1}{2\pi}(1 - N_1)(X + iY);
 \end{aligned}
 \tag{III.155}$$

$$W_5 = \frac{X}{2\pi} [\kappa_1(1 + N_1) + (1 - N_1)] + \frac{iY}{2\pi} [\kappa_1(1 + N_1) - (1 - N_1)];$$

$$W_6 = -\frac{X}{2\pi} [\kappa_1(1 - N_1) + (1 + N_1)] + \frac{iY}{2\pi} [\kappa_1(1 - N_1) - (1 + N_1)];$$

$$W_7 = 4\mu(D_1 + N_1 i D_2);$$

$U_j$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) получаются соответственно из  $W_j$  заменой  $N_1$  на  $N_2$ .  
Наконец, для определения коэффициента  $a_1$  имеем формулу

$$\begin{aligned}
 a_1 &= \frac{(\lambda_2 - \lambda_1 - R_1) \left\{ \bar{\zeta}_0 \bar{R}_3 - \zeta_0 \bar{R}_5 - \frac{\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} [\bar{\zeta}_0(X + iY) - \kappa_1 \bar{\zeta}_0(X - iY)] \right\}}{(\lambda_2^2 - \lambda_1 - R_1)(\lambda_2 - \bar{\lambda}_1 - \bar{R}_1) - (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \\
 &\quad - \frac{(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1) \left\{ \zeta_0 R_3 - \bar{\zeta}_0 R_5 - \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\pi(\kappa_1 + 1)} [\zeta_0(X - iY) - \kappa_1 \bar{\zeta}_0(X + iY)] \right\}}{(\lambda_2^2 - \lambda_1 - R_1)(\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1 - \bar{R}_1) - (\bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_1)(\lambda_2 - \bar{\lambda}_1)}.
 \end{aligned}
 \tag{III.156}$$

В частности, если сила  $P$  приложена в центре шайбы и направлена вдоль оси  $Ox$ , то первая формула (III.151) приобретает вид

$$f(\sigma) = -\frac{P}{2\pi} \left[ \ln \sigma + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (R'_3 \sigma^2 + R'_4 \bar{\sigma}^2) \right],
 \tag{III.157}$$

$$\begin{aligned}
 R'_3 &= \frac{\lambda_2(1 + N_1)}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1(1 + N_2)}{Q_2 + K_2}, \\
 R'_4 &= \frac{\lambda_2(1 - N_1)}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1(1 - N_2)}{Q_2 - K_2}.
 \end{aligned}
 \tag{III.158}$$

Для напряжений по контуру спая в полярной системе координат  $(r, \theta)$ , учитывая вид функции  $f(\sigma)$  (III.157) имеем формулы

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{P}{2\pi} \left[ \frac{2(R'_3 + 3R'_4)}{\lambda_2 - \lambda_1} + 1 - \frac{8R'_4}{\lambda_2 - \lambda_1} \cos^2 \theta \right] \cos \theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{P}{2\pi} \left[ \frac{2(R'_3 - R'_4)}{\lambda_2 - \lambda_1} - 1 + \frac{8R'_4}{\lambda_2 - \lambda_1} \cos^2 \theta \right] \sin \theta. \end{aligned} \quad (\text{III.159})$$

В качестве примера по формулам (III.159) были подсчитаны напряжения для безрезовой фанерной пластинки с упругими постоянными

$$\begin{aligned} E_1 = 1,2 \cdot 9,81 \cdot 10^9, \quad E_2 = 0,6 \cdot 9,81 \cdot 10^9, \quad \nu_1 = 0,071, \quad \nu_2 = 0,036, \\ G_2 = 0,07 \cdot 9,81 \cdot 10^9, \quad s_1 = 4,11i, \quad s_2 = 0,343i \end{aligned}$$

и стального ядра с упругими постоянными  $G_1 = 8,1 \cdot 9,81 \cdot 10^9$ ,  $\kappa_1 = 2,125$ , если ось  $x$  направлена вдоль волокон рубашки, т. е. совпадет с направлением, соответствующим большому модулю упругости.

В табл. III.6 приведены значения (в долях  $P$ ) нормального  $\sigma_r$  и тангенциального  $\tau_{r\theta}$  напряжений (по контуру спая) в точках первого квадранта контура спая для случая, когда сила  $P$  направлена вдоль волокон рубашки. Значения контактных напряжений для фанерной пластинки и стального ядра весьма незначительно отличаются от этих значений для изотропной пластинки с абсолютно жестким ядром. Это и понятно, так как параметр  $n$ , равный отношению модуля сдвига материала ядра к модулю сдвига пластинки, в рассмотренном примере, будет больше ста. Из табл. III.6 видим, что анизотропия материала пластинки также незначительно влияет на характер распределения контактных напряжений.

Таблица III.6

$\theta^\circ$	$\sigma_r$	$\tau_{r\theta}$	$\theta^\circ$	$\sigma_r$	$\tau_{r\theta}$
5	-0,1657	0,0000	60	-0,08168	0,1328
15	-0,1599	0,04026	75	-0,04213	0,1476
30	-0,1428	0,07748	90	-0,0000	0,1526
45	-0,1161	0,1090			

Момент приложен к шайбе. Функции напряжений для ядра (шайбы)

$$\Psi_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t - \zeta} + \frac{iM}{2\pi R} \cdot \frac{\zeta}{1 - \zeta_0 \zeta} - \bar{a}_1 \zeta;$$

$$\Psi_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f}(t) dt}{t - \zeta} - \frac{1}{\zeta} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(t) dt}{t - \zeta} + \frac{iM}{2\pi R} \left[ \frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \frac{1}{\zeta(1 - \zeta_0 \zeta)^2} \right] + \frac{a_1 + \bar{a}_1}{\zeta}.$$

Функции напряжений для пластинки получим из формул (III.89), полагая в них  $A^{(1)} = B^{(1)} = C_1 = C_2 = 0$ :

$$\Phi_2(z_1) = \frac{l_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f dt}{t - \zeta_1} - \frac{m_2}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} dt}{t - \zeta_1}, \quad (\text{III.160})$$

$$\Psi_2(z_2) = -\frac{l_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f dt}{t - \zeta_2} + \frac{m_1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\bar{f} dt}{t - \zeta_2}.$$

Удовлетворив условиям (III.121), получим уравнения (III.122) с правыми частями

$$F_7(\sigma) = (\kappa_1 + 1)(\bar{a}_1\sigma + a_1\bar{\sigma}) - \frac{iM(\kappa_1 + 1)}{2\pi R} \left( \frac{\sigma}{1 - \bar{\zeta}_0\sigma} - \frac{1}{\sigma - \zeta_0} \right),$$

$$F_8(\sigma) = (\kappa_1 + 1)(\bar{a}_1\sigma - a_1\bar{\sigma}) - \frac{iM(\kappa_1 + 1)}{2\pi R} \left( \frac{\sigma}{1 - \bar{\zeta}_0\sigma} + \frac{1}{\sigma - \zeta_0} \right). \quad (\text{III.161})$$

Формулы (III.134) приводят к следующим выражениям:

$$f(\sigma) = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( T_3 \bar{a}_1 \sigma + T_4 a_1 \frac{1}{\sigma} + \frac{T_2}{\sigma - \zeta_0} - \frac{T_1 \sigma}{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma} \right),$$

$$\bar{f}(\bar{\sigma}) = -\frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( t_3 \bar{a}_1 \sigma + t_4 a_1 \frac{1}{\sigma} + \frac{t_2}{\sigma - \zeta_0} - \frac{t_1 \sigma}{1 - \bar{\zeta}_0 \sigma} \right). \quad (\text{III.162})$$

На основании (III.160) и (III.162) находим окончательно:

$$\varphi_1(\zeta) = \left( \frac{iM}{2\pi R} - \frac{T_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \frac{\zeta}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} + \left( \frac{T_3}{\lambda_2 - \lambda_1} - 1 \right) \bar{a}_1 \zeta,$$

$$\psi_1(\zeta) = \frac{iM}{2\pi R} \cdot \frac{1}{\zeta - \zeta_0} - \left( \frac{iM}{2\pi R} - \frac{T_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \frac{1}{\zeta(1 - \bar{\zeta}_0 \zeta)^2} + \frac{t_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{\zeta}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} + \left[ a_1 + \left( 1 - \frac{T_3}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \bar{a}_1 \right] \frac{1}{\zeta} - \frac{t_3}{\lambda_2 - \lambda_1} a_1 \zeta; \quad (\text{III.163})$$

$$\varphi_2(z_1) = -\frac{i_2 T_2 + m_2 t_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{1}{\zeta_1 - \zeta_0} - \frac{i_2 T_4 + m_2 t_4}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{a_1}{\zeta_1},$$

$$\psi_2(z_2) = \frac{i_1 T_2 + m_1 t_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{1}{\zeta_2 - \zeta_0} + \frac{i_1 T_4 + m_1 t_4}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{a_1}{\zeta_2}. \quad (\text{III.164})$$

Здесь приняты обозначения:

$$T_1 = \frac{\lambda_2 i M (\kappa_1 + 1) (1 + N_1)}{2\pi R (Q_1 + K_1)} - \frac{\lambda_1 i M (\kappa_1 + 1) (1 + N_2)}{2\pi R (Q_2 + K_2)},$$

$$T_2 = \frac{\lambda_2 i M (\kappa_1 + 1) (1 - N_1)}{2\pi R (Q_1 - K_1)} - \frac{\lambda_1 i M (\kappa_1 + 1) (1 - N_2)}{2\pi R (Q_2 - K_2)}, \quad (\text{III.165})$$

$$T_3 = \frac{\lambda_2 (\kappa_1 + 1) (1 + N_1)}{Q_1 + K_1} - \frac{\lambda_1 (\kappa_1 + 1) (1 + N_2)}{Q_2 + K_2},$$

$$T_4 = \frac{\lambda_2 (\kappa_1 + 1) (1 - N_1)}{Q_1 - K_1} - \frac{\lambda_1 (\kappa_1 + 1) (1 - N_2)}{Q_2 - K_2};$$

$$a_1 = -\frac{\left( \frac{iM}{2\pi R} - \frac{T_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) - \left( \frac{iM}{2\pi R} + \frac{\bar{T}_1}{\lambda_2 - \bar{\lambda}_1} \right) \left( \frac{T_3}{\lambda_2 - \lambda_1} - 1 \right)}{\left( \frac{T_3}{\lambda_2 - \lambda_1} - 1 \right) \left( \frac{\bar{T}_3}{\lambda_2 - \bar{\lambda}_1} - 1 \right) - 1}; \quad (\text{III.166})$$

$t_j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ ) получаются соответственно из  $T_j$  при  $\lambda_2 = \lambda_1 = 1$ .

Таким образом, все задачи данного параграфа решены в простой замкнутой форме. Для каждого случая приведены окончательные формулы для функции  $f(\sigma)$  и функций напряжений в изотропном ядре и анизотропной пластинке.

#### § 4. Смешанная граничная задача для ортотропной пластинки с круговым отверстием \*

**Постановка и общее решение задачи.** Пусть имеется неограниченная однородная анизотропная пластинка с круговым отверстием радиуса  $R$ . Пластинку будем считать ортотропной. Предположим, что на части края кругового отверстия  $L_1$  заданы компоненты вектора смещения  $u=f_1(t)$ ,  $v=f_2(t)$ , где  $t$  — точки контура кругового отверстия, а на остальной части края  $L_2$  заданы компоненты внешних напряжений, которые без ограничения общности будем полагать равными нулю. Вдали от отверстия задано однородное поле напряжений. В частности, рассмотрим случай растяжения пластинки в двух взаимно перпендикулярных направлениях усилиями интенсивности  $p$  и  $q$ , параллельных линиям пересечения плоскостей упругой симметрии. Заданные функции  $f_1(t)$  и  $f_2(t)$  будем считать такими, что их первые производные  $f_1'(t)$  и  $f_2'(t)$  удовлетворяют на  $L_1$  условию Гельдера. Кроме того, будем предполагать известным главный вектор всех усилий, приложенных к  $L_1$ . В задаче требуется определить закон распределения усилий  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$  на части  $L_1$  края отверстия.

Для решения поставленной смешанной задачи выберем декартову систему координат с началом в центре отверстия, а за направление осей  $x$  и  $y$  примем главные направления упругости материала пластинки. Заметим, что требование ортотропности материала пластинки является не обязательным и выбрано для простоты дальнейших выкладок.

Упругое состояние в плоской анизотропной среде определяется двумя функциями  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ :

$$z_1 = x + s_1 y, \quad z_2 = x + s_2 y; \quad (\text{III.167})$$

$s_1$  и  $s_2$  зависят от упругих свойств среды:

$$s_1 = i\beta_1, \quad s_2 = i\beta_2. \quad (\text{III.168})$$

Граничные условия задачи на основании формул (I.93) запишем в виде

$$2 \operatorname{Re} [(\sin \theta - s_1 \cos \theta)^2 \varphi'(t_1) + (\sin \theta - s_2 \cos \theta)^2 \psi'(t_2)] = \begin{cases} \sigma_r & \text{на } L_1, \\ 0 & \text{на } L_2; \end{cases} \quad (\text{III.169})$$

\* Решение дано Д. В. Грилицким [9]. См. также Д. В. Грилицкий и Я. М. Кизима [1]. Для изотропной пластинки эта задача рассмотрена в работах И. Н. Карцивадзе [1], Б. А. Минцберга [1] и Н. И. Мусхелишвили [1].

$$2 \operatorname{Re} [(\sin \theta - s_1 \cos \theta)(\cos \theta + s_1 \sin \theta) \varphi'(t_1) + (\sin \theta - s_2 \cos \theta)(\cos \theta + s_2 \sin \theta) \psi'(t)] = \begin{cases} \tau_{r\theta} & \text{на } L_1, \\ 0 & \text{на } L_2. \end{cases}$$

Функции напряжений  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ , которые входят в граничные условия (III.169), имеют вид (I.121), где постоянные  $A$  и  $B$  определяются по формулам (I.127), а константы  $B^*$ ,  $B_1^*$  и  $C_1^*$  — на основании формул (I.126), из которых следует, что

$$B^* = -\frac{\rho + \beta_2^2 q}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}, \quad B_1^* = \frac{\rho + \beta_1^2 q}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}, \quad C_1^* = 0. \quad (\text{III.170})$$

Введем новую переменную  $\zeta$  соотношениями (III.4) и (III.5), в которых следует положить  $a = b = R$ :

$$z_1 = \omega_1(\zeta) = \frac{R}{2} [(1 - is_1)\zeta + (1 + is_1)\zeta^{-1}], \quad (\text{III.171})$$

$$z_2 = \omega_2(\zeta) = \frac{R}{2} [(1 - is_2)\zeta + (1 + is_2)\zeta^{-1}].$$

Тогда функции  $\Phi(\zeta) = \varphi[\omega_1(\zeta)]$  и  $\Psi(\zeta) = \psi[\omega_2(\zeta)]$  с учетом формулы (I.124) приобретают вид

$$\Phi(\zeta) = A \ln \zeta + a_1 \zeta + a_0 + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \dots, \quad (\text{III.172})$$

$$\Psi(\zeta) = B \ln \zeta + b_1 \zeta + b_0 + \frac{b_{-1}}{\zeta} + \frac{b_{-2}}{\zeta^2} + \dots,$$

где

$$a_1 = \frac{R}{2} (1 - is_1) B^*, \quad b_1 = \frac{R}{2} (1 - is_2) B_1^*. \quad (\text{III.173})$$

Учитывая

$$\frac{d\varphi(z_1)}{dz_1} = \Phi'(\zeta) \frac{2\zeta^2}{R[(1 - is_1)\zeta^2 - (1 + is_1)]}, \quad (\text{III.174})$$

$$\frac{d\psi(z_2)}{dz_2} = \Psi'(\zeta) \frac{2\zeta^2}{R[(1 - is_2)\zeta^2 - (1 + is_2)]},$$

получаем граничные условия (III.169) в переменной  $\zeta$  ( $\sigma$  на контуре  $\gamma$ ):

$$2 \operatorname{Re} \left\{ \left[ -\frac{i}{2} (\sigma - \sigma^{-1}) - \frac{s_1}{2} (\sigma + \sigma^{-1}) \right]^2 \frac{2\sigma^2}{R[(1 - is_1)\sigma^2 - (1 + is_1)]} \Phi'(\sigma) + \left[ -\frac{i}{2} (\sigma - \sigma^{-1}) - \frac{s_2}{2} (\sigma + \sigma^{-1}) \right]^2 \frac{2\sigma^2}{R[(1 - is_2)\sigma^2 - (1 + is_2)]} \Psi'(\sigma) \right\} = \begin{cases} \sigma_r & \text{на } \gamma_1, \\ 0 & \text{на } \gamma_2; \end{cases} \quad (\text{III.175})$$



$$2 \operatorname{Re} \left\{ \left[ \frac{i(s_1^2 - 1)}{4} (\sigma^2 - \sigma^{-2}) - \frac{s_1}{2} (\sigma^2 + \sigma^{-2}) \right] \frac{2\sigma^2}{R[(1 - is_1)\sigma^2 - (1 + is_1)]} \Phi'(\sigma) + \right. \\ \left. + \left[ \frac{i(s_2^2 - 1)}{4} (\sigma^2 - \sigma^{-2}) - \frac{s_2}{2} (\sigma^2 + \sigma^{-2}) \right] \frac{2\sigma^2}{R[(1 - is_2)\sigma^2 - (1 + is_2)]} \Psi'(\sigma) \right\} = \\ = \begin{cases} \tau_{r\theta} & \text{на } \gamma_1, \\ 0 & \text{на } \gamma_2. \end{cases}$$

Умножим (III.175) на  $\frac{1}{2\pi i} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ , где  $\zeta$  находится вне единичной окружности  $\gamma$ , и проинтегрируем по  $\gamma$  против часовой стрелки. В результате получим два уравнения:

$$- \left[ -\frac{i}{2} (\zeta - \zeta^{-1}) - \frac{s_1}{2} (\zeta + \zeta^{-1}) \right]^2 \frac{2\zeta^2}{[(1 - is_1)\zeta^2 - (1 + is_1)]} \Phi'(\zeta) + \\ + \frac{s_1^2 - 1 + 2is_1}{2(1 - is_1)} (A\zeta + a_1\zeta^2 - a_{-1}) + \frac{1 + s_1^2}{2(1 - is_1)} a_1 - \frac{s_1^2 - 1 - 2is_1}{2(1 + is_1)} \left( \frac{\bar{A}}{\zeta} + \frac{\bar{a}_1}{\zeta^2} \right) - \\ - \left[ -\frac{i}{2} (\zeta - \zeta^{-1}) - \frac{s_2}{2} (\zeta + \zeta^{-1}) \right]^2 \frac{2\zeta^2}{[(1 - is_2)\zeta^2 - (1 + is_2)]} \Psi'(\zeta) + \\ + \frac{s_2^2 - 1 + 2is_2}{2(1 - is_2)} (B\zeta + b_1\zeta^2 - b_{-1}) + \frac{1 + s_2^2}{2(1 - is_2)} b_1 - \frac{s_2^2 - 1 - 2is_2}{2(1 + is_2)} \left( \frac{\bar{B}}{\zeta} + \frac{\bar{b}_1}{\zeta^2} \right) = \\ = \frac{R}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\sigma_r dt}{t - \zeta}; \\ - \left[ \frac{i(s_1^2 - 1)}{4} (\zeta^2 - \zeta^{-2}) - \frac{s_1^2}{2} (\zeta^2 + \zeta^{-2}) \right] \frac{2\zeta^2}{[(1 - is_1)\zeta^2 - (1 + is_1)]} \Phi'(\zeta) + \\ + \frac{i(s_1^2 - 1) - 2s_1}{2(1 - is_1)} (A\zeta + a_1\zeta^2 - a_{-1}) + \frac{s_1 - i}{2} a_1 + \frac{i(s_1^2 - 1) + 2s_1}{2(1 + is_1)} \left( \frac{\bar{A}}{\zeta} + \frac{\bar{a}_1}{\zeta^2} \right) - \\ - \left[ \frac{i(s_2^2 - 1)}{4} (\zeta^2 - \zeta^{-2}) - \frac{s_2}{2} (\zeta^2 + \zeta^{-2}) \right] \frac{2\zeta^2}{[(1 - is_2)\zeta^2 - (1 + is_2)]} \Psi'(\zeta) + \\ + \frac{i(s_2^2 - 1) - 2s_2}{2(1 - is_2)} (B\zeta + b_1\zeta^2 - b_{-1}) + \frac{s_2 - i}{2} b_1 + \frac{i(s_2^2 - 1) + 2s_2}{2(1 + is_2)} \left( \frac{\bar{B}}{\zeta} + \frac{\bar{b}_1}{\zeta^2} \right) = \\ = \frac{R}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t - \zeta}.$$

Разрешив эти уравнения относительно функции  $\Phi'(\zeta)$  и  $\Psi'(\zeta)$ , получим

$$\Phi'(\zeta) = \frac{(1 + \beta_1)\zeta^2 - (1 - \beta_1)}{2\zeta^2 \Delta(\zeta)} \left\{ \frac{RL_2(\zeta)}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\sigma_r dt}{t - \zeta} - \frac{RM_2(\zeta)}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t - \zeta} + \right. \\ \left. + [iM_2(\zeta) - L_2(\zeta)] [l_1(A\zeta + a_1\zeta^2 - a_{-1}) + l_2(B\zeta + b_1\zeta^2 - b_{-1})] + \right.$$

$$+ \left[ l_1 \left( \frac{\bar{A}}{\zeta} + \frac{\bar{a}_1}{\zeta^2} \right) + l_2 \left( \frac{\bar{B}}{\zeta} + \frac{\bar{b}_1}{\zeta^2} \right) \right] [iM_2(\zeta) + L_2(\zeta)] - \\ - \frac{1}{2} [(1 - \beta_1) a_1 + (1 - \beta_2) b_1] [L_2(\zeta) + iM_2(\zeta)] \}; \quad (\text{III.176})$$

$$\Psi'(\zeta) = - \frac{(1 + \beta_2)\zeta^2 - (1 - \beta_2)}{2\zeta^2 \Delta(\zeta)} \left\{ \frac{RL_1(\zeta)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\sigma_r dt}{t - \zeta} - \frac{RM_1(\zeta)}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t - \zeta} + \right. \\ + [iM_1(\zeta) - L_1(\zeta)] [l_1(A\zeta + a\zeta^2 - a_{-1}) + l_2(B\zeta + b_1\zeta^2 - b_{-1})] + \left[ l_1 \left( \frac{\bar{A}}{\zeta} + \frac{\bar{a}_1}{\zeta^2} \right) + \right. \\ \left. + l_2 \left( \frac{\bar{B}}{\zeta} + \frac{\bar{b}_1}{\zeta^2} \right) \right] [iM_1(\zeta) + L_1(\zeta)] - \frac{1}{2} [(1 - \beta_1) a_1 + (1 - \beta_2) b_1] [L_1(\zeta) + iM_1(\zeta)] \}. \quad (\text{III.177})$$

Здесь введены обозначения:

$$L_k(\zeta) = - \frac{i}{4} [(1 + \beta_k^2)(\zeta^2 - \zeta^{-2}) + 2\beta_k(\zeta^2 + \zeta^{-2})]; \\ M_k(\zeta) = - \frac{1}{4} [(\zeta - \zeta^{-1}) + \beta_k(\zeta + \zeta^{-1})]^2; \quad (\text{III.178})$$

$$\Delta(\zeta) = L_1(\zeta)M_2(\zeta) - M_1(\zeta)L_2(\zeta);$$

$$l_k = - \frac{1}{2} (1 + \beta_k) \quad (k = 1, 2);$$

$\gamma_1$  — часть края кругового отверстия единичного радиуса, соответствующая контуре  $L_1$ .

В формулы для функций напряжений (III.176) и (III.177) входят две произвольные, вообще говоря, комплексные постоянные  $a_{-1}$  и  $b_{-1}$ . Так как  $\zeta$  находится вне  $\gamma$ , выражения (III.176) и (III.177) не вполне эквивалентны исходным контурным условиям (III.175), из которых они получены. Для того, чтобы быть уверенным, что контурные условия удовлетворены, следует к формулам (III.176) и (III.177) добавить уравнения, которые получим, если умножим обе части условий (III.175) на  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{dt}{t}$  и проинтегрируем по  $\gamma$ . В результате приходим к соотношению, связывающему эти две константы:

$$(1 + \beta_1) a_{-1} + (1 + \beta_2) b_{-1} = \frac{R}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\sigma_r dt}{t} - \frac{R}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t} - (1 - \beta_1) \bar{a}_1 - (1 - \beta_2) \bar{b}_1. \quad (\text{III.179})$$

Таким образом, производные функции  $\Phi$  и  $\Psi$  выражаются через искомые усилия  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$  с помощью интегралов типа Коши по формулам (III.176) и (III.177) при дополнительном соотношении (III.179).

Для получения условий, из которых можно было бы определить искомые функции, воспользуемся тем обстоятельством, что на части края

отверстия  $L_1$  заданы декартовы компоненты вектора смещений. На основании формул (I.97)

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [\rho_1 \Phi(t_1) + \rho_2 \Psi(t_2)] &= f_1 \\ 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi(t_1) + q_2 \Psi(t_2)] &= f_2 \end{aligned} \right\} \text{ (на } L_1), \quad (\text{III.180})$$

или, переходя к переменной  $\zeta$ , получим

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [\rho_1 \Phi(\sigma) + \rho_2 \Psi(\sigma)] &= f_1(R\sigma) \\ 2 \operatorname{Re} [q_1 \Phi(\sigma) + q_2 \Psi(\sigma)] &= f_2(R\sigma) \end{aligned} \right\} \text{ (на } \gamma_1). \quad (\text{III.181})$$

Из условий (III.181) в результате дифференцирования по  $\theta$  найдем

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{Re} \{i\sigma [\rho_1 \Phi'(\sigma) + \rho_2 \Psi'(\sigma)]\} &= R i \sigma f'_1(R\sigma) \\ 2 \operatorname{Re} \{i\sigma [q_1 \Phi'(\sigma) + q_2 \Psi'(\sigma)]\} &= R i \sigma f'_2(R\sigma) \end{aligned} \right\} \text{ (на } \gamma_1). \quad (\text{III.182})$$

Удовлетворим условиям (III.182) с помощью функций (III.176) и (III.177) при учете соотношения (III.179). После некоторых преобразований получим систему двух сингулярных интегральных уравнений с переменными коэффициентами:

$$\begin{aligned} & -4\pi n_2 \tau_{r\theta}(\sigma) - [n_1(\sigma + \bar{\sigma})^2 - n_3(\sigma - \bar{\sigma})^2] \int_{\gamma_1} \frac{\sigma_r(t) dt}{t - \sigma} - \\ & - i(n_1 - n_3)(\sigma^2 - \bar{\sigma}^2) \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta}(t) dt}{t - \sigma} = F_1(\sigma) \quad (\sigma \in \gamma_1); \end{aligned} \quad (\text{III.183})$$

$$\begin{aligned} & -4\pi n_2 \sigma_r(\sigma) + i(n_1 - n_3)(\sigma^2 - \bar{\sigma}^2) \int_{\gamma_1} \frac{\sigma_r(t) dt}{t - \sigma} - \\ & - [n_1(\sigma - \bar{\sigma})^2 - n_3(\sigma + \bar{\sigma})^2] \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta}(t) dt}{t - \sigma} = F_2(\sigma) \quad (\sigma \in \gamma_1), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_1(\sigma) &= \frac{(n_1 + n_2)Y}{R}(\sigma + \bar{\sigma}) + \frac{i(n_2 + n_3)X}{R}(\sigma - \bar{\sigma}) - \\ & - [n_1(1 + \bar{\sigma}^2) + n_3(1 - \bar{\sigma}^2)] \int_{\gamma_1} \frac{\sigma_r dt}{t} + i[n_1(1 + \bar{\sigma}^2) + \\ & + n_3(1 - \bar{\sigma}^2) - 2n_2] \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t} - \pi i [n_1(n_4 p - n_6 q) + n_3(n_5 p - n_7 q)](\sigma^2 - \bar{\sigma}^2) + \\ & + 2\pi [(\sigma^2 - 1)f'_2(R\sigma) + i(\sigma^2 + 1)f'_1(R\sigma)]; \end{aligned} \quad (\text{III.184})$$

$$\begin{aligned} F_2(\sigma) &= -\frac{i(n_1 + n_2)Y}{R}(\sigma - \bar{\sigma}) + \frac{(n_2 + n_3)X}{R}(\sigma + \bar{\sigma}) + \\ & + i[n_1(1 - \bar{\sigma}^2) + n_3(1 + \bar{\sigma}^2)] \int_{\gamma_1} \frac{\sigma_r dt}{t} + [n_1(1 - \bar{\sigma}^2) + \end{aligned}$$

$$+ n_3(1 + \bar{\sigma}^2) \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t} - \pi [n_1(n_4 p - n_6 q)(\sigma - \bar{\sigma})^2 + n_3(n_5 p - n_7 q)(\sigma + \bar{\sigma})^2] + \\ + 2\pi [i(\sigma^2 + 1)f'_2(R\sigma) + (\sigma^2 - 1)f'_1(R\sigma)].$$

Здесь  $X$ ,  $Y$  — составляющие главного вектора искомых усилий, действующих на части края отверстия  $L$ ;  $p$  и  $q$  — растягивающие напряжения на бесконечности пластинки соответственно в направлении оси  $Ox$  и  $Oy$ ;

$$n_1 = a_{11}(\beta_1 + \beta_2), \quad n_2 = a_{12} + \frac{a_{22}}{\beta_1\beta_2} = a_{12} + a_{11}\beta_1\beta_2, \quad n_3 = a_{22} \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1\beta_2}, \quad (III.185)$$

$$n_4 = 1 + n_5, \quad n_5 = \frac{1}{\beta_1 + \beta_2}, \quad n_6 = \beta_1\beta_2 n_5, \quad n_7 = 1 + n_6.$$

В случае плоской деформации в формулах (III.185) вместо упругих постоянных  $a_{ij}$  следует принимать приведенные упругие постоянные  $\beta_{ij}$ , определяемые \* соотношениями (I.13).

Система уравнений (III.183) и представляет собой те соотношения, из которых должен быть определен характер распределения нормальных и тангенциальных усилий на части  $L_1$  края кругового отверстия в ортотропной пластинке.

Заметим, что требование кругового отверстия, а не, скажем, эллиптического, является также не обязательным, как и требование ортотропности материала пластинки. Эти допущения были приняты для упрощения (и сокращения) изложения метода решения задачи, ибо, как следует из § 1, для анизотропной пластинки с круговым или эллиптическим отверстием задача решается одновременно и одинаково, чего мы не имеем в случае изотропной пластинки, где эллиптичность отверстия вносит заметные осложнения в решение задачи.

Решим систему уравнений (III.183). Умножим второе уравнение (III.183) на произвольную пока функцию  $N(\sigma)$  и сложим с первым уравнением:

$$\{-[n_1(\sigma + \bar{\sigma})^2 - n_3(\sigma - \bar{\sigma})^2] + Ni(n_1 - n_3)(\sigma^2 - \bar{\sigma}^2)\} \int_{\gamma_1} \frac{\sigma_r dt}{t - \sigma} + \\ + \{-i(n_1 - n_3)(\sigma^2 - \bar{\sigma}^2) - N[n_1(\sigma - \bar{\sigma})^2 - n_3(\sigma + \bar{\sigma})^2]\} \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t - \sigma} - \\ - 4\pi n_2 N \sigma_r(\sigma) - 4\pi n_2 \tau_{r\theta}(\sigma) = F_1(\sigma) + NF_2(\sigma) \quad (\sigma \in \gamma_1). \quad (III.186)$$

Функцию  $N(\sigma)$  подберем таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\frac{-[n_1(\sigma + \bar{\sigma})^2 - n_3(\sigma - \bar{\sigma})^2] + N(\sigma) i(n_1 - n_3)(\sigma^2 - \bar{\sigma}^2)}{-i(n_1 - n_3)(\sigma^2 - \bar{\sigma}^2) - N(\sigma)[n_1(\sigma - \bar{\sigma})^2 - n_3(\sigma + \bar{\sigma})^2]} = N(\sigma) = \frac{1}{\lambda(\sigma)}, \quad (III.187)$$

\* Здесь для упругих постоянных в случае обобщенного напряженного состояния приняты обозначения  $a_{ij}$ .

из которого получаем два значения для  $N(\sigma)$ :

$$N_1(\sigma) = -i \frac{\sigma^2 - z_1^2}{\sigma^2 + z_1^2}, \quad N_2(\sigma) = -i \frac{\sigma^2 - z_2^2}{\sigma^2 + z_2^2}, \quad (\text{III.188})$$

где

$$z_1 = i \sqrt{\frac{\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3}}}, \quad z_2 = i \sqrt{\frac{\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}}}. \quad (\text{III.189})$$

Введем обозначения:

$$- [n_1(\sigma + \bar{\sigma})^2 - n_3(\sigma - \bar{\sigma})^2] + N_k(\sigma) i (n_1 - n_3) (\sigma^2 - \bar{\sigma}^2) = K_k(\sigma), \quad (\text{III.190})$$

$$- 4\pi n_2 N_k(\sigma) = Q_k(\sigma) \quad (k = 1, 2).$$

Тогда на основании соотношения (III.187)

$$- i (n_1 - n_3) (\sigma^2 - \bar{\sigma}^2) - N_k(\sigma) [n_1(\sigma - \bar{\sigma})^2 - n_3(\sigma + \bar{\sigma})^2] = \lambda_k(\sigma) K_k(\sigma), \quad (\text{III.191})$$

$$- 4\pi n_2 = \lambda_k(\sigma) Q_k(\sigma),$$

где

$$\lambda_k(\zeta) = i \frac{\zeta^2 + z_k^2}{\zeta^2 - z_k^2} \quad (k = 1, 2). \quad (\text{III.192})$$

Учитывая обозначения (III.190) и (III.191), уравнение (III.186) можно представить в виде двух независимых уравнений:

$$\begin{aligned} K_k(\sigma) \int_{\gamma_1} [\sigma_r(t) + \lambda_k(\sigma) \tau_{r\theta}(t)] \frac{dt}{t - \sigma} + Q_k(\sigma) [\sigma_r(\sigma) + \lambda_k(\sigma) \tau_{r\theta}(\sigma)] = \\ = F_1(\sigma) + N_k F_2(\sigma) \quad (\sigma \in \gamma_1), \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (\text{III.193})$$

Сведем решение уравнений (III.193) к рассмотрению двух граничных задач Римана-Гильберта. Введем

$$W_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} [\sigma_r(t) + \lambda_k(\zeta) \tau_{r\theta}(t)] \frac{dt}{t - \zeta} \quad (k = 1, 2). \quad (\text{III.194})$$

Пользуясь формулами Сохоцкого-Племеля, из (III.194) находим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r(\sigma) + \lambda_k(\sigma) \tau_{r\theta}(\sigma) = W_k^+(\sigma) - W_k^-(\sigma) \\ \int_{\gamma_1} [\sigma_r(t) + \lambda_k(\sigma) \tau_{r\theta}(t)] \frac{dt}{t - \sigma} = \pi i [W_k^+(\sigma) + W_k^-(\sigma)] \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (\sigma \in \gamma_1), \\ (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (\text{III.195})$$

Здесь  $W_k^+(\sigma)$  и  $W_k^-(\sigma)$  — значения функций  $W_k(\zeta)$  ( $k = 1, 2$ ) при подходе к точке  $\zeta = \sigma$ , расположенной на контуре  $\gamma_1$ , соответственно изнутри и извне окружности  $\gamma$ .

Как видим, левые части в уравнениях (III.186) могут быть выражены на основании (III.195) через предельные значения функций  $W_k(\zeta)$  ( $k = 1, 2$ ):

$$W_1^+(\sigma) + \frac{\sqrt{n_1 n_3 - n_2}}{\sqrt{n_1 n_3 + n_2}} W_1^-(\sigma) = \Omega_1(\sigma) \quad (\text{на } \gamma_1), \quad (\text{III.196})$$

$$W_1^+(\sigma) - W_1^-(\sigma) = 0 \quad (\text{на } \gamma_2);$$

$$W_2^+(\sigma) + \frac{\sqrt{n_1 n_3 + n_2}}{\sqrt{n_1 n_3 - n_2}} W_2^-(\sigma) = \Omega_2(\sigma) \quad (\text{на } \gamma_1), \quad (\text{III.197})$$

$$W_2^+(\sigma) - W_2^-(\sigma) = 0 \quad (\text{на } \gamma_2).$$

Здесь

$$\Omega_1(\sigma) = \frac{F_1(\sigma) + N_1(\sigma) F_2(\sigma)}{i\pi K_1(\sigma) + Q_1(\sigma)}, \quad (\text{III.198})$$

$$\Omega_2(\sigma) = \frac{F_1(\sigma) + N_2(\sigma) F_2(\sigma)}{i\pi K_2(\sigma) + Q_2(\sigma)};$$

$\gamma_2$  — часть окружности  $\gamma$ , дополняющая  $\gamma_1$  к полной окружности.

Решения граничных задач (III.196) и (III.197), имеющие простые полюсы в заданных точках  $z_1, -z_1$  и  $z_2, -z_2$  плоскости  $\zeta$ , представляются соответственно следующими формулами:

$$W_1(\zeta) = \frac{X_1(\zeta)}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\Omega_1(t) dt}{X_1^+(t)(t-\zeta)} + X_1(\zeta) \left( C_1 + \frac{D_1}{\zeta - z_1} + \frac{E_1}{\zeta + z_1} \right); \quad (\text{III.199})$$

$$W_2(\zeta) = \frac{X_2(\zeta)}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{\Omega_2(t) dt}{X_2^+(t)(t-\zeta)} + X_2(\zeta) \left( C_2 + \frac{D_2}{\zeta - z_2} + \frac{E_2}{\zeta + z_2} \right). \quad (\text{III.200})$$

Здесь  $G_1, D_1, \dots, E_2$  — постоянные, подлежащие определению;

$$X_1(\zeta) = (\zeta - a)^{-\frac{1}{2} + i\delta} (\zeta - b)^{-\frac{1}{2} - i\delta}, \quad (\text{III.201})$$

$$X_2(\zeta) = (\zeta - a)^{-\frac{1}{2} - i\delta} (\zeta - b)^{-\frac{1}{2} + i\delta},$$

где

$$\delta = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{n_1 n_3 - n_2}}{\sqrt{n_1 n_3 + n_2}}; \quad (\text{III.202})$$

$a$  и  $b$  точки, разделяющие дуги  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ ; под  $X_1(\zeta)$  и  $X_2(\zeta)$  подразумеваются ветви, голоморфные на разрезанной вдоль  $\gamma_1$  плоскости комплексного переменного  $\zeta$ .

На основании первого равенства (III.195) напряжения вдоль контура  $L_1$  определяются формулами

$$\sigma_r(\sigma) = \frac{\lambda_1(\sigma) [W_2^+(\sigma) - W_2^-(\sigma)] - \lambda_2(\sigma) [W_1^+(\sigma) - W_1^-(\sigma)]}{\lambda_1(\sigma) - \lambda_2(\sigma)}, \quad (III.203)$$

$$\tau_{r\theta}(\sigma) = -\frac{[W_2^+(\sigma) - W_1^-(\sigma)] - [W_1^+(\sigma) - W_2^-(\sigma)]}{\lambda_1(\sigma) - \lambda_2(\sigma)},$$

в которых  $W_k^\pm(\sigma)$  ( $k = 1, 2$ ) — граничные значения функций, определяемые выражениями (III.199) и (III.200).

В формулы (III.199) и (III.200) для функций  $W_1(\zeta)$  и  $W_2(\zeta)$  входит восемь неизвестных постоянных:

$$A_1 = \int_{\gamma_1} \frac{\sigma_r dt}{t}, \quad B_1 = \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t}, \quad C_1, D_1, E_1, C_2, D_2 \text{ и } E_2.$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  легко определяются из условий на бесконечности. А именно, с одной стороны, на основании (III.194)

$$W_k(\zeta) \rightarrow -\frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\gamma_1} \sigma_r(t) dt + i \int_{\gamma_1} \tau_{r\theta}(t) dt \right] \frac{1}{\zeta} \quad (k = 1, 2). \quad (III.204)$$

С другой стороны, из формул (III.199) и (III.200) получаем

$$W_k(\zeta) \rightarrow \frac{C_k}{\zeta} \quad (k = 1, 2). \quad (III.205)$$

Сравнивая правые части последних двух выражений, приходим к соотношению

$$C_k = -\frac{1}{2\pi i} \left[ \int_{\gamma_1} \sigma_r(t) dt + i \int_{\gamma_1} \tau_{r\theta}(t) dt \right],$$

которое легко преобразовывается к виду

$$C_k = \frac{X + iY}{2\pi R} \quad (k = 1, 2), \quad (III.206)$$

где  $X$  и  $Y$  — составляющие главного вектора усилий, действующих на  $L_1$ . Из условия в нуле получаем два следующих соотношения:

$$A_1 - iB_1 = X_1(0) \left[ \int_{\gamma_1} \frac{\Omega_1(t) dt}{tX_1^+(t)} + 2\pi i \left( C_1 + \frac{E_1 - D_1}{z_1} \right) \right], \quad (III.207)$$

$$A_1 - iB_1 = X_2(0) \left[ \int_{\gamma_1} \frac{\Omega_2(t) dt}{tX_2^+(t)} + 2\pi i \left( C_2 + \frac{E_2 - D_2}{z_2} \right) \right].$$

Четыре последних соотношения получим, сравнивая в формулах (III.194) и (III.199), (III.200) главные части полюсов функции  $W_1(\xi)$  в точках  $z_1, -z_1$  и функции  $W_2(\xi)$  — в точках  $z_2, -z_2$ :

$$\text{I. } 2\pi X_1(z_1) D_1 = z_1 \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t-z_1}; \quad \text{II. } 2\pi X_1(-z_1) E_1 = -z_1 \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t+z_1};$$

(III.208)

$$\text{III. } 2\pi X_2(z_2) D_2 = z_2 \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t-z_2}; \quad \text{IV. } 2\pi X_2(-z_2) E_2 = -z_2 \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t+z_2}.$$

Здесь под  $\tau_{r\theta}(t)$  понимается выражение, получаемое по второй формуле (III.203) и формулам (III.199), (III.200);  $z_1$  и  $z_2$  — точки плоскости  $\xi$ , определяемые по формулам (III.189). Условия (III.207), (III.208) и служат для определения шести постоянных:  $A_1, B_1, D_1, E_1, D_2, E_2$ .

Рассмотрим два примера, представляющие самостоятельный интерес.

**Вдавливание жесткого штампа в упругое ортотропное тело.** Пусть к дуге  $L=ab$  кругового отверстия в ортотропной плоскости приложен жесткий штамп, имеющий форму дуги отверстия того же радиуса  $R$  и неподвижно сцепленный с упругим телом. Штамп вдавливается в упругое тело нормальной силой  $P_0$ , приложенной симметрично и действующей в направлении оси  $Ox$ , проведенной через середину дуги  $ab$ . Напряжения на бесконечности пластинки отсутствуют. Требуется определить закон распределения контактных напряжений  $\sigma_r$  и  $\tau_{r\theta}$  между штампом и упругим телом.

В рассматриваемом случае

$$X = P_0; \quad Y = 0; \quad p = q = 0;$$

(III.209)

$$f'_1(R\sigma) = f'_2(R\sigma) = 0; \quad a = e^{-i\theta_0}, \quad b = e^{i\theta_0} \quad (2\theta_0 < \pi);$$

$$B_1 = \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t} = 0 \text{ в силу симметрии задачи;}$$

$$C_1 = C_2 = \frac{P_0}{2\pi R}.$$

(III.210)

Функции (III.198) принимают значения

$$\Omega_1(\sigma) = \frac{\sqrt{n_1}}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} + n_2) (\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3}) (\sigma^2 - z_1^2)} \left[ -i(n_2 + n_3) \frac{P_0}{R} \sigma + \sqrt{n_3} (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}) A_1 \right],$$

(III.211)

$$\Omega_2(\sigma) = \frac{\sqrt{n_1}}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} - n_2) (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}) (\sigma^2 - z_2^2)} \left[ i(n_2 + n_3) \frac{P_0}{R} \sigma + \sqrt{n_3} (\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3}) A_1 \right].$$

Подставляя функции (III.211) в формулы (III.199), (III.200) и вычисляя необходимые при этом интегралы типа Коши \*, получаем

\* См. таблицу интегралов типа Коши, приведенную в § 4 гл. I.



$$\begin{aligned}
 W_1(\zeta) = & \frac{1}{2\pi i \sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})} \left\{ \frac{1}{\zeta^2 - z_1^2} \left[ -\frac{i(n_2 + n_3)P_0}{R} \zeta + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})A_1 \right] + \frac{i}{2} X_1(\zeta) \left[ \frac{1}{X_1(z_1)(\zeta - z_1)} \left( \frac{n_2 + n_3}{R} P_0 + \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{1}{X_1(-z_1)(\zeta + z_1)} \left( \frac{n_2 + n_3}{R} P_0 - \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) + 2(n_2 + n_3) \frac{P_0}{R} \right] \right\} + \\
 & + X_1(\zeta) \left( \frac{P_0}{2\pi R} + \frac{D_1}{\zeta - z_1} + \frac{E_1}{\zeta + z_1} \right); \quad (\text{III.212})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 W_2(\zeta) = & \frac{1}{2\pi i \sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})} \left\{ \frac{1}{\zeta^2 - z_2^2} \left[ \frac{i(n_2 + n_3)P_0}{R} \zeta + \right. \right. \\
 & + \left. \left. \sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})A_1 \right] + \frac{i}{2} X_2(\zeta) \left[ \frac{1}{X_2(z_2)(\zeta - z_2)} \left( -\frac{n_2 + n_3}{R} P_0 + \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \frac{1}{X_2(-z_2)(\zeta + z_2)} \left( \frac{n_2 + n_3}{R} P_0 + \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) - 2(n_2 + n_3) \frac{P_0}{R} \right] \right\} + \\
 & + X_2(\zeta) \left( \frac{P_0}{2\pi R} + \frac{D_2}{\zeta - z_2} + \frac{E_2}{\zeta + z_2} \right). \quad (\text{III.213})
 \end{aligned}$$

Составляющие напряжения на контуре  $\gamma_1$  определяются согласно формулам (III.193)

$$\begin{aligned}
 \sigma_r = & -\frac{\sqrt{n_1 n_3} \lambda_2(\sigma) X_1(\sigma)}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} - n_2) [\lambda_1(\sigma) - \lambda_2(\sigma)]} \left\{ \frac{i}{2\sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})} \left[ \frac{1}{X_1(z_1)(\sigma - z_1)} \times \right. \right. \\
 & \times \left( \frac{n_2 + n_3}{R} P_0 + \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) + \frac{1}{X_1(-z_1)(\sigma + z_1)} \left( \frac{n_2 + n_3}{R} P_0 - \right. \\
 & - \left. \left. \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) + 2(n_2 + n_3) \frac{P_0}{R} \right] + \frac{iP_0}{R} + 2\pi i \left( \frac{D_1}{\sigma - z_1} + \frac{E_1}{\sigma + z_1} \right) \left. \right\} + \\
 & + \frac{\sqrt{n_1 n_3} \lambda_1(\sigma) X_2(\sigma)}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} + n_2) [\lambda_1(\sigma) - \lambda_2(\sigma)]} \left\{ \frac{i}{2\sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})} \left[ \frac{1}{X_2(z_2)(\sigma - z_2)} \times \right. \right. \\
 & \times \left( -\frac{n_2 + n_3}{R} P_0 + \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) - \frac{1}{X_2(-z_2)(\sigma + z_2)} \left( \frac{n_2 + n_3}{R} P_0 + \right. \\
 & + \left. \left. \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) - 2(n_2 + n_3) \frac{P_0}{R} \right] + \frac{iP_0}{R} + 2\pi i \left( \frac{D_2}{\sigma - z_2} + \frac{E_2}{\sigma + z_2} \right) \left. \right\}; \quad (\text{III.214})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{r\theta} = & \frac{\sqrt{n_1 n_3} X_1(\sigma)}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} - n_2) [\lambda_1(\sigma) - \lambda_2(\sigma)]} \left\{ \frac{i}{2\sqrt{n_3}(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})} \left[ \frac{1}{X_1(z_1)(\sigma - z_1)} \times \right. \right. \\
 & \times \left( \frac{n_2 + n_3}{R} P_0 + \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) + \frac{1}{X_1(-z_1)(\sigma + z_1)} \left( \frac{n_2 + n_3}{R} P_0 - \right. \\
 & - \left. \left. \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) + 2(n_2 + n_3) \frac{P_0}{R} \right] + \frac{iP_0}{R} + 2\pi i \left( \frac{D_1}{\sigma - z_1} + \frac{E_1}{\sigma + z_1} \right) \left. \right\} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\sqrt{n_1 n_3} \chi_2(\sigma)}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} + n_2) [\lambda_1(\sigma) - \lambda_2(\sigma)]} \left\{ \frac{i}{2 \sqrt{n_3} (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})} \left[ \frac{1}{X_2(z_2)(\sigma - z_2)} \times \right. \right. \\
 & \times \left( - \frac{n_2 + n_3}{R} P_0 + \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) - \frac{1}{X_2(-z_2)(\sigma + z_2)} \left( \frac{n_2 + n_3}{R} P_0 + \right. \\
 & \left. \left. + \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 - n_3} A_1 \right) - 2(n_2 + n_3) \frac{P_0}{R} \right] + \frac{i P_0}{R} + 2\pi i \left( \frac{D_2}{\sigma - z_2} + \frac{E_2}{\sigma + z_2} \right) \left. \right\}. \quad (\text{III.215})
 \end{aligned}$$

Постоянная  $A_1$ , входящая в решение данной задачи, определится по любой из формул (III.207). Подставив выражение (III.215) для  $\tau_{r\theta}$  в формулы (III.208), получим четыре условия для определения постоянных  $D_1, E_1, D_2, E_2$ . Оказывается, что эти условия связаны между собой одним соотношением  $I + II + z_2^2(III + IV) = 0$ , так что независимых условий будет только три. Четвертое недостающее условие получим, сравнивая правые части выражений (III.207). Выпишем окончательные выражения для напряжений в полярных координатах, т. е. отнесенных к переменной  $\theta$  ( $r=1, \sigma=e^{i\theta}$ ):

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(\theta) = & - \frac{P_0(n_3 - n_1)}{8\pi R \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 n_3 - n_2^2} \Delta(\theta)} \left\{ \frac{\sqrt{n_1 n_3} + n_2}{\sqrt{n_3} - \sqrt{n_1}} e^{\theta_0 \delta} \left[ \cos\left(\frac{3}{2}\theta - \theta_1\right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + z_2^2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \theta_1\right) \right] + \frac{\sqrt{n_1 n_3} - n_2}{\sqrt{n_3} + \sqrt{n_1}} e^{-\theta_0 \delta} \left[ \cos\left(\frac{3}{2}\theta + \theta_1\right) + z_1^2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right) \right] \right\} \\
 & (-\theta_0 < \theta < \theta_0); \quad (\text{III.216})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{r\theta}(\theta) = & \frac{P_0(n_3 - n_1)}{8\pi R \sqrt{n_3} \sqrt{n_1 n_3 - n_2^2} \Delta(\theta)} \left\{ \frac{\sqrt{n_1 n_3} + n_2}{\sqrt{n_3} - \sqrt{n_1}} e^{\theta_0 \delta} \left[ \sin\left(\frac{3}{2}\theta - \theta_1\right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + z_2^2 \sin\left(\frac{\theta}{2} + \theta_1\right) \right] + \frac{\sqrt{n_1 n_3} - n_2}{\sqrt{n_3} + \sqrt{n_1}} e^{-\theta_0 \delta} \left[ \sin\left(\frac{3}{2}\theta + \theta_1\right) + z_1^2 \sin\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right) \right] \right\} \\
 & (-\theta_0 < \theta < \theta_0). \quad (\text{III.217})
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\Delta(\theta) = \sqrt{\sin \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta) \sin \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta)}, \quad (\text{III.218})$$

$$\theta_1 = \delta \ln \frac{\sin \frac{1}{2}(\theta_0 - \theta)}{\sin \frac{1}{2}(\theta_0 + \theta)};$$

$z_1$  и  $z_2$  определяются по формулам (III.189), а  $\delta$  — по формуле (III.202).

В частности, для изотропной пластинки формулы (III.216) и (III.217) приводятся к виду

$$\begin{aligned}
 \sigma_r(\theta) = & - \frac{P_0 \sqrt{\kappa}}{4\pi R \Delta(\theta)} \left[ e^{-\frac{\theta_0}{2\pi} \ln \kappa} \cos\left(\frac{3}{2}\theta - \theta_1\right) + \frac{1}{\kappa} e^{\frac{\theta_0}{2\pi} \ln \kappa} \cos\left(\frac{1}{2}\theta - \theta_1\right) \right], \quad (\text{III.219}) \\
 & (-\theta_0 < \theta < \theta_0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{r\theta}(\theta) = & \frac{P_0 \sqrt{\kappa}}{4\pi R \Delta(\theta)} \left[ e^{-\frac{\theta_0}{2\pi} \ln \kappa} \sin\left(\frac{3}{2}\theta - \theta_1\right) + \frac{1}{\kappa} e^{\frac{\theta_0}{2\pi} \ln \kappa} \sin\left(\frac{1}{2}\theta - \theta_1\right) \right] \quad (\text{III.220}) \\
 & (-\theta_0 < \theta < \theta_0).
 \end{aligned}$$

Здесь под  $\delta$ , которое входит в выражение для  $\theta_1$ , подразумевается

$$\delta = -\frac{\ln \kappa}{2\pi}. \quad (\text{III.221})$$

Результаты вычислений по формулам (III.216) и (III.217) для пластинки, изготовленной из фанеры второго типа, когда ось  $Ox$  направлена вдоль волокон рубашки, приведены в табл. III.7. Как известно\*, такая пластинка имеет следующие упругие характеристики:

$$a_{11} = \frac{10^{-9}}{1,2 \cdot 9,81}, \quad a_{22} = \frac{10^{-9}}{0,6 \cdot 9,81}, \quad a_{12} = -\frac{0,071}{1,2 \cdot 9,81 \cdot 10^9},$$

$$\beta_1 = 4,11; \quad \beta_2 = 0,343.$$

Параметры (III.185) для рассматриваемого случая

$$n_1 = 3,7107 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad n_2 = 1,1147 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad n_3 = 5,231 \frac{10^{-9}}{9,81}.$$

В этой табл. III.7 для сравнения приведены также значения напряжений  $\sigma_r(\theta)$  (III.219) и  $\tau_{r\theta}(\theta)$  (III.220) для изотропной пластинки при  $\kappa = 2$ , в долях  $P_0/R$  для случая  $\theta_0 = \pi/4$ .

В табл. III.8 приведены (в долях  $P_0/R$ ) значения контактных напряжений  $\sigma_r$  (III.219) и  $\tau_{r\theta}$  (III.220) для изотропной пластинки для угла контакта  $\theta_0 = \pi/2$ .

Сопоставляя данные в табл. III.7 и III.8 для изотропной пластинки, следует отметить качественное отличие в характере распределения нормальных напряжений:

Таблица III.7

$\theta_0$	Фанерная пластинка		Изотропная пластинка	
	$\sigma_r$	$\tau_{r\theta}$	$\sigma_r$	$\tau_{r\theta}$
0	-0,4237	0	-0,4300	0
5	-0,4248	0,0339	-0,4312	0,0324
10	-0,4281	0,0686	-0,4351	0,0655
15	-0,4345	0,1051	-0,4426	0,1002
20	-0,4454	0,1449	-0,4553	0,1376
25	-0,4643	0,1904	-0,4770	0,1800
30	-0,4981	0,2468	-0,5157	0,2314
35	-0,5662	0,3265	-0,5930	0,3015
40	-0,7482	0,4758	-0,7990	0,4242
43	-1,1574	0,7216	-1,1862	0,6002
44	-1,6476	0,9588	-1,8167	0,7392

при угле контакта  $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$  нормальные напряжения постепенно возрастают от середины дуги контакта к краю, тогда как при угле контакта  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  нормальные напряжения по величине уменьшаются и только около самого края начинают быстро

Таблица III.8

$\theta_0$	$\sigma_r$	$\tau_{r\theta}$	$\theta_0$	$\sigma_r$	$\tau_{r\theta}$
0	-0,2283	0,00	60	-0,1526	0,2355
10	-0,2264	0,03856	70	-0,1345	0,2926
20	-0,2193	0,07694	80	-0,1289	0,4076
30	-0,2072	0,11498	85	-0,1659	0,5517
40	-0,1897	0,15305	89	-0,4792	1,1537
50	-0,1732	0,1920			

возрастать в силу принятого решения, имеющего особенность на концах дуги контакта. В характере распределения касательных напряжений нет отличия: в обоих случаях они увеличиваются от середины дуги контакта к краю. Такой характер распределения нормальных и тангенциальных напряжений в случае  $\theta_0 = \pi/2$  становится понятным, если учесть, что по мере приближения точки к краю дуги контакта упругий материал все меньше испытывает давление со стороны жесткого штампа и все больше находится под действием сдвигающих усилий.

Одноосное растяжение ортотропной пластинки, к части края отверстия которой припаяна жесткая накладка. Пусть к части края  $ab$  кругового отверстия радиуса  $R$  в ортотропной пластинке припаяна жесткая накладка, имеющая форму дуги отверстия того же радиуса. Предполагается, что пластинка с припаянной накладкой равно-

\* См. С. Г. Лехницкий [1].

мерно растягивается на бесконечности усилиями интенсивности  $p$ , параллельными оси  $Ox$ . Требуется определить характер распределения напряжений между накладкой и упругим телом.

Очевидно, что часть контура отверстия, находящаяся в контакте с накладкой, при деформации пластинки будет перемещаться как единое целое. Рассмотрим только такие положения накладки, когда она смещается поступательно. Это будет, по крайней мере, тогда, когда середина накладки находится на концах вертикального или горизонтального диаметров. Рассмотрим, например, случай, когда ось  $x$  проходит через середину накладки. В этом случае

$$X = Y = 0; \quad q = 0; \quad f'_1(R\sigma) = f'_2(R\sigma) = 0;$$

$$B_1 = \int_{\gamma_1} \frac{\tau_{r\theta} dt}{t} = 0 \text{ в силу симметрии задачи}; \quad (III.222)$$

$$a = e^{-i\theta_0}, \quad b = e^{i\theta_0} \quad (2\theta_0 < \pi), \quad C_1 = C_2 = 0.$$

Формулы (III.198) приводятся к виду

$$\Omega_1(\sigma) = \frac{\sqrt{n_1 n_3}}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} + n_2) (\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3}) (\sigma^2 - z_1^2)} \{ \pi i p [\sigma^2 (n_5 \sqrt{n_3} + n_4 \sqrt{n_1}) + (n_5 \sqrt{n_3} - n_4 \sqrt{n_1})] + (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}) A_1 \}; \quad (III.223)$$

$$\Omega_2(\sigma) = \frac{\sqrt{n_1 n_3}}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} - n_2) (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}) (\sigma^2 - z_2^2)} \{ \pi i p [\sigma^2 (n_4 \sqrt{n_1} - n_5 \sqrt{n_3}) - (n_5 \sqrt{n_3} + n_4 \sqrt{n_1})] + (\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3}) A_1 \}.$$

Подставив в формулы (III.199) и (III.200) вместо  $\Omega_1(t)$  и  $\Omega_2(t)$  их значения из (III.223), получим функции

$$W_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i (\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3}) (\zeta^2 - z_1^2)} \{ \pi i p [\zeta^2 (n_5 \sqrt{n_3} + n_4 \sqrt{n_1}) + (n_5 \sqrt{n_3} - n_4 \sqrt{n_1})] + (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}) A_1 \} + \frac{X_1(\zeta)}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{X_1(z_1) (\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})^2 (\zeta - z_1)} \left[ \pi i p (n_1 n_4 + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] - \frac{1}{X_1(-z_1) (\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})^2 (\zeta + z_1)} \left[ \pi i p (n_1 n_4 + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] - \frac{\pi i p}{\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3}} (n_5 \sqrt{n_3} + n_4 \sqrt{n_1}) (\zeta + c) \right\} + X_1(\zeta) \left( \frac{D_1}{\zeta - z_1} + \frac{E_1}{\zeta + z_1} \right); \quad (III.224)$$

$$W_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}) (\zeta^2 - z_2^2)} \{ \pi i p [\zeta^2 (n_4 \sqrt{n_1} - n_5 \sqrt{n_3}) - (n_5 \sqrt{n_3} + n_4 \sqrt{n_1})] + (\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3}) A_1 \} + \frac{X_2(\zeta)}{2\pi i} \left\{ \frac{1}{X_2(z_2) (\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})^2 (\zeta - z_2)} \times \right.$$

$$\left. \times \left[ \pi i p (n_1 n_4 + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] - \right.$$

$$-\frac{1}{X_2(-z_2)(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})^2(\zeta + z_2)} \left[ \pi i p (n_1 n_4 + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] -$$

$$-\frac{\pi i p}{\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}} (n_4 \sqrt{n_1} - n_5 \sqrt{n_3}) (\zeta + d) \left. \right\} + X_2(\zeta) \left( \frac{D_2}{\zeta - z_2} + \frac{E_2}{\zeta + z_2} \right). \quad (\text{III.225})$$

Здесь

$$c = -(\cos \theta_0 - 2\delta \sin \theta_0),$$

$$d = -(\cos \theta_0 + 2\delta \sin \theta_0).$$

(III.226)

Напряжения по контуру спая определяются формулами (III.203), если подставить туда найденные значения для  $W_1$  (III.224) и  $W_2$  (III.225):

$$\sigma_r = -\frac{\sqrt{n_1 n_3} \lambda_2(\sigma) X_1(\sigma)}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} - n_2) [\lambda_1(\sigma) - \lambda_2(\sigma)]} \left\{ \frac{1}{X_1(z_1)(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})^2(\sigma - z_1)} \left[ \pi i p (n_1 n_4 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] - \frac{1}{X_1(-z_1)(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})^2(\sigma + z_1)} \times \right.$$

$$\times \left[ \pi i p (n_1 n_4 + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] - \frac{\pi i p}{\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3}} (n_5 \sqrt{n_3} + n_4 \sqrt{n_1})(\sigma + c) +$$

$$\left. \left. + 2\pi i \left( \frac{D_1}{\sigma - z_1} + \frac{E_1}{\sigma + z_2} \right) \right\} + \frac{\sqrt{n_1 n_3} \lambda_1(\sigma) X_2(\sigma)}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} + n_2) [\lambda_1(\sigma) - \lambda_2(\sigma)]} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{X_2(z_2)(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})^2(\sigma - z_2)} \left[ \pi i p (n_1 n_4 + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{X_2(-z_2)(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})^2(\sigma + z_2)} \left[ \pi i p (n_1 n_4 + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi i p}{\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}} (n_4 \sqrt{n_1} - n_5 \sqrt{n_3})(\sigma + d) + 2\pi i \left( \frac{D_2}{\sigma - z_2} + \frac{E_2}{\sigma + z_2} \right) \right\}; \quad (\text{III.227})$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\sqrt{n_1 n_3} X_1(\sigma)}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} - n_2) [\lambda_1(\sigma) - \lambda_2(\sigma)]} \left\{ \frac{1}{X_1(z_1)(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})^2(\sigma - z_1)} \times \right.$$

$$\times \left[ \pi i p (n_1 n_4 + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] - \frac{1}{X_1(-z_1)(\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3})^2(\sigma + z_1)} \times$$

$$\times \left[ \pi i p (n_1 n_4 + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] - \frac{\pi i p}{\sqrt{n_1} - \sqrt{n_3}} (n_4 \sqrt{n_1} + n_5 \sqrt{n_3})(\sigma + c) +$$

$$\left. \left. + 2\pi i \left( \frac{D_1}{\sigma - z_1} + \frac{E_1}{\sigma + z_1} \right) \right\} - \frac{\sqrt{n_1 n_3} X_2(\sigma)}{\pi i (\sqrt{n_1 n_3} + n_2) [\lambda_1(\sigma) - \lambda_2(\sigma)]} \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{X_2(z_2)(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})^2(\sigma - z_2)} \times \left[ \pi i p (n_1 n_4 + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{X_2(-z_2)(\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3})^2(\sigma + z_2)} \left[ \pi i p (n_1 n_4 + n_3 n_5) - \frac{1}{2} (n_1 - n_3) A_1 \right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\pi i p}{\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}} (n_4 \sqrt{n_1} - n_5 \sqrt{n_3})(\sigma + d) + 2\pi i \left( \frac{D_2}{\sigma - z_2} + \frac{E_2}{\sigma + z_2} \right) \right\}. \quad (\text{III.228})$$

Постоянные, входящие в решение данной задачи, определяются аналогично изложенному в предыдущем случае, поэтому приведем окончательные формулы для напряжений, записанные в переменной  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \sigma_r(\theta) = & \frac{\rho(n_3 - n_1)}{8 \sqrt{n_1 n_3 - n_2^2} \Delta(\theta)} \left\{ \frac{n_5 \sqrt{n_3} + \sqrt{n_1} n_4}{\sqrt{n_3} - \sqrt{n_1}} e^{\theta_0 \delta} \left[ z_2^2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right) + \right. \right. \\ & + c z_2^2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \theta_1\right) + c \cos\left(\frac{3}{2}\theta - \theta_1\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\theta - \theta_1\right) \left. \right] + \\ & + \frac{n_4 \sqrt{n_1} - n_5 \sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}} e^{-\theta_0 \delta} \left[ z_1^2 \cos\left(\frac{\theta}{2} + \theta_1\right) + d z_1^2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right) + \right. \\ & \left. \left. + d \cos\left(\frac{3}{2}\theta + \theta_1\right) + \cos\left(\frac{5}{2}\theta + \theta_1\right) \right] \right\} \quad (-\theta_0 < \theta < \theta_0); \quad (\text{III.229}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(\theta) = & \frac{\rho(n_3 - n_1)}{8 \sqrt{n_1 n_3 - n_2^2} \Delta(\theta)} \left\{ \frac{n_5 \sqrt{n_3} + n_4 \sqrt{n_1}}{\sqrt{n_3} - \sqrt{n_1}} e^{\theta_0 \delta} \left[ z_2^2 \sin\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right) - \right. \right. \\ & - c z_2^2 \sin\left(\frac{\theta}{2} + \theta_1\right) - c \sin\left(\frac{3}{2}\theta - \theta_1\right) - \sin\left(\frac{5}{2}\theta - \theta_1\right) \left. \right] - \\ & - \frac{n_4 \sqrt{n_1} - n_5 \sqrt{n_3}}{\sqrt{n_1} + \sqrt{n_3}} e^{-\theta_0 \delta} \left[ -z_1^2 \sin\left(\frac{\theta}{2} + \theta_1\right) + d z_1^2 \sin\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right) + \right. \\ & \left. \left. + d \sin\left(\frac{3}{2}\theta + \theta_1\right) + \sin\left(\frac{5}{2}\theta + \theta_1\right) \right] \right\} \quad (-\theta_0 < \theta < \theta_0). \quad (\text{III.230}) \end{aligned}$$

Для изотропной пластинки формулы (III.229) и (III.230) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_r(\theta) = & \frac{\rho}{2 \sqrt{(1+\nu)(3-\nu)} \Delta(\theta)} \left\{ 2e^{-\frac{\theta_0}{2\pi} \ln \kappa} \left[ \cos\left(\frac{5}{2}\theta - \theta_1\right) - \right. \right. \\ & - \left( \cos \theta_0 + \frac{\ln \kappa}{\pi} \sin \theta_0 \right) \cos\left(\frac{3}{2}\theta - \theta_1\right) + e^{\frac{\theta_0}{2\pi} \ln \kappa} \times \\ & \left. \left. \times \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2} + \theta_1\right) - \left( \cos \theta_0 - \frac{\ln \kappa}{\pi} \sin \theta_0 \right) \cos\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right) \right] \right\} \quad (\text{III.231}) \\ & (-\theta_0 < \theta < \theta_0); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(\theta) = & -\frac{\rho}{2 \sqrt{(1+\nu)(3-\nu)} \Delta(\theta)} \left\{ 2e^{-\frac{\theta_0}{2\pi} \ln \kappa} \left[ \sin\left(\frac{5}{2}\theta - \theta_1\right) - \right. \right. \\ & - \left( \cos \theta_0 + \frac{\ln \kappa}{\pi} \sin \theta_0 \right) \sin\left(\frac{3}{2}\theta - \theta_1\right) - e^{\frac{\theta_0}{2\pi} \ln \kappa} \times \\ & \left. \left. \times \left[ \sin\left(\frac{\theta}{2} + \theta_1\right) + \left( \cos \theta_0 - \frac{\ln \kappa}{\pi} \sin \theta_0 \right) \sin\left(\frac{\theta}{2} - \theta_1\right) \right] \right\} \quad (\text{III.232}) \\ & (-\theta_0 < \theta < \theta_0). \end{aligned}$$

Здесь  $\delta$  определяется по формуле (III.221).

### § 5. Давление жесткой шайбы на край кругового отверстия в ортотропной пластинке

**Постановка задачи и вывод интегрального уравнения Фредгольма.** Рассмотрим задачу о сжатии двух тел\*, одно из которых представляет собой неограниченную однородную ортотропную пластинку с круговым отверстием радиуса  $R_1$ , другое — жесткую круговую шайбу радиуса  $R_2$ . Пусть  $R_1$  мало отличается от  $R_2$ , так что разница  $(R_1 - R_2) = \varepsilon$  представляет собой величину порядка упругих смещений. Предположим, что сила  $P$ , прижимающая одно тело к другому, действует по диаметру шайбы и направлена вдоль одной из линий пересечения плоскостей упругой симметрии материала пластинки. Кроме того, будем считать, что силы трения между телами отсутствуют. Требуется определить величину области контакта и распределение давления на ней.

Для решения задачи выберем прямоугольную декартову систему координат  $xOy$  с началом в центре отверстия, а оси координат направим по главным направлениям упругости так, чтобы ось  $Ox$  совпала с направлением действия сжимающей силы  $P$ .

Уравнения контура жесткой шайбы до деформации и после нее соответственно

$$[x - (R_1 - R_2)]^2 + y^2 = R_2^2, \quad [x - (R_1 - R_2) - d]^2 + y^2 = R_2^2. \quad (\text{III.233})$$

где  $d$  — смещение центра шайбы в результате деформации.

Контур отверстия в упругой плоскости до деформации определяется уравнением

$$x^2 + y^2 = R_1^2; \quad (\text{III.234})$$

после деформации уравнение контура можно представить в виде

$$\xi = x + u, \quad \eta = y + v, \quad (\text{III.235})$$

где  $u$  и  $v$  — упругие смещения точек контура отверстия пластинки в результате деформации.

Координаты  $\xi$  и  $\eta$  должны удовлетворять второму уравнению (III.233) на дуге контакта с пластинкой:

$$[\xi - (R_1 - R_2) - d]^2 + \eta^2 = R_2^2. \quad (\text{III.236})$$

Подставляя в (III.236) вместо  $\xi$  и  $\eta$  значения из (III.235) и пренебрегая величинами второго порядка малости по сравнению с  $u$  и  $v$ , получаем условие, которое должно удовлетворяться для точек области контакта:

$$v_r = u \cos \theta + v \sin \theta = d \cos \theta - \varepsilon(1 - \cos \theta). \quad (\text{III.237})$$

\* Эта задача рассмотрена Д. В. Грилицим [3—5]. Исследованию контактных напряжений для случая изотропных сжимаемых тел посвящены работы И. Я. Штаермана [1, 2], М. З. Народецкого [1], М. П. Шереметьева [2—4], В. В. Панасюка [1, 2], А. И. Каландия [1, 2] и Б. Л. Ромалиса [1, 2].

Радиальное смещение  $v_r$  с помощью двух функций комплексного переменного выражается по первой формуле (I.94), на основании которой граничное условие задачи (III.237) приобретает вид

$$v_r = 2\operatorname{Re}[(p_1 \cos \theta + q_1 \sin \theta) \varphi(t_1) + (p_2 \cos \theta + q_2 \sin \theta) \psi(t_2)] = \\ = d \cos \theta - \varepsilon(1 - \cos \theta). \quad (\text{III.238})$$

Ранее формулой (III.78) был установлен вид функций напряжений для случая, когда сосредоточенная сила  $\bar{P}(x, y)$  приложена в точке  $\sigma_0$  контура отверстия:

$$\varphi(z_1) = (A_2 + B_2) \ln \zeta_1 + (A^{(2)} - A_2 - B_2) \ln(\zeta_1 - \sigma_0), \\ \psi(z_2) = -(A_1 + B_1) \ln \zeta_2 + (B^{(2)} + A_1 + B_1) \ln(\zeta_2 - \sigma_0), \quad (\text{III.239})$$

где  $A_k$  и  $B_k$  ( $k=1, 2$ ) выражаются на основании формул (III.74);  $A^{(2)}$  и  $B^{(2)}$  определяются согласно формул (I.127), а  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  — по формулам (III.12) и (III.13) при  $a=b=R_1$ .

Когда сила  $P$  приложена нормально к контуру отверстия под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ , для определения  $A^{(2)}$  и  $B^{(2)}$  служат выражения (I.128). В этом случае формулы (III.239) принимают вид

$$\varphi(z_1) = A^{(2)} \ln \zeta_1 + \frac{P(\cos \alpha + i\beta_2 \sin \alpha)}{2\pi(\beta_1 - \beta_2)} \ln \frac{\zeta_1 - \sigma_0}{\zeta_1}, \\ \psi(z_2) = B^{(2)} \ln \zeta_2 - \frac{P(\cos \alpha + i\beta_1 \sin \alpha)}{2\pi(\beta_1 - \beta_2)} \ln \frac{\zeta_2 - \sigma_0}{\zeta_2}. \quad (\text{III.240})$$

Если в левую часть граничного условия (III.238) подставить формулы (III.240) и отделить действительную часть, получим выражение для радиального смещения точки контура кругового отверстия, определяемой координатой  $\theta$ , от действия нормальной сосредоточенной силы, приложенной к краю отверстия в точке, определяемой координатой  $\alpha$ :

$$v_r = \frac{P}{\pi} \left[ \frac{n_2}{2} (|\theta - \alpha| - \pi) \sin|\theta - \alpha| - (n_1 \cos \theta \cos \alpha + \right. \\ \left. + n_3 \sin \theta \sin \alpha) \ln 2 \sin \frac{|\theta - \alpha|}{2} \right]. \quad (\text{III.241})$$

Здесь для постоянных  $n_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) приняты обозначения, введенные формулой (III.185).

В дальнейшем не будем делать различия между величинами радиусов отверстия  $R_1$  и шайбы  $R_2$ , так что примем  $R_1=R_2=R$ , сохранив, однако разность  $\varepsilon=R_1-R_2$  в граничном условии (III.238).

Если  $p(\theta)$  — нормальное давление на дуге контакта, то на элемент дуги  $Rd\alpha$  будет действовать сила  $p(\alpha)Rd\alpha$ . Примем эту силу в каче-



стве сосредоточенной, приложенной на элементе дуги  $Rd\alpha$ . Эта сила в точке, определяемой координатой  $\theta$ , вызовет радиальное перемещение.

$$dv_r = \frac{\rho(\alpha)R}{\pi} \left[ \frac{n_2}{2} (|\theta - \alpha| - \pi) \sin|\theta - \alpha| - (n_1 \cos\theta \cos\alpha + n_3 \sin\theta \sin\alpha) \ln 2 \sin \frac{|\theta - \alpha|}{2} \right] d\alpha. \quad (\text{III.242})$$

Если области контакта соответствует изменение угла  $\theta$  в пределах от  $-\theta_0$  до  $+\theta_0$ , то полное радиальное перемещение точки

$$v_r = \frac{R}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \rho(\alpha) \left[ \frac{n_2}{2} (|\theta - \alpha| - \pi) \sin|\theta - \alpha| - (n_1 \cos\theta \cos\alpha + n_3 \sin\theta \sin\alpha) \ln 2 \sin \frac{|\theta - \alpha|}{2} \right] d\alpha. \quad (\text{III.243})$$

Подставив (III.243) в граничное условие (III.238), получим интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$-\frac{R}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \rho(\alpha) (n_1 \cos\theta \cos\alpha + n_3 \sin\theta \sin\alpha) \ln 2 \sin \frac{|\theta - \alpha|}{2} d\alpha + \frac{Rn_2}{2\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \rho(\alpha) (|\theta - \alpha| - \pi) \sin|\theta - \alpha| d\alpha = d \cos\theta - \varepsilon (1 - \cos\theta) \quad (\text{III.244})$$

( $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ ),

которое с условием

$$P = R \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \rho(\alpha) \cos\alpha d\alpha \quad (\text{III.245})$$

определяет давление  $\rho(\theta)$  и величину области контакта.

Для изотропной пластинки ( $n_1 = n_3$ ) уравнение (III.244) принимает вид

$$-\frac{Rn_1}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \rho(\alpha) \cos(\theta - \alpha) \ln 2 \sin \frac{|\theta - \alpha|}{2} d\alpha + \frac{Rn_2}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \rho(\alpha) (|\theta - \alpha| - \pi) \sin|\theta - \alpha| d\alpha = d \cos\theta - \varepsilon (1 - \cos\theta) \quad (\text{III.246})$$

( $-\theta_0 < \theta < \theta_0$ ),

где

$$n_1 = \frac{2}{E}; \quad n_2 = \frac{1 - \nu}{E}; \quad (\text{III.247})$$

$E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Интегральное уравнение (III.246) при  $\varepsilon=0$  эквивалентно интегродифференциальному уравнению типа Прандтля и одно в другое может быть преобразовано\*.

Ввиду большой сложности интегрального уравнения (III.244) точное решение его в данный момент не представляется возможным. Поэтому ниже приведем приближенное решение указанного уравнения, сведя его к решению линейной системы алгебраических уравнений, удобной для применения современной вычислительной техники. При этом воспользуемся, следуя И. Я. Штаерману [2], методом конечных разностей, который заключается в том, что область изменения искомой функции (область контакта) разбивается на  $n$  равных частей и в каждой полученной части искомая функция предполагается постоянной. Решая таким путем задачу, непрерывную функцию  $p(\theta)$  заменяем кусочно-непрерывной (кусочно-постоянной), изменяющейся скачками при переходе от одного участка к другому.

Приближенное решение интегрального уравнения (III.244). Исключим из уравнения (III.244) неизвестную постоянную  $d$ . Для этого положим  $\theta=0$ . В результате получим

$$d = -\frac{Rn_1}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} p(\alpha) \cos \alpha \ln 2 \sin \frac{|\alpha|}{2} d\alpha + \frac{Rn_2}{2\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} p(\alpha) (|\alpha| - \pi) \sin |\alpha| d\alpha. \quad (\text{III.248})$$

После подстановки (III.248) в (III.244) приходим к интегральному уравнению, не содержащему  $d$ :

$$\begin{aligned} & \frac{R}{\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} p(\alpha) [(n_1 \cos \theta \cos \alpha + n_2 \sin \theta \sin \alpha) \ln 2 \sin \frac{|\theta - \alpha|}{2} - \\ & - n_1 \cos \theta \cos \alpha \ln 2 \sin \frac{|\alpha|}{2}] d\alpha - \frac{Rn_2}{2\pi} \int_{-\theta_0}^{\theta_0} p(\alpha) [(|\theta - \alpha| - \pi) \sin |\theta - \alpha| - \\ & - (|\alpha| - \pi) \cos \theta \sin |\alpha|] d\alpha = \varepsilon (1 - \cos \theta) \quad (\text{III.249}) \\ & (-\theta_0 < \theta < \theta_0), \end{aligned}$$

которое совместно с условием (III.245) и решает поставленную задачу.

Из условия четности функции  $p(\theta)$  в области контакта имеем соотношение

$$\begin{aligned} & \frac{R}{\pi} \int_{-\theta_0}^0 p(\alpha) [(n_1 \cos \theta \cos \alpha + n_2 \sin \theta \sin \alpha) \ln 2 \sin \frac{|\theta - \alpha|}{2} - \\ & - n_1 \cos \theta \cos \alpha \ln 2 \sin \frac{|\alpha|}{2}] d\alpha - \frac{Rn_2}{2\pi} \int_{-\theta_0}^0 p(\alpha) [(|\theta - \alpha| - \pi) \sin |\theta - \alpha| - (|\alpha| - \\ & - \pi) \cos \theta \sin |\alpha|] d\alpha = \frac{R}{\pi} \int_0^{\theta_0} p(\alpha) [(n_1 \cos \theta \cos \alpha - n_2 \sin \theta \sin \alpha) \ln 2 \sin \frac{|\theta + \alpha|}{2} - \end{aligned}$$

\* См. Д. В. Грилицкий [8].

$$- n_1 \cos \theta \cos \alpha \ln 2 \sin \frac{\alpha}{2} \Big] d\alpha - \\ - \frac{Rn_2}{2\pi} \int_0^{\theta_0} p(\alpha) [ (|\theta + \alpha| - \pi) \sin |\theta + \alpha| - (\alpha - \pi) \cos \theta \sin \alpha ] d\alpha,$$

с учетом которого интегральное уравнение (III.249) примет вид

$$\frac{R}{\pi} \int_0^{\theta} p(\alpha) \left[ (n_1 \cos \theta \cos \alpha + n_3 \sin \theta \sin \alpha) \ln 2 \sin \frac{|\theta - \alpha|}{2} + (n_1 \cos \theta \cos \alpha - \right. \\ \left. - n_3 \sin \theta \sin \alpha) \ln 2 \sin \frac{|\theta + \alpha|}{2} - 2n_1 \cos \theta \cos \alpha \ln 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right] d\alpha - \\ - \frac{Rn_2}{2\pi} \int_0^{\theta_0} p(\alpha) [ (|\theta - \alpha| - \pi) \sin |\theta - \alpha| + (|\theta + \alpha| - \pi) \sin |\theta + \alpha| - \\ - 2(\alpha - \pi) \cos \theta \sin \alpha ] d\alpha = \varepsilon(1 - \cos \theta) \quad (\text{III.250}) \\ (-\theta_0 < \theta < \theta_0).$$

Разделим интервал  $(0, \theta_0)$  на  $n$  равных частей и будем считать, что в каждой полученной части функция  $p(\theta)$  постоянная:

$$p(\theta) = p_k \quad \text{при} \quad (k-1)\vartheta < \theta < k\vartheta \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad \vartheta = \frac{\theta_0}{n}. \quad (\text{III.251})$$

Подставив  $p(\theta)$  из (III.251) в (III.250), положив  $\theta = l\vartheta$  ( $l = 1, 2, \dots, n$ ), получим систему уравнений

$$\frac{R}{\pi} \sum_{k=1}^n p_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \left[ (n_1 \cos l\vartheta \cos \alpha + n_3 \sin l\vartheta \sin \alpha) \ln 2 \sin \frac{|l\vartheta - \alpha|}{2} + \right. \\ \left. + (n_1 \cos l\vartheta \cos \alpha - n_3 \sin l\vartheta \sin \alpha) \ln 2 \sin \frac{|l\vartheta + \alpha|}{2} - 2n_1 \cos l\vartheta \cos \alpha \ln 2 \sin \frac{\alpha}{2} \right] d\alpha - \\ - \frac{Rn_2}{2\pi} \sum_{k=1}^n p_k \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} [ (|l\vartheta - \alpha| - \pi) \sin |l\vartheta - \alpha| + (|l\vartheta + \alpha| - \pi) \sin (|l\vartheta + \alpha| - \\ - 2(\alpha - \pi) \cos l\vartheta \sin \alpha ] d\alpha = \varepsilon(1 - \cos l\vartheta) \quad (l = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{III.252})$$

Приведем, опуская промежуточные выкладки, значения определенных интегралов, входящих в уравнения (III.252):

$$\int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} (n_1 \cos l\vartheta \cos \alpha + n_3 \sin l\vartheta \sin \alpha) \ln 2 \sin \frac{|l\vartheta - \alpha|}{2} d\alpha = \\ = [n_3 \sin l\vartheta \cos (k-1)\vartheta - n_1 \cos l\vartheta \sin (k-1)\vartheta] \ln 2 \sin \frac{|l-k+1|\vartheta}{2} -$$

$$\begin{aligned}
& - (n_3 \sin l \vartheta \cos k \vartheta - n_1 \cos l \vartheta \sin k \vartheta) \ln 2 \sin \frac{|l-k| \vartheta}{2} + \\
& + (n_1 - n_3) \sin l \vartheta \cos l \vartheta \left[ \ln \sin \frac{|l-k+1| \vartheta}{2} - \ln \sin \frac{|l-k| \vartheta}{2} - \right. \\
& \left. - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \left( l-k + \frac{1}{2} \right) \vartheta \right] + \frac{1}{2} (n_1 \cos^2 l \vartheta + n_3 \sin^2 l \vartheta) \times \\
& \quad \times [\sin (l-k) \vartheta - \sin (l-k+1) \vartheta - \vartheta]; \tag{III.253}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} (n_1 \cos l \vartheta \cos \alpha - n_3 \sin l \vartheta \sin \alpha) \ln 2 \sin \frac{(l\vartheta + \alpha)}{2} d\alpha = \\
& = (n_3 \sin l \vartheta \cos k \vartheta + n_1 \cos l \vartheta \sin k \vartheta) \ln 2 \sin \frac{(l+k) \vartheta}{2} - \\
& - [n_3 \sin l \vartheta \cos (k-1) \vartheta + n_1 \cos l \vartheta \sin (k-1) \vartheta] \ln 2 \sin \frac{(l+k-1) \vartheta}{2} + \\
& + (n_1 - n_3) \sin l \vartheta \cos l \vartheta \left[ \ln \sin \frac{(l+k) \vartheta}{2} - \ln \sin \frac{(l+k-1) \vartheta}{2} - \right. \\
& \left. - \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \left( l+k - \frac{1}{2} \right) \vartheta \right] - \frac{1}{2} (n_1 \cos^2 l \vartheta + n_3 \sin^2 l \vartheta) \times \\
& \quad \times [\sin (l+k) \vartheta - \sin (l+k-1) \vartheta + \vartheta]; \tag{III.254}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} \cos \alpha \ln 2 \sin \frac{\alpha}{2} d\alpha = \sin k \vartheta \ln 2 \sin \frac{k\vartheta}{2} - \sin (k-1) \vartheta \ln 2 \sin \frac{(k-1) \vartheta}{2} - \\
& \quad - \frac{1}{2} [\sin k \vartheta - \sin (k-1) \vartheta] - \frac{\vartheta}{2}; \tag{III.255}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{(k-1)\vartheta}^{k\vartheta} [(|l\vartheta - \alpha| - \pi) \sin |l\vartheta - \alpha| + (l\vartheta + \alpha - \pi) \sin (l\vartheta + \alpha) - \\
& - 2(\alpha - \pi) \cos l \vartheta \sin \alpha] d\alpha = \tau (l-k) [(|l-k| \vartheta - \pi) \cos (l-k) \vartheta - \\
& - (|l-k+1| \vartheta - \pi) \cos (l-k+1) \vartheta] + [(l+k-1) \vartheta - \pi] \cos (l+k-1) \vartheta - \\
& - [(l+k) \vartheta - \pi] \cos (l+k) \vartheta + \sin (l-k+1) \vartheta - \sin (l-k) \vartheta + \sin (l+k) \vartheta - \\
& - \sin (l+k-1) \vartheta - 2 \cos l \vartheta \{ [(k-1) \vartheta - \pi] \cos (k-1) \vartheta - (k\vartheta - \pi) \cos k \vartheta + \\
& \quad + \sin k \vartheta - \sin (k-1) \vartheta \}, \tag{III.256}
\end{aligned}$$

$$\tau (l-k) = 1 \quad \text{при} \quad (l-k) \geq 0,$$

$$\tau (l-k) = -1 \quad \text{при} \quad (l-k) \leq -1. \tag{III.257}$$

Подставляя (III.253)–(III.256) в (III.252), вводя обозначения

$$\begin{aligned}
& \Delta_{k,l} = \{n_1 \sin (k+1) \vartheta - (n_1 - n_3) \sin l \vartheta [\cos (l-k-1) \vartheta - \cos l \vartheta]\} \times \\
& \times \ln 2 \sin \frac{|k+1| \vartheta}{2} - \{n_1 \sin k \vartheta - (n_1 - n_3) \sin l \vartheta [\cos (l-k) \vartheta -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\cos l\vartheta] \ln 2 \sin \frac{|k|\vartheta}{2} - \frac{\vartheta}{2} (n_1 \cos^2 l\vartheta + n_3 \sin^2 l\vartheta) + n_2 \tau(k) \times \\
 & \times \left[ \left( \frac{|k+1|\vartheta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \cos(k+1)\vartheta - \left( \frac{|k|\vartheta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \cos k\vartheta \right]; \quad (III.258)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta'_{k,l} = & (n_1 - n_3) \sin 2l\vartheta \left\{ \cos(l-k+1)\vartheta - \cos l\vartheta \right\} \ln 2 \sin \frac{(k-1)\vartheta}{2} - \\
 & - \left[ \cos(l-k)\vartheta - \cos l\vartheta \right] \ln 2 \sin \frac{k\vartheta}{2} + \frac{\vartheta}{2} \sin l\vartheta \quad k \geq 1, \quad l \geq 1
 \end{aligned}$$

и приняв во внимание

$$\tau(l+k-1) = \tau(k-1) = 1 \quad \text{при} \quad k \geq 1; \quad l \geq 0,$$

что следует из (III.257), найдем основную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \rho_k [\Delta_{l-k,l} + \Delta_{l+k-1,l} - 2 \cos l\vartheta \Delta_{k-1,l} + \Delta'_{k,l}] = \frac{\pi e}{R} (1 - \cos l\vartheta) \quad (III.259) \\
 (l = 1, 2, \dots, n).
 \end{aligned}$$

Упростим эту систему. При  $k \geq 0, l \geq 0$  из (III.258) имеем

$$\begin{aligned}
 \Delta_{k,l} = & \{n_1 \sin(k+1)\vartheta - (n_1 - n_3) \sin l\vartheta [\cos(l-k-1)\vartheta - \cos l\vartheta]\} \times \\
 & \times \ln 2 \sin \frac{(k+1)\vartheta}{2} - \{n_1 \sin k\vartheta - (n_1 - n_3) \sin l\vartheta [\cos(l-k)\vartheta - \cos l\vartheta]\} \times \\
 & \times \ln 2 \sin \frac{k\vartheta}{2} - \frac{\vartheta}{2} (n_1 \cos^2 l\vartheta + n_3 \sin^2 l\vartheta) + n_2 \left[ \left( \frac{(k+1)\vartheta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \cos(k+1)\vartheta - \right. \\
 & \left. - \left( \frac{k\vartheta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \cos k\vartheta \right]. \quad (III.260)
 \end{aligned}$$

Из (III.258) имеем также

$$\begin{aligned}
 \Delta_{-k,l} = \Delta_{k-1,l} = & 2(n_1 - n_3) \sin 2l\vartheta \left[ \sin^2 \frac{(k-1)\vartheta}{2} \ln 2 \sin \frac{(k-1)\vartheta}{2} - \right. \\
 & \left. - \sin^2 \frac{k\vartheta}{2} \ln 2 \sin \frac{k\vartheta}{2} \right] \quad \text{при} \quad k \geq 1; \quad l \geq 0. \quad (III.261)
 \end{aligned}$$

Если ввести обозначение

$$\begin{aligned}
 F(k,l) = & n_1 \left( \sin k\vartheta \ln 2 \sin \frac{k\vartheta}{2} - \frac{k\vartheta}{2} \right) + n_2 \left( \frac{k\vartheta}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \cos k\vartheta + \\
 & + (n_1 - n_3) \sin l\vartheta \left\{ k \frac{\vartheta}{2} \sin l\vartheta - [\cos(l-k)\vartheta - \cos l\vartheta] \ln 2 \sin \frac{k\vartheta}{2} \right\} \quad (III.262) \\
 & \text{при} \quad k \geq 0; \quad l \geq 0,
 \end{aligned}$$

о (III.260) можно представить в виде

$$\Delta_{k,l} = F(k+1, l) - F(k, l) \quad \text{при} \quad k \geq 0; \quad l \geq 0.$$

Функцию (III.262) представим в виде

$$F(k, l) = -\frac{1}{2} n_1 \hat{f}(k, l) \quad \text{при} \quad k \geq 0; \quad l \geq 0,$$

где

$$\hat{f}(k, l) = \varphi_*(k) - \psi_*(k, l) \quad \text{при} \quad k \geq 0; \quad l \geq 0;$$

$$\varphi_*(k) = C_1 (\pi - k\vartheta) \cos k\vartheta + k\vartheta - 2 \sin k\vartheta \ln 2 \sin \frac{k\vartheta}{2}$$

при  $k \geq 0$ ;

$$\psi_*(k, l) = C_2 \sin l\vartheta \left\{ k\vartheta \sin l\vartheta - 2 [\cos(l-k)\vartheta - \cos l\vartheta] \ln 2 \sin \frac{k\vartheta}{2} \right.$$

при  $k \geq 0; \quad l \geq 0$ ;

$$C_1 = \frac{n_2}{n_1}, \quad C_2 = 1 - \frac{n_2}{n_2}.$$

Если положим

$$\Delta_{k,l} = -\frac{1}{2} n_1 \delta_{k,l},$$

будем иметь

$$\delta_{k,l} = \hat{f}(k+1, l) - \hat{f}(k, l) \quad \text{при} \quad k \geq 0; \quad l \geq 0;$$

$$\delta_{-k,l} = \delta_{k-1,l} + 4C_2 \sin 2l\vartheta \left[ \sin^2 \frac{k\vartheta}{2} \ln 2 \sin \frac{k\vartheta}{2} - \sin^2 \frac{(k-1)\vartheta}{2} \ln 2 \sin \frac{(k-1)\vartheta}{2} \right]$$

при  $k \geq 1; \quad l \geq 0$ .

И, наконец, если ввести обозначение

$$\Omega_k = \varphi_*(k+1) - \varphi_*(k) \quad \text{при} \quad k \geq 0,$$

то системе уравнений (III.259) можно придать окончательный вид:

$$\sum_{k=1}^n p_k (2 \cos l\vartheta \Omega_{k-1} - \delta_{l-k,l} - \delta_{l+k-1,l}) = \frac{2\pi e}{n_1 R} (1 - \cos l\vartheta) \quad (\text{III.263})$$

$$(l = 1, 2, \dots, n).$$

Для изотропной пластинки  $n = n_2$  и, следовательно,  $C_2 = 0$ . Зависимость между сжимающей силой  $P$  и величиной угла контакта  $\theta_0$  дана формулой (III.245), которой, полагая  $p(\theta) = p_k$ , когда  $(k-1)\vartheta < \theta < k\vartheta$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), можно придать вид

$$2R \sum_{k=1}^n p_k [\sin k\vartheta - \sin(k-1)\vartheta] = P. \quad (\text{III.264})$$

Уравнения (III.263) и формула (III.264) служат для определения давления в области контакта (неизвестных  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ) и зависимости угла  $\theta_0$  от силы  $P$ .

Ниже приводятся решения системы уравнений (III.263) на ЦВМ «Урал-1» при  $n = 10$  для пяти значений угла  $\theta_0$ : 30, 40, 50, 60, 70°. Вычисления проведены для ортотропной пластинки, изготовленной\* из фанеры первого типа, а также для изотропной пластинки при  $\nu = 0,3$  и  $E = 2,1 \cdot 9,81 \cdot 10^{10}$ .

Табл. III.9—III.11 показывают влияние анизотропии упругого материала на величину и характер распределения контактных напряжений между шайбой и пластин-

\* См. С. Г. Лехницкий [1].

кой, а также зависимость величины угла контакта от действующей силы. Давление приведено в долях  $9,81 \cdot 10^9 \text{ e/R н/м}^2$ ; сила в долях  $9,81 \cdot 10^9 \text{ e н/м}^2$ . В табл. III.9 и III.10 приведены данные о распределении давления в фанере первого типа, когда ось  $x$  направлена соответственно вдоль и поперек волокон рубашки при  $C_1=0,7118$ ,  $C_2=-2,4496$ ,  $n_1=3,0001 \cdot 10^{-9}/9,81$  (табл. III.9) и  $C_1=0,2037$ ,  $C_2=0,7152$ ,  $n_1=10,3714 \times 10^{-9}/9,81$  (табл. III.10). В табл. III.11 включены результаты вычислений для изотропной пластинки при  $C_1=0,3500$ ,  $C_2=0$ ,  $n_1=0,09524 \cdot 10^{-9}/9,81$ .

Таблица III.9

$k$	$\theta^\circ$				
	30	40	50	60	70
1	0,2056	0,3389	0,5596	1,0359	2,3862
2	0,2004	0,3261	0,5296	0,9604	2,1594
3	0,1905	0,3026	0,4768	0,8356	1,8080
4	0,1766	0,2717	0,4123	0,6943	1,4422
5	0,1597	0,2368	0,3453	0,5598	1,1222
6	0,1406	0,2006	0,2817	0,4426	0,8633
7	0,1199	0,1650	0,2240	0,3438	0,6585
8	0,09805	0,1305	0,1711	0,2604	0,4937
9	0,07443	0,09625	0,1292	0,1865	0,3527
10	0,04662	0,05888	0,06698	0,1123	0,2133
$P$	0,1434	0,2825	0,5194	1,0338	2,4909

Зависимость между приложенной силой  $P$  и углом  $\theta_0$  при известном давлении  $p_k$  дана формулой (III.264).

Анализируя данные табл. III.9 и III.10, видим, что контактные напряжения, достигая максимальных значений в центре области контакта, постепенно уменьшаются при подходе к краям. На краях площадки контакта вследствие непрерывности они принимают нулевые значения. Только для одного из приведенных случаев (табл. III.10) характер распределения контактных напряжений оказывается несколько дру-

Таблица III.10

$k$	$\theta^\circ$				
	30	40	50	60	70
1	0,05661	0,08574	0,1311	0,2159	0,4341
2	0,05636	0,08567	0,1315	0,2176	0,4398
3	0,05583	0,08549	0,1323	0,2211	0,4513
4	0,05497	0,08508	0,1334	0,2260	0,4685
5	0,05366	0,08428	0,1344	0,2322	0,4914
6	0,05175	0,08278	0,1349	0,2388	0,5186
7	0,04895	0,08006	0,1340	0,2442	0,5468
8	0,04479	0,07521	0,1299	0,2448	0,5671
9	0,03834	0,06636	0,1188	0,2324	0,5570
10	0,02721	0,04876	0,09084	0,1850	0,4554
$P$	0,04921	0,1012	0,1966	0,3919	0,8899

гим: для углов контакта  $100^\circ$ ,  $120^\circ$  и  $140^\circ$  точки, в которых давление достигает максимального значения, смещены ближе к краю. Для приведенных анизотропных материалов сжимающая сила, соответствующая определенному углу поворота в десятки раз меньше, чем для изотропной пластинки. В таком же количественном отношении, разумеется, находятся и величины контактных напряжений. Следовательно, анизотропия охватывающего шайбу тела существенно влияет как на величину, так и на характер распределения давления в области контакта.

Таблица III.11

$k$	$\theta^\circ$				
	30	40	50	60	70
1	6,2236	9,7747	15,7380	27,9147	64,3923
2	6,1666	9,6835	15,5849	27,6205	63,6321
3	6,0507	9,4989	15,2756	27,0268	62,1056
4	5,8718	9,2152	14,8000	26,1215	59,7958
5	5,6232	8,8213	14,1441	24,8825	56,6719
6	5,2939	8,3000	13,2819	23,2735	52,6739
7	4,8651	7,6238	12,1714	21,2289	47,6897
8	4,3044	6,7425	10,7373	18,6283	41,4920
9	3,5456	5,5524	8,8187	15,2134	33,5666
10	2,4116	3,7766	5,9842	10,2635	22,4179
$P$	5,0854	10,3375	19,9569	40,2305	101,2639

Табл. III.9—III.11 дают приближенное значение искомой функции в виде кусочно-постоянной функции, изменяющейся скачками в точках раздела интервала интегрирования. Данные этих таблиц дают возможность построить ступенчатые графики давления соответственно для пяти значений угла  $\theta_0$ . Сгладив скачки, получим плавную кривую, выражающую приближенное решение интегрального уравнения (III.244). Построенные таким образом графики для  $\sigma_x$  будут изображать характер распределения давлений для случая, когда ось  $x$  направлена как вдоль, так и поперек волокон рубашки. Для сопоставления (по данным табл. III.11) полезно построить соответствующие кривые, характеризующие распределение давления для изотропной пластинки. Пользуясь формулой (III.264), можно построить кривые, выражающие зависимость угла  $\theta_0$  от отношения  $P/\epsilon$ . Эти кривые дают возможность по заданной разнице радиусов  $\epsilon$  и величине приложенной силы  $P$  определять угол  $\theta_0$ , т. е. размеры области контакта.

## § 6. Решение первой основной задачи для области с отверстием, мало отличающимся от эллиптического \*

Рассмотрим бесконечную анизотропную пластинку с отверстием, контур которого мало отличается от эллиптического. Уравнение этого контура возьмем в виде

\* Приближенное решение этой задачи впервые дано С. Г. Лехницким [2]. Иной приближенный метод решения аналогичной задачи предложил А. С. Космодамианский [8].



$$x = R \left[ \cos \vartheta + \varepsilon \sum_{k=2}^N (\alpha_k \cos k\vartheta - \beta_k \sin k\vartheta) \right],$$

$$y = R \left[ -c \sin \vartheta + \varepsilon \sum_{k=2}^N (\alpha_k \sin k\vartheta + \beta_k \cos k\vartheta) \right].$$
(III.265)

Здесь  $x$  и  $y$  — прямоугольные декартовы координаты;  $\varepsilon$  — малый параметр;  $\alpha_k, \beta_k$  — постоянные;  $\vartheta$  — угол, который при обходе по контуру меняется от 0 до  $2\pi$ ;  $c = b/a$  ( $a = R$ ), где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса;  $N$  — любое целое число.

Как и в § 1, будем предполагать, что к рассматриваемому контуру отверстия приложены усилия  $X_n$  и  $Y_n$ , главный вектор которых равен нулю. Задача о напряженном состоянии такой пластинки приводится к определению функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  из граничных условий (III.6).

Отобразим конформно внутренность единичного круга на бесконечную область с отверстием вида (III.265):

$$z = x + iy = \omega(\zeta) = R \left[ \frac{1-c}{2} \zeta + \frac{1+c}{2} \zeta^{-1} + \varepsilon \chi(\zeta) \right],$$
(III.266)

где

$$\chi(\zeta) = \sum_{k=2}^N (\alpha_k + i\beta_k) \zeta^k.$$
(III.267)

На контуре единичного круга  $\zeta = \sigma = e^{i\vartheta}$ .

Следуя С. Г. Лехницкому [2], функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  представим в виде

$$\varphi(z_1) = f_{10}(\zeta_1) + \varepsilon \{ f_{11}(\zeta_1) + [\chi(\zeta) + \lambda_1 \overline{\chi(\zeta)}] f'_{10}(\zeta_1) \} + \dots +$$

$$+ \varepsilon^k \left\{ f_{1k}(\zeta_1) + [\chi(\zeta) + \lambda_1 \overline{\chi(\zeta)}] f'_{1,k-1}(\zeta_1) + \dots + \frac{1}{k!} [\chi(\zeta) + \lambda_1 \overline{\chi(\zeta)}]^k f_{10}^{(k)}(\zeta_1) \right\} + \dots,$$
(III.268)

$$\psi(z_2) = f_{20}(\zeta_2) + \varepsilon \{ f_{21}(\zeta_2) + [\chi(\zeta) + \lambda_2 \overline{\chi(\zeta)}] f'_{20}(\zeta_2) \} + \dots +$$

$$+ \varepsilon^k \left\{ f_{2k}(\zeta_2) + [\chi(\zeta) + \lambda_2 \overline{\chi(\zeta)}] f'_{2,k-1}(\zeta_2) + \dots + \frac{1}{k!} [\chi(\zeta) + \lambda_2 \overline{\chi(\zeta)}]^k f_{20}^{(k)}(\zeta_2) \right\} + \dots,$$

Здесь

$$z_p = z + \lambda_p \bar{z}, \quad \lambda_p = \frac{1 + i s_p}{1 - i s_p};$$
(III.269)

$f_{pk}(\zeta_p)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ;  $p = 1, 2$ ) — аналитические функции аргументов;

$$\zeta_p = \frac{1-c}{2} \zeta + \frac{1+c}{2} \zeta^{-1} + \lambda_p \left( \frac{1-c}{2} \bar{\zeta} + \frac{1+c}{2} \bar{\zeta}^{-1} \right).$$
(III.270)

Функции  $f_{pk}(\zeta_p)$  определены в областях  $S_p$ , которые представляют собой бесконечные плоскости с эллиптическими отверстиями.

Будем считать, что усилия, приложенные к контуру отверстия, могут быть разложены в ряды по степеням малого параметра  $\epsilon$ :

$$-\int_0^s Y_n ds + C_1 = \sum_{k=0}^s \rho_{1k} \epsilon^k, \quad (III.271)$$

$$\int_0^s X_n ds + C_2 = \sum_{k=0}^s \rho_{2k} \epsilon^k.$$

Здесь  $\rho_{1k}$  и  $\rho_{2k}$  — известные функции, определяемые для каждого частного случая.

Подставим выражения (III.268) и (III.271) в граничные условия (III.6) и приравняем члены при одинаковых степенях  $\epsilon$ . Тогда для определения функций  $f_{pk}(\zeta_p)$  получим граничные условия

$$2 \operatorname{Re} [f_{10}(\zeta_1) + f_{20}(\zeta_2)] = \rho_{10}, \quad (III.272)$$

$$2 \operatorname{Re} [s_1 f_{10}(\zeta_1) + f_{20}(\zeta_2) s_2] = \rho_{20};$$

.....

$$2 \operatorname{Re} [f_{1k}(\zeta_1) + f_{2k}(\zeta_2)] = \rho_{1k} - 2 \operatorname{Re} \left\{ [\chi(\zeta) + \lambda_1 \overline{\chi(\zeta)}] f'_{1,k-1}(\zeta_1) + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{k!} [\chi(\zeta) + \lambda_1 \overline{\chi(\zeta)}]^k f_{10}^{(k)}(\zeta_1) + [\chi(\zeta) + \lambda_2 \overline{\chi(\zeta)}] f'_{2,k-1}(\zeta_2) + \dots + \right. \\ \left. + \frac{1}{k!} [\chi(\zeta) + \lambda_2 \overline{\chi(\zeta)}]^k f_{20}^{(k)}(\zeta_2) \right\}, \quad (III.273)$$

$$2 \operatorname{Re} [s_1 f_{1k}(\zeta_1) + s_2 f_{2k}(\zeta_2)] = \rho_{2k} - 2 \operatorname{Re} \left\{ s_1 [\chi(\zeta) + \lambda_1 \overline{\chi(\zeta)}] f'_{1,k-1}(\zeta_1) + \dots + \right. \\ \left. + \frac{s_1}{k!} [\chi(\zeta) + \lambda_1 \overline{\chi(\zeta)}]^k f_{10}^{(k)}(\zeta_1) + s_2 [\chi(\zeta) + \lambda_2 \overline{\chi(\zeta)}] f'_{2,k-1}(\zeta_2) + \dots + \right. \\ \left. + \frac{s_2}{k!} [\chi(\zeta) + \lambda_2 \overline{\chi(\zeta)}]^k f_{20}^{(k)}(\zeta_2) \right\}.$$

Поскольку функции  $f_{pk}(\zeta_p)$  определены, как уже упоминалось, в плоскостях с эллиптическими отверстиями, то их можно найти таким же образом\*, как и в § 1.

Отобразим конформно внутренность единичного круга  $\gamma$  на внешность указанных эллиптических отверстий:

$$\zeta_p = \omega_p(\zeta) = \left( \frac{1+c}{2} + \frac{1-c}{2} \lambda_p \right) \frac{1}{\zeta} + \left( \frac{1+c}{2} \lambda_p + \frac{1-c}{2} \right) \zeta. \quad (III.274)$$

\* Для определения функций  $f_{pk}(\zeta_p)$  Л. Г. Лехницкий [2] применил метод рядов. А. С. Космодамианский [1] для этой цели воспользовался интегралами типа Коши. Здесь для определения указанных функций применена формула Шварца (III.8).

Введем обозначения

$$f_{pk}(\zeta_p) = f_{pk}[\omega_p(\zeta)] = \psi_{pk}(\zeta). \quad (\text{III.275})$$

Теперь граничные условия (III.272) и (III.273) примут вид

$$2\text{Re}[\psi_{10}(\sigma) + \psi_{20}(\sigma)] = f_{10}(\theta), \quad (\text{III.276})$$

$$2\text{Re}[s_1\psi_{10}(\sigma) + s_2\psi_{20}(\sigma)] = f_{20}(\theta);$$

.....

$$2\text{Re}[\psi_{1k}(\sigma) + \psi_{2k}(\sigma)] = f_{1k}(\theta), \quad (\text{III.277})$$

$$2\text{Re}[s_1\psi_{1k}(\sigma) + s_2\psi_{2k}(\sigma)] = f_{2k}(\theta),$$

где

$$f_{10}(\theta) = p_{10}, \quad f_{20}(\theta) = p_{20},$$

$$f_{1k}(\theta) = p_{1k} - 2\text{Re} \left\{ (\chi + \lambda_1\chi) \frac{d\psi_{1,k-1}}{d\sigma_1} + \dots + \frac{1}{k!} (\chi + \lambda_1\bar{\chi})^k \frac{d^k\psi_{10}}{d\sigma_1^k} + \right. \\ \left. + (\chi + \lambda_2\bar{\chi}) \frac{d\psi_{2,k-1}}{d\sigma_2} + \dots + \frac{1}{k!} (\chi + \lambda_2\bar{\chi})^k \frac{d^k\psi_{20}}{d\sigma_2^k} \right\}, \quad (\text{III.278})$$

$$f_{2k}(\theta) = p_{2k} - 2\text{Re} \left\{ s_1(\chi + \lambda_1\bar{\chi}) \frac{d\psi_{1,k-1}}{d\sigma_1} + \dots + \frac{s_1}{k!} (\chi + \lambda_1\bar{\chi})^k \frac{d^k\psi_{10}}{d\sigma_1^k} + \right. \\ \left. + s_2(\chi + \lambda_2\bar{\chi}) \frac{d\psi_{2,k-1}}{d\sigma_2} + \dots + \frac{s_2}{k!} (\chi + \lambda_2\bar{\chi})^k \frac{d^k\psi_{20}}{d\sigma_2^k} \right\},$$

Здесь

$$\sigma_p = \left( \frac{1+c}{2} + \frac{1-c}{2} \lambda_p \right) \frac{1}{\sigma} + \left( \frac{1-c}{2} + \frac{1+c}{2} \lambda_p \right) \sigma, \quad (\text{III.279})$$

поэтому при дифференцировании функций  $\psi_{pk}$  по  $\sigma_p$  следует применять формулу

$$\frac{d\psi_{pk}}{d\sigma_p} = \frac{d\psi_{pk}}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{d\sigma_p} = - \frac{\omega_p \sigma^2}{1 - \kappa_p \sigma^2} \cdot \frac{d\psi_{pk}}{d\sigma}, \quad (\text{III.280})$$

где

$$\omega_p = \frac{2}{1+c+\lambda_p(1-c)}, \quad \kappa_p = \frac{1-c+\lambda_p(1+c)}{1+c+\lambda_p(1-c)} \quad (\text{III.281})$$

Для определения функций  $\psi_{pk}(\zeta_p)$ , голоморфных внутри единичного круга  $\gamma$  и удовлетворяющих на  $\gamma$  граничным условиям (III.276) и (III.277), воспользуемся, как и раньше, формулой Шварца. Тогда на основании формул (III.9) и (III.10) будем иметь

$$\psi_{1k}(\zeta) = \frac{i}{4\pi(s_1 - s_2)} \int_{\gamma} [s_2 f_{1k}(\theta) - f_{2k}(\theta)] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_{1k}, \\ \psi_{2k}(\zeta) = \frac{-i}{4\pi(s_1 - s_2)} \int_{\gamma} [s_1 f_{1k}(\theta) - f_{2k}(\theta)] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_{2k}. \quad (\text{III.282})$$

Возвратимся к переменным  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ . Из выражения (III.274) найдем

$$\zeta = \frac{\zeta_p - 1 \sqrt{\zeta_p^2 - [(1 + \lambda_p^2)(1 - c^2) + 2\lambda_p(1 + c^2)]}}{1 - c + \lambda_p(1 + c)}. \quad (\text{III.283})$$

Подставим выражение  $\zeta$  при  $p = 1$  в функцию  $\psi_{1k}(\zeta)$  и при  $p = 2$  — в функцию  $\psi_{2k}(\zeta)$ . Тогда получим соответственно выражения для  $f_{1k}(\zeta_1)$  и  $f_{2k}(\zeta_2)$ , знание которых на основании формул (III.268) позволит найти функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ . После их нахождения напряжения в пластинке определяются по формулам (I.90).

При изучении вопроса о концентрации напряжений около отверстия пластинки наибольший интерес представляет определение нормального напряжения  $\sigma_\vartheta$ , которое действует на площадках, нормальных к контуру отверстия\*:

$$\sigma_\vartheta = 2 \operatorname{Re} \left[ (1 + \lambda_1) \left( \frac{dy}{ds} - s_1 \frac{dx}{ds} \right)^2 \varphi'(z_1) + (1 + \lambda_2) \left( \frac{dy}{ds} - s_2 \frac{dx}{ds} \right)^2 \psi'(z_2) \right]. \quad (\text{III.284})$$

## § 7. Растяжение анизотропной пластинки с криволинейным отверстием частного вида

Рассмотрим бесконечную однородную анизотропную пластинку, ослабленную отверстием, контур которого задан уравнениями

$$x = R \left( \cos \vartheta + \varepsilon \sum_{k=2}^5 a_k \cos k\vartheta \right), \quad (\text{III.285})$$

$$y = R \left( -c \sin \vartheta + \varepsilon \sum_{k=2}^5 a_k \sin k\vartheta \right).$$

Функция, конформно отображающая внутренность единичного круга на бесконечную область с рассматриваемым отверстием (III.285), состоит из шести членов и имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \frac{1-c}{2} \zeta + \frac{1+c}{2} \zeta^{-1} + \varepsilon \sum_{k=2}^5 a_k \zeta^k \right). \quad (\text{III.286})$$

Выбор отображающей функции (III.286) позволяет сравнительно легко получить формулы для определения напряженного состояния в пластинке с различными отверстиями.

Пусть контур отверстия свободен от внешних усилий, а на бесконечности пластинка растягивается равномерно распределенными уси-

\* См. С. Г. Лехницкий [2].

Возвратимся к переменным  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ . Из выражения (III.274) найдем

$$\zeta = \frac{\zeta_p - \sqrt{\zeta_p^2 - [(1 + \lambda_p^2)(1 - c^2) + 2\lambda_p(1 + c^2)]}}{1 - c + \lambda_p(1 + c)}. \quad (\text{III.283})$$

Подставим выражение  $\zeta$  при  $p = 1$  в функцию  $\psi_{1k}(\zeta)$  и при  $p = 2$  — в функцию  $\psi_{2k}(\zeta)$ . Тогда получим соответственно выражения для  $f_{1k}(\zeta_1)$  и  $f_{2k}(\zeta_2)$ , знание которых на основании формул (III.268) позволит найти функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ . После их нахождения напряжения в пластинке определяются по формулам (I.90).

При изучении вопроса о концентрации напряжений около отверстия пластинки наибольший интерес представляет определение нормального напряжения  $\sigma_\vartheta$ , которое действует на площадках, нормальных к контуру отверстия\*:

$$\sigma_\vartheta = 2 \operatorname{Re} \left[ (1 + \lambda_1) \left( \frac{dy}{ds} - s_1 \frac{dx}{ds} \right)^2 \varphi'(z_1) + (1 + \lambda_2) \left( \frac{dy}{ds} - s_2 \frac{dx}{ds} \right)^2 \psi'(z_2) \right]. \quad (\text{III.284})$$

## § 7. Растяжение анизотропной пластинки с криволинейным отверстием частного вида

Рассмотрим бесконечную однородную анизотропную пластинку, ослабленную отверстием, контур которого задан уравнениями

$$x = R \left( \cos \vartheta + \varepsilon \sum_{k=2}^5 a_k \cos k\vartheta \right), \quad (\text{III.285})$$

$$y = R \left( -c \sin \vartheta + \varepsilon \sum_{k=2}^5 a_k \sin k\vartheta \right).$$

Функция, конформно отображающая внутренность единичного круга на бесконечную область с рассматриваемым отверстием (III.285), состоит из шести членов и имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \frac{1-c}{2} \zeta + \frac{1+c}{2} \zeta^{-1} + \varepsilon \sum_{k=2}^5 a_k \zeta^k \right). \quad (\text{III.286})$$

Выбор отображающей функции (III.286) позволяет сравнительно легко получить формулы для определения напряженного состояния в пластинке с различными отверстиями.

Пусть контур отверстия свободен от внешних усилий, а на бесконечности пластинка растягивается равномерно распределенными уси-

\* См. С. Г. Лехницкий [2].

лиями  $p$ , параллельными оси  $Ox$ , и усилиями  $q$ , параллельными оси  $Oy$  (рис. III.19).

Решение задачи о напряженном состоянии пластинки получим сложением двух полей напряжений:

1) поля напряжений, возникающего в сплошной пластинке

$$\sigma_x^0 = p, \quad \sigma_y^0 = q, \quad \tau_{xy}^0 = 0; \quad (\text{III.287})$$

в этом случае проекции усилий, действующих на контуре предполагаемого отверстия, имеют вид

$$X_n^0 = -p \frac{dy}{ds}, \quad Y_n^0 = q \frac{dx}{ds}; \quad (\text{III.288})$$

2) поля напряжений, возникающего в пластинке с отверстием, к контуру которого приложены усилия

$$X_n = -X_n^0 = p \frac{dy}{ds}, \quad (\text{III.289})$$

$$Y_n = -Y_n^0 = -q \frac{dx}{ds},$$

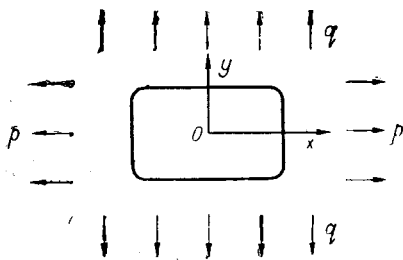


Рис. III.19.

а на бесконечности усилия отсутствуют.

Определим напряженное состояние пластинки, когда на контуре действуют усилия  $X_n, Y_n$ .

Граничные значения (III.271) представим в виде

$$-\int_0^s Y_n ds + C_1 = p_{10} + \varepsilon p_{11}, \quad (\text{III.290})$$

$$\int_0^s X_n ds + C_2 = p_{20} + \varepsilon p_{21},$$

где

$$p_{10} = -\frac{qR}{2} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right), \quad p_{11} = -\frac{qR}{2} \sum_{k=2}^5 a_k \left( \sigma^k + \frac{1}{\sigma^k} \right),$$

$$p_{20} = -\frac{pRi}{2} c \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right), \quad p_{21} = \frac{pRi}{2} \sum_{k=2}^5 a_k \left( \sigma^k - \frac{1}{\sigma^k} \right).$$

При решении этой задачи ограничимся вторым приближением. В выражениях (III.268) сохраним члены, содержащие  $\varepsilon$  во второй степени, отбросив члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени  $\geq 3$ . Будем считать, что для ортотропной пластинки комплексные параметры являются чисто мнимыми ( $s_1 = i\beta_1, s_2 = i\beta_2$ ). Ограничимся определением функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  для точек контура рассматриваемого отверстия.

Применив изложенную выше теорию, после ряда преобразований получим

$$\varphi(\sigma) = \frac{R}{2} \left[ N_0 \sigma + \varepsilon \sum_{k=1}^5 (N_k \sigma^k + N_{-k} \sigma^{-k}) + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^7 (A_k \sigma^k + A_{-k} \sigma^{-k}) \right]. \quad (\text{III.291})$$

Здесь введены обозначения:

$$N_0 = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} m_1,$$

$$N_{-1} = -\frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \delta_1 (a_3 + \kappa_1 a_5) m_1, \quad N_{-2} = -\frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \delta_1 a_4 m_1,$$

$$N_{-3} = -\frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \delta_1 a_5 m_1, \quad N_{-4} = N_{-5} = 0,$$

$$N_1 = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)^2} [2\beta_2 \delta_2 (a_3 + \kappa_2 a_5) m_2 - (\beta_1 + \beta_2) \delta_1 (a_3 + \kappa_1 a_5) m_1], \quad (\text{III.292})$$

$$N_2 = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)^2} [2\beta_2 \delta_2 a_4 m_2 - (\beta_1 + \beta_2) \delta_1 a_4 m_1 + (\beta_1 - \beta_2) a_2 n_1],$$

$$N_3 = \frac{1}{(\beta_1 - \beta_2)^2} [2\beta_2 \delta_2 a_5 m_2 - (\beta_1 + \beta_2) \delta_1 a_5 m_1 + (\beta_1 - \beta_2) a_3 n_1],$$

$$N_4 = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} a_4 n_1, \quad N_5 = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} a_5 n_1;$$

$$A_{-1} = \delta_1 [-3a_5 N_3 - 2a_4 N_2 - (a_3 + \kappa_1 a_5) N_1 + \frac{\delta_1}{\beta_1 - \beta_2} (a_2^2 + 4\kappa_1 a_2 a_4 + 2\kappa_1 a_3^2 + 7\kappa_1^2 a_3 a_5 + 4\kappa_1^2 a_4^2 + 6\kappa_1^3 a_5^2) m_1],$$

$$A_{-2} = \delta_1 [-2a_5 N_2 - a_4 N_1 + \frac{\delta_1}{\beta_1 - \beta_2} (2a_2 a_3 + 4\kappa_1 a_2 a_5 + 5\kappa_1 a_3 a_4 + 9\kappa_1^2 a_4 a_5) m_1],$$

$$A_{-3} = \delta [-a_5 N + \frac{\delta_1}{\beta_1 - \beta_2} (2a_2 a_4 + a_3^2 + 5\kappa_1 a_3 a_5 + 3\kappa_1 a_4^2 + 5\kappa_1^2 a_5^2) m_1],$$

$$A_{-4} = \frac{\delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} (2a_2 a_5 + 2a_3 a_4 + 6\kappa_1 a_4 a_5) m_1, \quad (\text{III.293})$$

$$A_{-5} = \frac{\delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} (2a_3 a_5 + a_4^2 + 3\kappa_1 a_5^2) m_1,$$

$$A_{-6} = \frac{\delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} 2a_4 a_5 m_1,$$

$$A_{-7} = \frac{\delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} a_5^2 m_1,$$

$$A_k = \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} [(\beta_1 + \beta_2) A_{-k} + 2\beta_2 B_{-k}] \quad (k = 1, \dots, 7).$$

При этом

$$\begin{aligned} m_1 &= -\rho c + q\beta_2, & n_1 &= \rho + q\beta_2, \\ m_2 &= -\rho c + q\beta_1, & n_2 &= \rho + q\beta_1, \end{aligned} \quad (\text{III.294})$$

$$\kappa_p = \frac{1 - c\beta_p}{1 + c\beta_p}, \quad \delta_p = \omega_p \lambda_p = \frac{1 - \beta_p}{1 + c\beta_p} \quad (p = 1, 2).$$

Коэффициенты  $B_{-k}$  и  $B_k$  получаются из  $A_{-k}$  и  $A_k$ , если в последних заменить  $\beta_1, \delta_1, \kappa_1, m_1, n_1$  соответственно на  $\beta_2, \delta_2, \kappa_2, m_2, n_2$ , и наоборот.

Функция  $\psi(\sigma)$  находится из (III.291), если в выражениях коэффициентов (III.292) и (III.293) произвести круговую перестановку индекса  $i$  у  $\beta_i, \delta_i, \kappa_i, m_i, n_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Выражение для нормального напряжения, действующего на площадках, нормальных к контуру отверстия, примет вид

$$\begin{aligned} \sigma_\vartheta &= \rho \left\{ \frac{B^2}{C^2} + \frac{A^2}{C^2 L} [A^4 \beta_1^2 + A^2 B^2 (2\beta_1^2 + 1 - \beta_1^2 \beta_2^2) + B^4 (2 - \beta_2^2)] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\beta_1 + \beta_2) C^2}{L} (B\varphi_1 - \beta_1 A\psi_1) \right\} + \\ &+ q \left\{ \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2 L} [A^4 \beta_1^2 (2\beta_2^2 - 1) + A^2 B^2 (2\beta_2^2 - 1 + \beta_1^2 \beta_2^2) + B^4 \beta_2^2] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\beta_1 + \beta_2) \beta_2 C^2}{L} (B\varphi_2 - \beta_1 A\psi_2) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.295})$$

Здесь введены обозначения:

$$A = -c \cos \vartheta + \varepsilon \sum_{k=2}^5 ka_k \cos k\vartheta, \quad (\text{III.296})$$

$$B = \sin \vartheta + \varepsilon \sum_{k=2}^5 ka_k \sin k\vartheta;$$

$$C^2 = A^2 + B^2, \quad L = (A^2 \beta_1^2 + B^2) (A^2 \beta_2^2 + B^2); \quad (\text{III.297})$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= -B + (1 + c) \sin \vartheta - \frac{2\beta_1 c}{\beta_1 - \beta_2} \left[ \varepsilon \sum_{k=1}^3 k \left( \delta_1 M_k - \delta_2 \frac{\beta_2}{\beta_1} \rho_k \right) \sin k\vartheta - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^7 k \left( \delta_1^2 A_{1k} - \delta_2^2 \frac{\beta_2}{\beta_1} B_{1k} \right) \sin k\vartheta \right], \end{aligned} \quad (\text{III.298})$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= A + \frac{2\beta_2 c}{\beta_1 - \beta_2} \left[ \varepsilon \sum_{k=1}^3 k \left( \delta_1 M_k - \delta_2 \rho_k \right) \cos k\vartheta - \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^7 k \left( \delta_1^2 A_{1k} - \delta_2^2 B_{1k} \right) \cos k\vartheta \right]; \end{aligned}$$



$$\varphi_2 = -B + \frac{2\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \left[ \varepsilon \sum_{k=1}^3 k (\delta_1 M_k - \delta_2 p_k) \sin k\vartheta - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^7 k (\delta_1^2 A_{2k} - \delta_2^2 B_{2k}) \sin k\vartheta \right] \quad (\text{III.299})$$

$$\psi_2 = A + (1+c) \cos \vartheta - \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \left[ \varepsilon \sum_{k=1}^3 k \left( \delta_1 M_k - \delta_2 \frac{\beta_1}{\beta_2} p_k \right) \cos k\vartheta - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^7 k \left( \delta_1^2 A_{2k} - \delta_2^2 \frac{\beta_1}{\beta_2} B_{2k} \right) \cos k\vartheta \right].$$

При этом

$$M_1 = a_3 + \kappa_1 a_5,$$

$$M_2 = a_4,$$

$$M_3 = a_5,$$

$$A_{11} = a_2^2 + 4a_2 a_4 \kappa_1 + 2a_3^2 \kappa_1 + 7a_3 a_5 \kappa_1^2 + 4a_4^2 \kappa_1^2 + 6a_5^2 \kappa_1^3 + \frac{3a_3 a_5 + 2a_2 a_4}{c\delta_1} + [2a_4^2 + 3a_5^2 + (a_3 + \kappa_1 a_5)^2 \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} - [2a_4^2 + 3a_5^2 + (a_3 + \kappa_1 a_5)(a_3 + \kappa_2 a_5)] \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

$$A_{12} = 2a_2 a_3 + 4a_2 a_5 \kappa_1 + 5a_3 a_4 \kappa_1 + 9a_4 a_5 \kappa_1^2 + \frac{2a_2 a_5}{c\delta_1} + [2a_4 a_5 + a_4 (a_3 + \kappa_1 a_5)] \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} - [2a_4 a_5 + a_4 (a_3 + \kappa_2 a_5)] \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

$$A_{13} = a_3^2 + 2a_2 a_4 + 5a_3 a_5 \kappa_1 + 3a_4^2 \kappa_1 + 5a_5^2 \kappa_1^2 + a_5 (a_3 + \kappa_1 a_5) \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} - a_5 (a_3 + \kappa_2 a_5) \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad (\text{III.300})$$

$$A_{14} = 2a_2 a_5 + 2a_3 a_4 + 6a_4 a_5 \kappa_1,$$

$$A_{15} = 2a_3 a_5 + a_4^2 + 3a_5^2 \kappa_1,$$

$$A_{16} = 2a_4 a_5,$$

$$A_{17} = a_5^2;$$

$$A_{21} = A_{11} - 2[2a_4^2 + 3a_5^2 + (a_3 + \kappa_1 a_5)(a_3 + \kappa_2 a_5)] \frac{\delta_2}{\delta_1} - \frac{3a_2 a_5 + 2a_4 a_2}{c\delta_1} (1+c),$$

$$A_{22} = A_{12} - 2[2a_4 a_5 + a_4 (a_3 + \kappa_2 a_5)] \frac{\delta_2}{\delta_1} - \frac{2a_2 a_5}{c\delta_1} (1+c), \quad (\text{III.301})$$

$$A_{23} = A_{13} - 2a_5 (a_3 + \kappa_2 a_5) \frac{\delta_2}{\delta_1},$$

$$A_{2k} = A_{1k} \quad (k = 4, \dots, 7).$$

Коэффициенты  $p_k, B_{1k}, B_{2k}$  находим из выражений для  $M_k, A_{1k}, A_{2k}$  заменой  $\beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \kappa_1, \kappa_2$  соответственно на  $\beta_2, \beta_1, \delta_2, \delta_1, \kappa_2, \kappa_1$ .

В рассмотренных ниже примерах определены напряжения, возникающие на контуре отверстия, когда пластинка изготовлена из авиационной фанеры\*:

1) упругие постоянные

$$a_{11} = 0,83333 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{12} = -0,05917 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81},$$

$$a_{22} = 1,66667 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{66} = 14,2857 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}$$

и комплексные параметры

$$s_1 = 4,11i, \quad s_2 = 0,343i,$$

если ось  $x$  направлена вдоль волокон рубашки ( $E_x = E_{\max}$ );

2) упругие постоянные

$$a_{11} = 1,66667 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{12} = -0,05917 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81},$$

$$a_{22} = 0,83333 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{66} = 14,2857 \cdot \frac{10^{-9}}{9,81}$$

и комплексные параметры

$$s_1 = 0,243i, \quad s_2 = 2,91i,$$

если ось  $x$  направлена поперек волокон рубашки ( $E_x = E_{\min}$ ).

Результаты вычислений для фанерной и изотропной пластинок иллюстрированы приведенными ниже графиками. Сплошные линии на этих рисунках соответствуют случаю  $E_x = E_{\max}$ , штрихпунктирные, — когда  $E_x = E_{\min}$ , а пунктирные относятся к изотропной пластинке.

Формула для напряжения  $\sigma_\theta$  в случае изотропной пластинки может быть получена из приближенной формулы (III.295) путем предельного перехода, если положить  $\beta_1 = \beta_2 = 1$ . Однако эта задача имеет и точное решение\*\*.

**Отверстие в форме правильного треугольника\*\*\*.** Контур задан уравнениями

$$x = R(\cos \theta + \varepsilon \cos 2\theta),$$

$$y = R(-\sin \theta + \varepsilon \sin 2\theta). \quad (\text{III.302})$$

Уравнения (III.302) получаются из уравнений (III.285), если в последних положить  $c=1, a_2=1, a_3=a_4=a_5=0$ . При  $\varepsilon=0,25$  получим отверстие, которое мало отличается от равностороннего с закругленными углами. При этом кривизна в середине сторон треугольника равна нулю\*\*\*\*.

Рассмотрим два частных случая.

\* См. С. Г. Лехницкий [1], стр. 54.

\*\* См. Е. Ф. Бурмистров [1].

\*\*\* См. С. Г. Лехницкий [1], стр. 220.

\*\*\*\* См. М. И. Найман [1].

Растяжение пластинки равномерно распределенными усилиями  $p$ , действующими вдоль оси  $Ox$  (рис. III.20). Полагая в формуле (III.295)  $q=0$ , получаем

$$\sigma_{\phi} = p \left\{ \frac{B^2}{C^2} + \frac{A^2}{C^2 L} [A^4 \beta_1^2 + A^2 B^2 (1 + 2\beta_1^2 - \beta_1^2 \beta_2^2) + B^4 (2 - \beta_2^2)] + \frac{C^2 (\beta_1 + \beta_2)}{L} (B\varphi_1 - \beta_1 A\psi_1) \right\}, \quad (\text{III.303})$$

где

$$\varphi_1 = -B + 2 \sin \theta + \frac{2\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \varepsilon^2 (\delta_1^2 - \delta_2^2 \frac{\beta_2}{\beta_1}) \sin \theta, \quad (\text{III.304})$$

$$\psi_1 = A - \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \varepsilon^2 (\delta_1^2 - \delta_2^2) \cos \theta.$$

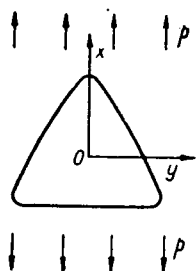


Рис. III.20.

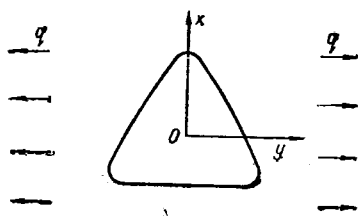


Рис. III.21.

Величины  $C^2$ ,  $L$  определяются по формулам (III.297), в которых нужно положить

$$A = -\cos \theta + 2\varepsilon \cos 2\theta, \quad (\text{III.305})$$

$$B = \sin \theta + 2\varepsilon \sin 2\theta.$$

Выражения (III.304) и (III.305) получаются из (III.296), (III.297) и (III.300), если в последних принять  $c=1$ ,  $a_2=1$  и  $a_3=a_4=a_5=0$ .

Растяжение пластинки равномерно распределенными усилиями  $q$ , действующими вдоль оси  $Oy$  (рис. III.21). Формула для определения напряжения  $\sigma_{\phi}$  получается из (III.295), если в последней положить  $p=0$ :

$$\sigma_{\phi} = q \left\{ \frac{A^2}{C^2} + \frac{B^2}{C^2 L} [A^4 \beta_1^2 (2\beta_2^2 - 1) + A^2 B^2 (2\beta_2^2 + \beta_2^2 \beta_2^2 - 1) + B^4 \beta_2^2] + \frac{(\beta_1 + \beta_2) \beta_2 C^2}{L} (B\varphi_2 - \beta_1 A\psi_2) \right\}, \quad (\text{III.306})$$

где

$$\varphi_2 = -B - \frac{2\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \varepsilon^2 (\delta_1^2 - \delta_2^2) \sin \theta, \quad (\text{III.307})$$

$$\psi_2 = A + 2 \cos \theta + \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \varepsilon^2 (\delta_1^2 - \delta_2^2 \frac{\beta_1}{\beta_2}) \cos \theta.$$

Коэффициенты  $C^2$ ,  $L$ ,  $A$  и  $B$  определяются, как и раньше, по формулам (III.297) и (III.305).

На рис. III.22 приведены графики распределения напряжений  $\sigma_\phi$  по контуру треугольного отверстия.

**Отверстие в форме равнобедренного треугольника\***. Имеем ортотропную пластинку, ослабленную отверстием, контур которого задан уравнением

$$\begin{aligned}x &= R[\cos \vartheta + \varepsilon(a_2 \cos 2\vartheta + a_3 \cos 3\vartheta)], \\y &= R[-c \sin \vartheta + \varepsilon(a_2 \sin 2\vartheta + a_3 \sin 3\vartheta)].\end{aligned}\quad (\text{III.308})$$

При надлежащем выборе постоянных  $c$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  и параметра  $\varepsilon$  получим отверстие, мало отличающееся от равнобедренного треугольника с закругленными углами. Формула для напряжения  $\sigma_\phi$  получается из выражений (III.295)—(III.300), если в последних положить  $a_4 = a_5 = 0$ .

Рассмотрим два частных случая.

*Растяжение пластинки в направлении, перпендикулярном к основанию равнобедренного треугольника* (рис. III.23). Напряжение  $\sigma_\phi$  на контуре отверстия определяется по формуле (III.303).

При этом

$$\begin{aligned}A &= -c \cos \vartheta + \varepsilon(2a_2 \cos 2\vartheta + 3a_3 \cos 3\vartheta), \\B &= \sin \vartheta + \varepsilon(2a_2 \sin 2\vartheta + 3a_3 \sin 3\vartheta);\end{aligned}\quad (\text{III.309})$$

$C^2$  и  $L$  определяются по формуле (III.297);

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= -B + (1 + c) \sin \vartheta - \frac{2\beta_1 c}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ \varepsilon \left( \delta_1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \delta_2 \right) a_3 \sin \vartheta - \right. \\&\left. - \varepsilon^2 \left[ \left( \delta_1^2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \delta_2^2 \right) (3a_3^2 \sin 3\vartheta + 4a_2 a_3 \sin 2\vartheta) + \left( \delta_1^2 A_{11} - \delta_2^2 \frac{\beta_2}{\beta_1} B_{11} \right) \sin \vartheta \right] \right\},\end{aligned}\quad (\text{III.310})$$

$$\begin{aligned}\psi_1 &= A + \frac{2\beta_2 c}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ \varepsilon (\delta_1 - \delta_2) a_3 \cos \vartheta - \varepsilon^2 [(\delta_1^2 - \delta_2^2) (3a_3^2 \cos 3\vartheta + \right. \\&\left. + 4a_2 a_3 \cos 2\vartheta) + (\delta_1^2 A_{11} - \delta_2^2 B_{11}) \cos \vartheta \right\}.\end{aligned}$$

Здесь

$$A_{11} = a_2^2 + 2a_3^2 \kappa_1 + a_3^2 \left( \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} - \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \right). \quad (\text{III.311})$$

Выражение для  $B_{11}$  получим из (III.311) заменой  $\kappa_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\delta_1$  на  $\kappa_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\delta_2$  и наоборот.

\* Задача о напряженном состоянии пластинки с отверстием, мало отличающимся от равнобедренного треугольника, рассмотрена в работе А. С. Космодамианского, В. В. Меглинского и В. А. Швецова [1].

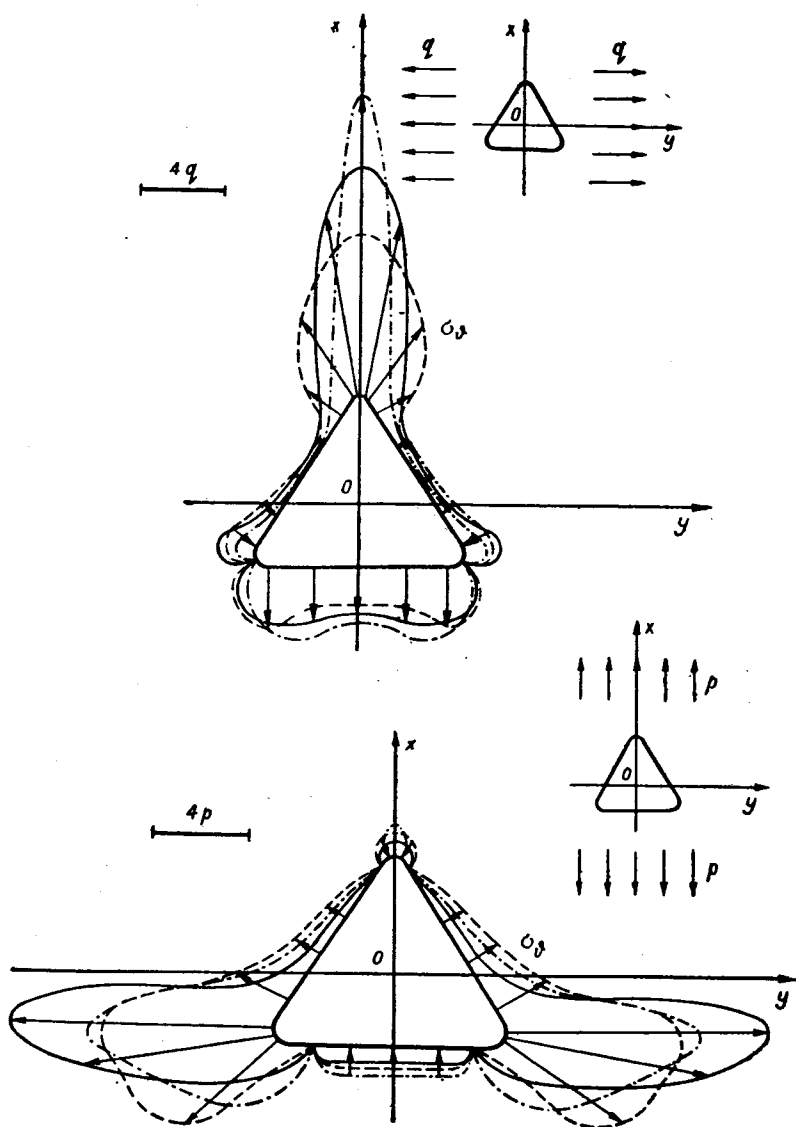


Рис. III.22.

Растяжение пластинки в направлении, параллельном основанию равнобедренного треугольника (рис. III.24). Напряжение  $\sigma_\theta$  на контуре отверстия определяется по формуле (III.306), где

$$\varphi_2 = -B + \frac{2\beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \{ \varepsilon (\delta_1 - \delta_2) a_3 \sin \theta - \varepsilon^2 [ (\delta_1^2 - \delta_2^2) (3a_3^2 \sin 3\theta + 4a_2 a_3 \sin 2\theta) + (\delta_1^2 A_{21} - \delta_2^2 B_{21}) \sin \theta ] \},$$

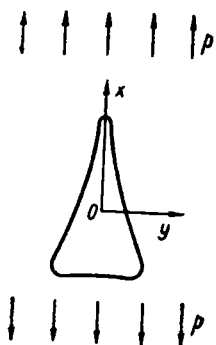


Рис. III.23.

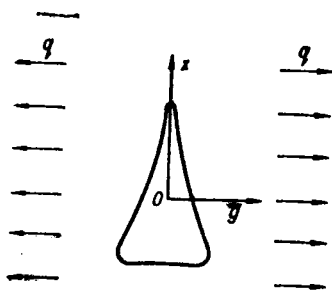


Рис. III.24.

$$\varphi_2 = A + (1 + c) \cos \theta - \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ \varepsilon \left( \delta_1 - \delta_2 \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) a_3 \cos \theta - \varepsilon^2 \left[ \left( \delta_1^2 - \delta_2^2 \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) (3a_3^2 \cos 3\theta + 4a_2 a_3 \cos 2\theta) + \left( \delta_1^2 A_{21} - \delta_2^2 \frac{\beta_1}{\beta_2} B_{21} \right) \cos \theta \right] \right\}.$$

При этом

$$A_{21} = a_2^2 + 2a_3^2 \kappa_1 + a_3^2 \left( \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} - \frac{2\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1} \right). \quad (\text{III. 313})$$

Выражение для  $B_{21}$  получим из (III.313) заменой  $\kappa_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\delta_1$  на  $\kappa_2$ ,  $\beta_2$ ,  $\delta_2$  и наоборот.

Рассмотрим следующие отверстия: а) отверстие, мало отличающееся от равнобедренного прямоугольного треугольника, для которого  $c=2$ ;  $\varepsilon=0,44$ ;  $a_2=1$ ;  $a_3=0,168$ ; б) отверстие, мало отличающееся от равнобедренного треугольника с углом при вершине  $\pi/6$ , для которого  $c=0,4$ ;  $\varepsilon=0,1905$ ;  $a_2=1$ ;  $a_3=-0,2143$ . Первому случаю соответствуют графики на рис. III.25, а второму — на рис. III.26.

**Квадратное отверстие\***. Пусть уравнение контура отверстия имеет вид

$$\begin{aligned} x &= R (\cos \theta + \varepsilon \cos 3\theta), \\ y &= R (-\sin \theta + \varepsilon \sin 3\theta), \end{aligned} \quad (\text{III.314})$$

где  $\varepsilon = \pm 1/9$ . Это отверстие мало отличается от квадрата с закругленными углами. При отрицательном  $\varepsilon$  стороны квадрата параллельны

\* См. С. Г. Лехницкий [1], стр. 235.

осям координат, при положительном  $\varepsilon$  вершины квадрата лежат на осях координат (рис. III.27).

Предположим, что на бесконечности пластинка растягивается равномерно распределенными усилиями  $p$ , параллельными оси  $Ox$  (см. рис. III.27).

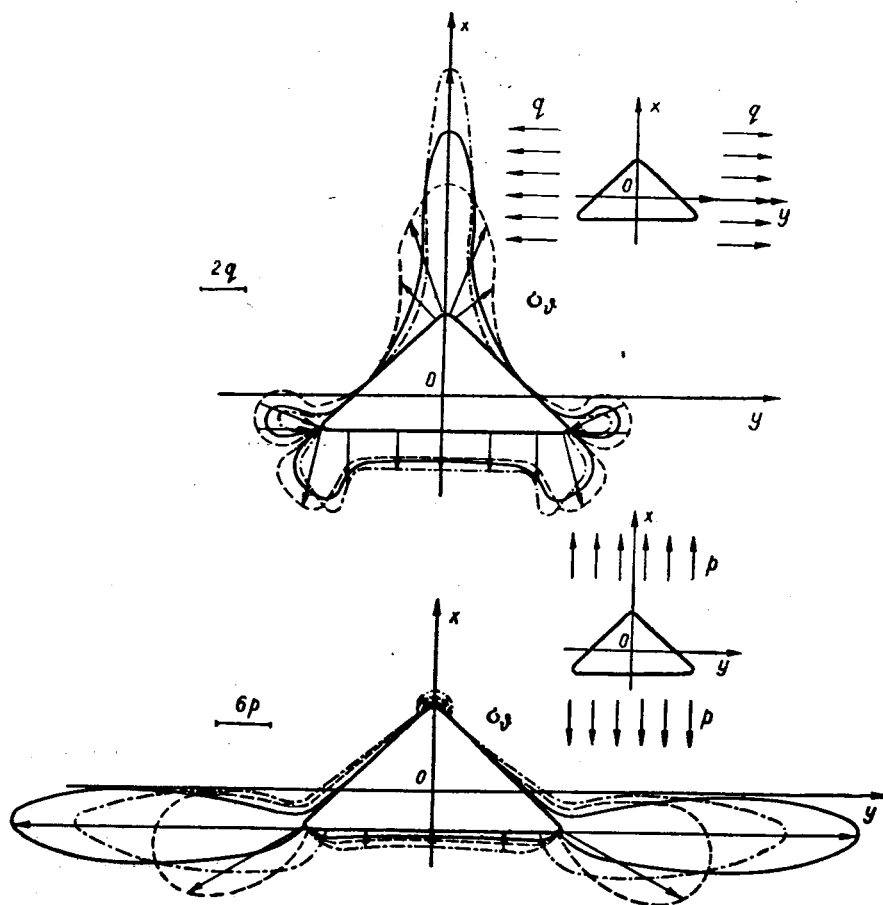


Рис. III.25.

Напряжения  $\sigma_\vartheta$  по контуру отверстия определяются по формуле (III.303), причем

$$A = -\cos \vartheta + 3\varepsilon \cos 3\vartheta, \quad B = \sin \vartheta + 3\varepsilon \sin 3\vartheta,$$

$$\varphi_1 = -B + 2 \sin \vartheta - \frac{2\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \left\{ \varepsilon \left( \delta_1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \delta_2 \right) \sin \vartheta - \right.$$

$$- \varepsilon^2 \left[ \left( \delta_1^2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \delta_2^2 \right) 3 \sin 3\vartheta + \left( \delta_1^2 A_{11} - \frac{\beta_2}{\beta_1} \delta_2^2 B_{11} \right) \sin \vartheta \right], \quad (\text{III.315})$$

$$\psi_1 = A + \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \{ \varepsilon (\delta_1 - \delta_2) \times \\ \times \cos \vartheta - \varepsilon^2 [ (\delta_1^2 - \delta_2^2) 3 \cos 3\vartheta + \\ + (\delta_1^2 A_{11} - \delta_2^2 B_{11}) \cos \vartheta ] \},$$

где

$$A_{11} = 2\kappa_1 + \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} - \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot \frac{\delta_2}{\delta_1}, \quad (\text{III.316})$$

а выражение для  $B_{11}$  получим из (III.316) заменой  $\kappa_1, \beta_1, \delta_1$  на  $\kappa_2, \beta_2, \delta_2$ , и наоборот. Напряжения (в до-

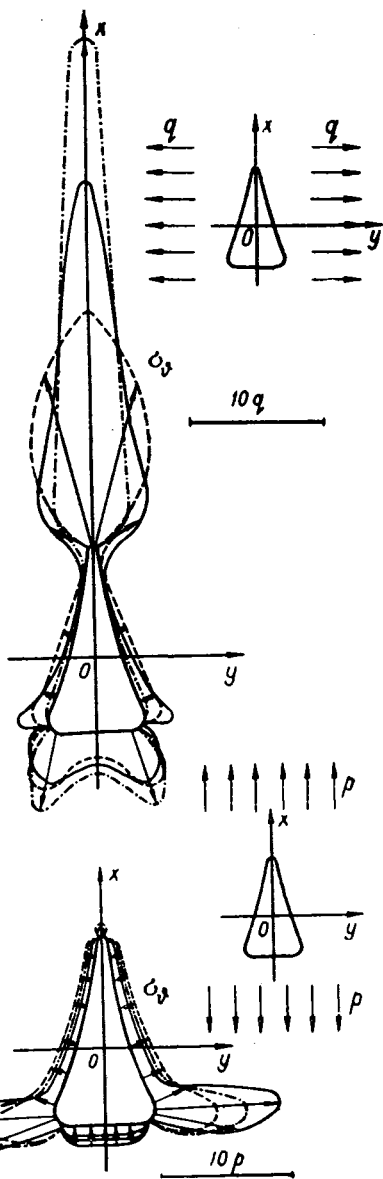


Рис. III.26.

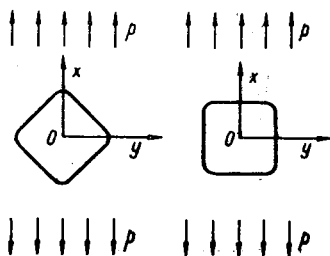


Рис. III.27.

лях  $\rho$ ), подсчитанные по формулам (III.303), (III.315) и (III.316), приведены на рис. III.28.

**Прямоугольное отверстие с соотношением сторон  $a/b=2$ .** Такой контур (рис. III.29) получим, если в формулах (III.285) положить

$$c = 0,52788; \quad a_2 = a_4 = 0; \quad a_3 = -1; \\ a_5 = -0,11979; \quad \varepsilon = 0,088006.$$

$$(\text{III.317})$$

По формулам (III.295) — (III.300) подсчитаны\* напряжения  $\sigma_\vartheta$  вблизи контура отверстия, когда пластинка изготовлена из авиаци-

\* См. А. С. Космодамианский [7].



онной фанеры, упругие постоянные для которой приведены выше, а также для изотропной пластинки. Рассмотрены случаи, когда растягивающие усилия действуют в направлении большей или меньшей сторон прямоугольника. Величины  $\sigma_\phi$  (в долях  $p$  и  $q$ ) приведены на рис. III.30, где

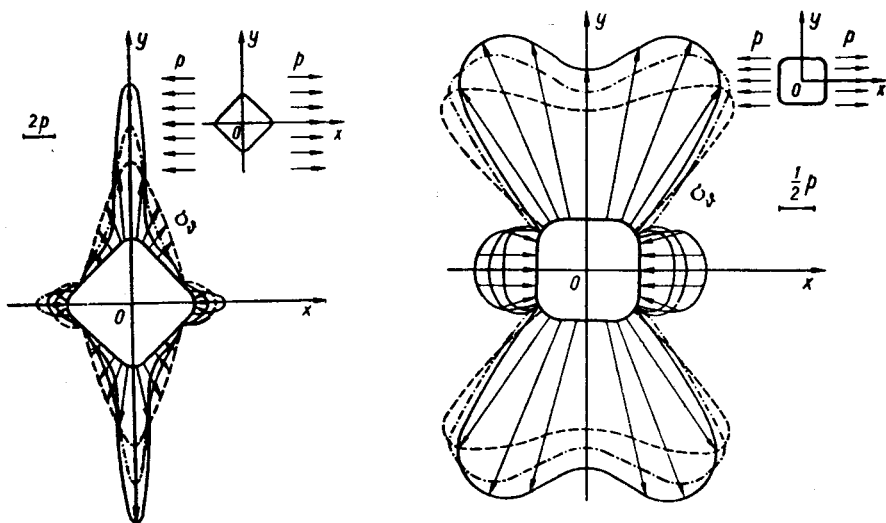


Рис. III.28.

сплошные линии соответствуют случаю  $E_x = E_{\max}$ , штрихпунктирные — случаю  $E_x = E_{\min}$ , а штриховые — изотропной пластинке.

**Трапециoidalное отверстие.** Отверстие в форме равнобочной трапеции (рис. III.31) получим \*, если в формулах (III.285) положить

$$\begin{aligned} c &= 1,0438; & a_2 &= 1; \\ a_3 &= -1,47619; & a_4 &= -0,25867; & (III.318) \\ a_5 &= -0,019698; & \varepsilon &= 0,10427. \end{aligned}$$

Функция  $\varphi(\sigma)$  задана формулами (III.291) — (III.294); функцию  $\psi(\sigma)$  получим из выражения для  $\varphi(\sigma)$ , если у величин  $\beta_i$ ,  $\delta_i$ ,  $\kappa_i$ ,  $m_i$ ,  $n_i$  произвести круговую перестановку индекса  $i$  ( $i = 1, 2$ ).

Напряжение  $\sigma_\phi$  определяется по формулам (III.295) — (III.301). На

рис. III.32 приведены значения  $\frac{\sigma_\phi}{p}$  и  $\frac{\sigma_\phi}{q}$  соответственно для случая,

\* См. А. С. Космодамианский, В. В. Меглинский, В. А. Швецов [3].

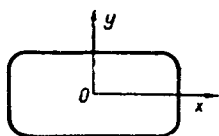


Рис. III.29.

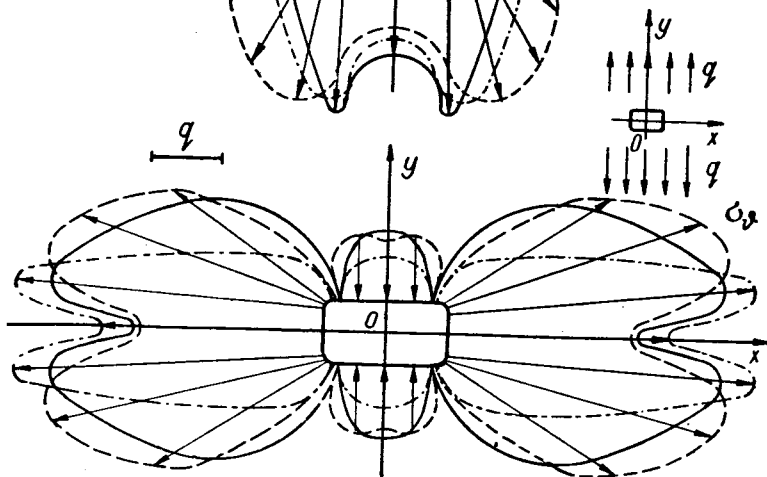
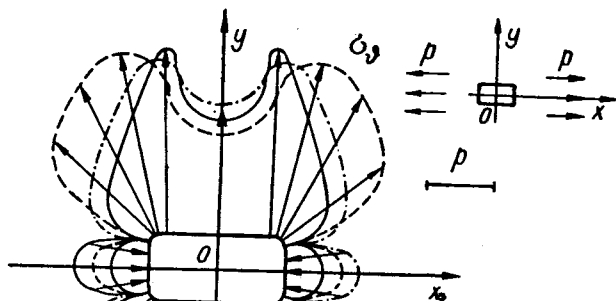


Рис. III.30.

когда усилия  $p$  приложены как в направлении оси  $Ox$  (перпендикулярно к основаниям трапеции), так и в направлении оси  $Oy$  (параллельно основаниям трапеции).

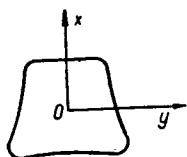


Рис. III.31.

**Отверстие в форме свода\***. Пластика ослаблена отверстием, контур которого задан уравнениями (III.285), где

$$c = 0,752035; \quad a_2 = 1;$$

$$a_3 = -1,4908; \quad a_4 = 0,56998;$$

$$(III.319)$$

$$a_5 = 0,02855; \quad \varepsilon = 0,059525.$$

При этих значениях параметров\*\* получим отверстие в форме свода (рис. III.33).

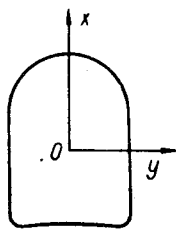


Рис. III.33.

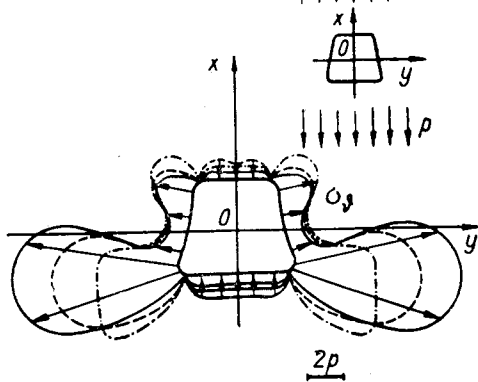
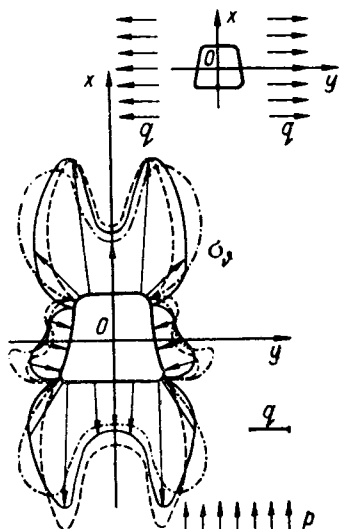


Рис. III.32.

Подсчитаны нормальные напряжения  $\sigma_\phi$  для фанерной и изотропной пластинок. На рис. III.34 приведены значения  $\sigma_\phi/p$  и  $\sigma_\phi/q$  соответственно для случая, когда усилия  $p$  приложены в направлении оси  $Ox$ , а усилия  $q$  — в направлении оси  $Oy$ . Концентрация напряжений оказывается большей, если пластинка растягивается вдоль волокон рубашки;

\* См. А. С. Космодамианский, В. В. Меглинский, В. А. Швецов [2].

\*\* См. И. С. Хара [1].

при растяжении пластинки поперек волокон рубашки наблюдается более равномерное распределение напряжения  $\sigma_\phi$  по контуру отверстия. Кроме того, концентрация напряжений в анизотропной пластинке значительно больше, чем в изотропной.

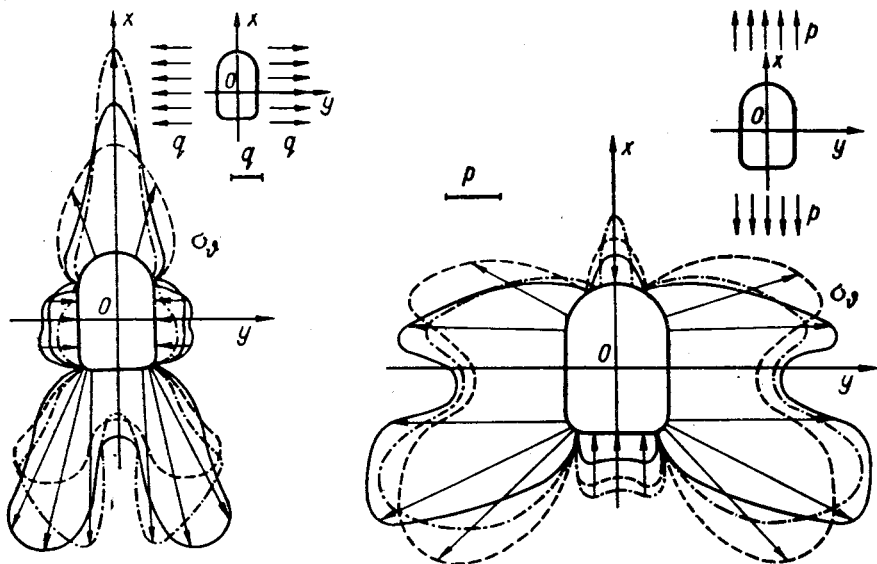


Рис. III.34.

### § 8. Чистый изгиб анизотропной пластинки с криволинейным отверстием

Допустим, что на прямоугольную анизотропную пластинку с отверстием, контур которого задан уравнениями (III.285) действуют усилия, приводящиеся к изгибающим моментам  $M$ . Размеры отверстия малы по сравнению с размерами пластинки и оно удалено от края настолько, что при решении задачи пластинку можем считать бесконечной.

Рассмотрим два случая. В первом случае изгибающие моменты приложены так, как показано на рис. III.35. Тогда

$$\begin{aligned}
 p_{20} &= \frac{MR^2}{8J} c^2 \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right)^2, \\
 p_{21} &= -\frac{MR^2}{4J} c \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \sum_{k=2}^5 a_k \left( \sigma^k - \frac{1}{\sigma^k} \right), \\
 p_{22} &= \frac{MR^2}{8J} \left[ \sum_{k=2}^5 a_k \left( \sigma^k - \frac{1}{\sigma^k} \right) \right]^2.
 \end{aligned} \tag{III.320}$$

Остальные коэффициенты  $p_{2k}$  и все  $p_{1k}$  равны нулю. Здесь  $J$  — момент инерции сечения пластинки, нормального к оси  $Ox$ .

Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  для точек контура отверстия имеют вид

$$\varphi(\sigma) = \frac{MR^2}{8J} c^2 i \left\{ -\frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \sigma^2 + \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^2 (N_{1k} \sigma^k + N_{-1k} \sigma^{-k}) - \frac{1}{c(\beta_1 - \beta_2)} \sum_{k=1}^6 m_{1k} \sigma^k \right] + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \left[ \sum_{k=1}^6 (A_{1k} \sigma^k + A_{-1k} \sigma^{-k}) - \frac{1}{c^2(\beta_1 - \beta_2)} \sum_{k=1}^{10} n_{1k} \sigma^k \right] \right\}, \quad (\text{III.321})$$

$$\psi(\sigma) = \frac{MR^2}{8J} c^2 i \left\{ \frac{1}{\beta_1 - \beta_2} \sigma^2 + \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^2 (M_{1k} \sigma^k + M_{-1k} \sigma^{-k}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{c(\beta_1 - \beta_2)} \sum_{k=1}^6 m_{1k} \sigma^k \right] + \varepsilon^2 \left[ \sum_{k=1}^6 (B_{1k} \sigma^k + B_{-1k} \sigma^{-k}) + \frac{1}{c^2(\beta_1 - \beta_2)} \sum_{k=1}^{10} n_{1k} \sigma^k \right] \right\}.$$

Здесь введены обозначения:

$$N_{-11} = \frac{2\delta_1}{\beta_1 - \beta_2} a_4, \quad N_{-12} = \frac{2\delta_1}{\beta_1 - \beta_2} a_5, \quad N_{1k} = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} N_{-1k} - \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} M_{-1k} \\ (k = 1, 2),$$

$$A_{-11} = -\frac{\delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} (4a_2 a_3 + 8a_2 a_5 \kappa_1 + 10a_3 a_4 \kappa_1 + 18a_4 a_5 \kappa_1) - \\ - \frac{\delta_1^2}{c(\beta_1 - \beta_2)} 6a_5 (a_2 - a_4) - N_{11} \delta_1 (a_3 + a_5 \kappa_1) - 2N_{12} \delta_1 a_4,$$

$$A_{-12} = -\frac{\delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} (4a_2 a_4 + 3a_3^2 + 12a_3 a_5 \kappa_1 + 6a_4^2 \kappa_1 + 11a_5^2 \kappa_1) - \\ - N_{11} \delta_1 a_4 - 2N_{12} \delta_1 a_5, \quad (\text{III.322})$$

$$A_{-13} = -\frac{\delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} (4a_2 a_5 + 6a_3 a_4 + 14a_4 a_5 \kappa_1) - N_{11} \delta_1 a_5,$$

$$A_{-14} = -\frac{\delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} (6a_3 a_5 + 3a_4^2 + 8a_5^2 \kappa_1),$$

$$A_{-15} = -\frac{\delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} 6a_4 a_5, \quad A_{-16} = -\frac{\delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} 3a_5^2,$$

$$A_{1k} = -\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} A_{-1k} - \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} B_{-1k} \quad (k = 1, \dots, 6);$$

$$m_{11} = 2a_2, \quad m_{12} = 2a_3, \quad m_{13} = -2(a_2 - a_4),$$

$$m_{14} = -2(a_3 - a_5), \quad m_{15} = -2a_4, \quad m_{16} = -2a_5,$$

$$n_{11} = -2(a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5), \quad n_{12} = -2(a_2a_4 + a_3a_5), \quad (III.323)$$

$$n_{13} = -2a_2a_5, \quad n_{14} = a_2^2, \quad n_{15} = 2a_2a_3, \quad n_{16} = a_3^2 + 2a_2a_4,$$

$$n_{17} = 2(a_2a_5 + a_3a_4), \quad n_{18} = a_4^2 + 3a_3a_5, \quad n_{19} = 2a_4a_5, \quad n_{1,10} = a_5^2.$$

Коэффициенты  $M_{1k}$ ,  $M_{-1k}$ ,  $B_{1k}$ ,  $B_{-1k}$  получим из  $N_{1k}$ ,  $N_{-1k}$ ,  $A_{1k}$ ,  $A_{-1k}$ , если в последних заменить  $\beta_1$ ,  $\delta_1$ ,  $\kappa_1$  соответственно на  $\beta_2$ ,  $\delta_2$ ,  $\kappa_2$  и наоборот.

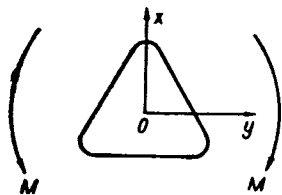


Рис. III.35.

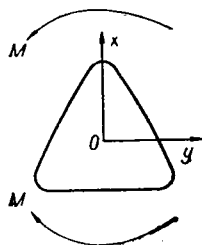


Рис. III.36.

Напряжения по контуру отверстия

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{MR}{J} \left( -c \sin \vartheta + \varepsilon \sum_{k=2}^5 a_k \sin k\vartheta \right) \frac{B^2}{C_2} +$$

$$+ \frac{MR}{2J} \cdot \frac{c_3}{LC^2} \{ A[ -A^4\beta_1\beta_2 + A^2B^2(1 - 2\beta_1\beta_2 - \beta_1^2\beta_2^2) + B^4(2 - \beta_1\beta_2 - \beta_1^2 - \beta_2^2) ] \psi_1^{(2)} +$$

$$+ C^4(\beta_1 + \beta_2)(B\varphi_1 - A\beta_1\beta_2\psi_1^{(1)}) \}, \quad (III.324)$$

где

$$\varphi_1 = \cos 2\vartheta + \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^2 (\beta_1 N_{-1k} + \beta_2 M_{-1k}) k \cos k\vartheta + \frac{1}{2c} \sum_{k=1}^6 km_{1k} \cos k\vartheta \right] +$$

$$+ \varepsilon^2 \left[ \sum_{k=1}^6 (\beta_1 A_{-1k} + \beta_2 B_{-1k}) k \cos k\vartheta + \frac{1}{2c^2} \sum_{k=1}^{10} kn_{1k} \cos k\vartheta \right], \quad (III.325)$$

$$\psi_1^{(1)} = \varepsilon \sum_{k=1}^2 (N_{-1k} + M_{-1k}) k \sin k\vartheta + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^6 (A_{-1k} + B_{-1k}) k \sin k\vartheta,$$

$$\psi_1^{(2)} = \sin 2\vartheta + \frac{\varepsilon}{2c} \sum_{k=1}^6 km_{1k} \sin k\vartheta + \frac{\varepsilon^2}{2c^2} \sum_{k=1}^{10} kn_{1k} \sin k\vartheta:$$

$A$ ,  $B$ ,  $C^2$ ,  $L$  определяются по формулам (III.296) и (III.297). Во втором случае изгибающие моменты приложены так, как показано на рис. III.36.

Тогда

$$\begin{aligned} p_{10} &= -\frac{MR_2}{8J} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right)^2, \\ p_{11} &= -\frac{MR^2}{4J} \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right) \sum_{k=2}^5 a_k \left( \sigma^k + \frac{1}{\sigma^k} \right), \\ p_{12} &= -\frac{MR^2}{8J} \left[ \sum_{k=2}^5 a_k \left( \sigma^k + \frac{1}{\sigma^k} \right) \right]^2, \quad p_{1k} = 0 \quad (k = 3, 4, \dots), \\ & \quad p_{2k} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned} \quad (\text{III.326})$$

Здесь  $J$  — момент инерции сечения пластинки, нормального к оси  $Oy$ .

Далее получим

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) &= \frac{MR^2}{8J} \left\{ \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \sigma^2 + \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^2 (N_{2k} \sigma^k + N_{-2k} \sigma^{-k}) + \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \sum_{k=1}^6 m_{2k} \sigma^k \right] + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^2 \left[ \sum_{k=1}^6 (A_{2k} \sigma^k + A_{-2k} \sigma^{-k}) + \frac{\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \sum_{k=1}^{10} n_{2k} \sigma^k \right] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{III.327})$$

$$\begin{aligned} \psi(\sigma) &= \frac{MR^2}{8J} \left\{ -\frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \sigma^2 + \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^2 (M_{2k} \sigma^k + M_{-2k} \sigma^{-k}) - \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \sum_{k=1}^6 m_{2k} \sigma^k \right] + \right. \\ & \quad \left. + \varepsilon^2 \left[ \sum_{k=1}^6 (B_{2k} \sigma^k + B_{-2k} \sigma^{-k}) - \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} \sum_{k=1}^{10} n_{2k} \sigma^k \right] \right\}; \end{aligned}$$

при этом

$$N_{-21} = -\frac{2\beta_2 \delta_1}{\beta_1 - \beta_2} a_4, \quad N_{-22} = -\frac{2\beta_2 \delta_1}{\beta_1 - \beta_2} a_5, \quad N_{2k} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} N_{-2k} + \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} M_{-2k} \quad (k = 1, 2),$$

$$\begin{aligned} A_{-21} &= \frac{\beta_2 \delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} (4a_2 a_3 + 8a_2 a_3 \chi_1 + 10a_3 a_4 \chi_1 + 18a_4 a_5 \chi_1^2) - \\ & \quad - \frac{\delta_1}{\beta_1 - \beta_2} 6a_5 (a_2 + a_4) - N_{21} \delta_1 (a_3 + a_5 \chi_1) - 2N_{22} \delta_1 a_4, \\ A_{-22} &= \frac{\beta_2 \delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} (4a_2 a_4 + 3a_3^2 + 12a_3 a_5 \chi_1 + 6a_4^2 \chi_1 + 11a_5^2 \chi_1^2) - \\ & \quad - N_{21} \delta_1 a_4 - 2N_{22} \delta_1 a_5, \end{aligned} \quad (\text{III.328})$$

$$A_{-23} = \frac{\beta_2 \delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} (4a_2 a_5 + 6a_3 a_4 + 14a_4 a_5 \chi_1) - N_{21} \delta_1 a_4,$$

$$A_{-24} = \frac{\beta_2 \delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} (3a_4^2 + 6a_3 a_5 + 8a_5^2 \chi_1), \quad A_{-25} = \frac{\beta_2 \delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} 6a_4 a_5,$$

$$A_{-26} = \frac{\beta_2 \delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} 3a_5^2, \quad A_{2k} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} A_{-2k} + \frac{2\beta_2}{\beta_1 - \beta_2} B_{-2k} \quad (k = 1, \dots, 6);$$

$$\begin{aligned}
 m_{21} &= 2a_2, & m_{22} &= 2a_3, & m_{23} &= 2(a_2 + a_4), & m_{24} &= 2(a_3 + a_4), \\
 & & & & m_{25} &= 2a_4, & m_{26} &= 2a_5, \\
 n_{21} &= 2(a_2a_3 + a_3a_4 + a_4a_5), & n_{22} &= 2(a_2a_4 + a_3a_5), \\
 n_{23} &= 2a_2a_5, & n_{24} &= a_2^2, & n_{25} &= 2a_2a_3, \\
 n_{26} &= a_3^2 + 2a_2a_4, & n_{27} &= 2(a_2a_5 + a_3a_4), \\
 n_{28} &= a_4^2 + 2a_3a_5, & n_{29} &= 2a_4a_5, & n_{2,10} &= a_5^2.
 \end{aligned} \tag{III.329}$$

Коэффициенты  $M_{-2k}$ ,  $M_{2k}$ ,  $B_{-2k}$  и  $B_{2k}$  получим из  $N_{-2k}$ ,  $N_{2k}$ ,  $A_{-2k}$  и  $A_{2k}$  после круговой замены индекса  $i$  у величин  $\beta_i$ ,  $\delta_i$  и  $\varkappa_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Напряжения по контуру отверстия

$$\begin{aligned}
 \sigma_\vartheta &= \frac{MR}{J} \left( \cos \vartheta + \varepsilon \sum_{k=2}^5 a_k \cos k\vartheta \right) \frac{A_2}{C^2} + \frac{MR}{2J} \cdot \frac{1}{C^2L} \{ B[A^4(2\beta_1^2\beta_2^2 - \\
 & - \beta_1^2 - \beta_1\beta_2 - \beta_2^2) + A^2B^2(\beta_1^2\beta_2^2 - 2\beta_1\beta_2 - 1) - B^4\beta_1\beta_2] \varphi_2^{(2)} + \\
 & + C^4(\beta_1 + \beta_2)(B\varphi_2^{(1)} - A\beta_1\beta_2\psi_2) \},
 \end{aligned} \tag{III.330}$$

где

$$\begin{aligned}
 \varphi_2^{(1)} &= -\varepsilon \sum_{k=1}^2 (\beta_1 N_{-2k} + \beta_2 M_{-2k}) k \sin k\vartheta - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^6 (\beta_1 A_{-2k} + \beta_2 B_{-2k}) k \sin k\vartheta, \\
 \varphi_2^{(2)} &= \sin \vartheta + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^6 m_{2k} k \sin k\vartheta + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{k=1}^{10} n_{2k} k \sin k\vartheta,
 \end{aligned} \tag{III.331}$$

$$\begin{aligned}
 \psi_2 &= \cos 2\vartheta + \varepsilon \left[ \sum_{k=1}^2 (N_{-2k} + M_{-2k}) k \cos k\vartheta + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^6 m_{2k} k \cos k\vartheta \right] + \\
 & + \varepsilon^2 \left[ \sum_{k=1}^6 (A_{-2k} + B_{-2k}) k \cos k\vartheta + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{10} n_{2k} k \cos k\vartheta \right].
 \end{aligned}$$

**Отверстие в форме правильного треугольника\*.** Ортоотропная пластинка ослаблена отверстием, контур которого задан уравнениями (III.302).

В случае, когда усилия приложены на сторонах пластинки, параллельных оси  $Oy$  (см. рис. III.35), напряжение

$$\begin{aligned}
 \sigma_\vartheta &= \frac{MR}{J} (-\sin \vartheta + \varepsilon \sin 2\vartheta) \frac{B^2}{C^2} + \frac{MR}{2J} \cdot \frac{1}{C^2L} \{ A[-A^4\beta_1\beta_2 + \\
 & + A^2B^2(1 - 2\beta_1\beta_2 - \beta_1^2\beta_2^2) + B^4(2 - \beta_1\beta_2 - \beta_1^2 - \beta_2^2) [\sin 2\vartheta + \varepsilon(\sin \vartheta - 3 \sin 3\vartheta) + \\
 & + 2\varepsilon^2 \sin 4\vartheta] + BC^4(\beta_1 + \beta_2) [\cos 2\vartheta + \varepsilon(\cos \vartheta - 3 \cos 3\vartheta) + 2\varepsilon^2 \cos 4\vartheta] \}.
 \end{aligned} \tag{III.332}$$

\* См. С. Г. Лехницкий [1], стр. 224.



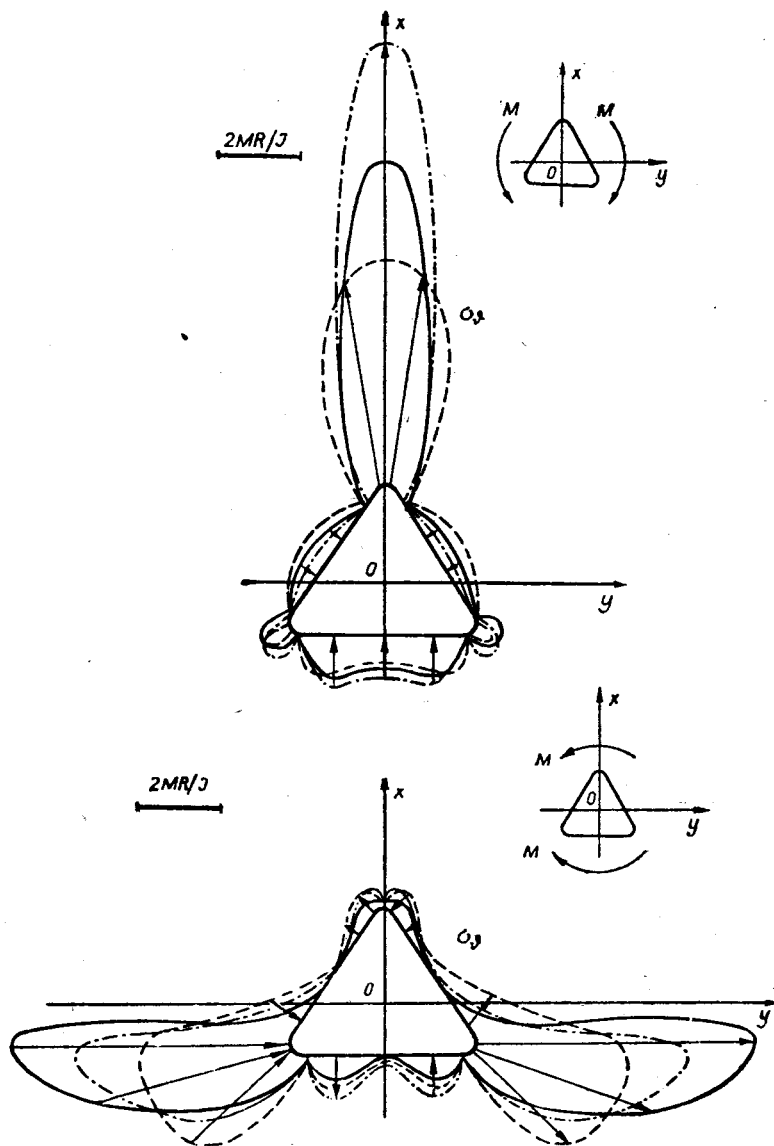


Рис. III.37.

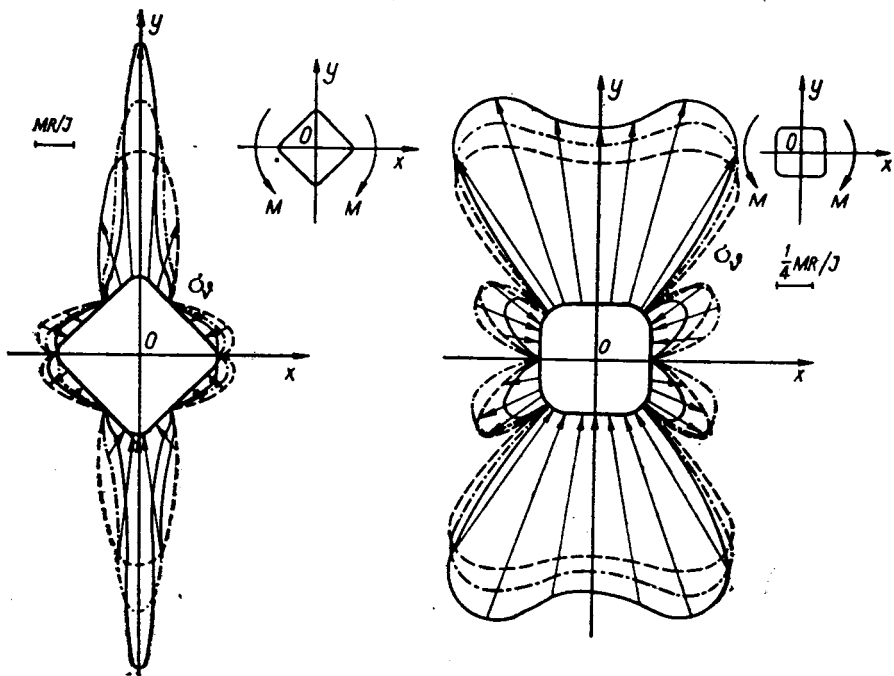


Рис. III.38

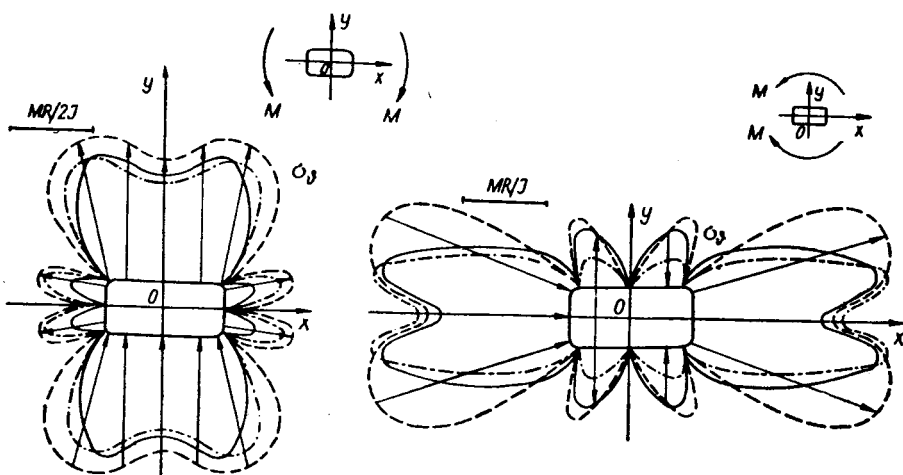


Рис. III.39.

Если усилия приложены на сторонах пластинки, параллельных оси  $Ox$  (см. рис. III.36), напряжение

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta} = & \frac{MR}{J} (\cos \vartheta + \varepsilon \cos 2\vartheta) \frac{A^2}{C^2} + \frac{MR}{2J} \cdot \frac{1}{C^2 L} \{ B [A^4 (2\beta_1^2 \beta_2^2 - \beta_1^2 - \\ & - \beta_1 \beta_2 - \beta_2^2) + A^2 B^2 (\beta_1^2 \beta_2^2 - 2\beta_1 \beta_2 - 1) - B^4 (\beta_1 \beta_2)] [\sin 2\vartheta + \\ & + \varepsilon (\sin \vartheta + 3 \sin 3\vartheta) + 2\varepsilon^2 \sin 4\vartheta] + AC^4 \beta_1 \beta_2 (\beta_1 + \beta_2) [\cos 2\vartheta + \\ & + \varepsilon (\cos \vartheta + 3 \cos 3\vartheta) + 2\varepsilon^2 \cos 4\vartheta] \}. \end{aligned} \quad (\text{III.332a})$$

Напряжения  $\sigma_{\vartheta}$ , подсчитанные по формуле (III.332a), приведены на рис. III.37 и относятся к пластинке, изготовленной из авиационной фанеры, упругие постоянные которой даны выше.

**Квадратное отверстие\***. Контур отверстия задан уравнениями (III.314).

В первом случае

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta} = & \frac{MR}{J} (-\sin \vartheta + \varepsilon \sin 3\vartheta) \frac{B^2}{C^2} + \frac{MR}{2J} \cdot \frac{1}{C^2 L} \left\{ A [-A^4 \beta_1 \beta_2 + \right. \\ & + A^2 B^2 (1 - \beta_1^2 \beta_2^2 - 2\beta_1 \beta_2) + B^4 (2 - \beta_1 \beta_2 - \beta_1^2 - \beta_2^2)] [\sin 2\vartheta + \\ & + 2\varepsilon (\sin 2\vartheta - 2 \sin 4\vartheta) + 3\varepsilon^2 \sin 6\vartheta] + 6\varepsilon^2 AC^4 (\beta_1 + \beta_2) \beta_1 \beta_2 \frac{\delta_1^2 - \delta_2^2}{\beta_1 - \beta_2} \sin 2\vartheta + \\ & + BC^4 (\beta_1 + \beta_2) \left[ \cos 2\vartheta + 2\varepsilon (\cos 2\vartheta - 2 \cos 4\vartheta) + \right. \\ & \left. + 3\varepsilon^2 \left( 2 \frac{\beta_2 \delta_2^2 - \beta_1 \delta_1^2}{\beta_1 - \beta_2} \cos 2\vartheta + \cos 6\vartheta \right) \right] \}. \end{aligned} \quad (\text{III.333})$$

Во втором случае

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta} = & \frac{MR}{J} (\cos \vartheta + \varepsilon \cos 3\vartheta) \frac{A^2}{C^2} + \frac{MR}{2J} \cdot \frac{1}{C^2 L} \left\{ B [A^4 (2\beta_1^2 \beta_2^2 - \beta_1^2 - \beta_1 \beta_2 - \beta_2^2) + \right. \\ & + A^2 B^2 (\beta_1^2 \beta_2^2 - 2\beta_1 \beta_2 - 1) - B^4 \beta_1 \beta_2] [\sin 2\vartheta + \\ & + 2\varepsilon (\sin 2\vartheta + 2 \sin 4\vartheta) + 3\varepsilon^2 \sin 6\vartheta] - 6\varepsilon^2 BC^4 (\beta_1 + \beta_2) \beta_1 \beta_2 \frac{\delta_1^2 - \delta_2^2}{\beta_1 - \beta_2} \sin 2\vartheta + \\ & + AC^4 (\beta_1 + \beta_2) \beta_1 \beta_2 \left[ \cos 2\vartheta + 2\varepsilon (\cos 2\vartheta + 2 \cos 4\vartheta) + \right. \\ & \left. + 3\varepsilon^2 \left( 2 \frac{\beta_2 \delta_1^2 - \beta_1 \delta_2^2}{\beta_1 - \beta_2} \cos 2\vartheta + \cos 6\vartheta \right) \right] \}. \end{aligned} \quad (\text{III.334})$$

Результаты подсчетов для указанной выше фанерной и изотропной пластинок приведены на рис. III.38.

\* См. С. Г. Лехницкий [1], стр. 238.

Прямоугольное отверстие с соотношением сторон  $a/b=2$ . Контур задается уравнениями (III.285), в которых постоянные принимают значения (III.317). В случае, когда усилия приложены на сторонах пластинки, параллельных оси  $Oy$ , напряжения  $\sigma_y$  на контуре отверстия определяются по формулам (III.324) и (III.325). Если усилия приложены на сторонах, параллельных оси  $Ox$ , то напряжения определяются по формулам (III.330) и (III.331). Результаты вычислений\* приведены на рис. III.39. Закономерности, отмеченные в предыдущем параграфе, сохраняют свою силу и в случае изгиба пластинки.

### § 9. Решение второй основной задачи для области с отверстием, мало отличающимся от эллиптического

Как и в случае первой основной задачи, рассмотрим\*\* бесконечную анизотропную пластинку с отверстием, контур которого задан уравнениями (III.265).

Пусть известны смещения точек контура отверстия. Будем также считать, что главный вектор внешних усилий, вызвавших заданные смещения точек контура, равен нулю и на бесконечности усилия отсутствуют.

Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ , через которые выражаются напряжения, определяются из граничных условий (III.92), правые части которых могут быть разложены по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$g_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{1k} \varepsilon^k, \quad (III.335)$$

$$g_2(s) = \sum_{k=0}^{\infty} t_{2k} \varepsilon^k,$$

где  $t_{1k}, t_{2k}$  — известные функции.

Тогда, рассуждая аналогично тому, как это делалось в § 6, определим функции  $\psi_{pk}(\xi_p)$  ( $p=1, 2$ ), голоморфные внутри единичного круга  $\gamma$  и удовлетворяющие на контуре  $\gamma$  граничным условиям

$$2\operatorname{Re}[\rho_1 \psi_{10}(\sigma) + \rho_2 \psi_{20}(\sigma)] = g_{10}(\theta), \quad (III.336)$$

$$2\operatorname{Re}[q_1 \psi_{10}(\sigma) + q_2 \psi_{20}(\sigma)] = g_{20}(\theta),$$

$$2\operatorname{Re}[\rho_1 \dot{\psi}_{1k}(\sigma) + \rho_2 \dot{\psi}_{2k}(\sigma)] = g_{1k}(\theta), \quad (III.337)$$

$$2\operatorname{Re}[q_1 \dot{\psi}_{1k}(\sigma) + q_2 \dot{\psi}_{2k}(\sigma)] = g_{2k}(\theta),$$

\* См. А. С. Космодамианский, В. В. Меглинский, В. А. Швецов [4].

\*\* Решение получено А. С. Космодамианским [2].

где

$$g_{10}(\vartheta) = t_{10}, \quad g_{20}(\vartheta) = t_{20},$$

$$g_{1k}(\vartheta) = t_{1k} - 2\operatorname{Re} \left\{ p_1 (\chi + \lambda_1 \bar{\chi}) \frac{d\psi_{1,k-1}}{d\sigma_1} + \dots + \frac{p_1}{k!} (\chi + \lambda_1 \bar{\chi})^k \frac{d^k \psi_{10}}{d\sigma_1^k} + \right. \\ \left. + p_2 (\chi + \lambda_2 \bar{\chi}) \frac{d\psi_{2,k-1}}{d\sigma_2} + \dots + \frac{p_2}{k!} (\chi + \lambda_2 \bar{\chi})^k \frac{d^k \psi_{20}}{d\sigma_2^k} \right\}, \quad (\text{III.338})$$

$$g_{2k}(\vartheta) = t_{2k} - 2\operatorname{Re} \left\{ q_1 (\chi + \lambda_1 \bar{\chi}) \frac{d\psi_{1,k-1}}{d\sigma_1} + \dots + \frac{q_1}{k!} (\chi + \lambda_1 \bar{\chi})^k \frac{d^k \psi_{10}}{d\sigma_1^k} + \right. \\ \left. + q_2 (\chi + \lambda_2 \bar{\chi}) \frac{d\psi_{2,k-1}}{d\sigma_2} + \dots + \frac{q_2}{k!} (\chi + \lambda_2 \bar{\chi})^k \frac{d^k \psi_{20}}{d\sigma_2^k} \right\} \\ (\sigma = e^{i\vartheta}), \quad (\zeta = \rho e^{i\vartheta}).$$

Из граничных условий (III.336) — (III.338), как и раньше, после простых преобразований получим

$$\psi_{1k}(\zeta) = \frac{i}{4\pi(p_1 q_2 - p_2 q_1)} \int_{\gamma} [p_2 g_{2k}(\vartheta) - q_2 g_{1k}(\vartheta)] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_{1k}, \quad (\text{III.339}) \\ \psi_{2k}(\zeta) = \frac{-i}{4\pi(p_1 q_2 - p_2 q_1)} \int_{\gamma} [p_1 g_{2k}(\vartheta) - q_1 g_{1k}(\vartheta)] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_{2k}.$$

На основании формулы (III.283) в выражениях (III.339) перейдем от переменной  $\zeta$  соответственно к  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ . Применяя далее формулы (III.268), найдем окончательно функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ .

Напряженное состояние в пластинке вблизи контура отверстия определяется по формулам \*

$$\sigma_{\varrho} = 2\operatorname{Re} \left[ (1 + \lambda_1) \left( \frac{dx}{ds} + s_1 \frac{dy}{ds} \right)^2 \varphi'(z_1) + (1 + \lambda_2) \left( \frac{dx}{ds} + s_2 \frac{dy}{ds} \right)^2 \psi'(z_2) \right], \\ \sigma_{\vartheta} = 2\operatorname{Re} \left[ (1 + \lambda_1) \left( \frac{dy}{ds} - s_1 \frac{dx}{ds} \right)^2 \varphi'(z_1) + (1 + \lambda_2) \left( \frac{dy}{ds} - s_2 \frac{dx}{ds} \right)^2 \psi'(z_2) \right], \quad (\text{III.340})$$

$$\tau_{\varrho\vartheta} = 2\operatorname{Re} \left[ (1 + \lambda_1) \left( \frac{dx}{ds} + s_1 \frac{dy}{ds} \right) \left( s_1 \frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds} \right) \varphi'(z_1) + \right. \\ \left. + (1 + \lambda_2) \left( \frac{dx}{ds} + s_2 \frac{dy}{ds} \right) \left( s_2 \frac{dx}{ds} - \frac{dy}{ds} \right) \psi'(z_2) \right].$$

\* См. С. Г. Лехницкий [2].

### § 10. Растяжение анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, подкрепленным жестким кольцом

Рассмотрим однородную анизотропную пластинку с отверстием, контур которого задан уравнениями (III.285). В отверстие пластинки впаило жесткое кольцо. На бесконечности пластинка растягивается равномерно распределенными усилиями  $p$ , параллельными оси  $Ox$ , и усилиями  $q$ , параллельными оси  $Oy$  (рис. III.40).

Решение задачи, как и в § 7, будем искать\* методом наложения (сложением двух полей напряжений). Напряженное состояние сплошной пластинки характеризуется полем напряжений III.287; проекции перемещений

$$\begin{aligned} u^0 &= (a_{11}p + a_{12}q)x, \\ v^0 &= (a_{12}p + a_{22}q)y. \end{aligned} \quad (\text{III.341})$$

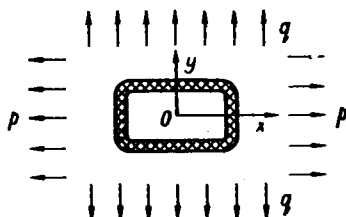


Рис. III.40.

Определим напряженное состояние пластинки, когда на контуре отверстия заданы перемещения  $-u^0$ ,  $-v^0$ , а на бесконечности усилия отсутствуют. Эта задача сводится к определению функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_1)$  из различных условий (III.92).

Разложим правые части граничных условий по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$g_1(s) = t_{10} + \varepsilon t_{11}, \quad (\text{III.342})$$

$$g_2(s) = t_{20} + \varepsilon t_{21},$$

где

$$t_{10} = -\frac{R}{2}(a_{11}p + a_{12}q)\left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right), \quad t_{20} = -\frac{Ri}{2}c(a_{12}p + a_{22}q)\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right),$$

$$t_{11} = -\frac{R}{2}(a_{11}p + a_{12}q) \sum_{k=2}^5 a_k \left(\sigma^k + \frac{1}{\sigma^k}\right),$$

$$t_{21} = \frac{Ri}{2}(a_{12}p + a_{22}q) \sum_{k=2}^5 a_k \left(\sigma^k - \frac{1}{\sigma^k}\right),$$

$$t_{1k} = t_{2k} = 0 \quad (k = 2, 3, \dots).$$

Тогда на основании (III.339)

$$\begin{aligned} \psi_{10} &= -\frac{R}{2} \frac{1}{p_1 q_2 - p_2 q_1} \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} \left[ q_2 (a_{11}p + a_{12}q) \left(\sigma + \frac{1}{\sigma}\right) - \right. \\ &\quad \left. - p_2 c i (a_{12}p + a_{22}q) \left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right) \right] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_{10}, \end{aligned}$$

\* См. А. С. Космодамианский, В. В. Меглинский, В. А. Швецов [1]

$$\begin{aligned} \psi_{11} = & -\frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} \left\{ \frac{R}{2} \cdot \frac{1}{\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1} \left[ q_2 (a_{11} \rho + a_{12} q) \sum_{k=2}^5 a_k \left( \sigma^k + \frac{1}{\sigma^k} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + i \rho_2 (a_{12} \rho + a_{22} q) \sum_{k=2}^5 a_k \left( \sigma^k - \frac{1}{\sigma^k} \right) \right] + (\varphi + \lambda_1 \bar{\varphi}) \frac{d\psi_{10}}{d\sigma_1} + \frac{\bar{\rho}_1 q_2 - \rho_2 \bar{q}_1}{\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1} (\bar{\varphi} + \bar{\lambda}_1 \bar{\varphi}) \frac{d\bar{\psi}_{10}}{d\bar{\sigma}_1} + \right. \\ & \left. + \frac{\bar{\rho}_2 q_2 - \rho_2 \bar{q}_2}{\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1} (\bar{\varphi} + \bar{\lambda}_2 \bar{\varphi}) \frac{d\bar{\psi}_{20}}{d\bar{\sigma}_2} \right\} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_{11}, \end{aligned} \quad (\text{III.344})$$

$$\begin{aligned} \psi_{12} = & -\frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} \left\{ \left[ (\varphi + \lambda_1 \bar{\varphi}) \frac{d\psi_{11}}{d\sigma_1} + \frac{1}{2!} (\varphi + \lambda_1 \bar{\varphi})^2 \frac{d^2\psi_{10}}{d\sigma_1^2} \right] + \frac{\bar{\rho}_1 q_2 - \rho_2 \bar{q}_1}{\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1} \left[ (\bar{\varphi} + \bar{\lambda}_1 \bar{\varphi}) \frac{d\bar{\psi}_{11}}{d\bar{\sigma}_1} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2!} (\bar{\varphi} + \bar{\lambda}_1 \bar{\varphi})^2 \frac{d^2\bar{\psi}_{10}}{d\bar{\sigma}_1^2} \right] + \frac{\bar{\rho}_2 q_2 - \rho_2 \bar{q}_2}{\rho_1 q_2 - \rho_2 q_1} \left[ (\bar{\varphi} + \bar{\lambda}_2 \bar{\varphi}) \frac{d\bar{\psi}_{21}}{d\bar{\sigma}_2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2!} (\bar{\varphi} + \bar{\lambda}_2 \bar{\varphi})^2 \frac{d^2\bar{\psi}_{20}}{d\bar{\sigma}_2^2} \right] \right\} \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma} + \lambda_{12}. \end{aligned}$$

Выражения для  $\psi_{20}$ ,  $\psi_{21}$  и  $\psi_{22}$  получим из (III.344) заменой  $\rho_1$ ,  $q_1$ ,  $\lambda_1$ ,  $\sigma_1$ ,  $\psi_{1k}$  соответственно на  $\rho_2$ ,  $q_2$ ,  $\lambda_2$ ,  $\sigma_2$ ,  $\psi_{2k}$ , и наоборот.

Поступая, как и в § 6, найдем

$$\varphi(\sigma) = \frac{R}{2} \left\{ N_0 \sigma + \varepsilon \sum_{k=1}^5 (N_k \sigma^k + N_{-k} \sigma^{-k}) + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^7 (A_k \sigma^k + A_{-k} \sigma^{-k}) \right\}, \quad (\text{III.345})$$

где

$$N_0 = -k_1 m_1, \quad N_{-1} = k_1 \delta_1 (a_3 + \kappa_1 a_5) m_1,$$

$$N_{-2} = k_1 \delta_1 a_4 m_1, \quad N_{-3} = k_1 \delta_1 a_5 m_1, \quad N_{-4} = N_{-5} = 0,$$

$$N_1 = k_1^2 [2\rho_2 q_2^* \delta_2 (a_3 + \kappa_2 a_5) m_2 - (\rho_1 q_2^* + \rho_2 q_1^*) \delta_1 (a_3 + \kappa_1 a_5) m_1], \quad (\text{III.346})$$

$$N_2 = k_1^2 \left[ 2\rho_2 q_2^* \delta_2 a_4 m_2 - (\rho_1 q_2^* + \rho_2 q_1^*) \delta_1 a_4 m_1 - \frac{a_2}{k_1} n_1 \right],$$

$$N_3 = k_1^2 \left[ 2\rho_2 q_2^* \delta_2 a_5 m_2 - (\rho_1 q_2^* + \rho_2 q_1^*) \delta_1 a_5 m_1 - \frac{a_3}{k_1} n_1 \right],$$

$$N_4 = -k_1 a_4 n_1, \quad N_5 = -k_1 a_5 n_1;$$

$$\begin{aligned} A_{-1} = & -\delta_1 [3a_5 N_3 + 2a_4 N_2 + (a_3 + \kappa_1 a_5) N_1 + k_1 \delta_1 m_1 (a_2^2 + 4\kappa_1 a_2 a_4 + \\ & + 2\kappa a_3^2 + 7\kappa_1^2 a_3 a_5 + 4\kappa_1^2 a_4^2 + 6\kappa_1^3 a_5^2)], \end{aligned}$$

$$A_{-2} = -\delta_1 [2a_5 N_2 + a_4 N_1 + k_1 \delta_1 m_1 (2a_2 a_3 + 4\kappa_1 a_2 a_5 + 5\kappa_1 a_3 a_4 + 9\kappa_1 a_4 a_5)],$$

$$A_{-3} = -\delta_1 [a_5 N_1 + k_1 \delta_1 m_1 (2a_2 a_4 + a_3^2 + 5\kappa_1 a_3 a_5 + 3\kappa_1 a_4^2 + 5\kappa_1^2 a_5^2)],$$

$$A_{-4} = -k_1 \delta_1^2 m_1 (2a_2 a_5 + 2a_3 a_4 + 6\kappa_1 a_4 a_5), \quad (\text{III.347})$$

$$A_{-5} = -k_1 \delta_1^2 m_1 (2a_3 a_5 + a_4^2 + 3\kappa_1 a_5^2),$$

$$A_{-6} = -2k_1 \delta_1^2 m_1 a_4 a_5, \quad A_{-7} = -k_1 \delta_1^2 m_1 a_5^2,$$

$$A_k = -k_1 [(p_1 q_2^* + p_2 q_1^*) A_{-k} + 2p_2 q_2^* B_{-k}] \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).$$

При этом

$$m_1 = p(a_{11} q_2^* - a_{12} c p_2) + q(a_{12} q_2^* - a_{22} c p_2),$$

$$m_2 = p(a_{11} q_1^* - a_{12} c p_1) + q(a_{12} q_1^* - a_{22} c p_1),$$

$$n_1 = p(a_{11} q_2^* + a_{12} p_2) + q(a_{12} q_2^* + a_{22} p_2), \quad (\text{III.348})$$

$$n_2 = p(a_{11} q_1^* + a_{12} p_1) + q(a_{12} q_1^* + a_{22} p_1),$$

$$q_1^* = -i q_1, \quad q_2^* = -i q_2, \quad k_1 = (p_1 q_2^* - p_2 q_1^*)^{-1},$$

$$\delta_q = \frac{1 - \beta_q}{1 + c \beta_q}, \quad \kappa_q = \frac{1 - c \beta_q}{1 + c \beta_q} \quad (q = 1, 2).$$

Функцию  $\psi(\sigma)$  получим из (III.345), если в последней заменить  $N_k$  и  $A_k$  соответственно на  $M_k$  и  $B_k$  ( $k = 0, \pm 1, \dots, \pm 7$ ), причем  $M_k$  и  $B_k$  получим из  $N_k$  и  $A_k$  заменой  $p_1, q_1^*, \delta_1, \kappa_1$ , на  $p_2, q_2^*, \delta_2, \kappa_2$ , и наоборот.

Введем обозначения:

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{R}{2} (\varphi_1 + i\psi_1), \quad \frac{d\psi}{d\vartheta} = \frac{R}{2} (\varphi_2 + i\psi_2),$$

$$A = -c \cos \vartheta + \varepsilon \sum_{k=2}^5 ka_k \cos k\vartheta, \quad B = \sin \vartheta + e \sum_{k=2}^5 ka_k \sin k\vartheta, \quad (\text{III.349})$$

$$C^2 = A^2 + B^2, \quad \alpha = \frac{B}{A}.$$

Тогда, приняв во внимание (III.349), находим напряжения

$$\sigma_\varrho = \frac{1}{C^2} \{ (pA^2 + qB^2) - A(\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2) - B(\varphi_1 + \varphi_2) \},$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{1}{C^2} \{ (qA^2 + pB^2) + A_{11} \varphi_1 + A_{12} \varphi_2 + A_{13} \psi_1 + A_{14} \psi_2 \}, \quad (\text{III.350})$$

$$\tau_{\varrho\vartheta} = \frac{1}{C^2} \{ AB(p - q) + A(\varphi_1 + \varphi_2) - B(\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2) \},$$

где

$$A_{11} = B \frac{\alpha^2 \beta_1^2 + 2\beta_1^2 - 1}{\alpha^2 + \beta_1^2}, \quad A_{12} = B \frac{\alpha^2 \beta_2^2 + 2\beta_2^2 - 1}{\alpha^2 + \beta_2^2}, \quad (\text{III.351})$$

$$A_{13} = A \beta_1 \frac{2\alpha^2 - \alpha^2 \beta_1^2 + 1}{\alpha^2 + \beta_1^2}, \quad A_{14} = A \beta_2 \frac{2\alpha^2 - \alpha^2 \beta_2^2 + 1}{\alpha^2 + \beta_2^2};$$



$$\varphi_1 = \sum_{k=1}^7 b_k \sin k\vartheta, \quad \psi_1 = \sum_{k=1}^7 c_k \cos k\vartheta. \quad (\text{III.352})$$

Здесь

$$\begin{aligned} b_1 &= -[N_0 + \varepsilon(N_1 + N_{-1}) + \varepsilon^2(A_1 + A_{-1})], \\ b_m &= -m[\varepsilon(N_m + N_{-m}) + \varepsilon^2(A_m + A_{-m})] \quad (m = 2, 3, 4, 5), \\ b_n &= -n\varepsilon^2(A_n - A_{-n}) \quad (n = 6, 7), \\ c_1 &= [-N_0 + \varepsilon(N_1 - N_{-1}) + \varepsilon^2(A_1 - A_{-1})], \\ c_m &= m[\varepsilon(N_m - N_{-m}) + \varepsilon^2(A_m - A_{-m})] \quad (m = 2, 3, 4, 5), \\ c_n &= n\varepsilon^2(A_n - A_{-n}) \quad (n = 6, 7). \end{aligned} \quad (\text{III.353})$$

Выражения для  $\varphi_2$ ,  $\psi_2$  получим из (III.352) и (III.353), если в последних заменить  $N_k$ ,  $A_k$  соответственно на  $M_k$ ,  $B_k$ .

В качестве примера рассмотрено напряженное состояние вдоль контура слая жесткого кольца и пластинки из авиационной фанеры ( $a_{11}=0,83333 \cdot 10^{-9}/_{9,81}$ ,  $a_{12}=-0,05917 \cdot 10^{-9}/_{9,81}$ ,  $a_{22}=1,66667 \cdot 10^{-9}/_{9,81}$ ,  $a_{66}=14,2857 \cdot 10^{-9}/_{9,81}$ ); для сравнения также приведены соответствующие данные для изотропной пластинки\*. Для отверстий в форме правильного треугольника, квадрата и прямоугольника модуль Юнга и коэффициент Пуассона для изотропной пластинки были приняты равными средним арифметическим этих величин для фанеры. В остальных случаях  $\nu=0,3$ .

**Отверстие в форме правильного треугольника.** Ортоанізотропная пластинка ослаблена отверстием, контур которого задан уравнениями (III.302). На контуре отверстия функция  $\varphi(\zeta)$  имеет вид\*\*

$$\begin{aligned} \varphi(\sigma) = -\frac{Rk_1}{2} \left\{ m_1 \sigma + \varepsilon n_1 \sigma^2 + \varepsilon^2 k_1 [2\rho_2 q_2^* \lambda_2^2 m_2 - (\rho_1 q_2^* + \rho_2 q_1^*) \lambda_1^2 m_1] \sigma + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 \lambda_1^2 m_1 \frac{1}{\sigma} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.354})$$

Выражение для функции  $\psi(\zeta)$  получим из (III.354), заменив  $m_1$ ,  $n_1$ ,  $\rho_1$ ,  $q_1^*$ ,  $\lambda_1$ ,  $k_1$  соответственно на  $m_2$ ,  $n_2$ ,  $\rho_2$ ,  $q_2^*$ ,  $\lambda_2$ ,  $-k_1$ , и наоборот.

На рис. III.41 приведены\*\*\* значения напряжений  $\sigma_\theta/\rho$  и  $\sigma_\varrho/q$  по контуру слая кольца с пластиной соответственно для случаев, когда усилия приложены в направлении оси  $Ox$  ( $q=0$ ) и вдоль оси  $Oy$  ( $p=0$ ).

**Отверстие в форме равнобедренного треугольника\*\*\*\*.** Контур отверстия задан уравнениями (III.308). Выражение для функции  $\varphi(\zeta)$  получаем из (III.345) — (III.347), когда  $a_4=a_5=0$ :

\* Формулы для изотропной пластинки даны Е. Ф. Бурмистровым [1].

\*\* См. А. С. Космодамианский [8].

\*\*\* Обозначения те же, что и на графиках, приведенных в § 7.

\*\*\*\* См. А. С. Космодамианский, В. В. Меглинский, В. А. Швецов [1].

$$\varphi(\sigma) = \frac{R}{2} \left\{ N_0 \sigma + \varepsilon \sum_{k=1}^3 (N_k \sigma^k + N_{-k} \sigma^{-k}) + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^3 (A_k \sigma^k + A_{-k} \sigma^{-k}) \right\}, \quad (\text{III.355})$$

где

$$N_0 = -k_1 m_1, \quad N_{-1} = k_1 \delta_1 m_1 a_3, \quad N_{-2} = N_{-3} = 0,$$

$$N_1 = k_1^2 [2\rho_2 q_2^* \delta_2 m_2 - (\rho_1 q_2^* + \rho_2 q_1^*) \delta_1 m_1] a_3,$$

$$N_2 = -k_1 n_1 a_2, \quad N_3 = -k_1 n_1 a_3, \quad (\text{III.356})$$

$$A_{-1} = -\delta_1 N_1 a_3 - k_1 \delta_1^2 m_1 (a_2^2 + 2\chi_1 a_3^2),$$

$$A_{-2} = -k_1 \delta_1^2 m_1 2a_2 a_3,$$

$$A_{-3} = -k_1 \delta_1^2 m_1 a_3^2,$$

$$A_k = -k_1 [2\rho_2 q_2^* B_{-k} + (\rho_1 q_2^* + \rho_2 q_1^*) A_{-k}] \quad (k = 1, 2, 3).$$

Рассмотрим следующие отверстия: а) отверстие в форме равнобедренного прямоугольного треугольника ( $c=2$ ,  $\varepsilon=0,44$ ,  $a_2=1$ ,  $a_3=0,168$ ); б) отверстие в форме равнобедренного треугольника с углом при вершине  $\pi/6$  ( $c=0,4$ ,  $\varepsilon=0,1905$ ,  $a_2=1$ ,  $a_3=-0,2143$ ).

Определены напряжения  $\sigma_p$  по контуру спая кольца с пластинкой, когда растягивающие усилия параллельны одной из осей координат. Результаты этих подсчетов для первого и второго случаев приведены соответственно на рис. III.42 и III.43.

**Квадратное отверстие** \*. Взяв уравнения контура отверстия в виде (III.314) и положив в (III.355) и (III.356)  $c=1$ ,  $a_2=0$ ,  $a_3=1$ , получим функцию  $\varphi(\zeta)$  на контуре отверстия:

$$\varphi(\sigma) = \frac{R}{2} \left\{ N_0 \sigma + \varepsilon \sum_{k=1,3} (N_k \sigma^k + N_{-k} \sigma^{-k}) + \varepsilon^2 \sum_{k=1,3} (A_k \sigma^k + A_{-k} \sigma^{-k}) \right\}. \quad (\text{III.357})$$

Здесь

$$N_0 = -k_1 m_1, \quad N_{-1} = k_1 m_1 \lambda_1, \quad N_{-3} = 0,$$

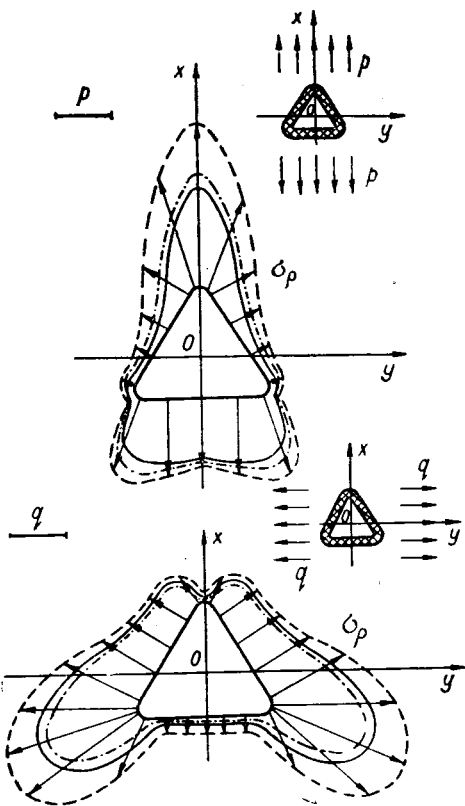


Рис. III.41.

\* См. А. С. Космодамианский [8].

$$\begin{aligned}
 N_1 &= k_1^2 [2\rho_2 q_2^* \lambda_2 m_2 - (\rho_1 q_2^* + \rho_2 q_1^*) \lambda_1 m_1], & N_3 &= -k_1 n_1, \\
 A_{-1} &= -\lambda_1 N_1 - 2k_1 \lambda_1^3 m_1, & A_{-3} &= -k_1 \lambda_1^2 m_1, \\
 A_k &= -k_1 [2\rho_2 q_2^* B_{-k} + (\rho_1 q_2^* + \rho_2 q_1^*) A_{-k}] & (k &= 1, 3).
 \end{aligned}
 \tag{III.358}$$

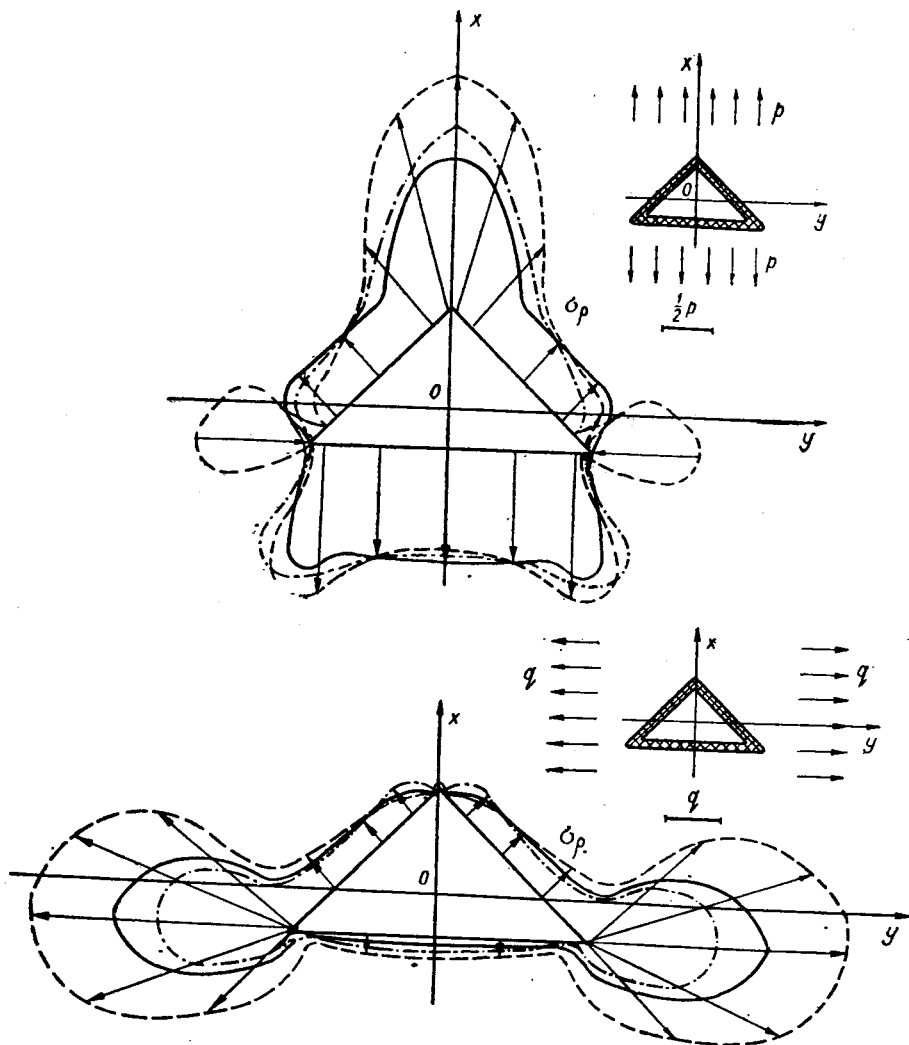


Рис. III.42.

Выражение для функции  $\psi(\zeta)$  на контуре отверстия, как и раньше, получим из формулы (III.357), заменив в ней  $\lambda_1$ ,  $\rho_1$ ,  $q_1^*$ ,  $k_1$ ,  $m_1$ ,  $n_1$  соответственно на  $\lambda_2$ ,  $\rho_2$ ,  $q_2^*$ ,  $-k_1$ ,  $m_2$ ,  $n_2$ , и наоборот.

Напряжения  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\phi$ ,  $\tau_{\rho\phi}$  определяются по формулам (III.350).

На рис. III.44 приведены величины напряжений  $\sigma_\rho/\rho$  по контуру слая для случаев, когда растягивающие усилия  $p$  приложены в направлении как стороны квадрата, так и диагонали квадрата.

**Прямоугольное отверстие с соотношением сторон  $a/b = 2$ .** Контур отверстия определяется уравнениями (III.285), в которых постоянные принимают значения (III.317). Функцию  $\phi(\xi)$  получим из (III.345), если в выражениях (III.346) и (III.347) положить  $a_2 = a_4 = 0$ .

Результаты вычислений\* приведены на рис. III.45, где показано распределение напряжений  $\sigma_\rho$  вдоль контура слая жесткого кольца с анизотропной пластинкой.

**Трапециoidalное отверстие\*\*.** В уравнениях (III.285), как и раньше,  $c = 1,04380$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = -1,47619$ ,  $a_4 = 0,25867$ ,  $a_5 = -0,019698$ ,  $\epsilon = 0,10428$ .

На рис. III.46 построены графики, характеризующие распределение напряжений  $\sigma_\rho$  (в долях  $p$  и  $q$ ) вдоль контура слая.

**Отверстие в форме свода\*\*\*.** В этом случае  $c = 0,752035$ ,  $a_2 = 1$ ,  $a_3 = -1,4908$ ,  $a_4 = 0,56998$ ,  $a_5 = 0,02855$ ,  $\epsilon = 0,059525$ .

На рис. III.47 даны значения напряжений  $\sigma_\rho/\rho$  и  $\sigma_\rho/q$  по контуру слая пластинки с кольцом.

Таким образом, проведенные исследования показывают, что жесткое кольцо, впаянное в отверстие, резко снижает концентрацию напряжений вблизи его контура. Концентрация напряжений в анизотропной пластинке меньше, чем в изотропной, тогда как в случае свободного отверстия наблюдается противоположная картина.

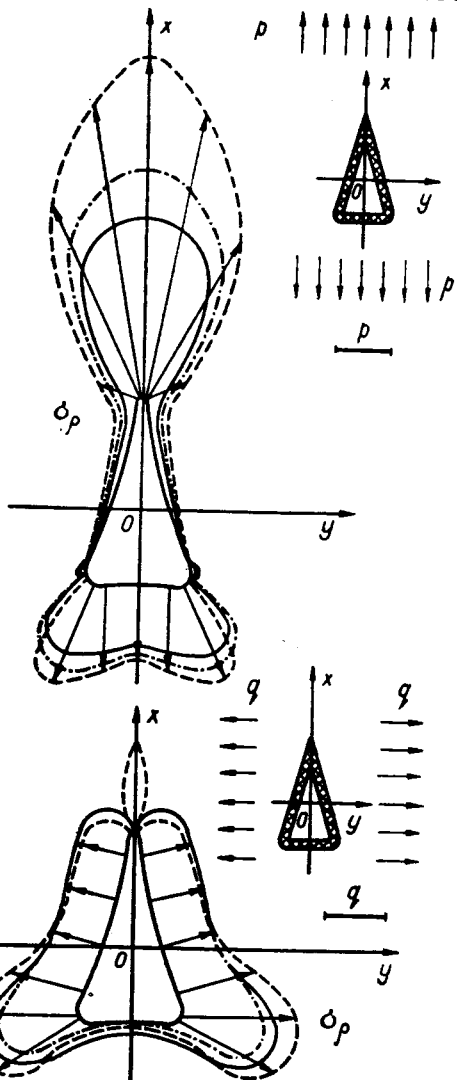


Рис. III.43

\* См. А. С. Космодамианский [8].

\*\* См. А. С. Космодамианский, В. В. Меглинский, В. А. Швецов [3].

\*\*\* См. А. С. Космодамианский, В. В. Меглинский, В. А. Швецов [2].

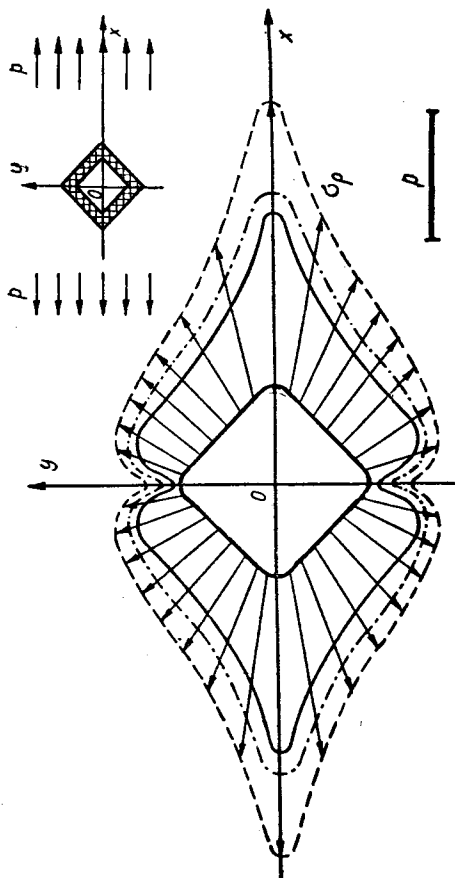
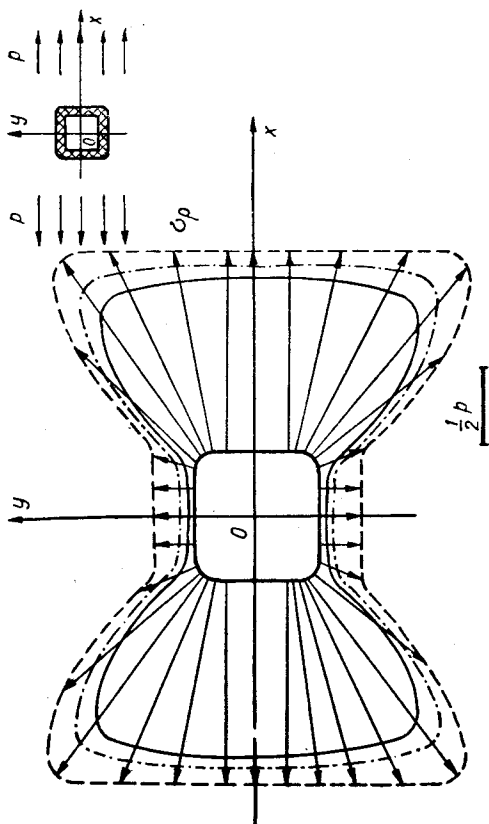
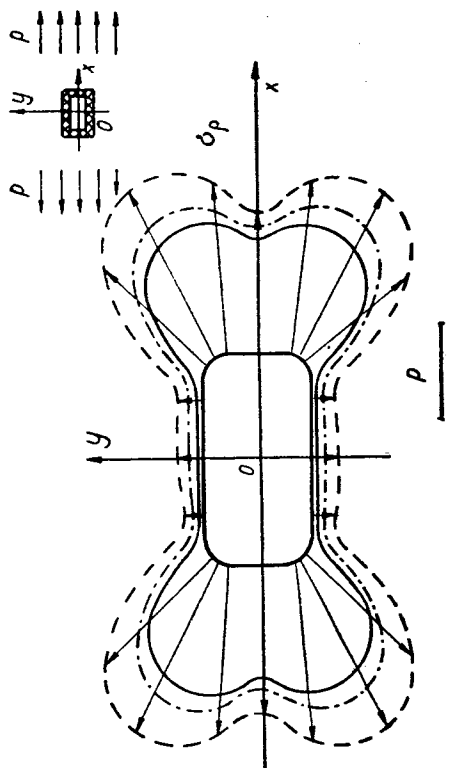
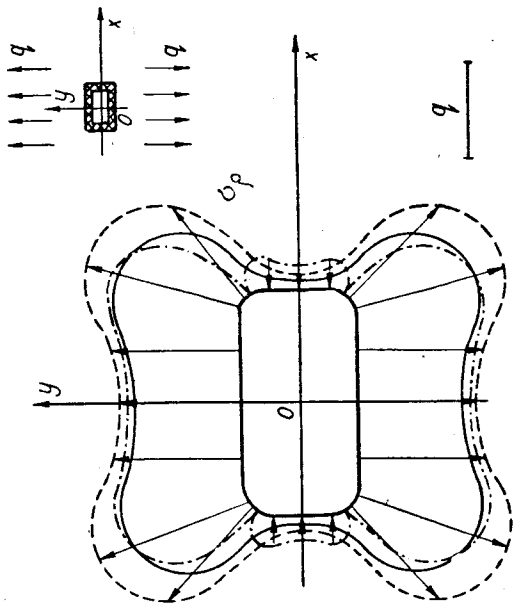


Рис. III.45.

Рис. III.44.

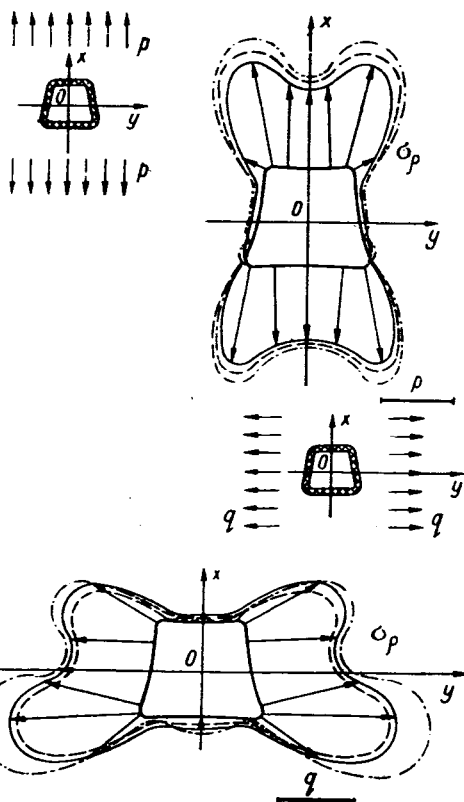


Рис. III.46.

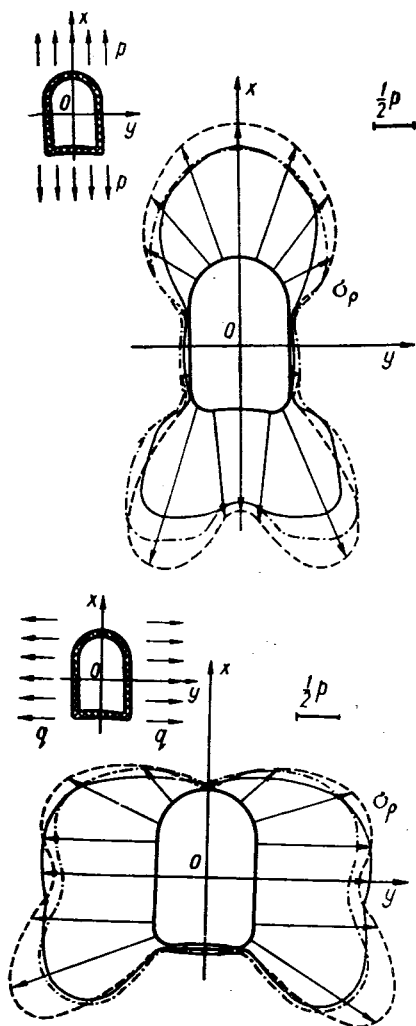


Рис. III.47.

### § 11. Чистый изгиб анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, подкрепленным жестким кольцом \*

Допустим, что анизотропная пластинка с криволинейным отверстием, контур которого задан уравнениями (III.285), находится в состоянии чистого изгиба. Изгибающие моменты  $M_1$  и  $M_2$  действуют так, как показано на рис. III.48. В отверстие пластинки впаяно жесткое кольцо. Изучим напряженное состояние в пластинке вблизи контура рассматриваемого отверстия, при этом будем считать (теоретически), как и раньше, пластинку неограниченной.

Рассмотрим два случая.

Моменты действуют на сторонах пластинки, параллельных оси  $Oy$  ( $M_1 \neq 0, M_2 = 0$ ). Поле напряжений в сплошной пластинке

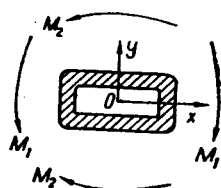


Рис. III.48.

$$\sigma_x^0 = \frac{M_1}{J} y, \quad \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0, \quad (\text{III.359})$$

а проекции перемещений

$$u^0 = \frac{M_1}{J} a_{11} xy, \quad (\text{III.360})$$

$$v^0 = \frac{M_1}{2J} (a_{12} y^2 - a_{11} x^2).$$

Решение задачи о напряженном состоянии пластинки, когда на контуре отверстия заданы перемещения  $-u^0, -v^0$ , а на бесконечности усилия отсутствуют, как известно, сводится к определению функций  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  из граничных условий (III.92). Разлагая правые части этих условий в ряды по степеням малого параметра  $\epsilon$ , найдем функции  $t_{1x}, t_{2k}$ :

$$t_{10} = -\frac{M_1 R^2}{4J} i a_{11} c \left( \sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2} \right),$$

$$t_{20} = \frac{M_1 R^2}{8J} \left[ (a_{11} + a_{12} c^2) \left( \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) + 2(a_{11} - a_{12} c^2) \right],$$

$$t_{11} = -\frac{M_1 R^2}{4J} i a_{11} \left\{ (c-1) a_6 \left( \sigma^6 - \frac{1}{\sigma^6} \right) + (c-1) a_4 \left( \sigma^5 - \frac{1}{\sigma^5} \right) + [(c-1) a_3 - (c+1) a_5] \left( \sigma^4 - \frac{1}{\sigma^4} \right) + [(c-1) a_2 - (c+1) a_4] \left( \sigma^3 - \frac{1}{\sigma^3} \right) - (c+1) a_3 \left( \sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2} \right) - (c+1) a_2 \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \right\},$$

\* См. А. С. Космодамианский, В. В. Меглинский, В. А. Швецов [4].

$$t_{11} = \frac{M_1 R^3}{4J} \left\{ (a_{11} - a_{12}c) a_5 \left( \sigma^6 + \frac{1}{\sigma^6} \right) + (a_{11} - a_{12}c) a_4 \left( \sigma^5 + \frac{1}{\sigma^5} \right) + [(a_{11} - a_{12}c) a_3 + \right. \\ \left. + (a_{11} + a_{12}c) a_5] \left( \sigma^4 + \frac{1}{\sigma^4} \right) + [(a_{11} - a_{12}c) a_2 + (a_{11} + a_{12}c) a_4] \left( \sigma^3 + \frac{1}{\sigma^3} \right) + \right. \\ \left. + (a_{11} + a_{12}c) a_3 \left( \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) + (a_{11} + a_{12}c) a_2 \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right) \right\}, \\ t_{12} = \frac{M_1 R^3}{4J} i a_{11} \left[ a_5^2 \left( \sigma^{10} - \frac{1}{\sigma^{10}} \right) + 2a_4 a_5 \left( \sigma^9 - \frac{1}{\sigma^9} \right) + (a_4^2 + 2a_3 a_5) \left( \sigma^8 - \frac{1}{\sigma^8} \right) + \right. \\ \left. + 2(a_2 a_5 + a_3 a_4) \left( \sigma^7 - \frac{1}{\sigma^7} \right) + (a_3^2 + 2a_2 a_4) \left( \sigma^6 - \frac{1}{\sigma^6} \right) + 2a_2 a_3 \left( \sigma^5 - \frac{1}{\sigma^5} \right) + \right. \\ \left. + a_2^2 \left( \sigma^4 - \frac{1}{\sigma^4} \right) \right], \quad (\text{III.361})$$

$$t_{22} = \frac{M_1 R^3}{8J} \left\{ (a_{11} + a_{12}) \left[ a_5^2 \left( \sigma^{10} + \frac{1}{\sigma^{10}} \right) + 2a_4 a_5 \left( \sigma^9 + \frac{1}{\sigma^9} \right) + (a_4^2 + 2a_3 a_5) \left( \sigma^8 + \frac{1}{\sigma^8} \right) + \right. \right. \\ \left. + 2(a_2 a_5 + a_3 a_4) \left( \sigma^7 + \frac{1}{\sigma^7} \right) + (a_3^2 + 2a_2 a_4) \left( \sigma^6 + \frac{1}{\sigma^6} \right) + 2a_2 a_3 \left( \sigma^5 + \frac{1}{\sigma^5} \right) + \right. \\ \left. + a_2^2 \left( \sigma^4 + \frac{1}{\sigma^4} \right) \right] + 2(a_{11} - a_{12}) \left[ a_2 a_5 \left( \sigma^3 + \frac{1}{\sigma^3} \right) + (a_2 a_4 + a_3 a_5) \left( \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) + \right. \\ \left. + (a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_5) \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right) + (a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2) \right] \right\}, \\ t_{1k} = t_{2k} = 0 \quad (k \geq 3).$$

Подставляя функции (III.337) в (III.338), а последние — в (III.339) и интегрируя, получаем выражения для функций  $\Psi_{0k}(\zeta)$ .

Далее, способом, указанным в § 6, получим

$$\varphi = \frac{M_1 R^3}{8J} i \left\{ N_0 \sigma^2 - \varepsilon \sum_{k=1}^6 (N_k \sigma^k - N_{-k} \sigma^{-k}) - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{10} (A_k \sigma^k - A_{-k} \sigma^{-k}) \right\}, \quad (\text{III.362})$$

где

$$N_0 = -k_1 m_1, \quad N_{-1} = 2k_1 m_1 \delta_1 a_4, \quad N_{-2} = 2k_1 m_1 \delta_1 a_5, \\ N_{-3} = N_{-4} = N_{-5} = N_{-6} = 0,$$

$$N_1 = 2k_1^2 \left\{ [2p_2 q_2^* m_2 \delta_2 - (p_1 q_2^* + p_2 q_1^*) m_1 \delta_1] a_4 - \frac{n_1}{k_1} a_2 \right\},$$

$$N_2 = 2k_1^2 \left\{ [2p_2 q_2^* m_2 \delta_2 - (p_1 q_2^* + p_2 q_1^*) m_1 \delta_1] a_5 - \frac{n_1}{k_1} a_3 \right\}, \quad (\text{III.363})$$

$$N_3 = -2k_1 (d_1 a_2 + n_1 a_4), \quad N_4 = -2k_1 (d_1 a_3 + n_1 a_5),$$

$$N_5 = -2k_1 d_1 a_4, \quad N_6 = -2k_1 d_1 a_5;$$



$$A_{-1} = -\delta_1 [3N_3 a_5 + 2N_2 a_4 + N_1 (a_3 + \kappa_1 a_5) + 2k_1 m_1 \delta_1 (2a_2 a_3 + 4\kappa_1 a_2 a_5 + 5\kappa_1 a_3 a_4 + 9\kappa_1^2 a_4 a_5)],$$

$$A_{-2} = -\delta_1 [2N_2 a_5 + N_1 a_4 + k_1 m_1 \delta_1 (3a_3^2 + 4a_2 a_4 + 12\kappa_1 a_3 a_5 + 6\kappa_1 a_4^2 + 11\kappa_1^2 a_5^2)], \quad (\text{III.364})$$

$$A_{-3} = -\delta_1 [N_1 a_5 + 2k_1 m_1 \delta_1 (2a_2 a_5 + 3a_3 a_4 + 7\kappa_1 a_4 a_5)],$$

$$A_{-4} = -k_1 m_1 \delta_1^2 (3a_4^2 + 6a_3 a_5 + 8\kappa_1 a_5^2),$$

$$A_{-5} = 6k_1 m_1 \delta_1^2 a_4 a_5, \quad A_{-6} = -3k_1 m_1 \delta_1^2 a_5^2, \quad A_{-7} = A_{-8} = A_{-9} = A_{-10} = 0,$$

$$A_k = -k_1 [(p_1 q_2^* + p_2 q_1^*) A_{-k} + 2p_2 q_2^* B_{-k} + P_k] \quad (k = 1, 2, \dots, 10);$$

$$P_1 = 2h_1 (a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_5), \quad P_2 = 2h_1 (a_2 a_4 + a_3 a_5), \quad P_3 = 2h_1 a_2 a_5,$$

$$P_4 = r_1 a_2^2, \quad P_5 = 2r_1 a_2 a_3, \quad P_6 = r_1 (a_3^2 + 2a_2 a_4), \quad (\text{III.365})$$

$$P_7 = 2r_1 (a_2 a_5 + a_3 a_4), \quad P_8 = r_1 (a_4^2 + 2a_3 a_5), \quad P_9 = 2r_1 a_4 a_5, \quad P_{10} = r_1 a_5^2.$$

При этом

$$m_1 = 2q_2^* a_{11} c - p_2 (a_{11} + a_{12} c^2), \quad n_1 = q_2^* a_{11} (c + 1) + p_2 (a_{11} + a_{12} c),$$

$$d_1 = -q_2^* a_{11} (c - 1) + p_2 (a_{11} - a_{12} c), \quad r_1 = 2q_2^* a_{11} + p_2 (a_{11} + a_{12}),$$

$$h_1 = p_2 (a_{11} - a_{12}),$$

$$q_p^* = -iq_p \quad (p = 1, 2), \quad k_1 = (p_1 q_2^* - p_2 q_1^*)^{-1}, \quad (\text{III.366})$$

$$\kappa_p = \frac{1 - c\beta_p}{1 + c\beta_p}, \quad \delta_p = \frac{1 - \beta_p}{1 + c\beta_p}.$$

Функцию  $\psi$  получим из выражений (III.362) — (III.365), заменив в них  $p_1$ ,  $q_1^*$ ,  $\kappa_1$ ,  $\delta_1$ ,  $k_1$  соответственно на  $p_2$ ,  $q_2^*$ ,  $\kappa_2$ ,  $\delta_2$ ,  $-k_1$ , и наоборот.

Обозначим

$$\frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{M_k R^2}{2J} (\varphi_1 + i\psi_1), \quad \frac{d\psi}{d\vartheta} = \frac{M_k R^2}{2J} (\varphi_2 + i\psi_2) \quad (k=1,2). \quad (\text{III.367})$$

Тогда компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_\varrho &= \frac{M_1 R}{J} \cdot \frac{1}{C^2} \left\{ A^2 \frac{y}{R} - [B(\varphi_1 + \varphi_2) + A(\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2)] \right\}, \\ \tau_{\varrho\vartheta} &= -\frac{M_1 R}{J} \cdot \frac{1}{C^2} \left\{ AB \frac{y}{R} + A(\varphi_1 + \varphi_2) - B(\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2) \right\}, \quad (\text{III.368}) \\ \sigma_\vartheta &= \frac{M_1 R}{J} \cdot \frac{1}{C^2} \left\{ B^2 \frac{y}{R} + A_{11} \varphi_1 + A_{12} \varphi_2 + A_{13} \psi_1 + A_{14} \psi_2 \right\}, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $A$ ,  $B$ ,  $C^2$ ,  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{13}$  и  $A_{14}$  определяются по формулам (III.328) и (III.330).

Моменты действуют на сторонах пластинки, параллельных оси  $Ox$  ( $M_1 = 0$ ,  $M_2 \neq 0$ ). Поле напряжений в сплошной пластинке

$$\sigma_y^0 = \frac{M_2}{J} x, \quad \sigma_x^0 = \tau_{xy}^0 = 0, \quad (\text{III.369})$$

а проекции перемещений

$$u^0 = \frac{M_2}{2J} (a_{12}x^2 - a_{22}y^2), \quad (\text{III.370})$$

$$v^0 = \frac{M_2}{J} a_{22}xy.$$

Функции  $t_{1k}$  и  $t_{2k}$  в этом случае

$$t_{10} = -\frac{M_2 R^2}{8J} \left[ (a_{12} + a_{22}c^2) \left( \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) + 2(a_{12} - a_{22}c^2) \right],$$

$$t_{20} = -\frac{M_2 R^2}{4J} a_{22}ic \left( \sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2} \right),$$

$$t_{11} = -\frac{M_2 R^2}{4J} \left\{ (a_{12} - a_{22}c) a_5 \left( \sigma^6 + \frac{1}{\sigma^6} \right) + (a_{12} - a_{22}c) a_4 \left( \sigma^5 + \frac{1}{\sigma^5} \right) + \right.$$

$$+ [(a_{12} - a_{22}c) a_3 + (a_{12} + a_{22}c) a_5] \left( \sigma^4 + \frac{1}{\sigma^4} \right) + [(a_{12} - a_{22}c) a_2 +$$

$$+ (a_{12} + a_{22}c) a_4] \left( \sigma^3 + \frac{1}{\sigma^3} \right) + (a_{12} + a_{22}c) a_3 \left( \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) + (a_{12} + a_{22}c) a_2 \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right) \left. \right\},$$

$$t_{21} = -\frac{M_2 R^2}{4J} ia_{22} \left\{ (c-1) a_5 \left( \sigma^6 - \frac{1}{\sigma^6} \right) + (c-1) a_4 \left( \sigma^5 - \frac{1}{\sigma^5} \right) + \right.$$

$$+ [(c-1) a_3 - (c+1) a_5] \left( \sigma^4 - \frac{1}{\sigma^4} \right) + [(c-1) a_2 - (c+1) a_4] \left( \sigma^3 - \frac{1}{\sigma^3} \right) -$$

$$\left. - (c+1) a_3 \left( \sigma^2 - \frac{1}{\sigma^2} \right) - (c+1) a_2 \left( \sigma - \frac{1}{\sigma} \right) \right\},$$

$$t_{12} = -\frac{M_2 R^2}{8J} \left\{ (a_{12} + a_{22}) \left[ a_5^2 \left( \sigma^{10} + \frac{1}{\sigma^{10}} \right) + 2a_4 a_5 \left( \sigma^9 + \frac{1}{\sigma^9} \right) + \right. \right.$$

$$\left. + (a_4^2 + 2a_3 a_5) \left( \sigma^8 + \frac{1}{\sigma^8} \right) + 2(a_2 a_5 + a_3 a_4) \left( \sigma^7 + \frac{1}{\sigma^7} \right) + (a_3^2 + 2a_2 a_4) \left( \sigma^6 + \frac{1}{\sigma^6} \right) + \right.$$

(III.371)

$$+ 2a_2 a_3 \left( \sigma^5 + \frac{1}{\sigma^5} \right) + a_2^2 \left( \sigma^4 + \frac{1}{\sigma^4} \right) \left. \right] + 2(a_{12} - a_{22}) \left[ a_2 a_5 \left( \sigma^3 + \frac{1}{\sigma^3} \right) + \right.$$

$$+ (a_2 a_4 + a_3 a_5) \left( \sigma^2 + \frac{1}{\sigma^2} \right) + (a_2 a_3 + a_3 a_4 + a_4 a_5) \left( \sigma + \frac{1}{\sigma} \right) +$$

$$\left. + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 \right\}.$$

$$t_{22} = \frac{M_1 R^2}{8J} \left[ a_{22} \left( a_5^2 \left( \sigma^{10} - \frac{1}{\sigma^{10}} \right) + 2a_4 a_5 \left( \sigma^9 - \frac{1}{\sigma^9} \right) + (a_4^2 + 2a_3 a_5) \left( \sigma^8 - \frac{1}{\sigma^8} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2(a_2 a_5 + a_3 a_4) \left( \sigma^7 - \frac{1}{\sigma^7} \right) + (a_3^2 + 2a_2 a_4) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \sigma^6 - \frac{1}{\sigma^6} \right) + 2a_2 a_3 \left( \sigma^5 - \frac{1}{\sigma^5} \right) + a_2^2 \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left( \sigma^4 - \frac{1}{\sigma^4} \right) \right] ,$$

$$t_{1k} = t_{2k} = 0 \quad (k \geq 3).$$

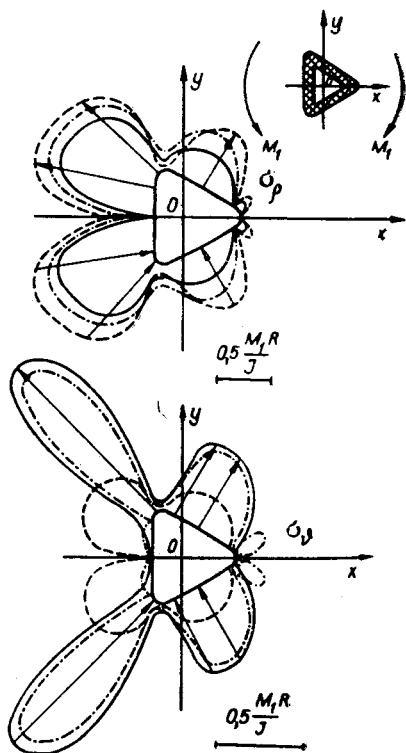


Рис. III.49.

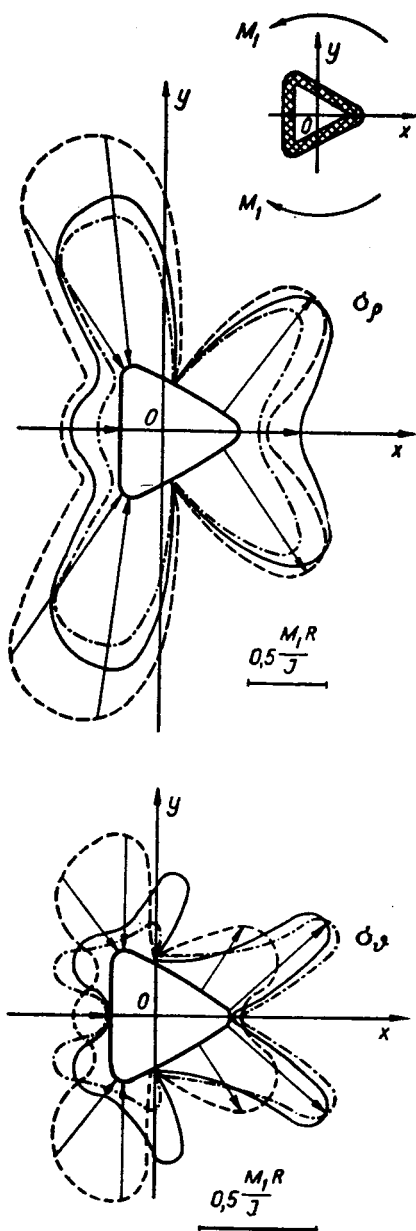


Рис. III.50.

Поступая далее как и в предыдущем случае, получим

$$\varphi = \frac{M_2 R^2}{8J} \left\{ N_0 \sigma^2 + \varepsilon \sum_{k=1}^6 (N_k \sigma^k + N_{-k} \sigma^{-k}) + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{10} (A_k \sigma^k + A_{-k} \sigma^{-k}) \right\}. \quad (\text{III.372})$$

Коэффициенты  $N_0$ ,  $N_{\pm k}$ ,  $A_{\pm k}$  определяются по формулам (III.363) и (III.364). При этом величины  $m_1$ ,  $n_1$ ,  $d_1$ ,  $r_1$ ,  $h_1$ , необходимые для подсчета коэффициентов  $P_k$ , нужно брать в следующем виде:

$$\begin{aligned} m_1 &= q_2^* (a_{12} + a_{22}c) - 2\rho_2 a_{22}c, & n_1 &= q_2^* (\tau_{12} + a_{22}c) + \rho_2 a_{22} (c + 1), \\ d_1 &= q_2^* (a_{12} - a_{22}c) - \rho_2 a_{22} (c - 1), & r_1 &= q_2^* (a_{12} + a_{22}) + 2\rho_2 a_{22}, \\ h_1 &= q_2^* (a_{12} - a_{22}). \end{aligned} \quad (\text{III.373})$$

Функцию  $\psi$  можно получить из выражения (III.372) так же, как и в предыдущем случае.

Принимая во внимание (III.367), получаем такие выражения для напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \frac{M_2 R}{J} \cdot \frac{1}{C^2} \left\{ B^2 \frac{x}{R} - [B(\varphi_1 + \varphi_2) + A(\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2)] \right\}, \\ \tau_{\rho\theta} &= \frac{M_2 R}{J} \cdot \frac{1}{C^2} \left\{ AB \frac{x}{R} + A(\varphi_1 + \varphi_2) - B(\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2) \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{M_2 R}{J} \cdot \frac{1}{C^2} \left\{ A^2 \frac{x}{R} + A_{11} \varphi_1 + A_{12} \varphi_2 + A_{13} \psi_1 + A_{14} \psi_2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{III.374})$$

На рис. III.49—III.54 даны напряжения  $\sigma_\rho$  и  $\sigma_\theta$  ( $\tau_{\rho\theta}$  оказались значительно меньше  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\theta$ ) вдоль контура спая пластинки с кольцом для тех же фанерной и изотропной ( $\nu = 1/3$ ) пластинок, что и в § 7.

## § 12. Напряженное состояние анизотропной пластинки вблизи криволинейного отверстия с упругим ядром\*

Рассмотрим бесконечную анизотропную пластинку с отверстием, мало отличающимся от кругового или эллиптического, в которое впаяно упругое ядро, изготовленное из другого анизотропного материала. Напряжения, возникающие в такой пластинке под действием внешних усилий, будем искать, как и раньше, в виде суммы напряжений в однородной сплошной пластинке и добавочных напряжений, вызванных присутствием ядра.

Напряжения  $\sigma_x^0$ ,  $\sigma_y^0$ ,  $\tau_{xy}^0$  в сплошной пластинке определяются через функцию напряжений  $U^0(x, y)$  по формулам (I.81).

\* Задача решена А. С. Космодамианским [6].

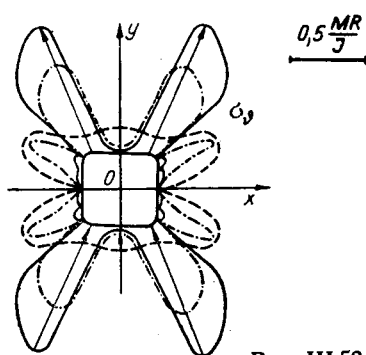
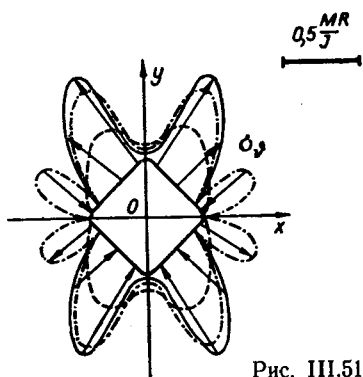
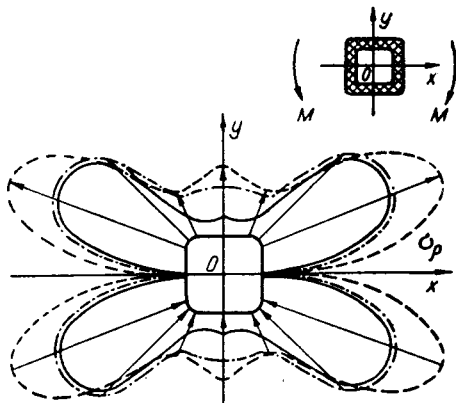
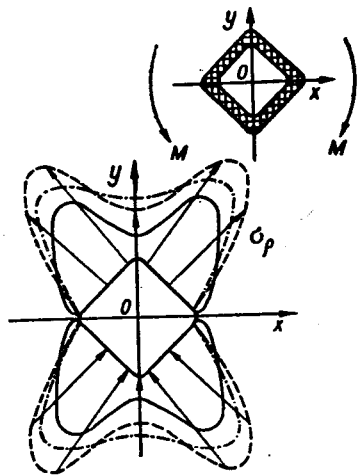


Рис. III.51

Рис. III.52

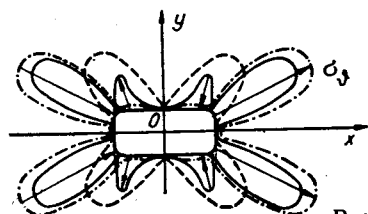
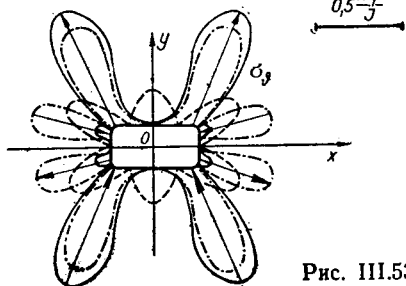
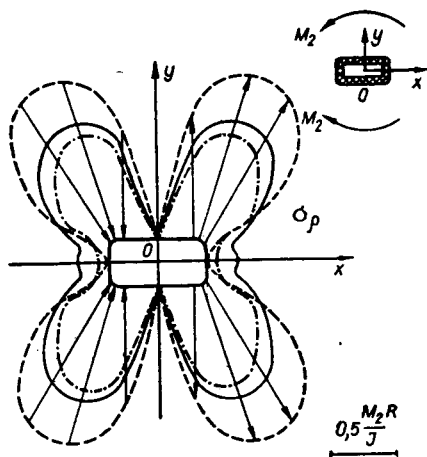
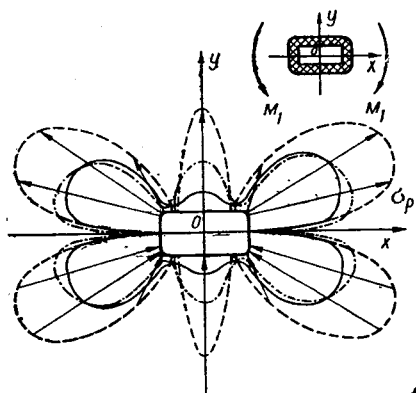


Рис. III.53

Рис. III.54

Из условий сопряжения пластинки и ядра найдем функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ , через которые определяются добавочные напряжения, возникающие в пластинке. Так как по условию ядро впаяно в отверстие пластинки, то в местах соприкосновения перемещения пластинки и ядра одинаковы. Кроме того, чтобы упругое равновесие не нарушалось, усилия в смежных точках ядра и пластинки должны быть равны и противоположно направлены. Таким образом, граничные условия

$$\begin{aligned} X_n &= -X'_n, & Y_n &= -Y'_n, \\ u &= u', & v &= v'. \end{aligned} \quad (\text{III.375})$$

Эти условия можно представить \* в виде

$$2\text{Re} [\varphi(z_1) + \psi(z_2)] = \frac{\partial(U' - U^0)}{\partial x}, \quad (\text{III.376})$$

$$2\text{Re} [s_1\varphi(z_1) + s_2\psi(z_2)] = \frac{\partial(U' - U^0)}{\partial y};$$

$$2\text{Re} [p_1\varphi(z_1) + p_2\psi(z_2)] = u' - u^0 - \gamma_0 y + \alpha_0, \quad (\text{III.377})$$

$$2\text{Re} [q_1\varphi(z_1) + q_2\psi(z_2)] = v' - v^0 + \gamma_0 x + \beta_0.$$

Слагаемые  $-\gamma_0 y + \alpha_0$  и  $\gamma_0 x + \beta_0$  в (III.377) характеризуют жесткие смещения, не влияющие на распределение напряжений в пластинке. В дальнейшем их учитывать не будем.

Возьмем функцию  $U'(x, y)$  в виде суммы полиномов с неопределенными коэффициентами от второго до  $k$ -го порядков (величина  $k$  зависит от вида контура отверстия и вида функции  $U^0(x, y)$ ). Считая указанные коэффициенты известными, из условий (III.376) найдем функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  аналогично тому, как в § 6. Коэффициенты, входящие в полиномы, определяем из условий (III.377), учитывая, что функция  $U'(x, y)$  должна удовлетворять \*\* уравнению

$$a'_{22} \frac{\partial^4 U'}{\partial x^4} - 2a'_{26} \frac{\partial^4 U'}{\partial x^2 \partial y^2} + (2a'_{12} + a'_{16}) \frac{\partial^4 U'}{\partial x^2 \partial y^2} - 2a'_{16} \frac{\partial^4 U'}{\partial x \partial y^3} + a'_{11} \frac{\partial^4 U'}{\partial y^4} = 0. \quad (\text{III.378})$$

Допустим, что упругое ядро впаяно в отверстие бесконечной ортотропной \*\*\* пластинки, контур которого задан уравнениями

$$x = R(\cos \vartheta + \varepsilon \cos 3\vartheta), \quad y = R(-\sin \vartheta + \varepsilon \sin 3\vartheta). \quad (\text{III.379})$$

\* См. С. Г. Лехницкий [3].

\*\* Здесь и в дальнейшем штрихами будем обозначать величины, относящиеся к ядру.

\*\*\* Для этой пластинки при соответствующем выборе осей координат комплексные параметры  $s_1$  и  $s_2$  будут чисто мнимыми, т. е.  $s_i = i\beta_i$  ( $i=1,2$ ).

При  $\varepsilon = \pm 1/9$  этот контур, как уже упоминалось, близок к квадратному с закругленными углами. Для простоты будем считать, что ядро так же изготовлено из ортотропного материала. Пусть на бесконечности пластинка растягивается усилиями  $p$ , параллельными оси  $Ox$  (рис. III.55).

Распределение напряжений в сплошной пластинке в данном случае характеризуется функцией напряжений

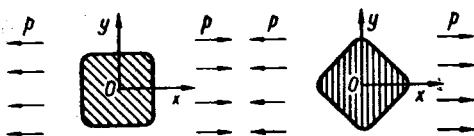


Рис. III.55

$$U^0 = \frac{p}{2} y^2, \quad (\text{III.380})$$

которой соответствуют упругие перемещения

$$u^0 = a_{11} p x, \quad (\text{III.381})$$

$$v^0 = a_{12} p y.$$

Ограничиваясь вторым приближением, положим

$$\varphi = \varphi_{10} + \varepsilon \varphi_{11} + \varepsilon^2 \varphi_{12}, \quad \psi = \psi_{20} + \varepsilon \psi_{21} + \varepsilon^2 \psi_{22}, \quad (\text{III.382})$$

$$u' = u'_{10} + \varepsilon u'_{11} + \varepsilon^2 u'_{12}, \quad v' = v'_{10} + \varepsilon v'_{11} + \varepsilon^2 v'_{12},$$

а выражение для функции  $U'(x, y)$  возьмем в виде

$$U'(x, y) = U'_{10} + \varepsilon U'_{11} + \varepsilon^2 U'_{12} = \frac{1}{2} (B_0 x^2 + A_0 y^2) + \varepsilon \left[ \frac{1}{2} (B_1 x^2 + A_1 y^2) + (\varepsilon_1 x^4 + k_1 x^2 y^2 + R_1 y^4) \right] + \varepsilon^2 \left[ \frac{1}{2} (B_2 x^2 + A_2 y^2) + (\varepsilon_2 x^4 + k_2 x^2 y^2 + R_2 y^4) + (F_2 x^6 + C_2 x^4 y^2 + D_2 x^2 y^4 + P_2 y^6) \right]. \quad (\text{III.383})$$

Для проекций упругих перемещений, соответствующих функции (III.383), получим выражения

$$u'_{10} = (a'_{11} A_0 + a'_{12} B_0) x, \quad v'_{10} = (a'_{12} A_0 + a'_{22} B_0) y,$$

$$u'_{11} = (a'_{11} A_1 + a'_{12} B_1) x + \left( \frac{2}{3} a'_{11} k_1 + 4a'_{12} \varepsilon_1 \right) x^3 + 2(6a'_{11} R_1 + a'_{12} k_1) x y^2,$$

$$v'_{11} = (a'_{12} A_1 + a'_{22} B_1) y + 2(a'_{12} k_1 + 6a'_{22} \varepsilon_1) x^2 y + \frac{2}{3} (6a'_{12} R_1 + a'_{22} k_1) y^3,$$

(III.384)

$$u'_{12} = (a'_{11} A_2 + a'_{12} B_2) x + \left( \frac{2}{3} a'_{11} k_2 + 4a'_{12} \varepsilon_2 \right) x^3 + 2(6a'_{11} R_2 + a'_{12} k_2) x y^2 + \frac{2}{5} (a'_{11} C_2 + 15a'_{12} F_2) x^5 + 4(a'_{11} D_2 + a'_{12} C_2) x^3 y^2 + 2(15a'_{11} P_2 + a'_{12} D_2) x y^4,$$

$$v'_{12} = (a'_{12}A_2 + a'_{22}B_2)y + 2(a'_{12}k_2 + 6a'_{22}\varepsilon_2)x^2y + \frac{2}{3}(6a'_{12}R_2 + a'_{22}k_2)y^3 + \\ + 2(a'_{12}C_2 + 15a'_{22}F_2)x^4y + 4(a'_{12}D_2 + a'_{22}C_2)x^2y^3 + \frac{2}{5}(15a'_{12}P_2 + a'_{22}D_2)y^5.$$

Затем из условия (III.376) методом, изложенным в § 6, ограничиваясь первым приближением\*, найдем

$$\varphi(\sigma) = \frac{R}{2}k_0\sigma - \frac{Re}{2(\beta_1 - \beta_2)} \left\{ k_0\lambda_1(\beta_1 - \beta_2)\frac{1}{\sigma} + [k_0\lambda_1(\beta_1 + \beta_2) + 2M_0\lambda_2\beta_2 + B_1\beta_2 - \right. \\ \left. - A_1 + 2k_1(\beta_2 - 1) + 12(\varepsilon_1\beta_2 - R_1)]\sigma + [k_0(\beta_1 - \beta_2) + 2\beta_2B_0 - 2k_1(1 + \beta_2) + \right. \\ \left. + 4(\varepsilon_1\beta_2 + R_1)]\sigma^3 \right\}. \quad (\text{III.385})$$

Здесь постоянная  $\frac{a^2}{4}$  внесена в коэффициенты  $k_1$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $R_1$ , а

$$k_0 = \frac{A_0 - p - \beta_2B_0}{\beta_1 - \beta_2}, \quad M_0 = -\frac{A_0 - p - \beta_1B_0}{\beta_1 - \beta_2}.$$

Выражение для функции  $\psi(\sigma)$  получим из формулы (III.385), если в ней заменить  $k_0$ ,  $M_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  соответственно на  $M_0$ ,  $k_0$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1$ . Постоянные  $A_0$ ,  $B_0$ ,  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $k_1$ ,  $\varepsilon_1$ ,  $R_1$  определим из условий (III.377), а также из условия удовлетворения функции  $U'(x, y)$  уравнению (III.378). При этом получим следующие системы алгебраических уравнений:

$$A_0[p_1 - p_2 - a'_{11}(\beta_1 - \beta_2)] - B_0[p_1\beta_2 - p_2\beta_1 + a'_{12}(\beta_1 - \beta_2)] = \\ = p[p_1 - p_2 - a_{11}(\beta_1 - \beta_2)], \quad (\text{III.386})$$

$$A_0[q_1^* - q_2^* - a'_{12}(\beta_1 - \beta_2)] - B_0[q_1^*\beta_2 - q_2^*\beta_1 + a'_{22}(\beta_1 - \beta_2)] = \\ = p[q_1^* - q_2^* - a_{12}(\beta_1 - \beta_2)];$$

$$2k_1 \left[ p_1 - p_2 + (p_1\beta_2 - p_2\beta_1) - (\beta_1 - \beta_2) \left( \frac{1}{3}a'_{11} - a'_{12} \right) \right] - 4R_1[p_1 - p_2 - 3a'_{11}(\beta_1 - \beta_2)] - \\ - 4\varepsilon_1[p_1\beta_2 - p_2\beta_1 + a'_{12}(\beta_1 - \beta_2)] = (A_0 - p)(p_1 - p_2) + B_0(p_1\beta_2 - p_2\beta_1) + \\ + (\beta_1 - \beta_2)(a'_{11}A_0 + a'_{12}B_0 - a_{11}p), \quad (\text{III.387})$$

$$2k_1 \left[ q_1^* - q_2^* + (q_1^*\beta_2 - q_2^*\beta_1) - (\beta_1 - \beta_2) \left( a'_{12} - \frac{1}{3}a'_{22} \right) \right] - \\ - 4R_1[q_1^* - q_2^* - a'_{12}(\beta_1 - \beta_2)] - 4\varepsilon_1[q_1^*\beta_2 - q_2^*\beta_1 + 3a'_{22}(\beta_1 - \beta_2)] = \\ = (A_0 - p)(q_1^* - q_2^*) + B_0(q_1^*\beta_2 - q_2^*\beta_1) - (\beta_1 - \beta_2)(a'_{12}A_0 + a'_{22}B_0 - a_{12}p), \\ k_1(2a'_{12} + a'_{66}) + 6R_1a'_{11} + 6\varepsilon_1a'_{22} = 0;$$

\* Выражение для функции  $\varphi(z_1)$  во втором приближении выписывать не будем ввиду большой сложности системы для определения коэффициентов  $A_2$ ,  $B_2$ , ...,  $D_2$ ,  $R_2$ .



$$\begin{aligned}
 & A_1 [\rho_1 - \rho_2 - a'_{11} (\beta_1 - \beta_2)] - B_1 [\rho_1 \beta_2 - \rho_2 \beta_1 + a'_{12} (\beta_1 - \beta_2)] = \\
 & = 2(\rho_1 - \rho_2) (k_0 \lambda_1 \beta_1 + M_0 \lambda_2 \beta_2 - k_1 - 6R_1) + 2(\rho_1 \beta_2 - \rho_2 \beta_1) (k_1 + 6\epsilon_1) + \\
 & \quad + 2(\beta_1 - \beta_2) [k_1 (a'_{11} + a'_{12}) + 6(\epsilon_1 a'_{12} + R_1 a'_{11})], \quad (III.388)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_1 [q_1^* - q_2^* - a'_{12} (\beta_1 - \beta_2)] - B_1 [q_1^* \beta_2 - q_2^* \beta_1 + a'_{22} (\beta_1 - \beta_2)] = \\
 & = -2(q_1^* - q_2^*) (k_1 + 6R_1) + 2(q_1^* \beta_2 - q_2^* \beta_1) (k_0 \lambda_1 + M_0 \lambda_2 + k_1 + 6\epsilon_1) + \\
 & \quad + 2(\beta_1 - \beta_2) [k_1 (a'_{12} + a'_{22}) + 6(R_1 a'_{12} + \epsilon_1 a'_{22})].
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\rho_i = a_{12} - a_{11} \beta_i^2, \quad q_i^* = a_{12} \beta_i - \frac{a_{22}}{\beta_i} \quad (i = 1, 2).$$

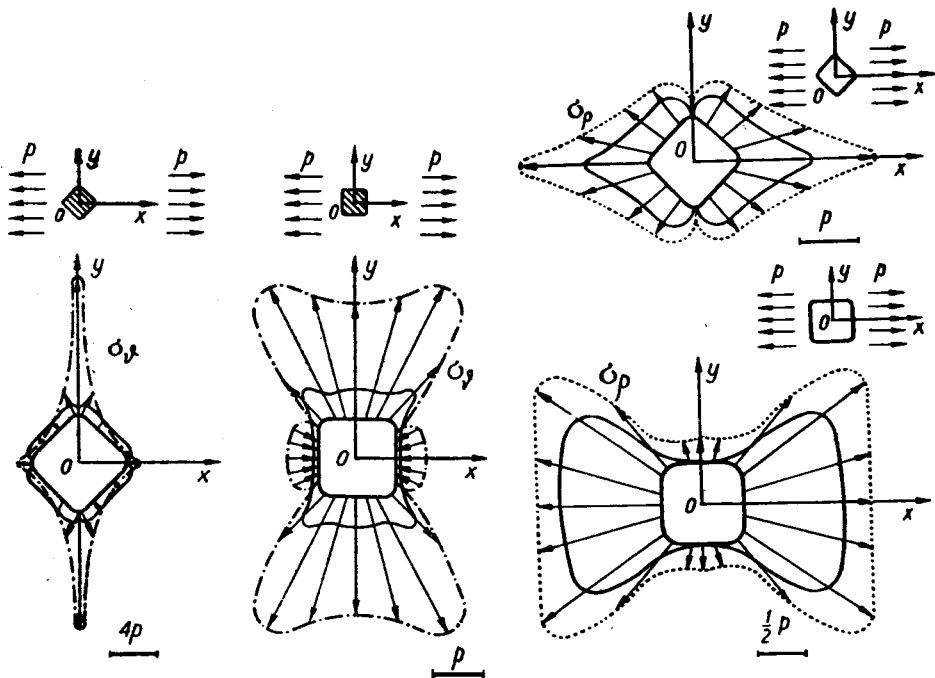


Рис. III.56

Рис. III.57

Напряжения  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_\rho$  и  $\tau_{\rho\theta}$  по контуру сая определим по формулам (III.350), где приняты обозначения (III.349). В виде частных случаев отсюда можно получить формулы для определения напряжений в пластинке с абсолютно жестким ( $a'_{ij} = 0$ ) или с абсолютно гибким ядром (ядро отсутствует,  $a'_{ij} \rightarrow \infty$ ).

На рис. III.56 и III.57 приведены значения напряжений  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\phi$  (в долях  $p$ ) по контуру спая ядра с пластинкой для случая, когда упругие постоянные ортотропной пластинки

$$a_{11} = 0,83333 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{12} = -0,05917 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad (III.389)$$

$$a_{22} = 1,66667 \frac{10^{-9}}{9,81}, \quad a_{\phi\phi} = 14,2857 \frac{10^{-9}}{9,81},$$

а комплексные параметры

$$s_1 = 4,11i, \quad s_2 = 0,343i.$$

Упругие постоянные ядра  $a'_{ij} = 0,5a_{ij}$ .

Для сравнения на этих рисунках приводятся значения напряжений для абсолютно жесткого и абсолютно гибкого ядра. Для пластинки с упругим ядром напряжения  $\sigma_\phi$  и  $\tau_{\rho\phi}$  оказались значительно меньше  $\sigma_\rho$ , поэтому численные значения  $\tau_{\rho\phi}$  не приводятся. Сплошные линии на рис. III.56 и III.57 соответствуют упругому ядру, штрихпунктирная на рис. III.56 — абсолютно гибкому ядру, т. е. свободному отверстию, пунктирная на рис. III.57 — жесткому ядру.

### § 13. Напряжения в упругой анизотропной плоскости, ослабленной несколькими эллиптическими отверстиями

Исследование напряженного состояния упругих анизотропных многосвязных сред имеет специфические трудности, обусловленные необходимостью рассмотрения двух дополнительных плоскостей, связанных с исходной плоскостью рассмотренными ранее аффинными соотношениями. В этих областях вместо данных отверстий получаются другие; при этом изменяются расстояния между отверстиями, что зависит от вида анизотропии среды. Если расстояния между отверстиями в побочных областях увеличиваются, эффективное построение решения задачи о напряженном состоянии такой среды получить довольно просто. В противном случае в процессе решения возникают существенные затруднения.

Д. И. Шерман [1] свел задачу о напряженном состоянии анизотропной многосвязной среды к решению интегрального уравнения Фредгольма. Л. Н. Нагибин [1, 2] решил методом Д. И. Шермана задачу о напряженном состоянии весомой анизотропной полуплоскости с двумя одинаковыми и неодинаковыми круговыми отверстиями. Аналогичная задача для полосы с двумя круговыми отверстиями была решена Hayashi Takuo [1]. Используя известный метод R. C. J. Howzand [1], Kubo Toshihiko [1] рассмотрел периодическую задачу для анизотропной среды с бесконечным рядом круговых отверстий. А. С. Космодамианский дал решение задачи о напряженном состоянии анизотропной

среды, когда последняя ослаблена конечным числом эллиптических отверстий [1—3], а также одним или двумя рядами одинаковых эллиптических отверстий [4]. В последней работе указан путь рассмотрения среды, обладающей сильной анизотропией. Случай, когда эллиптические отверстия подкреплены абсолютно жесткими кольцами, рассмотрен А. С. Космодамианским и В. В. Меглинским [1].

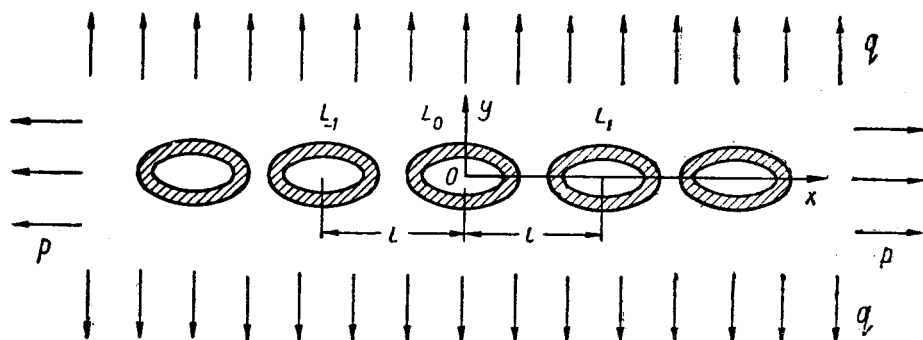


Рис. III.58

**Растяжение анизотропной среды с бесконечным рядом эллиптических отверстий\***. Пусть упругая анизотропная среда ослаблена бесконечным рядом одинаковых эллиптических отверстий, в которые впаены или вклеены абсолютно жесткие кольца (рис. III.58). Расстояния между отверстиями одинаковы и равны  $l$ . Полуоси эллиптических отверстий обозначим через  $a$  и  $b$ . На бесконечности задано однородное напряженное состояние:  $\sigma_x^\infty = p$  — вдоль линии центров отверстий и  $\sigma_y^\infty = q$  — поперек линии центров, т. е.

$$\sigma_x^0 = p, \quad \sigma_y^0 = q, \quad \tau_{xy}^0 = 0. \quad (\text{III.390})$$

Комплексные потенциалы, характеризующие напряженное состояние сплошной среды, как следует из формул (I.90),

$$\begin{aligned} \varphi^0(z_1) &= -\frac{p + q\beta_2^2}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)} z_1, \\ \psi^0(z_2) &= \frac{p + q\beta_1^2}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)} z_2. \end{aligned} \quad (\text{III.391})$$

При определении этих функций принято, что комплексные параметры  $s_h$  являются чисто мнимыми ( $s_1 = i\beta_1$ ,  $s_2 = i\beta_2$ ).

\* Решение задач, приведенных в этом и следующем разделах, получены А. С. Космодамианским и В. В. Меглинским [1]. В случае изотропной среды эта задача рассматривалась для круговых свободных отверстий R. C. J. Howland [1], для ортотропной среды — Kubo Toshihiko [1].

Для определения поля напряжений, возникающего в среде после образования в ней эллиптических отверстий, нужно определить, как следует из гл. I, функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  из следующих граничных условий на контурах отверстий:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [\rho_1 \varphi(z_1) + \rho_2 \psi(z_2)] &= -2 \operatorname{Re} [\rho_1 \varphi^0(z_1) + \rho_2 \psi^0(z_2)], \\ 2 \operatorname{Re} [q_1 \varphi(z_1) + q_2 \psi(z_2)] &= -2 \operatorname{Re} [q_1 \varphi^0(z_1) + q_2 \psi^0(z_2)]. \end{aligned} \quad (\text{III.392})$$

В связи с тем, что данная задача является периодической, функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \varphi(z_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k}{[\zeta(z_1)]^k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{[\zeta(z_1 + n\ell)]^k}, \\ \psi(z_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{[\zeta(z_2)]^k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{[\zeta(z_2 + n\ell)]^k}. \end{aligned} \quad (\text{III.393})$$

Знак \* во вторых суммах (III.393) означает отсутствие члена, соответствующего значению  $n=0$ .

Разложим вторые суммы (III.393) в ряды по степеням малого параметра  $\varepsilon = \ell^{-1}$ , ограничившись в разложениях членами, содержащими  $\varepsilon$  в степени не выше шестой. Тогда из граничного условия на контуре отверстия, в центре которого находится начало координат (это отверстие назовем основным; оно может быть любым), для определения неизвестных коэффициентов  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  обычным методом рядов получим следующую алгебраическую систему:

$$\begin{aligned} \rho_1 [(1 + a_{11}) \varphi_1 + a_{13} \varphi_3 + a_{15} \varphi_5] + \rho_2 [(1 + b_{11}) \psi_1 + b_{13} \psi_3 + b_{15} \psi_5] &= \\ &= -(\rho_1 A_0 + \rho_2 B_0), \\ \rho_1 [c_{13} a_{31} \varphi_1 + (1 + c_{13} a_{33}) \varphi_3] + \rho_2 [c_{23} b_{31} \psi_1 + (1 + c_{23} b_{33}) \psi_3] &= 0, \\ \rho_1 [c_{15} a_{51} \varphi_1 + \varphi_5] + \rho_2 [c_{25} b_{51} \psi_1 + \psi_5] &= 0, \\ q_1^* [(1 - c_{11}^* a_{11}) \varphi_1 - c_{11}^* a_{13} \varphi_3 - c_{11}^* a_{15} \varphi_5] + q_2^* [(1 - c_{21}^* b_{11}) \psi_1 + \\ + c_{21}^* b_{13} \psi_3 - c_{21}^* b_{15} \psi_5] &= c [q_1^* \beta_1 A_0 + q_2^* \beta_2 B_0], \\ q_1^* [-c_{13}^* a_{31} \varphi_1 + (1 - c_{13}^* a_{33}) \varphi_3] + q_2^* [-c_{23}^* b_{31} \psi_1 + (1 - c_{23}^* b_{33}) \psi_3] &= 0, \\ q_1^* (-c_{15}^* a_{51} \varphi_1 + \varphi_5) + q_2^* (-c_{25}^* b_{51} \psi_1 + \psi_5) &= 0. \end{aligned} \quad (\text{III.394})$$

Здесь

$$A_0 = -\frac{\rho + q\beta_2^2}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}; \quad B_0 = \frac{\rho + q\beta_1^2}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)}; \quad q_1^* = -iq_1; \quad q_2^* = -iq_2;$$

$$c = \frac{b}{a}; \quad c_{1k} = m_0^k + m_1^k; \quad c_{2k} = n_0^k + n_1^k; \quad c_{1k}^* = m_0^k - m_1^k;$$

$$c_{2k}^* = n_0^k - n_1^k;$$

$$a_{11} = -2m_0\varepsilon^2(\alpha_2 + 6\alpha_4 m_0 m_1 \varepsilon^2 + 50\alpha_6 m_0^2 m_1^2 \varepsilon^4);$$

$$a_{13} = -6m_0^3 \varepsilon^4 (\alpha_4 + 15\alpha_6 m_0 m_1 \varepsilon^2); \quad a_{16} = -10\alpha_6 m_0^5 \varepsilon^6;$$

$$a_{31} = -2m_0 \varepsilon^4 (\alpha_4 + 15\alpha_6 m_0 m_1 \varepsilon^2); \quad a_{33} = -20\alpha_6 m_0^3 \varepsilon^6; \quad (\text{III.395})$$

$$a_{51} = -2\alpha_6 m_0 \varepsilon^6; \quad \alpha_p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad (p = 2, 4, 6);$$

$$m_0 = 0,5(1 + c\beta_1); \quad m_1 = 0,5(1 - c\beta_1); \quad n_0 = 0,5(1 + c\beta_2); \quad n_1 = 0,5(1 - c\beta_2).$$

Коэффициенты  $b_{ij}$  получим из выражений для  $a_{ij}$ , если в них заменить  $m_0$  и  $m_1$  соответственно на  $n_0$  и  $n_1$ .

После определения из системы (III.394) коэффициентов  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  становятся известными на основании (III.393) функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$ , через которые напряжения, возникающие в среде, выражаются формулами

$$\sigma_x = \sigma_x^0 - 2 \operatorname{Re} [\beta_1^2 \varphi'(z_1) + \beta_2^2 \psi'(z_2)],$$

$$\sigma_y = \sigma_y^0 + 2 \operatorname{Re} [\varphi'(z_1) + \psi'(z_2)], \quad (\text{III.396})$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}^0 - 2 \operatorname{Re} \{i [\beta_1 \varphi'(z_1) + \beta_2 \psi'(z_2)]\}.$$

Напряжения, действующие на площадках, нормальных и касательных к контуру основного отверстия\*, определяются по формулам

$$\sigma_\varrho = \frac{1}{C^2} \{(\rho A^2 + qB^2) - 2[A(\beta_1 \varphi_1^* + \beta_2 \psi_2^*) + B(\varphi_1^* + \varphi_2^*)]\},$$

$$\tau_{\varrho\theta} = \frac{1}{C^2} \{AB(q - \rho) - 2[A(\varphi_1^* + \varphi_2^*) - B(\beta_1 \varphi_1^* + \beta_2 \psi_2^*)]\}, \quad (\text{III.397})$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{C^2} \{qA^2 + \rho B^2 - 2(A_{11}\varphi_1^* + A_{12}\varphi_2^* + A_{13}\psi_1^* + A_{14}\psi_2^*)\},$$

где

$$A = c \cos \vartheta, \quad B = \sin \vartheta,$$

$$A_{11} = B \frac{a^2 \beta_1^2 + 2\beta_1^2 - 1}{a^2 + \beta_1^2}, \quad A_{12} = B \frac{a^2 \beta_2^2 + 2\beta_2^2 - 1}{a^2 + \beta_2^2}, \quad (\text{III.398})$$

$$A_{13} = A\beta_1 \frac{2a^2 - a^2 \beta_1^2 + 1}{a^2 + \beta_1^2}, \quad A_{14} = A\beta_2 \frac{2a^2 - a^2 \beta_2^2 + 1}{a^2 + \beta_2^2},$$

$$\alpha = \frac{B}{A}, \quad C^2 = A^2 + B^2;$$

\* Вблизи других отверстий имеем идентичную картину.

$$\varphi_1' = \sum_{k=1}^{\infty} k(\varphi_k + c_{1k}A_{kt}) \sin k\vartheta, \quad \varphi_2' = \sum_{k=1}^{\infty} k(\psi_k + c_{2k}B_{kt}) \sin k\vartheta,$$

$$\varphi_1^* = \sum_{k=1}^{\infty} k(\varphi_k - c_{1k}^*A_{kt}) \cos k\vartheta, \quad \varphi_2^* = \sum_{k=1}^{\infty} k(\psi_k - c_{2k}^*B_{kt}) \cos k\vartheta, \quad (\text{III.399})$$

$$A_{kt} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki}\varphi_i, \quad B_{kt} = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ki}\psi_i.$$

В случае, если отверстия пластинки не подкреплены жесткими кольцами и являются свободными от внешних усилий, полученные формулы остаются в силе. В них следует только формально положить  $\rho_1 = \rho_2 = 1$ ,  $q_1 = s_1$ ,  $q_2 = s_2$ .

Таблица III.12

$\vartheta^\circ$	Пластинка с подкрепленными отверстиями				Пластинка со свободными отверстиями			
	$\sigma_\rho/\rho$	$\sigma_\rho/q$	$\sigma_\rho^*/\rho$	$\sigma_\rho^*/q$	$\sigma_\vartheta/\rho$	$\sigma_\vartheta/q$	$\sigma_\vartheta^*/\rho$	$\sigma_\vartheta^*/q$
0	3,30	-0,20	1,93	0,02	-0,35	7,21	-1,00	5,83
15	2,50	0,12	1,53	0,31	-0,07	4,28	-0,22	3,27
30	1,32	0,60	0,91	0,72	0,31	2,10	0,57	1,33
45	0,62	0,90	0,50	0,98	0,76	0,89	1,21	0,29
60	0,29	1,06	0,28	1,13	1,21	0,04	1,74	-0,42
75	0,15	1,13	0,17	1,20	1,53	-0,48	2,09	-0,86
90	0,11	1,16	0,14	1,22	1,65	-0,65	2,21	-1,00

В табл. III.12 приведены результаты подсчетов для напряжений, возникающих вблизи основного отверстия, в случае, когда  $c=0,5$ ,  $\varepsilon=1/3$  (расстояние между отверстиями равно половине большей оси одного из эллипсов). Пластинка изготовлена из материала СВМ, для которого

$$\rho_1 = -1,07004 \cdot 10^{-5}, \quad \rho_2 = -0,119187 \cdot 10^{-5},$$

$$q_1^* = -0,225486 \cdot 10^{-5}, \quad q_2^* = -0,568983 \cdot 10^{-5}, \quad (\text{III.400})$$

$$\beta_1 = 1,89, \quad \beta_2 = 0,531.$$

В случае, когда отверстия подкреплены жесткими кольцами, напряжения  $\sigma_\rho$  значительно превосходят напряжения  $\sigma_\vartheta$  и  $\tau_{\rho\vartheta}$ . Поэтому в табл. III.12 приведены только значения  $\sigma_\rho$  для пластинок с подкрепленными отверстиями. Если же отверстия не подкреплены и свободны от внешних усилий, напряжения  $\sigma_\rho = \tau_{\rho\vartheta} = 0$ , и в табл. III.12 приведены значения  $\sigma_\vartheta$ . Кроме того, в этой же таблице приведены для сравнения значения  $\sigma_\rho^*$  и  $\sigma_\vartheta^*$ , которые относятся к среде с одним эллиптическим отверстием.

На рис. III.59 и III.60 изображены графики, характеризующие распределение напряжений  $\sigma_p$  вблизи подкрепленных отверстий. Штриховые линии соответствуют случаю, когда пластинка ослаблена одним подкрепленным отверстием. На рис. III.61 и III.62 представлены аналогичные графики для случая, когда отверстия пластинки не подкреплены и свободны от внешних усилий.

**Расстояние анизотропной среды с двумя одинаковыми эллиптическими отверстиями.** Пусть имеется упругая анизотропная пластинка, ослабленная двумя эллиптическими отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами (рис. III.63). Расстояние между центрами отверстий примем равным  $2l$ . Основное напряженное состояние пластинки и размеры отверстий остаются такими же, как и в предыдущем случае.

Функции  $\varphi(z_1)$  и  $\psi(z_2)$  можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi(z_1) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k}{[\zeta(z_1^*)]^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \varphi_k}{[\zeta(z_1^* + 2l)]^k}, \\ \psi(z_2) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{[\zeta(z_2^*)]^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \psi_k}{[\zeta(z_2^* + 2l)]^k},\end{aligned}\quad (\text{III.401})$$

где  $z_1^* = z_1 - l$ ,  $z_2^* = z_2 - l$ .

Коэффициенты  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  в силу геометрической и силовой симметрии можно определить из граничных условий (III.392) на контуре правого отверстия. Граничные условия на контуре левого отверстия будут удовлетворены автоматически.

Поступая таким образом, как и в предыдущем случае, разложим вторые суммы выражений (III.401) в ряды по малому параметру  $\varepsilon = \frac{1}{2}l$  и оборвем эти разложения, сохранив члены, содержащие  $\varepsilon$  в степени не выше четвертой. Тогда из граничных условий (III.392) получим для определения коэффициентов  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  следующую алгебраическую систему:

$$\begin{aligned}p_1 [(1 + a_{11}) \varphi_1 + a_{12} \varphi_2 + a_{13} \varphi_3] + p_2 [(1 + b_{11}) \psi_1 + b_{12} \psi_2 + b_{13} \psi_3] &= \\ &= - (p_1 A_0 + p_2 B_0), \\ p_1 [c_{12} a_{21} \varphi_1 + (1 + c_{12} a_{22}) \varphi_2] + p_2 [c_{22} b_{21} \psi_1 + (1 + c_{22} b_{22}) \psi_2] &= 0, \\ p_1 (c_{13} a_{31} \varphi_1 + \varphi_3) + p_2 (c_{23} b_{31} \psi_1 + \psi_3) &= 0, \\ q_1^* [(1 - c_{11}^* a_{11}) \varphi_1 - c_{11}^* a_{12}^* \varphi_2 - c_{11}^* a_{13}^* \varphi_3] + q_2^* [(1 - c_{21}^* b_{11}) \psi_1 - c_{21}^* b_{12}^* \psi_2 - \\ &- c_{21}^* b_{13}^* \psi_3] = c (q_1^* \beta_1 A_0 + q_2^* \beta_2 B_0), \\ q_1^* [1 - c_{12}^* a_{21} \varphi_1 + (1 - c_{12}^* a_{22}) \varphi_2] + q_2^* [1 - c_{22}^* b_{21} \psi_1 + (1 - c_{22}^* b_{22}) \psi_2] &= 0, \\ q_1^* (-c_{13}^* a_{31} \varphi_1 + \varphi_3) + q_2^* (-c_{23}^* b_{31} \psi_1 + \psi_3) &= 0,\end{aligned}\quad (\text{III.402})$$

где

$$\begin{aligned}a_{11} &= -m_0 \varepsilon^2 (1 + 6m_0 m_1 \varepsilon^2), \quad a_{21} = m_0 \varepsilon^3, \quad a_{31} = -m_0 \varepsilon^4, \\ a_{12} &= 2m_0^2 \varepsilon^3, \quad a_{22} = -3m_0^2 \varepsilon^4, \quad a_{13} = -3m_0^3 \varepsilon^4.\end{aligned}\quad (\text{III.403})$$

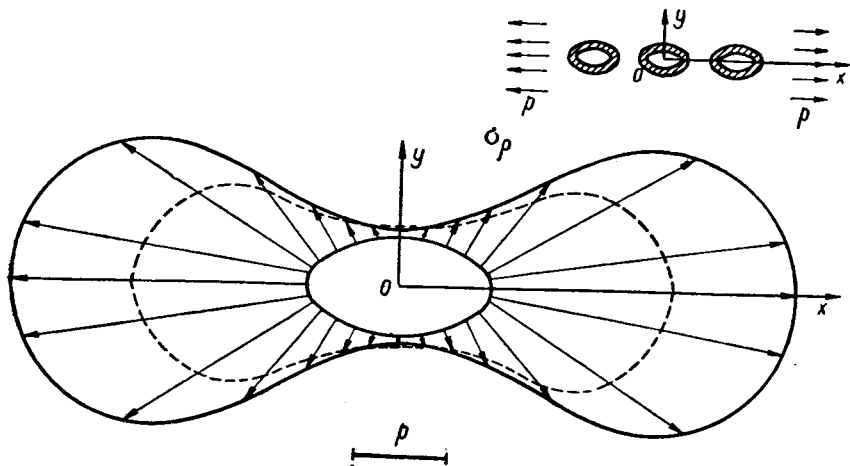


Рис. III.59

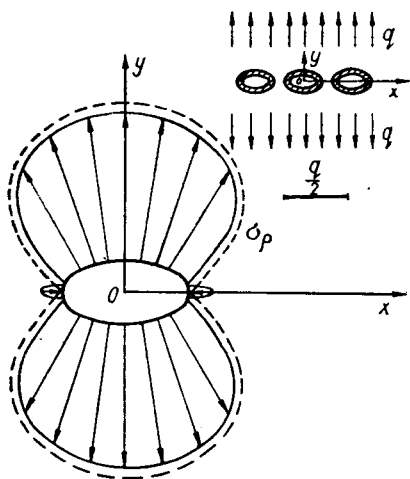


Рис. III.60

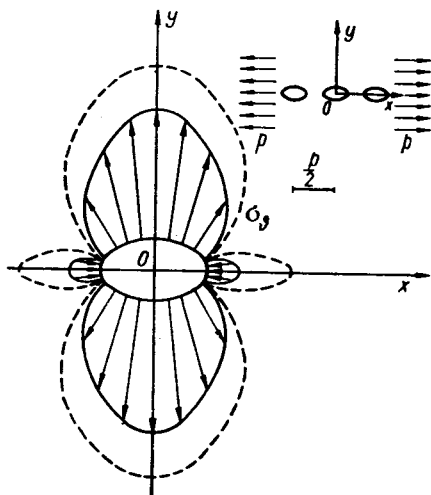


Рис. III.61

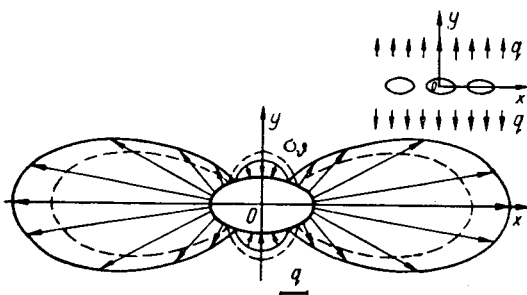


Рис. III.62

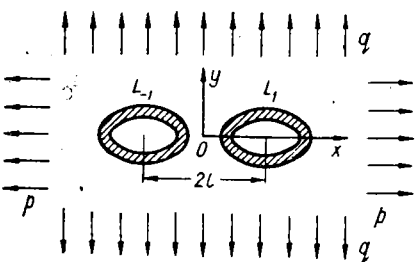


Рис. III.63



Коэффициенты  $b_{ij}$  получим из выражений для  $a_{ij}$ , заменив в последних  $m_0$  и  $m_1$  соответственно на  $n_0$  и  $n_1$ . Остальные обозначения остаются такими же, как и в предыдущем случае.

После определения коэффициентов  $\varphi_k$  и  $\psi_k$  напряжения можно найти по формулам (III.397) и (III.399).

Из табл. III.13 видим, что характер распределения напряжений, возникающих вблизи правого отверстия, такой же, как и в случае, когда пластинка ослаблена бесконечным рядом этих же отверстий.

**Напряжения в анизотропной пластинке с двумя неодинаковыми отверстиями\*.** Пусть упругая анизотропная пластинка ослаблена одним круговым и одним эллиптическим отверстием. Расстояние между центрами отверстий равно  $l$ . Радиус круглого отверстия  $r=1$ , а полуоси эллипса  $a$  и  $b$ . К контуру эллиптического отверстия приложены усилия  $X'_n$  и  $Y'_n$ , а к контуру

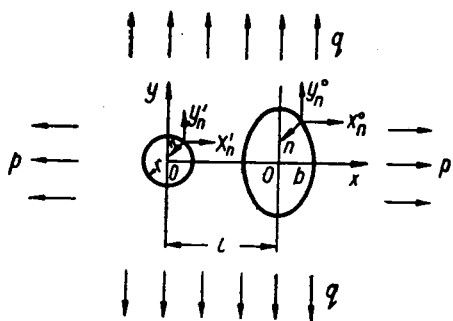


Рис. III.64

кругового отверстия — усилия  $X'_n$  и  $Y'_n$ . Кроме того, на бесконечности действуют растягивающие усилия  $p = \text{const}$  и  $q = \text{const}$  (рис. III.64).

Для определения напряжений  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{\rho\theta}$  применим метод последовательных приближений Шварца.

Таблица III.13

$\theta^\circ$	$\sigma_Q/p$	$\sigma_Q/q$	$\sigma_\theta/p$	$\sigma_\theta/q$	$\theta^\circ$	$\sigma_Q/p$	$\sigma_Q/q$	$\sigma_\theta/p$	$\sigma_\theta/q$
0	2,09	0,02	-0,89	6,10	105	0,13	1,16	1,91	-0,75
15	1,67	0,28	-0,24	3,50	120	0,21	1,09	1,55	-0,26
30	1,01	0,68	0,40	1,56	135	0,45	0,94	1,04	0,51
45	0,58	0,94	0,96	0,51	150	0,98	0,67	0,49	1,59
60	0,34	1,08	1,49	-0,25	165	1,84	0,24	-0,09	3,55
75	0,21	1,15	1,88	-0,75	180	2,41	-0,04	-0,60	6,15
90	0,14	1,20	2,04	-0,92					

Будем считать, что поле напряжений, возникающее в пластинке с одним эллиптическим отверстием, характеризуется функциями комплексных переменных  $\varphi_0(z_1)$  и  $\psi_0(z_2)$ . При образовании в среде кругового отверстия появится второе поле напряжений, характеризуемое функциями  $\varphi_1(z_1)$  и  $\psi_1(z_2)$ , которые определяются из следующих условий на контуре кругового отверстия:

$$2 \operatorname{Re} [\varphi_1(z_1) + \psi_1(z_2)] = \int_0^S Y'_n ds - 2 \operatorname{Re} [\varphi_0(z_1) + \psi_0(z_2)], \quad (\text{III.404})$$

$$2 \operatorname{Re} [i\beta_1\varphi_1(z_1) + i\beta_2\psi_1(z_2)] = - \int_0^S X'_n ds - 2 \operatorname{Re} [i\beta_1\varphi_0(z_1) + i\beta_2\psi_0(z_2)].$$

\* Решение получено А. С. Космодамианским [3].

Если бóльшая ось эллиптического отверстия значительно превосходит радиус кругового отверстия, для получения приближенного решения задачи достаточно ограничиться определением функций  $\varphi_0$ ,  $\varphi_1$ ,  $\psi_0$  и  $\psi_1$ , если расстояние между отверстиями превосходит два диаметра кругового отверстия\*.

В случае, когда отверстия в среде свободны от внешних усилий,

$$\varphi_0 = -\frac{\rho + q\beta_2^2}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)} z_1 - \frac{\rho b - qa\beta_2}{2(\beta_1 - \beta_2)} \zeta_1^{-1}, \quad (III.405)$$

$$\psi_0 = \frac{\rho + q\beta_1^2}{2(\beta_1^2 - \beta_2^2)} z_2 + \frac{\rho b - qa\beta_1}{2(\beta_1 - \beta_2)} \zeta_2^{-1}.$$

Функции  $\zeta_k$  ( $k = 1, 2$ ) связаны с  $z_k$  зависимостью

$$z_k - l = m_{0k}\zeta_k + m_{1k}\zeta_k^{-1}, \quad (III.406)$$

где

$$m_{01} = \frac{a + \beta_1 b}{2}, \quad m_{02} = \frac{a + \beta_2 b}{2}, \quad m_{11} = \frac{a - \beta_1 b}{2}, \quad m_{12} = \frac{a - \beta_2 b}{2}. \quad (III.407)$$

Разложим функции  $\zeta_k^{-1}$  в ряды Тейлора по степеням  $z_k$  и ограничимся в этих разложениях, например, четырьмя членами:

$$\zeta_k^{-1} = \rho_k + \sum_{n=1}^3 A_{nk} z_k^n, \quad (III.408)$$

где

$$\rho_k = \frac{1}{2m_{1k}} (-l + \sqrt{l^2 - 4m_{0k}m_{1k}}),$$

$$A_{1k} = \rho_k (l + 2m_{1k}\rho_k)^{-1},$$

$$A_{2k} = A_{1k}^2 \rho_k^{-1} (1 - m_{1k}A_{1k}), \quad (III.409)$$

$$A_{3k} = A_{1k}A_{2k}\rho_k^{-1} (1 - 2m_{1k}A_{1k}).$$

Из граничных условий (III.404) ранее изложенным методом найдем

$$\begin{aligned} \varphi_1(z_1) = & -\frac{1}{2}(\rho + q\beta_2)(\beta_1^2 - \beta_2^2)^{-1} - \alpha_1(m_{01}\zeta_1^2 - m_{11})^{-1} + \\ & + \zeta_1^{*-2}(N_{11}\zeta_1^{*2} + N_{21}\zeta_1^* + N_{31})(m'_{01}\zeta_1^{*2} - m'_{11})^{-1}, \end{aligned} \quad (III.410)$$

$$\begin{aligned} \psi_1(z_2) = & -\frac{1}{2}(\rho + q\beta_1)(\beta_2^2 - \beta_1^2)^{-1} - \alpha_2(m_{02}\zeta_2^2 - m_{12})^{-1} + \\ & + \zeta_2^{*2}(N_{12}\zeta_2^{*2} + N_{22}\zeta_2^* + N_{32})(m'_{02}\zeta_2^{*2} - m'_{12})^{-1}. \end{aligned}$$

\* См. А. С. Космодамианский [3].

Здесь

$$N_{1k} = \frac{p - \beta_{k-1}^* q}{2(\beta_k^* - \beta_{k-1}^*)} + \alpha_k [A_{1k}(m'_{1k} + n_{1k}m'_{0k}) +$$

$$+ 3A_{3k}m'_{0k}m'_{1k}(m'_{1k} - n_{1k}m'_{0k})] - \alpha_{k-1}n_{2k}m'_{0,k-1}(A_{1,k-1} + 3m'_{0,k-1}m'_{1,k-1}A_{3,k-1}),$$

$$N_{2k} = 2\alpha_k A_{2k}(m_{1k}'^2 - n_{1k}m_{0k}'^2) - 2A_{2,k-1}\alpha_{k-1}m_{0,k-1}'^2 n_{2k},$$

$$N_{3k} = 3\alpha_k A_{3k}(m_{1k}'^3 - n_{1k}m_{0k}'^3) - 3A_{3,k-1}\alpha_{k-1}m_{0,k-1}'^3 n_{2k},$$

$$\beta_0^* = \beta_2^* = \beta_2, \quad \beta_1^* = \beta_1, \quad \alpha_k = -\frac{pb - qa\beta_{k-1}^*}{2(\beta_k^* - \beta_{k-1}^*)}, \quad (\text{III.411})$$

$$m'_{0k} = \frac{1 + \beta_k^*}{2}, \quad m'_{1k} = \frac{1 - \beta_k^*}{2}, \quad n_{1k} = \frac{\beta_k^* + \beta_{k-1}^*}{\beta_k^* - \beta_{k-1}^*},$$

$$n_{2k} = \frac{2\beta_{k-1}^*}{\beta_k^* - \beta_{k-1}^*}, \quad A_{i0} = A_{i2} \quad (i = 1, 2, 3),$$

а функция  $\zeta_k^*$  связана с  $z_k$  зависимостью

$$z_k = m'_{0k}\zeta_k^* + m'_{1k}\zeta_k^{*-1}. \quad (\text{III.412})$$

Определив функции  $\varphi(z_1) = \varphi_0(z_1) + \varphi_1(z_1)$  и  $\psi(z_2) = \psi_0(z_2) + \psi_1(z_2)$ , напряжения найдем по формулам (III.397). Результаты подсчетов напряжений, возникающих в пластинке, изготовленной из материала СВМ с постоянными (III.400), для различных размеров отверстий приведены в табл. III.14 ( $\frac{a}{b} = 20$ ,  $\frac{b}{r} = 1$ ,  $\frac{l}{r} = 26$ ) и III.15 ( $\frac{b}{a} = 20$ ,  $\frac{a}{r} = 1$ ,  $\frac{l}{r} = 7$ ). На рис. III.65 (при  $p \neq 0$ ;  $q = 0$ ) и III.66 (при  $p = 0$ ;  $q \neq 0$ ) представлены графики, соответствующие данным табл. III.14 и III.15, характеризующие напряженное состояние в пластинке между отверстиями.

**Заключительные замечания.** При увеличении в анизотропной пластинке количества одинаковых отверстий концентрация напряжений

Таблица III.14

Основное напряженное состояние		z							
		-1	$\pm i$	1	2	3	4	5	6
$p \neq 0$	$\sigma_x/p$	0	3,18	0	0,34	0,56	0,63	0,59	-0,09
$q = 0$	$\sigma_y/p$	-0,94	0	-0,89	0,02	0,03	0,02	0,02	-0,99
$p = 0$	$\sigma_x/q$	0	0,41	0	0,88	1,14	1,53	2,41	0,01
$q \neq 0$	$\sigma_y/q$	4,73	0	4,70	1,16	1,17	1,49	2,36	48,30

при растяжении пластинки поперек линии центров отверстий увеличивается, а при растяжении вдоль линии центров — уменьшается.

Если же анизотропная пластинка ослаблена двумя неодинаковыми отверстиями, то малое отверстие оказывает незначительное влияние на напряженное состояние вблизи большого отверстия. Что касается влия-

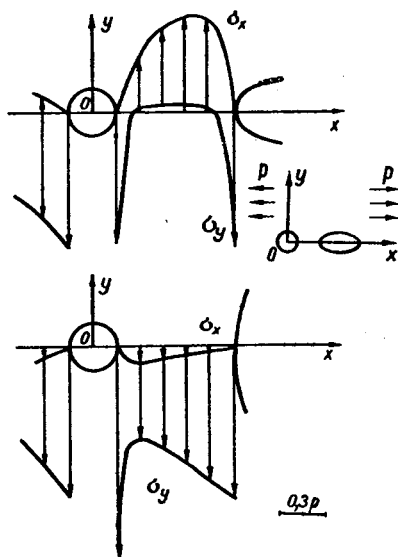


Рис. III.65

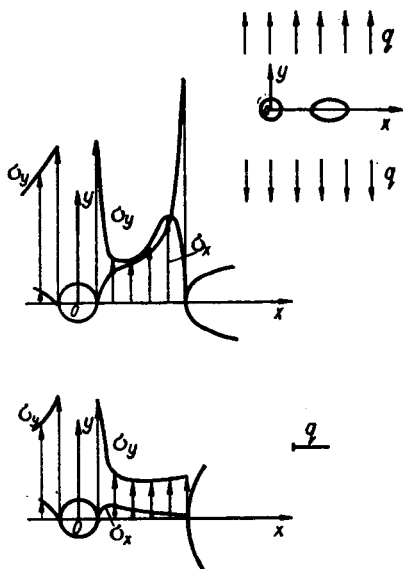


Рис. III.66

Таблица III.15

Основное напряженное состояние		z							
		-1	±i	1	2	3	4	5	6
$p \neq 0$	$\sigma_x/p$	0	0,44	0	-0,10	-0,06	-0,04	-0,03	-0,02
$q = 0$	$\sigma_y/p$	-1,13	0	-1,40	-0,61	-0,66	-0,76	-0,87	-1,00
$p = 0$	$\sigma_x/q$	0	-1,02	0	0,28	0,16	0,10	0,07	0,05
$q \neq 0$	$\sigma_y/q$	3,57	0	3,61	1,30	1,16	1,14	1,13	1,14

ния большого отверстия на напряженное состояние среды вблизи малого отверстия, то оно весьма значительно при растяжении пластинки вдоль линии центров отверстий ( $\frac{b}{a} \gg r$ ) и при растяжении среды поперек линии центров отверстий ( $\frac{b}{a} \ll r$ ). Такие же закономерности имеют место и для изотропной среды с отверстиями.

## ЛИТЕРАТУРА

- Бурмистров Е. Ф. [1] Концентрация напряжений в пластинке с отверстием.— Изв. АН СССР, 1958, 8.
- Грилицкий Д. В. [1] Вплив точки прикладання сили і моменту на розподіл напружень у безмежній анізотропній пластинці з еліптичним отвором.— Прикл. мех., 1956, 2, 2.
- [2] Пружна рівновага безмежної анізотропної пластинки з впаином абсолютно жорстким еліптичним ядром під дією сили або моменту, прикладених у довільній точці пластинки.— ДАН УРСР, 1960, 2.
- [3] Тиск жорсткого циліндра на внутрішню поверхню кругової циліндричної порожнини в анізотропному тілі.— ДАН УРСР, 1954, 6.
- [4] Про тиск жорсткого кругового циліндра на внутрішню поверхню кругової циліндричної порожнини в ортотропному тілі.— ДАН УРСР, 1954, 6.
- [5] До задачі про тиск жорсткої шайби на круговий отвір в ортотропній пластинці.— Прикл. мех., 1963, 9, 3.
- [6] Про деякі випадки пружної рівноваги ізотропної пластинки з впаєюною круглою ізотропною шайбою.— ДАН УРСР, 1961, 4.
- [7] Основні граничні задачі теорії пружності для безмежної ізотропної пластинки з впаєюною круговою ізотропною шайбою і з розрізами на лінії спаю.— В кн.: Питання механіки і математики, 9. Вид-во Львівськ. ун-ту, 1962.
- [8] Некоторые контактные задачи плоской теории упругости для анизотропных сред.— Автореферат канд. диссерт. Львовский ун-т, им. Ив. Франко, 1954.
- [9] Змішана гранична задача теорії пружності для ортотропного масиву з коловим вирізом.— Прикл. мех., 1957, 3, 4.
- Грилицкий Д. В., Кизима Я. М. [1] До питання змішаної граничної задачі теорії пружності для ортотропної пластинки з коловим отвором.— В кн.: 36. праць аспірантів мех.-мат. та фіз. фак. Львівськ. ун-ту ім. Ів. Франка, 1961.
- Дорогобед А. С. [1] Распределение напряжений в ортотропной пластинке с круговым отверстием при чистом сдвиге.— Инж. сб., т. 21. Изд-во АН СССР, М., 1955.
- Загубиженко П. А. [1] Про напруження в анізотропній площині, ослабленій прямолінійними щілинами.— ДАН УРСР, 1954, 6.
- Каландия А. И. [1] К контактным задачам теории упругости.— Прикл. мат. и мех., 1957, 21, 3.
- [2] Об одном прямом методе решения уравнения крыла и его применении в теории упругости.— Мат. сб., 42, 2, 1957.
- Карцивадзе И. Н. [1] Эффективное решение основных задач теории упругости для некоторых областей.— Сообщ. АН ГрузССР, 1946, 7, 8.
- Ким Д. У. [1] О напряженно-деформированном состоянии трансверсально изотропной пластинки, ослабленной эллиптическим отверстием. В кн.: Труды I Казахстанск. межвуз. научн. конф. по мат. и мех., 1963, Алма-Ата, «Наука», 1963, 266—268.
- Космодамианский А. С. [1] Приближенный метод определения напряженного состояния анизотропного массива с двумя одинаковыми эллиптическими выработками.— В кн.: Исслед. горного давления. Госгортехиздат, М., 1960.
- [2] Упругое равновесие анизотропной пластинки с конечным числом эллиптических отверстий.— Изв. АН Арм. ССР, 13, 6.
- [3] О напряженном состоянии анизотропной пластинки с двумя неодинаковыми отверстиями.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш. 1961, 1.
- [4] О напряженном состоянии анизотропной пластинки с двумя бесконечными рядами эллиптических отверстий.— Инж. журн., 1962, 3, 2.
- [5] Определение напряженного состояния анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, подкрепленным жестким кольцом.— Изв. АН СССР, ОТН, 1959, 6.
- [6] Упругое равновесие анизотропной пластинки с криволинейным упругим ядром, ЛГУ, 1960.
- [7] Определение напряженного состояния анизотропного массива вблизи горизонтальных горных выработок. В кн.: Иссл. горного давления. Госгортехиздат, М., 1960.

- [8] Новый приближенный метод определения напряжений в анизотропной пластинке с криволинейным отверстием. В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений и деформации упругих тел, 2. Изд-во Саратовск. ун-та, 1965.
- [9] Квазирегулярность бесконечных систем в задачах о напряженном состоянии анизотропной среды с эллиптическими отверстиями.— Прикл. мех., 1965, 1, 10.
- [10] Определение напряженного состояния пластинок, обладающей сильной анизотропией, с двумя эллиптическими отверстиями.— Прикл. мех. 1966, 2, 1.
- [11] Действие сосредоточенных сил в многосвязных областях.— В кн.: Концентрация напряжений, 1, «Наукова думка», 1965, 147—154.
- Космодамианский А. С. и Меглинский В. В. [1]. Растяжение анизотропной пластинки с эллиптическими отверстиями, подкрепленными жесткими кольцами.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. Изд-во Саратовск. ун-та, 1964.
- Космодамианский А. С., Меглинский В. В., Швецов В. А. [1] Розтяг анізотропної пластинки з криволінійним отвором, підкріпленням жорстким кільцем.— Прикл. мех., 1962, 8, 3.
- [2] Розтяг анізотропної пластинки з отвором у формі склепіння.— Прикл. мех., 1963, 9, 4.
- [3] Розтяг анізотропної пластинки з трапеціодальним отвором, підкріпленням жорстким кільцем.— Прикл. мех., 1963, 9, 5.
- [4] Изгиб анизотропной пластинки, ослабленной криволинейным отверстием.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебаниях упругих тел. Изд-во Саратовск. ун-та, 1964.
- Курдюмов А. А. [1] О решении в полиномах плоской задачи теории упругости для прямоугольной анизотропной полосы.— ПММ, 1945, 9, 4.
- Техницкий С. Г. [1] Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
- [2] Приближенный метод определения напряжений в упругой анизотропной пластинке вблизи отверстия, мало отличающегося от кругового.— Инж. сб. 17. Изд-во АН СССР, М., 1953.
- [3] Распределение напряжений в анизотропной пластинке с эллиптическим упругим ядром (плоская задача).— Инж. сб., 19. Изд-во, АН СССР, 1954.
- [4] О влиянии кругового отверстия на распределение напряжений в балках. В кн.: «Оптический метод изучения напряжений в деталях машин. ОНТИ, М.—Л., 1935.
- [5] Напряжения в неограниченной анизотропной пластинке, ослабленной эллиптическим отверстием.— ДАН СССР, 1936, 4, 3.
- [6] Концентрация напряжений вблизи эллиптического и кругового отверстия в растягиваемой анизотропной пластинке.— Вестн. инж. и техн., 1936, 5.
- [7] О напряжениях вблизи кругового отверстия в анизотропной пластинке при изгибе.— Вест. инж. и техн., 1937, 4.
- [8] Некоторые случаи упругого равновесия однородного цилиндра с произвольной анизотропией.— ПММ, 1939, 2, 3.
- [9] Обобщенная плоская деформация в упругом анизотропном полупространстве, ограниченном поверхностью параболического цилиндра.— ДАН СССР, 1939, 25, 3.
- [10] Некоторые случаи распределения напряжений в анизотропной пластинке с круговым отверстием.— Уч. зап. ЛГУ, 1939, 4.
- [11] Плоская задача теории упругости для среды со слабо выраженной анизотропией.— ДАН СССР, 1941, 31, 5 и 9.
- [12] Теория упругости анизотропного тела. Гостехиздат, М., 1950.
- [13] Приближенный метод определения напряжений вблизи отверстия, мало отличающегося от кругового, в упругой анизотропной пластинке.— Инж. сб., 19. Изд-во АН СССР, М., 1954.
- [14] Распределение напряжений в анизотропной пластинке с отверстием.— В кн.: Научный ежегодник Саратовск. ун-та за 1954-й г.
- [15] Некоторые случаи упругого равновесия анизотропной пластинки с некруглым отверстием (плоская задача).— Инж. сб., 22. Изд-во АН СССР, М., 1955.
- [16] Теоретическое исследование напряжений в упругом анизотропном массиве вблизи подземной выработки эллиптического сечения.— В кн.: Сб. трудов ВНИМИ, 45, 1962.

- Лехницкий С. Г., Солдатов В. В. [1] Влияние положения эллиптического отверстия на концентрацию напряжений в растягиваемой анизотропной пластине.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1961, 1.
- Липкин В. Б. [1] Концентрация напряжений в ортотропной пластинке, ослабленной круговым отверстием.— Инж. сб., 26. Изд-во АН СССР, М., 1958.
- Ляв А. [1] Математическая теория упругости. ГТТИ, М.— Л., 1935.
- Мартинович Т. Л. [1] До питання про підкріплення анізотропної пластинки пружним стержнем.— Вісн. Львівськ. ун-ту, мех. і мат., 1965, 2, 69, 76.
- Меглинский В. В. [1] Изгиб анизотропной эллиптической плиты с эллиптическим отверстием, подкрепленным плоским кольцом.— В кн.: Некоторые задачи теории упругости о концентрации напряжений, равновесии и колебании упругих тел. Изд-во Саратовск. ун-та, 1964, 98—103.
- Миңцберг Б. Л. [1] Смешанная граничная задача теории упругости для плоскости с круговым отверстием.— Прикл. мат. и мех., 1948, 12, 4.
- Михлин С. Г. [1] Об одной частной задаче теории упругости.— ДАН СССР, 1940, 27, 6.
- Мухелишвили Н. И. [1] Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.  
[2] Сингулярные интегральные уравнения. Физматгиз, М., 1962.
- Нагибин Л. Н. [1] О напряжениях в весовой анизотропной полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями.— Инж. сб. 25. Изд-во АН СССР, М., 1959.  
[2] О напряженном состоянии анизотропной пластинки с двумя неодинаковыми круговыми отверстиями.— Инж. журн., 1965, 5, 6.
- Найман М. И. [1] Напряжения в балке с криволинейным отверстием.— В кн.: Труды ЦАГИ, 313, 1937.
- Народецкый М. З. [1] Об одной контактной задаче.— ДАН СССР, 1943, 12, 6.
- Панасюк В. В. [1] Давление диска на круговое отверстие в упругой плоскости.— В кн.: Научн. зап. Ин-та маш. и автомат. АН УССР, 1. Изд-во АН УССР, К., 1953.  
[2] Тиск штампна на границю кругового отвору.— ДАН УРСР, 1954, 1.
- Прусов И. О. [1] Зауваження до статті І. О. Прусова Напружений стан в неоднорідній площині з щілинами по коловій лінії розділу.— Прикл. мех., 1961, 7, 6; — Прикл. мех., 1962, 8, 5.
- Ромалис Б. Л. [1] Распределение давлений при внутреннем контакте упругих круговых цилиндров.— Вестн. машиностр., 1958, 12.  
[2] К решению контактной задачи о сжатии упругих тел, ограниченных цилиндрическими поверхностями, радиусы которых почти равны.— В кн.: Тр. Челябинск. ин-та механизации и электрификации сельск. хоз., 7, 1959.
- Савин Г. Н. [1] Концентрация напряжений возле эллиптического и кругового отверстия в анизотропной балке (полосе) при чистом изгибе.— Вести. инж. и техн., 1937, 11.  
[2] Некоторые задачи теории упругости анизотропной среды.— ДАН СССР, 1939, 23, 3.  
[3] Изгиб анизотропной балки с постоянной перерезывающей силой, ослабленной эллиптическим и круговым отверстием.— Вести. инж. и техн., 1938, 4.  
[4] Концентрация напряжений около отверстий. ГТТИ, М.— Л., 1951.
- Савин Г. М., Грилицький Д. В. [1] Про одну контактну задачу.— ДАН УРСР, 1965, 3.  
[2] Об определении напряженного состояния в анизотропной пластинке с упругим ядром.— Прикл. мех., 1965, 1, 1.
- Серенсен С. В. [1] Основы технической теории упругости. ОНТИ, М.— Л., 1934.
- Солдатов В. В. [1] Концентрация напряжений в ослабленной эллиптическим отверстием ортотропной пластинке при чистом сдвиге и чистом изгибе.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1963, 3.
- Степанов А. В. [1] Причина особенностей разрушения упругоанизотропных тел.— Изв. АН СССР, 1950, 14, 1, 122.
- Фридман М. М. [1] О некоторых задачах теории изгиба тонких изотропных плит.— ПММ, 1941, 5, 1, 92—102.

- [2] Изгиб тонкой изотропной плиты с криволинейным отверстием.— ПММ, 1945, 9, 4, 334—338.
- [3] Математическая теория упругости анизотропных сред.— ПММ, 1950, 14, 3.
- Хара И. С. [1] Про один з методів наближеного конформного відображення багатокутних областей на одиничний круг.— ДАН УРСР, 1953, 4.
- Ченцов В. Г. [1] Исследование фанеры, как ортотропной пластинки.— В кн.: Труды ЦАГИ, 91, 1936.
- Черепанов Г. П. [1] О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1962, 1.
- Шереметьев М. П. [1] Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием.— Инж. сб., 14. Изд-во АН СССР, М., 1953.
- [2] Пластинки с подкрепленным краем. Изд-во Львовск. ун-та, 1960.
- [3] Упругое равновесие бесконечной пластинки с вложенной абсолютно жесткой или упругой шайбой.— Прикл. мат. и мех., 1952, 16, 4.
- [4] Решения уравнения некоторых контактных задач теории упругости (уравнение типа Прандтля).— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. Изд-во АН СССР, М., 1961.
- Шерман Д. И. [1] К решению плоской задачи теории упругости, для анизотропной среды.— Прикл. мат. и мех., 1942, 6, 6.
- Штаерман И. Я. [1] Местные деформации при сжатии упругих круговых цилиндров, радиусы которых почти равны.— ДАН СССР, 1940, 29, 3.
- [2] Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М., 1949.
- Conway H. D. [1] Stress Concentration Due to Elliptical Holes in Orthotropic Plates.— Journ. of Applied Mech, 1954, 21, 1.
- Dundurs J., Hetenyi M. [1] The elastic plane with a circular insert, loaded by a radial force.— Trans. ASME, 1961, 28, 1.
- Hayashi Takuo [1] On the tension of an orthogonally aeolotropic strip with two circular holes.— Proc. 8-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1958.
- Hetenyi M., Dundurs J. [1] The elastic plane with a circular insert, loaded by a tangentially directed force.— Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs., No WA-150, 1961.
- Howland R. C. J. [1] Stress in a Plate Containing an Infinite Row of Holes.— Proceedings of the Royal Society of London, Ser. A, 148, 1935.
- Kaiser G. [1] Die Scheibe mit elliptischem Kern.— Ingr.— Arch., 1961, 30, 4.
- Karunes B. [1] Indian Journal of Physics and Proceedings of the Indian association for the cultivation of science, 1953, 27, 36, 9.
- Kubo Toshihiko [1] Stresses on the orthogonally aeolotropic plate with a row of holes.— Proc. 6-th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1956.
- Symonds P. S. [1] Journal of Applied Mechanics, 1946, 13, 3, 183—197.
- Szelagowski F. [1] Action of Concentrated Forces on an Infinite Disc with Circular Hole Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. tech., 1962, 10, 6.
- Szelagowski F. [2] The Problem of the Infinite Disc with a Circular Hole under a Tangential Load. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. tech., 1962, 10, 5.



## ВЛИЯНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ МАТЕРИАЛА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЙ

Построение классической теории упругости основывается на трех предположениях: компоненты деформации выражаются через производные от перемещений линейными однородными формулами Коши; при формулировке условий равновесия малого элемента тела игнорируются геометрические изменения, происходящие с элементом при переходе тела из начального состояния в деформированное; соотношения между составляющими напряжений и деформаций считаются линейными. При этом основные уравнения теории упругости, будь то постановка задач в перемещениях или в напряжениях, будут линейными. Отказ от любого из перечисленных предположений приводит к нелинейности основных уравнений и дополнительным математическим осложнениям в решении задач.

У многих цветных металлов и пластмасс наблюдаются отклонения от линейного закона связи между напряжениями и деформациями, хотя процесс деформации остается упругим, обратимым, а величины перемещений и деформаций — достаточно малыми. Отказавшись от линейности соотношений между напряжениями и деформациями, но оставляя предположение о малости деформаций и перемещений, можно получить вариант нелинейной постановки задач теории упругости, который именуется физически нелинейной теорией упругости. Вследствие нелинейности закона упругости основные уравнения задачи будут нелинейными, как правило, допускающие лишь приближенное решение.

В последнее время в различных областях техники все более широкое распространение получают пластические материалы, имеющие высокие прочностные характеристики и обладающие в области упругих деформаций большой деформативностью. Для многих из них соотношения между главными напряжениями и удлинениями в большом интервале их изменения могут быть приняты линейными. Для таких физически линейных материалов представляет большой интерес рассмотреть задачи о концентрации напряжений около отверстий с учетом больших деформаций, т. е. решить задачи о концентрации напряжений возле отверстий в геометрически нелинейной, но физически линейной постановке\*.

Большой интерес представляют также решения задач, полученные с учетом физической и геометрической нелинейности одновременно. Примеры решений задач в такой постановке приведены в гл. IX. Однако значительные вычислительные трудности вынуждают использовать и

\* Приближенный метод решения таких задач для случая плоской деформации, развиваемый в работах И. Н. Слезингера [1, 2], И. Н. Слезингера и С. Я. Барской [1—4], на наш взгляд, требует дополнительного исследования исходных положений.

анализировать решения с разделением физических и геометрических факторов нелинейности.

Ниже рассматриваются задачи о концентрации напряжений возле отверстий в одной из этих двух частных постановок, а именно приводятся решения плоских (как для плоской деформации, так и для плоского напряженного состояния) задач лишь для физически нелинейной задачи. Для решения этих задач предлагается два приближенных метода: метод последовательных приближений (§ 1, 2) и метод возмущения формы границы (§ 3).

### § 1. Основные уравнения плоской задачи физически нелинейной теории упругости

**Зависимость между напряжениями и деформациями.** Для многих физически нелинейных упругих материалов зависимость между напряжениями и деформациями можно представить в виде \*

$$\varepsilon_{ij} = \frac{k(s_0)}{3K} \sigma_0 \delta_{ij} + \frac{g(t_0^2)}{2G} (\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (\text{IV.1})$$

где  $K$  и  $G$  — модули соответственно объемной деформации и сдвига при исчезающе малых деформациях;  $k(s_0)$  и  $g(t_0^2)$  — соответственно функции среднего напряжения  $s_0$  и интенсивности касательных напряжений  $t_0^2$ , которые можно представить степенными рядами

$$\begin{aligned} k(s_0) &= 1 + k_1 s_0 + k_2 s_0^2 + \dots, \\ g(t_0^2) &= 1 + g_2 t_0^2 + g_4 t_0^4 + \dots \end{aligned} \quad (\text{IV.2})$$

Представление закона формоизменения, т. е. функции  $g(t_0^2)$ , в виде (IV.2) облегчает в дальнейшем решение частных задач, поскольку не приводит к иррациональностям, связанным с вычислением интенсивности. Использование такого приема в общей нелинейной постановке задач может привести к ошибочным заключениям, переоценке значения геометрической нелинейности по сравнению с физической.

Экспериментальные данные показывают, что зависимость между средним напряжением и средней деформацией для большинства материалов близка к линейной, поэтому в дальнейшем примем

$$k(s_0) = 1. \quad (\text{IV.3})$$

В этом параграфе будем решать соответствующие задачи о концентрации напряжений возле криволинейных отверстий для материалов,

\* См. Г. Каудерер [1], стр. 37.

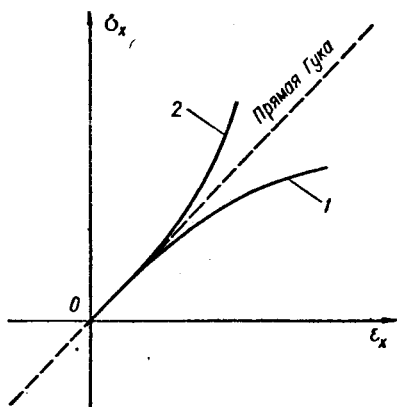
у которых диаграмма для одноосного растяжения — сжатия может быть представлена схематически так, как показано на рис. IV.1, где кривые 1 и 2 для малых деформаций незначительно отклоняются от прямой (растяжение — сжатие) Гука. Кривая 1, лежащая ниже прямой Гука, характеризует так называемую «мягкую» нелинейность, а кривая 2, расположенная выше прямой Гука, — «жесткую» нелинейность (см. § 3 гл. IX). Предположим, что эти кривые можно с достаточной степенью точности аппроксимировать, удерживая в разложении (IV.2) функции интенсивности касательных напряжений лишь два члена:

$$g(t^2)_0 = 1 + g_2 t^2_0. \quad (IV.4)$$

В этом случае будем иметь физически нелинейную теорию с тремя упругими константами:  $K$ ,  $G$ ,  $g_2$ . О порядке величин этих констант можно судить по опытным данным \* растяжения образцов из чистой меди:

$$\begin{aligned} K &= 1,37 \cdot 9,81 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2; \\ G &= 0,46 \cdot 9,81 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2; \\ g_2 &= 0,18 \cdot 10^6. \end{aligned} \quad (IV.5)$$

Рис. IV.1



**Основные уравнения плоской задачи.** В противоположность линейной (классической) теории для физически нелинейной теории упругости плоскому напряженному состоянию и плоской деформации соответствуют различные системы уравнений. Однако в случае небольших отклонений от закона Гука можно с одной и той же степенью точности получить уравнения как для плоского напряженного состояния, так и для плоской деформации в одном и том же виде. Эти уравнения будут отличаться только значениями входящих в них постоянных. Действительно, в случае плоского напряженного состояния зависимости напряжения — деформации, как это следует из (IV.1), (IV.3) и (IV.4), будут иметь вид

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} - \frac{3K - 2G}{18KG} \sigma_{kk} \delta_{ij} - \frac{g_2}{2G} t_0^2 \left( \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right), \quad (IV.6)$$

где

$$t_0^2 = \frac{2}{9G^2} [(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + 3(\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22})],$$

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma_x, & \sigma_{22} &= \sigma_y, & \sigma_{12} &= \tau_{xy}, \\ \epsilon_{11} &= \epsilon_x, & \epsilon_{22} &= \epsilon_y, & \epsilon_{12} &= \epsilon_{xy}. \end{aligned} \quad (IV.7)$$

\* См. Г. Каудерер [1], стр. 78.

В случае плоской деформации, пренебрегая степенями  $t_0$  выше второй, из соотношений (IV.1), (IV.3) и (IV.4) находим

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3K-2G}{3K-G} + \frac{9KG}{(3K+G)^2} g_2 t_0^2 \right] (\sigma_{11} + \sigma_{22}). \quad (\text{IV.8})$$

Следовательно, зависимостям напряжения—деформации можно в обоих случаях придать вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} [\sigma_{ij} - a\sigma_{kk}\delta_{ij} + g_2 t_0^2 (\sigma_{ij} - b\sigma_{kk}\delta_{ij})], \quad (\text{IV.9})$$

где в случае плоской деформации

$$t_0^2 = \frac{2}{9G^2} [(1+c)(\sigma_{11} + \sigma_{22})^2 + 3(\sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\sigma_{22})],$$

$$a = \frac{3K-2G}{2(3K+G)}, \quad b = \frac{9K^2 + 6KG - 2G^2}{2(3K+G)^2},$$

$$c = \frac{8G^2 - 6KG - 9K^2}{4(3K+G)^2}. \quad (\text{IV.10})$$

Если в (IV.9) и (IV.10) положить

$$a = \frac{3K-2G}{9K}, \quad b = \frac{1}{3}, \quad c = 0, \quad (\text{IV.11})$$

получим зависимости (IV.6) и (IV.7), соответствующие плоскому напряженному состоянию.

Плоская статическая задача физически нелинейной теории упругости, при отсутствии массовых сил сводится, как и в линейной теории, к решению уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{IV.12})$$

и уравнений совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (\text{IV.13})$$

при соответствующем законе упругости.

В рассматриваемом варианте нелинейной теории закон Гука заменяется нелинейным законом упругости (IV.9). Таким образом, задача сводится к совместному решению уравнений (IV.9), (IV.12) и (IV.13). Эта система уравнений, вообще говоря, нелинейна. Удобно ввести функцию напряжений:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \quad (\text{IV.14})$$

тогда задача сведется к решению нелинейного уравнения четвертого порядка в частных производных при соответствующих граничных условиях и данном напряженном состоянии «на бесконечности», т. е. в

достаточно удаленных точках упругой плоскости. Но нелинейную систему уравнений (IV.9), (IV.12) и (IV.13) можно свести к решению последовательности граничных задач теории функций комплексного переменного\*. В § 1 и 2 этой главы приводится решение Г. Н. Савина и Л. П. Хорошуна [1], которое несколько отличается\*\* от решения Г. Н. Савина [2, 3].

**Комплексные потенциалы.** Перейдем от переменных  $x, y$  к новым независимым переменным

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

Формулам (IV.14) в новых переменных\*\*\*  $z$  и  $\bar{z}$  можно придать вид

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}, \quad (IV.15)$$

$$\sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} = -4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Из соотношений (9) и (15) получим выражения для деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  и  $\varepsilon_{xy}$  через функцию напряжений  $U$ :

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y = \frac{2}{G} \left[ (1 - 2a) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + (1 - 2b) g_2 t_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} \right], \quad (IV.16)$$

$$\varepsilon_x - \varepsilon_y + 2i\varepsilon_{xy} = \frac{2}{G} \left[ -\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - g_2 t_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right].$$

Проинтегрируем второе уравнение в (IV.16), принимая во внимание тождество

$$2 \frac{\partial}{\partial z} (u + iv) = \varepsilon_x - \varepsilon_y + 2i\varepsilon_{xy}, \quad (IV.17)$$

где  $u$  и  $v$  — компоненты вектора перемещений:

$$2G(u + iv) = -2 \frac{\partial U}{\partial z} + f(z) - 2g_2 \int t_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} d\bar{z}, \quad (IV.18)$$

где  $f(z)$  — функция лишь переменной  $z$ .

Продифференцируем (IV.18) по  $z$ :

$$2G \frac{\partial(u + iv)}{\partial z} = -2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + f'(z) - 2g_2 \frac{\partial}{\partial z} \int t_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} d\bar{z}. \quad (IV.19)$$

С другой стороны, пользуясь тождеством

$$2 \frac{\partial(u + iv)}{\partial z} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + i \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (IV.20)$$

\* См. Г. Н. Савин [2, 3].

\*\* Укажем также на работу Л. П. Хорошуна [1], в которой дано комплексное представление плоской задачи нелинейной ползучести.

\*\*\* При выводе комплексных представлений основных уравнений задачи будем следовать методу Стивенсона (см. И. Н. Снеддон, Д. С. Берри, [1]), при котором уравнение совместности деформаций (IV.13) будет автоматически удовлетворено.

и первым выражением (IV.16), получаем

$$2G \frac{\partial(u+iv)}{\partial z} = 2(1-2a) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + Gi \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2(1+2b) g_2 t_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (\text{IV.21})$$

Исключив из (IV.15) и (IV.21) функцию  $\frac{\partial(u+iv)}{\partial z}$ , найдем

$$4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(\bar{z})} + A(z, \bar{z})], \quad (\text{IV.22})$$

где для сокращения обозначено:

$$\varphi'(z) = \frac{1}{8(1-a)} f'(z),$$

$$A(z, \bar{z}) = -\frac{g_2}{1-a} \operatorname{Re} \left[ (1-2b) t_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial z} \int t_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} d\bar{z} \right]. \quad (\text{IV.23})$$

Интегрируя (IV.22), получаем

$$2 \frac{\partial U}{\partial z} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(\bar{z})} + \overline{\psi(z)} + \int A(z, \bar{z}) dz. \quad (\text{IV.24})$$

Из (IV.15), (IV.16), (IV.18) и (IV.24) следует, что

$$\begin{aligned} \sigma_x - \sigma_y + 2i\tau_{xy} &= -2 \left[ z\overline{\varphi''(\bar{z})} + \overline{\psi'(z)} + \int \frac{\partial A}{\partial z} dz \right], \\ \sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} &= 2 \left[ \bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z) + \int \frac{\partial A}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \right], \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

$$2G(u+iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(\bar{z})} - \overline{\psi(z)} + 2B(z, \bar{z}),$$

где

$$\kappa = 3 - 4a, \quad B(z, \bar{z}) = -g_2 \int t_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial \bar{z}^2} d\bar{z} - \frac{1}{2} \int Adz. \quad (\text{IV.26})$$

Выражения для составляющих  $X$ ,  $Y$ , по осям координат результирующей силы и для результирующей пары  $M$ , действующих с какой-либо стороны на дугу  $s_0s$ , взятую внутри области, будут иметь вид

$$X + iY = -i \left[ \varphi(z) + z\overline{\varphi'(\bar{z})} + \overline{\psi(z)} + \int Adz \right]_s^s; \quad (\text{IV.27})$$

$$M = \operatorname{Re} \left[ \int \psi(z) dz - z\overline{\psi(z)} - \bar{z} \int Adz + \frac{1}{2} \iint Adz d\bar{z} \right]_s^s. \quad (\text{IV.28})$$

В случае первой задачи, когда на контуре  $L$  заданы усилия  $X_n(s)$  и  $Y_n(s)$ , граничное условие

$$\varphi(t) + \overline{t\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} + \int Adz = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + \operatorname{const} = f_1(s) + if_2(s) + \operatorname{const}. \quad (\text{IV.29})$$

В случае второй задачи, когда на контуре  $L$  заданы компоненты вектора перемещения  $g^1(s)$  и  $g^2(s)$ , граничное условие

$$\kappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} + 2B(t, \bar{t}) = 2G[g^{(1)}(s) + ig^{(2)}(s)]. \quad (IV.30)$$

В настоящем параграфе задачи о концентрации напряжений около криволинейных отверстий будем решать методом последовательных приближений, принимая в качестве первого приближения решение соответствующей задачи линейной (классической) плоской теории упругости. По этому методу напряжения и перемещения в  $n$ -м ( $n=1,2$ ) приближении\* определяются формулами

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(n)} + \sigma_y^{(n)} &= 2[\varphi^{(n)'}(z) + \overline{\varphi^{(n)'}}(z) + A^{(n-1)}(z, \bar{z})], \\ \sigma_y^{(n)} - \sigma_x^{(n)} + 2i\tau_{xy}^{(n)} &= 2\left[\bar{z}\varphi^{(n)*}(z) + \psi^{(n)'}(z) + \int \frac{\partial A^{(n-1)}}{\partial z} d\bar{z}\right], \end{aligned} \quad (IV.31)$$

$$2G(u + iv) = \kappa\varphi^{(n)}(z) - \overline{z\varphi^{(n)'}}(z) - \overline{\psi^{(n)}(z)} + 2B^{(n-1)}(z, \bar{z}),$$

где комплексные потенциалы  $\varphi^{(n)}(z)$  и  $\psi^{(n)}(z)$  в случае первой задачи определяются из граничного условия (IV.29):

$$\varphi^{(n)}(t) + t\overline{\varphi^{(n)'}}(t) + \overline{\psi^{(n)}(t)} = f_1(s) + if_2(s) - \int A^{(n-1)} dz + \text{const}, \quad (IV.32)$$

а в случае второй задачи — из граничного условия (IV.30):

$$\kappa\varphi^{(n)}(t) - t\overline{\varphi^{(n)'}}(t) - \overline{\psi^{(n)}(t)} = 2G(g^{(1)} + ig^{(2)}) - 2B^{(n-1)}(t, \bar{t}). \quad (IV.33)$$

**Общие формулы для многосвязной области. Случай бесконечной области.** Рассмотрим область, ограниченную простыми замкнутыми контурами  $L_1, L_2, \dots, L_m, L_{m+1}$ , из которых последний охватывает все предыдущие, и исследуем характер многозначности комплексных потенциалов  $\varphi^{(n)}(z), \psi^{(n)}(z)$ .

Поскольку напряжения однозначны, при обходе по замкнутому контуру  $L_j$ , неоднозначность функции  $A(z, \bar{z})$  из (IV.23) может появиться только в результате интегрирования выражения

$$\int t_0^2 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} d\bar{z} = - \sum_{k=1}^m q_{1k}(z) \ln(\overline{z - z_k}) + R(z, \bar{z}). \quad (IV.34)$$

Следовательно, функция  $A^{(n)}(z, \bar{z})$  может быть представлена в виде

$$A^{(n)} = \frac{g_2}{2(1-a)} \sum_{k=1}^m [q_{1k}^{(n)'}(z) \ln(\overline{z - z_k}) + \overline{q_{1k}^{(n)'}}(z) \ln(z - z_k)] + R_1^{(n)}(z, \bar{z}). \quad (IV.35)$$

\* Строго говоря, в данной постановке задачи имеет смысл определить лишь первое и второе приближения, поскольку такой степенью точности ограничены исходные предположения.

Здесь  $z_k$  — точка внутри контура  $L_k$ ;  $q_{1k}^{(n)}(z)$  — функция голоморфная, а  $R(z, \bar{z})$  и  $R_1(z, \bar{z})$  — однозначные функции в рассматриваемой области.

Исходя из (IV.35), будем иметь

$$\int A^{(n)} dz = \frac{g_2}{2(1-a)} \sum_{k=1}^m [q_{1k}^{(n)'}(z) z \ln(z - z_k) + q_{1k}^{(n)}(z) \ln(\bar{z} - \bar{z}_k) + \overline{q_{2k}^{(n)}(z)} \ln(z - z_k)] + R_2^{(n)}(z, \bar{z}), \quad (\text{IV.36})$$

$$\int \frac{\partial A^{(n)}}{\partial z} d\bar{z} = \frac{g_2}{2(1-a)} \sum_{k=1}^m [q_{1k}^{(n)'}(z) \bar{z} \ln(\bar{z} - \bar{z}_k) + q_{2k}^{(n)}(z) \ln(\bar{z} - \bar{z}_k)] + R_3^{(n)}(z, \bar{z}),$$

где  $q_{2k}^{(n)}(z)$  — голоморфная, а  $R_2^{(n)}(z, \bar{z})$  и  $R_3^{(n)}(z, \bar{z})$  — однозначные функции в рассматриваемой области.

Из условия однозначности напряжений (IV.31) при обходе вдоль каждого контура  $L_h$ , приняв во внимание соотношения (IV.35) и (IV.36), получим

$$\varphi^{(n)'}(z) = \frac{g_2}{2(1-a)} \sum_{k=1}^m q_{1k}^{(n-1)'}(z) \ln(z - z_k) + \Phi_*^{(n)}(z), \quad (\text{IV.37})$$

$$\psi^{(n)'}(z) = \frac{g_2}{2(1-a)} \sum_{k=1}^m q_{2k}^{(n-1)'}(z) \ln(z - z_k) + \Psi_*^{(n)}(z),$$

где  $\Phi_*^{(n)}(z)$  и  $\Psi_*^{(n)}(z)$  — функции, голоморфные, в заданной области.

Следовательно, комплексные потенциалы

$$\varphi^{(n)}(z) = \frac{g_2}{2(1-a)} \sum_{k=1}^m q_{1k}^{(n-1)}(z) \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^{(n)} \ln(z - z_k) + \Phi_*^{(n)}(z), \quad (\text{IV.38})$$

$$\psi^{(n)}(z) = \frac{g_2}{2(1-a)} \sum_{k=1}^m q_{2k}^{(n-1)}(z) \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^m \gamma_k^{\prime(n)} \ln(z - z_k) + \Psi_*^{(n)}(z),$$

где  $\Phi_*^{(n)}(z)$ ,  $\Psi_*^{(n)}(z)$  — функции, голоморфные в рассматриваемой области.

Комплексные постоянные  $\gamma_k^{(n)}$  и  $\gamma_k^{\prime(n)}$  определяются из условия однозначности перемещений (IV.31) и выражения для главного вектора (IV.27) при обходе каждого контура:

$$\gamma_k^{(n)} = -\frac{X_k + iY_k}{2\pi(1 + \kappa)}, \quad \gamma_k^{\prime(n)} = \frac{\kappa(X_k + iY_k)}{2\pi(1 + \kappa)}. \quad (\text{IV.39})$$

Из (IV.39) следует, что эти комплексные постоянные не зависят от порядка приближения.



Рассмотрим случай бесконечной области, когда контур  $L_{m+1}$  уходит в бесконечность. Опишем из начала координат окружность  $L_R$  радиуса  $R$ , охватывающую все контуры  $L_1, L_2, \dots, L_m$ .

Из условия ограниченности напряжений  $\sigma_x, \sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  во всей области следует, что функции  $A^{(n)}$  и  $\frac{\partial}{\partial z} \int A^{(n)} d\bar{z}$  также ограничены. Отсюда функции  $q_{1k}^{(n)}(z)$  и  $q_{2k}^{(n)}(z)$  будут голоморфны вне  $L_R$ , включая бесконечно удаленную точку, т. е. при достаточно больших  $|z|$  имеют место разложения

$$q_{1k}^{(n)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{a_{kr}^{(n)}}{z^r}, \quad q_{2k}^{(n)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{b_{kr}^{(n)}}{z^r}. \quad (\text{IV.40})$$

Функции (IV.38) в этом случае

$$\begin{aligned} \varphi_*^{(n)}(z) &= \Gamma_n z + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c_r^{(n)}}{z^r}, \\ \psi_*^{(n)}(z) &= \Gamma'_n z + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{c'_r{}^{(n)}}{z^r}. \end{aligned} \quad (\text{IV.41})$$

Таким образом, как следует из (IV.40) и (IV.41), комплексные потенциалы (IV.38) при достаточно больших  $|z|$  имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(n)}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (a_{k_0}^{(n-1)} + \gamma_k) \ln z + \Gamma_n z + \varphi_0^{(n)}(z), \\ \psi^{(n)}(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} (b_{k_0}^{(n-0)} + \gamma'_k) \ln z + \Gamma'_n z + \psi_0^{(n)}(z). \end{aligned} \quad (\text{IV.42})$$

Здесь  $\varphi_0^{(n)}(z)$  и  $\psi_0^{(n)}(z)$  — функции, голоморфные вне  $L_R$ , включая бесконечно удаленную точку, причем, как и в случае линейной задачи, не изменяя напряженного состояния, можно положить

$$\varphi_0^{(n)}(\infty) = \psi_0^{(n)}(\infty) = 0, \quad \text{Im } \Gamma_n = 0. \quad (\text{IV.43})$$

Постоянные  $\Gamma_n$  и  $\Gamma'_n$  определяются из условий напряженного состояния на бесконечности.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} A^{(n)}(z, \bar{z}) &= Q_n, \\ &\text{при } |z| \rightarrow \infty; \\ \int \frac{\partial A^{(n)}(z, \bar{z})}{\partial z} d\bar{z} &= Q'_n \end{aligned} \quad (\text{IV.44})$$

тогда из (IV.31), (IV.42) и (IV.44) найдем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Gamma_n &= \frac{1}{4} (\sigma_x^{(\infty)} + \sigma_y^{(\infty)}) - \frac{1}{2} Q_{n-1}, \\ \Gamma_n' &= \frac{1}{2} (\sigma_y^{(\infty)} - \sigma_x^{(\infty)} + 2i\tau_{xy}^{(\infty)}) - Q_{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{IV.45})$$

## § 2. Метод последовательных приближений

**Общие формулы. Постановка задачи \***. Допустим, что основное напряженное состояние в неограниченной упругой плоскости характеризуется компонентами  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$  и  $\tau_{xy}^*$ , которые согласно (IV.22) и (IV.25) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^* + \sigma_y^* &= 2[\varphi_1^*(z) + \overline{\varphi_1^*(z)} + A_1^*(z, \bar{z})], \\ \sigma_y^* - \sigma_x^* + 2i\tau_{xy}^* &= 2\left[\bar{z}\varphi_1^*(z) + \psi_1^*(z) + \int \frac{\partial A_1^*}{\partial z} d\bar{z}\right]. \end{aligned} \quad (\text{IV.46})$$

Если в этой плоскости сделать отверстие какой-либо формы, возле отверстия установится новое распределение напряжений, которые в  $n$ -м приближении согласно (IV.31) можем определить по формулам

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(n)} + \sigma_y^{(n)} &= 2[\varphi_1^{(n)'}(z) + \overline{\varphi_1^{(n)'}(z)} + A_1^{(n-1)}(z, \bar{z})], \\ \sigma_y^{(n)} - \sigma_x^{(n)} + 2i\tau_{xy}^{(n)} &= 2\left[\bar{z}\varphi_1^{(n)'}(z) + \psi_1^{(n)'}(z) + \int \frac{\partial A_1^{(n-1)}}{\partial z} d\bar{z}\right], \end{aligned} \quad (\text{IV.47})$$

а на бесконечности компоненты  $\sigma_x^{(n)}$ ,  $\sigma_y^{(n)}$  и  $\tau_{xy}^{(n)}$  принимают заданные значения  $\sigma_x^*$ ,  $\sigma_y^*$  и  $\tau_{xy}^*$ .

Представим, приняв во внимание (IV.44), потенциалы:

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(n)}(z) &= \varphi_{10}^{(n)}(z) + \varphi_{1*}^{(n)}(z) + \frac{1}{2}(Q_n - Q_{n-1})z, \\ \psi_1^{(n)}(z) &= \psi_{10}^{(n)}(z) + \psi_{1*}^{(n)}(z) + (Q_n' - Q_{n-1}')z, \end{aligned} \quad (\text{IV.48})$$

где  $\varphi_{10}^{(n)}(z)$  и  $\psi_{10}^{(n)}(z)$  — голоморфные функции, обращающиеся в нуль на бесконечности.

\* См. Г. Н. Савин и Л. П. Хорошун [1].

Таким образом, поставленная задача сводится к отысканию функций  $\varphi_{10}^{(n)}(z)$  и  $\psi_{10}^{(n)}(z)$ , удовлетворяющих на контуре отверстия условию

$$\varphi_{10}^{(n)}(t) + t\overline{\varphi_{10}^{(n)'}(t)} + \overline{\psi_{10}^{(n)}(t)} = f_{11}^{(n-1)}(s) + if_{12}^{(n-1)}(s), \quad (\text{IV.49})$$

где функция, представляющая собой приведенную контурную нагрузку, имеет вид

$$\begin{aligned} f_{11}^{(n-1)}(s) + if_{12}^{(n-1)}(s) = f_{11}(s) + if_{12}(s) - [\varphi_{1*}(t) + t\overline{\varphi_{1*}'(t)} + \\ + \overline{\psi_{1*}(t)} + t(Q_* - Q_{n-1}) + \bar{t}(Q_*' - Q_{n-1}') + \int A_1^{(n-1)} dz]. \end{aligned} \quad (\text{IV.50})$$

Пусть функция

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\frac{1}{\zeta} + a_1\zeta + \dots + a_n\zeta^n\right) \quad (\text{IV.51})$$

конформно отображает рассматриваемую область, т. е. плоскость вне отверстия, на внутренность единичного круга. Тогда, переходя к переменной  $\zeta = \rho e^{i\theta}$ , получим выражения для напряжений и перемещений:

$$\sigma_{\rho}^{(n)} + \sigma_{\theta}^{(n)} = 2[\Phi^{(n)}(\zeta) + \overline{\Phi^{(n)}(\zeta)} + A^{(n-1)}(\zeta, \bar{\zeta})],$$

$$\sigma_{\theta}^{(n)} - \sigma_{\rho}^{(n)} + 2i\tau_{\theta\rho}^{(n)} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2\omega'(\zeta)} \left[ \overline{\omega(\zeta)} \Phi^{(n)'}(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi^{(n)}(\zeta) + \int \frac{\partial A^{(n)}}{\partial \zeta} \overline{\omega'(\zeta)} d\bar{\zeta} \right], \quad (\text{IV.52})$$

$$2G(u_{\rho}^{(n)} + iv_{\theta}^{(n)}) = \frac{\zeta \overline{\omega'(\zeta)}}{\rho |\omega'(\zeta)|} \left[ \kappa \Phi^{(n)}(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi^{(n)'}(\zeta)} - \overline{\psi^{(n)}(\zeta)} + 2B^{(n-1)}(\zeta, \bar{\zeta}) \right].$$

Комплексные потенциалы (IV.48) и условия на контуре отверстия (IV.49) и (IV.50) в преобразованной области, т. е. в переменной  $\zeta$ , примут соответственно вид

$$\varphi^{(n)}(\zeta) = \varphi_0^{(n)}(\zeta) + \varphi_*(\zeta) + \frac{1}{2}(Q_* - Q_{n-1})\omega(\zeta); \quad (\text{IV.53})$$

$$\psi^{(n)}(\zeta) = \psi_0^{(n)}(\zeta) + \psi_*(\zeta) + (Q_*' - Q_{n-1}')\omega(\zeta);$$

$$\varphi_0^{(n)}(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0^{(n)'}(\sigma)} + \overline{\psi_0^{(n)}(\sigma)} = f_1^{(n-1)}(\sigma) + if_2^{(n-1)}(\sigma); \quad (\text{IV.54})$$

$$\begin{aligned} f_1^{(n-1)}(\sigma) + if_2^{(n-1)}(\sigma) = f_1(\sigma) + if_2(\sigma) - \left[ \varphi_*(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_*'(\sigma)} + \psi_*(\sigma) \right] + \\ + \omega(\sigma)(Q_* - Q_{n-1}) + \overline{\omega(\sigma)}(Q_*' - Q_{n-1}') + \int A^{(n-1)}(\zeta, \bar{\zeta}) \omega'(\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (\text{IV.55})$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; & \Psi(\zeta) &= \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}; \\ \varphi_1[\omega(\zeta)] &= \varphi(\zeta); & \psi(\zeta) &= \psi_1[\omega(\zeta)]; \\ A_1[\omega(\zeta)] &= A(\zeta); & f_{11}[\omega(s)] &= f_1(\sigma); \\ f_{12}[\omega(s)] &= f_2(\sigma); & \sigma &= e^{i\theta}.\end{aligned}\quad (\text{IV.56})$$

Как и в линейной задаче, граничное условие (IV.54) можно заменить двумя равносильными функциональными уравнениями:

$$\begin{aligned}\varphi_0^{(n)}(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^{(n-1)} + if_2^{(n-1)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \cdot \frac{\overline{\varphi_0^{(n)'}(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \bar{\beta}_0^{(n)}, \\ \psi_0^{(n)}(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_1^{(n-1)} - if_2^{(n-1)}}{\sigma - \zeta} d\sigma - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \cdot \frac{\varphi_0^{(n)'}(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma.\end{aligned}\quad (\text{IV.57})$$

Таким образом, задача об определении концентрации напряжений около криволинейного отверстия в  $n$ -м приближении сводится к отысканию функций  $\varphi_0^{(n)}(\zeta)$  и  $\psi_0^{(n)}(\zeta)$  из функциональных уравнений (IV.57).

Напряжения  $\sigma_x^{(n)}$ ,  $\sigma_y^{(n)}$  и  $\tau_{xy}^{(n)}$  в  $n$ -м приближении по найденным функциям  $\varphi_0^{(n)}(\zeta)$  и  $\psi_0^{(n)}(\zeta)$  определяются по формулам (IV.52) и (IV.53).

Если контур отверстия свободен от внешних усилий, то для напряжений по контуру отверстия (ибо  $\sigma_\rho = 0$ ) из первой формулы (IV.52) получаем

$$\sigma_\theta^{(n)} = 2 \left[ \frac{\varphi_0^{(n)'}(\sigma) + \varphi_0^{(n)'}(\bar{\sigma})}{\omega'(\sigma)} + \frac{\overline{\varphi_0^{(n)'}(\sigma) + \varphi_0^{(n)'}(\bar{\sigma})}}{\omega'(\sigma)} + (Q_n - Q_{n-1}) + A^{(n-1)}(\sigma, \bar{\sigma}) \right]. \quad (\text{VI.58})$$

**Отверстие подкреплено упругим кольцом.** Допустим, что в криволинейное отверстие впаяно широкое упругое кольцо из другого материала с нелинейной упругостью, т. е. упругие свойства этого материала также незначительно отклоняются от закона Гука.

Решение задачи о концентрации напряжений возле подкрепленного упругим кольцом отверстия сводится к отысканию комплексных потенциалов  $\varphi_{10}^{(n)}(z)$  и  $\psi_{10}^{(n)}(z)$  в плоскости вне отверстия и кольца, а также потенциалов  $\varphi_{11}^{(n)}(z)$  и  $\psi_{11}^{(n)}(z)$  в кольце\*.

Граничные условия для  $\varphi_{11}^{(n)}(z)$  и  $\psi_{11}^{(n)}(z)$  на контуре отверстия  $L$  будут иметь вид (IV.29) или (IV.30) в зависимости от того, что будет задано на этом контуре — напряжения или перемещения.

\* Величины, относящиеся к кольцу, обозначены дополнительным индексом 1.

Если кольцо припаяно к пластинке, на контуре  $L_1$  сая кольца и пластинки должны удовлетворяться условия сопряжения,

$$\begin{aligned} \varphi_{10}^{(n)}(z) + \varphi_{1\cdot}(z) + z \overline{[\varphi_{10}^{(n)'}(z) + \overline{\varphi_{1\cdot}'(z)}]} + \overline{\psi_{10}^{(n)}(z) + \psi_{1\cdot}(z)} + \\ + z(Q_{\cdot} - Q_{n-1}) + \bar{z}(Q'_{\cdot} - Q'_{n-1}) + \int A_1^{(n-1)} dz = \varphi_{11}^{(n)}(z) + \\ + z \overline{\varphi_{11}^{(n)'}(z) + \overline{\psi_{11}^{(n)}(z)}} + \int A_{11}^{(n-1)} dz; \end{aligned} \quad (IV.59)$$

$$\begin{aligned} \kappa [\varphi_{10}^{(n)}(z) + \varphi_{1\cdot}(z)] - z \overline{[\varphi_{10}^{(n)'}(z) + \overline{\varphi_{1\cdot}'(z)}]} - \overline{\psi_{10}^{(n)}(z) + \psi_{1\cdot}(z)} + \\ + \frac{\kappa-1}{2} z(Q_{\cdot} - Q_{n-1}) - \bar{z}(Q'_{\cdot} - Q'_{n-1}) + 2B_1^{(n-1)}(z, \bar{z}) = \kappa_1 \varphi_{11}^{(n)}(z) - \\ - z \overline{\varphi_{11}^{(n)'}(z) + \overline{\psi_{11}^{(n)}(z)}} + 2B_{11}^{(n-1)}(z, \bar{z}), \end{aligned}$$

выражающие равенство перемещений точек сая кольца и пластинки и равенство усилий, приложенных по контуру сая к пластинке и к кольцу.

**Всестороннее растяжение упругой плоскости с круговым отверстием при одновременном\* равномерном давлении на контуре отверстия.** Пусть упругая плоскость с круговым отверстием на бесконечности подвержена всестороннему растяжению:

$$\sigma_x^{\infty} = \sigma_y^{\infty} = p, \quad \tau_{xy}^{\infty} = 0,$$

а на контуре отверстия задано равномерное нормальное давление

$$\sigma_{\theta} = -p_0.$$

Требуется определить напряженное состояние в упругой плоскости возле отверстия. Функции  $\varphi_{1\cdot}(z)$  и  $\psi_{1\cdot}(z)$  в этом случае

$$\varphi_{1\cdot} = \left[ \frac{p}{2} + \frac{g_2(1-2b)(1+4c)}{18(1-a)G^2} p^3 \right] z, \quad (IV.60)$$

$$\psi_{1\cdot} = 0, \quad A_{1\cdot} = -\frac{g_2(1-2b)(1+4c)}{9(1-a)G^2} p^3,$$

а функция, конформно отображающая область вне отверстия радиуса  $R$  на единичный круг,

$$\omega(\zeta) = R \frac{1}{\zeta}. \quad (IV.61)$$

В первом приближении, т. е. для линейной задачи,

$$\varphi^{(1)}(\zeta) = \frac{Rp}{2} \cdot \frac{1}{\zeta}, \quad \psi^{(1)}(\zeta) = -R(p_0 + p)\zeta. \quad (IV.62)$$

\* В нелинейных задачах, как известно, принцип наложения не имеет места.

Пользуясь функциями (IV.62) находим значения  $A_1$ ,  $Q_1$ ,  $Q'_1$  и  $f_1^{(1)} + if_2^{(1)}$  для определения второго приближения:

$$A^{(1)} = -\frac{g_2}{9(1-a)G^2} [(1-2b)(1+4c)p^3 + 3(1-2b)p(p_0 + p)^2 \zeta^2 \bar{\zeta}^2 + 2(p_0 + p)^3 \zeta^3 \bar{\zeta}^3];$$

$$Q_1 = -\frac{g_2(1-2b)(1+4c)p^3}{9(1-a)G^2}; \quad Q'_1 = 0; \quad (IV.63)$$

$$f_1^{(1)}(\sigma) + if_2^{(1)}(\sigma) = -\frac{(p_0 + p)R}{\sigma} - \frac{g_2 R}{9(1-a)G^2} [3(1-2b)p(p_0 + p)^2 + (p_0 + p)^3] \frac{1}{\sigma}.$$

На основе зависимостей (IV.54), (IV.57) и (IV.63) находим функции во втором приближении:

$$\varphi^{(2)}(\zeta) = \frac{pR}{2\zeta} + \frac{g_2(1-2b)(1+4c)p^2 R}{18(1-a)G^2 \zeta}, \quad (IV.64)$$

$$\psi^2(\zeta) = -(p_0 + p)R\zeta - \frac{g_2 R}{9(1-a)G^2} [3(1-2b)p(p_0 + p)^2 + (p_0 + p)^3].$$

Напряжения во втором приближении

$$\sigma_{\phi}^{(2)} = p - (p_0 + p)\varrho^2 - \frac{g_2}{9(1-a)G^2} [3(1-2b)p(p_0 + p)^2(\varrho^2 - \varrho^4) + (p_0 + p)^3(\varrho^2 - \varrho^6)],$$

$$\sigma_{\phi}^{(2)} = p + (p_0 + p)\varrho^2 - \frac{g_2}{9(1-a)G^2} [3(1-2b)p(p_0 + p)^2(3\varrho^4 - \varrho^2) + (p_0 + p)^3(5\varrho^6 - \varrho^2)]. \quad (IV.65)$$

На контуре отверстия напряжение\*

$$\sigma_{\phi}^{(2)} = 2p + p_0 - \frac{2g_2}{9(1-a)G^2} [3(1-2b)p(p_0 + p)^2 + 2(p_0 + p)^3]. \quad (IV.66)$$

Подставив в (IV.66) значения постоянных  $a$  и  $b$  из (IV.10) и (IV.11), получим формулы для напряжений  $\sigma_{\phi}^{(2)}$  как для плоской деформации:

$$\sigma_{\phi}^{(2)} = 2p + p_0 - \frac{8(1+\nu)^2 g_2}{9(1-\nu)E^2} [(1-2\nu)^2 p(p_0 + p)^2 + 2(p_0 + p)^3], \quad (IV.67)$$

так и для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_{\phi}^{(2)} = 2p + p_0 - \frac{8(1+\nu)^3 g_2}{9E^2} [p(p_0 + p)^2 + 2(p_0 + p)^3]. \quad (IV.68)$$

\* Напомним, что индекс над компонентой напряжений указывает на порядок приближения.

Здесь упругие постоянные  $K$  и  $G$  выражены через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ .

Из (IV.67) и (IV.68) видим, что в случае свободного контура, т. е. при  $p_0=0$ , напряжения  $\sigma_\phi^{(2)}$  при плоской деформации больше, чем при плоском напряженном состоянии для всех  $\nu > 0$ . Они будут совпадать при  $\nu=0$ . Максимальное различие между ними будет при  $\nu=0,5$  и равно  $q_2 p^3 / E^2$ .

**Одноосное растяжение упругой плоскости со свободным круговым отверстием.** Пусть упругая плоскость с круговым отверстием радиуса  $R$ , свободным от внешних усилий, подвергается на бесконечности одноосному растяжению:

$$\sigma_x^{(\infty)} = p, \quad \sigma_y^{(\infty)} = 0, \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = 0.$$

Аналогично отмеченному выше найдем во втором приближении напряжения  $\sigma_\phi^{(2)}$  на контуре отверстия в точке  $\phi = \pi/2$  как для плоской деформации:

$$\sigma_\phi^{(2)} = 3p - \frac{(1+\nu)^2 g_2 p^3}{945(1-\nu) E^2} [8683 - 16807\nu(1+\nu) + 5880\nu^2(1-\nu)^2], \quad (\text{IV.69})$$

так и для плоского напряженного состояния:

$$\sigma_\phi^{(2)} = 3p - \frac{8683(1+\nu)^2 g_2 p^3}{945 E^2}. \quad (\text{IV.70})$$

**Чистый сдвиг.** Пусть основное напряженное состояние упругой плоскости с круговым отверстием радиуса  $R$  характеризуется компонентами напряжений

$$\sigma_x^{(\infty)} = p, \quad \sigma_y^{(\infty)} = -p, \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = 0.$$

Напряжения  $\sigma_\phi^{(2)}$  на контуре отверстия в точке  $\phi = \pi/2$  во втором приближении для плоской деформации и плоского напряженного состояния соответственно

$$\sigma_\phi^{(2)} = 4p - \frac{8(1+\nu)^2 g_2 p^3}{945(1-\nu) E^2} [2475 - 5264\nu(1-\nu) + 2240\nu^2(1-\nu^2)]; \quad (\text{IV.71})$$

$$\sigma_\phi^{(2)} = 4p - \frac{440(1+\nu)^2 g_2 p^3}{21 E^2}. \quad (\text{IV.72})$$

**Всестороннее растяжение упругой плоскости с эллиптическим отверстием.** Пусть упругая плоскость со свободным эллиптическим отверстием подвергнута на бесконечности всестороннему растяжению:

$$\sigma_x^{(\infty)} = \sigma_y^{(\infty)} = p, \quad \tau_{xy}^{(\infty)} = 0.$$

Отображающая функция

$$\omega(\xi) = R \left( \frac{1}{\xi} + m\xi \right). \quad (\text{IV.73})$$

Основное напряженное состояние характеризуется функциями

$$\varphi_{1*} = \left[ \frac{p}{2} + \frac{g_2(1-2b)(1+4c)}{18(1-a)G^2} \right] z; \quad \psi_{1*} = 0;$$

$$A_{1k} = -\frac{g_2(1-2b)(1+4c)p^3}{9(1-a)G^2}. \quad (\text{IV.74})$$

Комплексные потенциалы в первом приближении, соответствующие классической линейной задаче, как известно \*,

$$\varphi^{(1)}(\zeta) = \frac{pR}{2} \cdot \frac{1-m\zeta^2}{\zeta}, \quad \psi^{(1)}(\zeta) = -\frac{pR(1+m^2)\zeta}{1-m\zeta}. \quad (\text{IV.75})$$

Параметр  $m$ , являющийся эксцентриситетом эллиптического отверстия, считаем настолько малым, что степенями его выше второй можно пренебречь.

Сохраняя указанную точность, из (IV.58) находим напряжения на контуре отверстия во втором приближении как для плоской деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta}^{(2)} = & 2p(1 + 2m \cos 2\vartheta + 2m^2 \cos 4\vartheta) - \frac{8(1+\nu)^2 g_2 p^3}{9(1-\nu)E^2} \left\{ 2 + (1-2\nu)^2 + \right. \\ & + m \left[ \frac{16}{3}(1-2\nu)^2 + 8\nu(1-\nu) + \frac{74}{5} \right] \cos 2\vartheta + \\ & + m^2 \left[ \frac{4}{3}(1-2\nu)(5+6\nu^2-6\nu) + \frac{40}{3}(1-\nu+\nu^2) + \right. \\ & \left. \left. + \left( \frac{101}{15}(1-2\nu)^2 + 30\nu(\nu-1) + \frac{983}{35} \right) \cos 4\vartheta \right] \right\}, \quad (\text{IV.76}) \end{aligned}$$

так и плоского напряженного состояния:

$$\begin{aligned} \sigma_{\vartheta}^{(2)} = & 2p(1 + 2m \cos 2\vartheta + 2m^2 \cos 4\vartheta) - \frac{8(1+\nu)^2 g_2 p^3}{9E^2} \left[ 3 + \frac{302}{15} m \cos 2\vartheta + \right. \\ & \left. + m^2 \left( 20 + \frac{3656}{105} \cos 4\vartheta \right) \right]. \quad (\text{IV.77}) \end{aligned}$$

Положив в (IV.76) и (IV.77)  $m=0$ , получим соответственно формулы (IV.67) и (IV.68) при  $p_0=0$ , что и следовало ожидать.

### § 3. Метод возмущения формы границы

Основные уравнения задачи в полярных координатах. Развиваемый в этом параграфе приближенный метод решения \*\* задачи требует представления соответствующих основных уравнений § 1 в полярной системе координат.

\* См. § 2 гл. II.

\*\* См. А. Н. Гузь, Г. Н. Савин, И. А. Цурпал [1]. Более подробное изложение метода возмущения формы границы применительно к задачам о концентрации напря-



Выпишем эти уравнения плоской задачи в «безразмерной» полярной системе координат  $r=r^*/R$ ,  $\theta$ . При этом для определенности остановимся на случае плоского напряженного состояния\*, т. е. закон упругости представим в виде\*\* (IV.6) и (IV.7) в координатах  $r$  и  $\theta$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_{\theta} - \sigma_0), \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{3K} k(s_0) \sigma_0 + \frac{1}{2G} g(t_0^2) (\sigma_r - \sigma_0), \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{G} g(t_0^2) \tau_{r\theta},\end{aligned}\quad (IV.78)$$

где  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_{\theta}$  и  $\varepsilon_{r\theta}$ , а также  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{\theta}$  и  $\tau_{r\theta}$  — компоненты соответственно деформаций и напряжений в полярной системе координат  $(r, \theta)$ .

Безразмерные величины выражены через инварианты:

$$\begin{aligned}s_0 &= \frac{\sigma_0}{3K} = \frac{1}{9K} (\sigma_r + \sigma_{\theta}), \\ t_0^2 &= \frac{\tau_{r\theta}^2}{G^2} = \frac{2}{9G^2} (\sigma_r^2 + \sigma_{\theta}^2 - \sigma_r \sigma_{\theta} + 3\tau_{r\theta}^2).\end{aligned}\quad (IV.79)$$

Как и в § 1, примем, что небольшие отклонения от линейной зависимости между напряжениями и деформациями в соотношениях упругости (IV.79) могут быть с достаточной степенью точности отображены функцией  $g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2$ . Поэтому в дальнейшем в соотношениях упругости (IV.79) будем полагать

$$k(s_0) \equiv 1, \quad g(t_0^2) = 1 + g_2 t_0^2, \quad (IV.80)$$

где  $g_2$  — безразмерная постоянная.

При таком выборе нелинейного закона упругости (IV.78) и условиях (IV.80) задача о напряженном состоянии тонкой пластинки сводится к нахождению функции напряжений  $U(r, \theta)$  из нелинейного уравнения\*\*\* четвертого порядка:

$$\begin{aligned}\Delta \Delta U + \frac{2\lambda}{R^4} \left[ \frac{1}{r^4} U_{,\theta} T_{,\theta} - \frac{1}{r^2} (U_{,r\theta} T_{,\theta} + U_{,\theta} T_{,r\theta}) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{2} U_{,rr} T_{,\theta\theta} - U_{,r\theta} T_{,r\theta} + \frac{1}{2} U_{,\theta\theta} T_{,rr} \right) - \frac{1}{2r} (U_{,r} T_{,rr} + \right. \\ \left. + U_{,rr} T_{,r}) - \frac{1}{3} \Delta (T \Delta U) \right] = 0\end{aligned}\quad (IV.81)$$

жений возле отверстий приведено в гл. VI (для случая плоской задачи с несимметричным тензором напряжений) и в гл. X (для случая тонких упругих оболочек, ослабленных отверстиями).

\* Для плоской деформации закон упругости необходимо взять в виде (IV.9) и (IV.10).

\*\* См. Г. Каудерер [1], стр. 117.

\*\*\* Там же, стр. 116.

при соответствующих граничных условиях на контуре отверстия и на «бесконечности». Если функция  $U(r, \theta)$  известна, компоненты напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{R^2} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right] \equiv \frac{1}{R^2} \left[ \frac{1}{r} U_{,r} + \frac{1}{r^2} U_{,\theta\theta} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{R^2} U_{,rr}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{R^2} \left[ \frac{1}{r^2} U_{,\theta} - \frac{1}{r} U_{,r\theta} \right].\end{aligned}\tag{IV.82}$$

В уравнении (IV.81) и соотношениях (IV.82)  $r$  — безразмерная координата, отнесенная к величине  $R$ , характеризующей абсолютные размеры отверстия;  $\Delta$  — оператор Лапласа, имеющий в безразмерных полярных координатах вид

$$\Delta \equiv \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2}.\tag{IV.83}$$

Постоянная материала  $\lambda$  и функция  $T(r, \theta)$  имеют вид

$$\lambda = \frac{K g_2}{(3K + G) G^2} = \mu \beta^2,\tag{IV.84}$$

$$T(r, \theta) = \frac{9}{2} G^2 t_0^2;$$

$\mu = \frac{1}{g_2}$  — малая безразмерная величина;

$$\beta^2 = \frac{K g_2^2}{(3K + G) G^2};$$

$t_0^2$  дано выражением (IV.79), а компоненты  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$  связаны с функцией напряжений  $U(r, \theta)$  соотношениями (IV.82). Малый параметр  $\lambda$ , который характеризует отклонение нелинейного закона упругости от закона Гука, имеет размерность  $M^4/M^2$  и величину порядка  $10^{-15}$ — $10^{-16}$ .

Уравнения для нахождения компонентов перемещений  $u(r, \theta)$  и  $v(r, \theta)$  для нелинейного закона упругости (IV.78) при условии (IV.80) получим, если в соотношении (IV.78) подставим вместо  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$  их значения из (IV.82), а вместо  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_\theta$  и  $\varepsilon_{r\theta}$  — их значения:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta},\tag{IV.85}$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}.$$

Поскольку нас интересует влияние физической нелинейности материала на концентрацию напряжений возле отверстий, в дальнейшем рассмотрим первую основную задачу при условии, что контур отверстия

свободен от внешних усилий и задано напряженное состояние на бесконечности.

**Метод решения для произвольного криволинейного отверстия.** Рассмотрим отверстия такой формы, что функция

$$z^* = R[\zeta + \varepsilon f(\zeta)] \quad (z^* = r^* e^{i\theta}, r^* = Rr, z = re^{i\theta}, \zeta = \rho e^{i\phi}) \quad (\text{IV.86})$$

реализует конформное отображение бесконечной плоскости с круговым отверстием единичного радиуса на бесконечную плоскость с отверстием рассматриваемой формы. В функции (IV.86)  $R$  — действительная постоянная, характеризующая размеры отверстия; функция  $f(\zeta)$  зависит от формы отверстия;  $\varepsilon$  — малый параметр, действительная величина, удовлетворяющая условию  $|\varepsilon| \ll 1$ , и корни уравнения  $1 + \varepsilon f'(\zeta) = 0$  должны лежать в н у т р и окружности единичного радиуса в плоскости  $\zeta$ .

Представим решение уравнения (IV.81) и системы (IV.78), (IV.82), (IV.85) в виде разложений по малым параметрам  $\mu$  и  $\varepsilon$  (IV.84)

$$U(r, \theta; \mu; \varepsilon) = H_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon^j U^{(k,j)}(r, \theta); \quad (\text{IV.87})$$

$$u(r, \theta; \mu; \varepsilon) = H_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon^j U^{(k,j)}(r, \theta), \quad (\text{IV.88})$$

$$v(r, \theta; \mu; \varepsilon) = H_0 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon^j v^{(k,j)}(r, \theta),$$

где постоянную  $H_0$  выбираем из условия  $\frac{H_0^2 \beta^2}{R^4} = 1$ . Отсюда

$$H_0 = \frac{R^2}{\beta} = \frac{GR^2}{g_2} \sqrt{3 + \frac{G}{K}}. \quad (\text{IV.89})$$

Компоненты напряженного и деформированного состояния в системе координат  $(\rho, \theta)$  представим в виде рядов по  $\mu$  и  $\varepsilon$ :

$$\sigma_\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon^j \sigma_\rho^{(k,j)}, \quad \sigma_\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon^j \sigma_\theta^{(k,j)},$$

$$\tau_{\rho\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon^j \tau_{\rho\theta}^{(k,j)}; \quad (\text{IV.90})$$

$$u_\rho = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon^j u_\rho^{(k,j)}, \quad u_\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon^j u_\theta^{(k,j)}. \quad (\text{IV.91})$$

Подставив функцию  $U(r, \theta; \mu; \varepsilon)$  (IV.87) в основное уравнение (IV.81) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu^k \varepsilon^j$ , получим уравнение для определения функции  $U^{(k,j)}$  в виде

$$\Delta \Delta U^{(k,j)}(r, \theta) = L_{(k,j)}(U^{(0,0)}, \dots, U^{(k-1, j-1)}). \quad (\text{IV.92})$$

Приведем явные выражения для правых частей уравнения (IV.92) для некоторых значений  $k$  и  $j$ :

при  $k=0, j=0, 1, 2, \dots$

$$L_{(0,j)} \equiv 0; \quad (\text{IV.93})$$

при  $k=1, j=0$

$$\begin{aligned} L_{(1,0)} = & -\frac{2}{r^2} T_{,r\theta}^{(0,0)} U_{,\theta}^{(0,0)} + \frac{2}{r^2} (T_{,\theta}^{(0,0)} U_{,r\theta}^{(0,0)} + T_{,r\theta}^{(0,0)} U_{,\theta}^{(0,0)}) + \\ & + \frac{1}{r^2} (T_{,rr}^{(0,0)} U_{,\theta\theta}^{(0,0)} + T_{,\theta\theta}^{(0,0)} U_{,rr}^{(0,0)} - 2T_{,r\theta}^{(0,0)} U_{,r\theta}^{(0,0)}) + \\ & + \frac{1}{r} (T_{,rr}^{(0,0)} U_{,r}^{(0,0)} + T_{,r}^{(0,0)} U_{,rr}^{(0,0)}) - \frac{2}{3} \Delta (T^{(0,0)} \Delta U^{(0,0)}); \end{aligned} \quad (\text{IV.94})$$

при  $k=2, j=0$

$$\begin{aligned} L_{(2,0)} = & \frac{2}{3} \Delta (T^{(0,0)} \Delta U^{(0,1)} + T^{(0,1)} \Delta U^{(0,0)}) - \left[ T_{,rr}^{(0,0)} \left( \frac{1}{r^2} U_{,\theta\theta}^{(0,1)} + \frac{1}{r} U_{,r}^{(0,1)} \right) + \right. \\ & + T_{,rr}^{(0,1)} \left( \frac{1}{r^2} U_{,\theta\theta}^{(0,0)} + \frac{1}{r} U_{,r}^{(0,0)} \right) + U_{,rr}^{(0,1)} \left( \frac{1}{r^2} T_{,\theta\theta}^{(0,0)} + \frac{1}{r} T_{,r}^{(0,0)} \right) + \\ & + U_{,rr}^{(0,0)} \left( \frac{1}{r^2} T_{,\theta\theta}^{(0,1)} + \frac{1}{r} T_{,r}^{(0,1)} \right) \left. \right] + 2 \left[ \left( \frac{1}{r} T_{,r\theta}^{(0,0)} - \frac{1}{r^2} T_{,\theta}^{(0,0)} \right) \times \right. \\ & \times \left( \frac{1}{r} U_{,r\theta}^{(0,1)} - \frac{1}{r^2} U_{,\theta}^{(0,1)} \right) + \left( \frac{1}{r} T_{,r\theta}^{(0,1)} - \frac{1}{r^2} T_{,\theta}^{(0,1)} \right) \left( \frac{1}{r} U_{,r\theta}^{(0,0)} - \frac{1}{r^2} U_{,\theta}^{(0,0)} \right) \left. \right]; \end{aligned} \quad (\text{IV.95})$$

при  $k=1, j=1$

$$\begin{aligned} L_{(1,1)} (U_{,\theta}^{(0,0)} U^{(0,1)}) = & T_{,rr}^{(0,0)} \left( \frac{1}{r^2} U_{,\theta\theta}^{(0,1)} + \frac{1}{r} U_{,r}^{(0,1)} \right) + T_{,rr}^{(0,1)} \left( \frac{1}{r^2} U_{,\theta\theta}^{(0,0)} + \frac{1}{r} U_{,r}^{(0,0)} \right) + \\ & + U_{,rr}^{(0,1)} \left( \frac{1}{r^2} T_{,\theta\theta}^{(0,0)} + \frac{1}{r} T_{,r}^{(0,0)} \right) + U_{,rr}^{(0,0)} \left( \frac{1}{r^2} T_{,\theta\theta}^{(0,1)} + \frac{1}{r} T_{,r}^{(0,1)} \right) - \\ & - 2 \left[ \left( \frac{1}{r} T_{,r\theta}^{(0,0)} - \frac{1}{r^2} T_{,\theta}^{(0,0)} \right) \left( \frac{1}{r} U_{,r\theta}^{(0,1)} - \frac{1}{r^2} U_{,\theta}^{(0,1)} \right) + \left( \frac{1}{r} U_{,r\theta}^{(0,0)} - \frac{1}{r^2} U_{,\theta}^{(0,0)} \right) \times \right. \\ & \times \left. \left( \frac{1}{r} T_{,r\theta}^{(0,1)} - \frac{1}{r^2} T_{,\theta}^{(0,1)} \right) \right] - \frac{2}{3} \Delta (T^{(0,1)} \Delta U^{(0,0)} + T^{(0,0)} \Delta U^{(0,1)}), \end{aligned} \quad (\text{IV.96})$$

где

$$\begin{aligned} T_{(r,\theta)}^{(0,0)} = & (U_{,rr}^{(0,0)})^2 - \frac{1}{r} U_{,rr}^{(0,0)} U_{,r}^{(0,0)} + \frac{1}{r^2} [(U_{,r}^{(0,0)})^2 - U_{,rr}^{(0,0)} U_{,\theta\theta}^{(0,0)} + 3(U_{,\theta}^{(0,0)})^2] + \\ & + \frac{2}{r^3} (U_{,r}^{(0,0)} U_{,\theta\theta}^{(0,0)} - 3U_{,r\theta}^{(0,0)} U_{,\theta}^{(0,0)}) + \frac{1}{r^2} [(U_{,\theta\theta}^{(0,0)})^2 + 3(U_{,\theta}^{(0,0)})^2]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{(r\theta)}^{(0,1)} = & 2U_{,rr}^{(0,0)} U_{,rr}^{(0,1)} - \frac{1}{r} (U_{,rr}^{(0,0)} U_{,r}^{(0,1)} + U_{,rr}^{(0,1)} U_{,r}^{(0,0)}) + \\ & + \frac{1}{r^2} (2U_{,r}^{(0,0)} U_{,r}^{(0,1)} - U_{,rr}^{(0,0)} U_{,\theta\theta}^{(0,1)} - U_{,rr}^{(0,1)} U_{,\theta\theta}^{(0,0)} + 6U_{,r\theta}^{(0,0)} U_{,r\theta}^{(0,1)}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2}{r^3} (U_{,r}^{(0,0)} U_{,\theta\theta}^{(0,1)} + U_{,r}^{(0,1)} U_{,\theta\theta}^{(0,0)} - 3U_{,r\theta}^{(0,0)} U_{,\theta}^{(0,1)} - 3U_{,r\theta}^{(0,1)} U_{,\theta}^{(0,0)}) + \\
 & \quad \mp \frac{1}{r^4} (2U_{,\theta\theta}^{(0,0)} U_{,\theta\theta}^{(0,1)} + 6U_{,\theta}^{(0,0)} U_{,\theta}^{(0,1)}). \quad (IV.96a)
 \end{aligned}$$

Поступая аналогично, можно выписать явные выражения для операторов  $L_{(k,j)}$  при любых ( $k > 1, j > 1$ ) значениях  $k$  и  $j$ .

Решение уравнения (IV.92) ищем в виде ряда Фурье:

$$U_{(r,\theta)}^{(k,j)}(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \{f_{(k,j)}^{(m)}(r) \cos m\theta + g_{(k,j)}^{(m)}(r) \sin m\theta\}. \quad (IV.97)$$

Для нахождения компонентов напряжений  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{\rho\theta}$  и перемещений  $u_\rho$  и  $u_\theta$  в криволинейной ортогональной системе координат \* ( $\rho, \theta$ ), даваемой функцией (IV.86), воспользуемся соответствующими формулами \*\* перехода от полярных координат ( $r, \theta$ ) к криволинейной ортогональной системе координат ( $\rho, \theta$ ), связанных отображающей функцией (IV.86).

Раскладывая найденные выражения для компонентов напряжений  $\sigma_\rho$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{\rho\theta}$  и перемещений  $u_\rho$  и  $u_\theta$  в ряды по  $\mu$  и  $\varepsilon$  и принимая во внимание вид функций (IV.86), получаем

$$\begin{aligned}
 \sigma_\rho^{(k,l)} &= H_0 \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) U^{(k,1)}(\rho, \theta) + H_0 \sum_{m=0}^{j-1} \left[ L_1^{(j-m)} \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + \right. \\
 & \quad \left. + L_2^{(j-m)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - L_3^{(j-m)} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\rho} \right] U^{(k,m)}(\rho, \theta), \\
 \sigma_\theta^{(k,l)} &= H_0 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} U^{(k,l)}(\rho, \theta) + H_0 \sum_{m=0}^{j-1} \left[ L_1^{(j-m)} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \right. \\
 & \quad \left. + L_2^{(j-m)} \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) + L_3^{(j-m)} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\rho} \right] U^{(k,m)}(\rho, \theta), \quad (IV.98) \\
 \tau_{\rho\theta}^{(k,l)} &= -H_0 \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\rho} U^{(k,l)}(\rho, \theta) - H_0 \sum_{m=0}^{j-1} \left[ (L_1^{(j-m)} - 2L_2^{(j-m)}) \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\rho} + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} L_3^{(j-m)} \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \right] U^{(k,m)}(\rho, \theta);
 \end{aligned}$$

\* Координатная линия  $\rho=1$  совпадает с контуром рассматриваемого отверстия.

\*\* См. гл. VI и X, а также работу Г. Н. Савин, А. Н. Гузь [1], где аналогичные преобразования проведены в задаче о концентрации напряжений возле отверстий в случае плоской задачи моментной теории упругости и в оболочках.

$$u_q^{(k,l)} = u^{(k,l)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_5^{(j-m)} u^{(k,m)} + L_6^{(j-m)} v^{(k,m)}],$$

(IV.99)

$$u_\phi^{(k,l)} = v^{(k,l)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_5^{(j-m)} v^{(k,m)} - L_6^{(j-m)} u^{(k,m)}].$$

Подставив функции  $U(r, \theta, \mu, \varepsilon)$  (IV.87) и  $u(r, \theta)$ ,  $v(r, \theta)$  (IV.88) в (IV.85) и приравняв нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\mu^k$ ,  $\varepsilon^j$ , найдем систему уравнений для определения  $u^{(k,l)}(r, \theta)$ ,  $v^{(k,l)}(r, \theta)$ , которые входят в (IV.99).

Функции  $U^{(k,l)}(\varrho, \phi)$ , входящие в (IV.98), есть решения уравнений (IV.92) в виде (IV.97), в которых переменные  $r$  и  $\theta$  формально\* заменены соответственно на  $\varrho$  и  $\phi$ . При этом произвольные постоянные, входящие в  $f_{(k,l)}^{(m)}(r)$  и  $g_{(k,l)}^{(m)}(r)$  (IV.97), определяются из соответствующих граничных условий для  $U^{(k,l)}(\varrho, \phi)$ , которые получаются из разложений в двойные ряды по  $\mu$  и  $\varepsilon$ , аналогичных разложениям (IV.87) и (IV.88) заданных условий на рассматриваемом контуре.

Компоненты напряженного и деформированного состояния на контуре рассматриваемого отверстия найдем из (IV.90) и (IV.97) при  $\rho=1$ .

Рассмотрим задачу, когда на контуре  $\Gamma$  отверстия заданы напряжения

$$\sigma_\varrho|_\Gamma = \psi_1(r, \theta, \mu), \quad \tau_{\varrho\phi}|_\Gamma = \psi_2(r, \theta, \mu). \quad (\text{IV.100})$$

Для общности положим, что в (IV.100)  $\psi_1$  и  $\psi_2$  зависят от  $\mu$ . Уравнение контура отверстия в параметрической форме определяется функцией (IV.86) и может быть представлено в виде

$$r=r(\rho, \phi), \quad \theta=\theta(\rho, \phi) \quad \text{при} \quad \rho=1. \quad (\text{IV.101})$$

Воспользовавшись (IV.86) и (IV.101), представим правые части (IV.100) в виде двойных рядов по  $\mu$  и  $\varepsilon$ :

$$\sigma_\varrho|_\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon^j \psi_1^{(k,l)}(\phi), \quad \tau_{\varrho\phi}|_\Gamma = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^k \varepsilon^j \psi_2^{(k,l)}(\phi). \quad (\text{IV.102})$$

Подставляя в (IV.102) выражения (IV.90), положив в последних  $\varrho=1$ , и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем соотношения

$$\sigma_\varrho^{(k,l)}|_\Gamma = \psi_1^{(k,l)}(\phi), \quad \tau_{\varrho\phi}^{(k,l)}|_\Gamma = \psi_2^{(k,l)}(\phi). \quad (\text{IV.103})$$

\* Иными словами, в найденной функции  $U(r, \theta)$  вместо  $r$  и  $\theta$  поставлены переменные  $\rho$  и  $\phi$ .

Из (IV.98), приняв во внимание (IV.103), получим граничные условия для определения функции  $U_{(r,\theta)}^{(k,i)}$  в виде

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) U^{(k,i)}(\varrho, \theta) \Big|_{\varrho=1} = \frac{1}{H_0} \Psi_1^{(k,i)}(\theta) \Big|_{\varrho=1} - \\ & - \left\{ \sum_{m=0}^{j-1} [L_1^{(j-m)} \left( \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) + L_2^{(j-m)} \left( \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} - \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - \right. \\ & \quad \left. - L_3^{(j-m)} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\varrho} \right] U^{(k,m)}(\varrho, \theta) \Big\} \Big|_{\varrho=1}; \end{aligned} \quad (\text{IV.104})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\varrho} U^{(k,i)}(\varrho, \theta) \Big|_{\varrho=1} &= - \frac{1}{H_0} \Psi_2^{(k,i)}(\theta) \Big|_{\varrho=1} - \left\{ \sum_{m=0}^{j-1} [L_1^{(j-m)} - 2L_2^{(j-m)} \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \times \right. \\ & \quad \left. \times \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2} L_3^{(j-m)} \left( \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \right) \right] U^{(k,m)}(\varrho, \theta) \Big\} \Big|_{\varrho=1}. \end{aligned}$$

Согласно (IV.87) под решением, полученным в  $n$ -м приближении, будем понимать функцию

$$U_n(r, \theta, \mu, \varepsilon) = H_0 \sum_{k,j=0}^{k+j=n-1} \mu^k \varepsilon^j U^{(k,j)}(r, \theta). \quad (\text{IV.105})$$

Функции  $U^{(k,i)}(r, \theta)$  есть решения уравнений (IV.92) в виде ряда Фурье (IV.97). Функции же  $U^{(k,i)}(\varrho, \theta)$  есть решения этих уравнений, в которых переменные  $r$  и  $\theta$  формально заменены соответственно на  $\varrho$  и  $\theta$ .

В (IV.98) и (IV.99)  $L_1^{(j-m)}, L_2^{(j-m)}, \dots, L_6^{(j-m)}$  — дифференциальные операторы, вид которых зависит от функции  $f(\zeta)$  (IV.86).

Развернутые выражения этих операторов для первого — третьего приближений приведены ниже:

$$\begin{aligned} L_1^{(0)} = L_2^{(0)} = L_3^{(0)} = L_5^{(0)} = L_6^{(0)} &\equiv 0, \quad L_1^{(1)} = P_1 \frac{\partial}{\partial \varrho} + P_2 \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ L_1^{(2)} = P_3 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + P_4 \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} + P_5 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + P_6 \frac{\partial}{\partial \varrho} + P_7 \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad L_2^{(1)} &\equiv 0, \\ L_3^{(1)} &= -i [f'(\zeta) - \overline{f'(\zeta)}] - \frac{i}{\zeta \bar{\zeta}} [\zeta \bar{f}(\zeta) - \bar{\zeta} f(\zeta)]. \end{aligned} \quad (\text{IV.106})$$

$$L_3^{(2)} = -\frac{i}{2\zeta \bar{\zeta}} [\bar{\zeta}^2 f^2(\zeta) - \zeta^2 \bar{f}^2(\bar{\zeta})] + \zeta^2 \bar{\zeta}^2 [f'^2(\zeta) - \overline{f'^2(\zeta)}] + P_8 \frac{\partial}{\partial \varrho} + P_9 \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$L_5^{(1)} = L_1^{(1)}, \quad L_5^{(2)} = L_1^{(2)} - \frac{1}{2} L_2^{(2)}, \quad L_6^{(1)} = \frac{1}{2} L_3^{(1)}, \quad L_6^{(2)} = \frac{1}{2} L_3^{(2)},$$

где введены обозначения:

$$P_1 = \frac{\bar{\zeta}f(\zeta) + \zeta\bar{f}(\bar{\zeta})}{2q}, \quad P_3 = \frac{[\bar{\zeta}f(\zeta) + \zeta\bar{f}(\bar{\zeta})]^2}{8q^2},$$

$$P_2 = \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta})}{2iq} \cos \vartheta - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})}{2q} \sin \vartheta,$$

$$P_4 = \frac{\bar{\zeta}f(\zeta) + \zeta\bar{f}(\bar{\zeta})}{q^2} \left[ \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta})}{4i} \cos \vartheta - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})}{4} \sin \vartheta \right],$$

$$P_5 = \frac{1}{8iq^2} \{2if(\zeta)\bar{f}(\bar{\zeta}) - i[f^2(\zeta) + \bar{f}^2(\bar{\zeta})] \cos \vartheta - [f^2(\zeta) - \bar{f}^2(\bar{\zeta})] \sin 2\vartheta\},$$

$$P_6 = -\frac{1}{8q^3} [\bar{\zeta}f(\zeta) - \zeta\bar{f}(\bar{\zeta})]^2,$$

$$P_7 = \frac{1}{4iq^2} \{[f^2(\zeta) + \bar{f}^2(\bar{\zeta})] i \sin 2\vartheta - [f^2(\zeta) - \bar{f}^2(\bar{\zeta})] \cos 2\vartheta\},$$

$$P_8 = \frac{\bar{\zeta}f(\zeta) + \zeta\bar{f}(\bar{\zeta})}{2iq} [f'(\zeta) - \bar{f}'(\bar{\zeta}) + \frac{\zeta\bar{f}(\bar{\zeta}) - \bar{\zeta}f(\zeta)}{\zeta\bar{\zeta}}],$$

$$P_9 = \left[ \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta})}{2iq} \cos \vartheta - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})}{2q} \sin \vartheta \right] \left[ \frac{f'(\zeta) - \bar{f}'(\bar{\zeta})}{i} + \frac{\zeta\bar{f}(\bar{\zeta}) - \bar{\zeta}f(\zeta)}{i\zeta\bar{\zeta}} \right].$$

**Распределение напряжений возле кругового отверстия\***. Решение задачи об упругом равновесии физически нелинейной упругой неограниченной пластинки с круговым отверстием радиуса  $R$ , по контуру которого заданы внешние усилия, а «на бесконечности» — любое поле напряжений, сводится к интегрированию в первом приближении бигармонического уравнения (IV.92) (при условии (IV.93)) при заданных граничных условиях на контуре отверстия и на «бесконечности»; в последующих же приближениях\*\* — к интегрированию соответствующего данному приближению неоднородного дифференциального уравнения (IV.92) при правых частях из (IV.94) — (IV.96) и при однородных граничных условиях на контуре отверстия

$$\frac{1}{r^2} U_{,\theta\theta}^{(i,0)} + \frac{1}{r} U_{,r}^{(i,0)} = 0, \quad \frac{1}{r^2} U_{,\theta}^{(i,0)} - \frac{1}{r} U_{,r\theta}^{(i,0)} = 0 \quad \text{при } r = R \quad (\text{IV.107})$$

и условиях «на бесконечности»

$$\frac{1}{r^2} U_{,\theta\theta}^{(i,0)} + \frac{1}{r} U_{,r}^{(i,0)} = 0 \quad \text{при } r = \infty;$$

$$U_{,rr}^{(i,0)} = 0, \quad \frac{1}{r^2} U_{,\theta}^{(i,0)} - \frac{1}{r} U_{,r\theta}^{(i,0)} = 0. \quad (\text{IV.108})$$

\* Концентрация напряжений возле кругового отверстия при законе упругости (IV.6) для случая простого растяжения пластинки впервые рассматривалась Ф. Ліндга [1]; для других случаев напряженного состояния «на бесконечности» — И. А. Цурпалом [1—12].

\*\* Поскольку задача нелинейная, принцип наложения не имеет места.



Рассмотрим некоторые частные случаи.

*Всестороннее равномерное растяжение:*

$$\sigma_r^{(\infty)} = \sigma_\theta^{(\infty)} = p, \quad \tau_{r\theta}^{(\infty)} = 0. \quad (\text{IV.109})$$

Функцию напряжений первого приближения дает линейная классическая теория:

$$U^{(0,0)}(r) = \frac{p}{2H_0}(r^2 - 2 \ln r), \quad (\text{IV.110})$$

где  $H_0$  определяется формулой (IV.89).

Искомые полные компоненты напряжений должны удовлетворять условиям

$$(\sigma_r)_{r=1} = 0, \quad (\sigma_r)_{r=\infty} = (\sigma_\theta)_{r=\infty} = p. \quad (\text{IV.111})$$

По известной функции напряжений (IV.110) находим правую часть уравнения (IV.92), тем самым определяя уравнение для функции  $U^{(1,0)}$ :

$$\Delta \Delta U^{(1,0)} = -4 \frac{p^3}{H_0^3} \left( \frac{4}{r^6} + \frac{18}{r^8} \right), \quad (\text{IV.112})$$

которое должно быть проинтегрировано при условиях (IV.107) и (IV.108).

Решение уравнения (IV.112), удовлетворяющее условиям (IV.107) и (IV.108):

$$U_{(r)}^{(1,0)} = -\frac{p^3}{H_0^3} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^4} \right) + \ln r \right]. \quad (\text{IV.113})$$

Внося функции  $U^{(0,0)}$  (IV.110) и  $U^{(1,0)}$  (IV.113) в (IV.105), найдем функцию напряжений во втором приближении\*:

$$U_2(r, \mu) = H_0 [U^{(0,0)}(r) + \mu U^{(1,0)}(r)]. \quad (\text{IV.114})$$

Из (IV.82) и (IV.114) легко находим (во втором приближении) формулы для компонентов напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$ .

Для рассматриваемой задачи коэффициент концентрации напряжений по линейной теории достигает наибольшего значения на контуре отверстия и равен двум. В нашем случае, т. е. при учете физической нелинейности материала, коэффициент концентрации будет зависеть от величины внешней нагрузки и механических свойств материала и во втором приближении\*\*, как следует из (IV.82) и (IV.105):

$$k^{(2)} = \left( \frac{\sigma_\theta}{p} \right)_{r=1} = \left( \frac{\sigma_\theta^{(0,0)}}{p} \right)_{r=1} + \lambda \left( \frac{\sigma_\theta^{(1,0)}}{p} \right)_{r=1} = 2(1 - 1,5\lambda p^2), \quad (\text{IV.115})$$

\* В самом деле, функция  $U_2(r, \theta, \mu, \varepsilon)$  (IV.105) для любого криволинейного отверстия будет иметь вид  $U_2(r, \theta, \mu, \varepsilon) = H_0 (U^{(0,0)} + \mu U^{(1,0)} + \varepsilon U^{(0,1)} + \mu \varepsilon U^{(1,1)})$ . Но для кругового отверстия  $\varepsilon = 0$ , и мы приходим к  $U_2(r, \mu)$  (IV.114).

\*\* В формулах (IV.115) и (IV.116) индекс над величиной указывает на порядок приближения.

а в третьем приближении —

$$k^{(3)} = \left( \frac{\sigma_{\theta}}{\rho} \right)_{r=1} = 2(1 - 1,500\lambda\rho^2 + 10,605\lambda^2\rho^4). \quad (\text{IV.116})$$

На рис. IV.2 приведены графики зависимости коэффициента концентрации напряжений  $k^{(2)}$  (IV.115) от внешней нагрузки и упругих свойств материала:

кривая 1 построена для меди с упругими характеристиками

$$K = 1,305 \cdot 9,81 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2,$$

$$G = 0,461 \cdot 9,81 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2$$

$$g_2 = 7,260 \cdot 10^6,$$

$$(\text{IV.117})$$

$$\lambda = \lambda_1 = \frac{1,019}{9,81^2} 10^{-13} \frac{1}{(\text{н/м}^2)^2};$$

кривая 2 соответствует меди с характеристиками

$$K = 1,343 \cdot 9,81 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2,$$

$$G = 0,451 \cdot 9,81 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2,$$

$$g_2 = 0,180 \cdot 10^6,$$

$$(\text{IV.118})$$

$$\lambda = \lambda_2 = \frac{0,226}{9,81^2} 10^{-14} \frac{1}{(\text{н/м}^2)^2};$$

кривая 3 соответствует сплаву алюминиево-бронзы, для которой

$$K = 1,324 \cdot 9,81 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2, \quad G = 0,468 \cdot 9,81 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2,$$

$$g_2 = 0,040 \cdot 10^6, \quad \lambda = \lambda_3 = \frac{0,055}{9,81^2} 10^{-14} \frac{1}{(\text{н/м}^2)^2}; \quad (\text{IV.119})$$

кривая 4 соответствует мартеновской стали, для которой

$$K = 1,786 \cdot 9,81 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2, \quad G = 0,853 \cdot 9,81 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2,$$

$$g_2 = 0,085 \cdot 10^6, \quad \lambda = \lambda_4 = \frac{0,033}{9,81^2} 10^{-14} \frac{1}{(\text{н/м}^2)^2}. \quad (\text{IV.120})$$

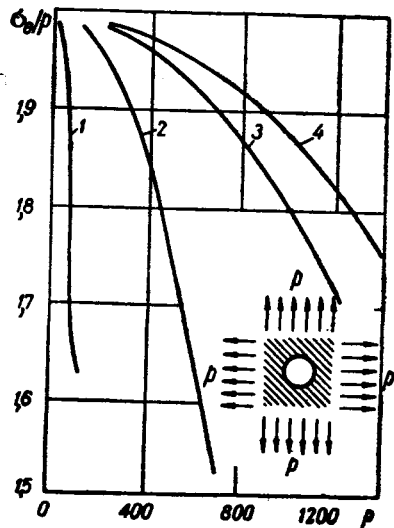


Рис. IV.2

В табл. IV.1 приведены данные для материала с упругими характеристиками (IV.117), показывающие влияние величины внешней нагрузки на коэффициент концентрации напряжений, найденный в первом, втором и третьем приближениях, а также величину поправок к первому и второму приближениям, вносимых последующими слагаемыми в функции напряжений (IV.105).

Подсчеты напряжений для указанных выше материалов с упругими характеристиками (IV.117) — (IV.120) показали, что для осесимметрических задач \* при незначительном отклонении закона упругости от закона Гука можно ограничиться при инженерных расчетах вторым приближением.

Таблица IV.1

$\rho/9,81 \cdot 10^4$ н/м <sup>3</sup>	Коэффициент концентрации напряжений ( $k=\sigma_\theta/\rho$ ) для $\lambda_1=1,019 \cdot 10^{-5}$				
	Первое приближение (линейная теория)	Поправка к первому приближению	Второе приближение	Поправка ко второму приближению	Третье приближение
40	2,000	-0,047	1,953	0,006	1,959
60	2,000	-0,105	1,895	0,023	1,918
80	2,000	-0,188	1,811	0,078	1,889

Одноосное растяжение:  $\sigma_x^{(\infty)} = \rho$ ,  $\sigma_y^{(\infty)} = \tau_{xy}^{(\infty)} = 0$  (рис. IV.3, где кривая 1 соответствует мартеновской стали, кривая 2 — алюминиевой бронзе, кривая 3 — чистой меди). В первом приближении функция напряжений согласно линейной теории

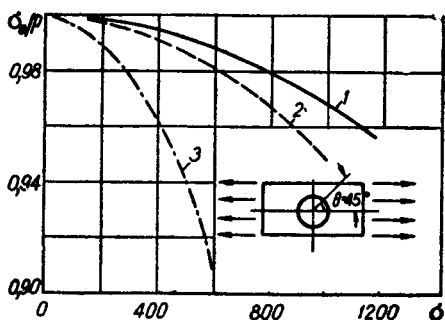


Рис. IV.3

$$U^{(0,0)}(r, \theta) = \frac{P}{4H_0} \left[ r^2 - 2 \ln r + \left( 2 - r^2 - \frac{1}{r^2} \right) \cos 2\theta \right]. \quad (\text{IV.121})$$

Зная функцию  $U^{(0,0)}$  из (IV.93) — (IV.97), находим явные выражения для правых частей уравнения (IV.92), которое совместно с граничными условиями (IV.107) и условиями «на бесконечности»

(IV.108) определяет функции  $U^{(k,j)}$  ( $k, j=0, 1, 2, \dots$ ), входящие в функцию напряжений  $U_n(r, \theta)$  (IV.105) в  $n$ -м приближении. Определив функцию  $U_n(r, \theta)$ , находим компоненты напряжений по формулам (IV.82).

Функция  $U^{(0,0)}$  имеет вид\*\*

$$U^{(1,0)}(r, \theta) = \frac{p^3}{H_0^3} \left[ -0,5292 \ln r - 0,0312 \frac{1}{r^2} - 0,1510 \frac{1}{r^4} + 0,1354 \frac{1}{r^6} - \right. \\ \left. - 0,0844 \frac{1}{r^8} + \left( 0,5932 + 0,1257 \frac{1}{r^2} - 1,8750 \frac{\ln r}{r^2} - 1,1042 \frac{1}{r^4} + 0,4562 \frac{1}{r^6} - \right. \right.$$

\* См. работу И. А. Цурпала [2], где рассмотрена осесимметрическая задача о напряжениях в толстостенной трубе (задача Ляме).

\*\* См. Ф. Jindra [1] или Г. Каудерер [1], стр. 126, 127.

$$\begin{aligned}
 & -0,1312 \frac{1}{r^8} + 0,0603 \frac{1}{r^{10}}) \cos 2\beta + \left( -0,1094 - 0,7589 \frac{1}{r^2} + 0,7500 \frac{\ln r}{r^2} + \right. \\
 & \quad \left. + 0,8884 \frac{1}{r^4} + 1,1250 \frac{\ln r}{r^4} - 0,0201 \frac{1}{r^8} \right) \cos 4\theta + \\
 & \quad \left. + \left( -0,0312 + 0,1906 \frac{1}{r^2} - 0,2875 \frac{1}{r^4} + 0,1281 \frac{1}{r^8} \right) \cos 6\theta \right]. \quad (\text{IV.122})
 \end{aligned}$$

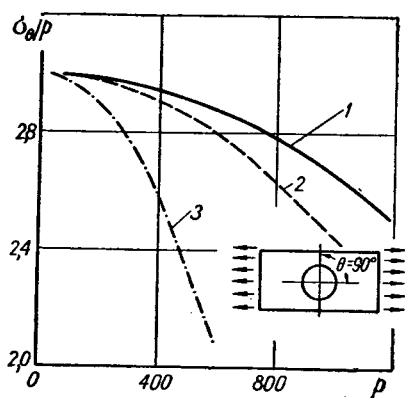


Рис. IV.4

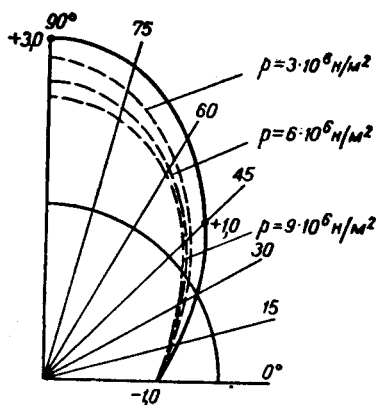


Рис. IV.5

Аналогично могут быть определены и функции  $U^{(1,1)}$ ,  $U^{(2,0)}$ . Найдя функции напряжений  $U_n^{(n)}(r, \theta, \mu, \varepsilon)$  в  $n$ -м приближении, компоненты напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$  (в том же приближении) определим по формулам (IV.82).

Так как нас интересует влияние физической нелинейности материала пластинки на коэффициент концентраций напряжений, то приведем формулу для подсчета напряжений  $\sigma_\theta$  по контуру отверстия:

$$\begin{aligned}
 k^{(2)} &= \left( \frac{\sigma_\theta}{p} \right)_{r=1} = 1 - (2 - 4,388\lambda p^2) \cos 2\theta - \\
 & - \lambda p^2 (3,066 + 2,107 \cos 4\theta - 0,775 \cos 6\theta). \quad (\text{IV.123})
 \end{aligned}$$

На рис. IV.4 (обозначения те же, что и на рис. IV.3) приведены графики изменения коэффициента концентрации напряжений  $k^{(2)}$  (IV.123) в зависимости от величины внешней нагрузки  $p$  для материалов с упругими характеристиками (IV.117) — (IV.120) в точках контура  $\theta = \pi/4$  и  $\theta = \pi/2$ .

На рис. IV.5 и IV.6 показаны графики изменения коэффициента концентрации напряжений  $k^{(2)}$  (IV.123) по контуру отверстия для тех же материалов (сплошные линии соответствуют линейной теории, а штриховые — нелинейной).

*Чистый сдвиг\**:  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$  (рис. IV.7). В первом приближении функция напряжений согласно линейной теории

$$U^{(0,0)}(r, \theta) = \frac{\tau}{2H_0} \left( 2 - r^2 - \frac{1}{r^2} \right) \sin 2\theta. \quad (\text{IV.124})$$

Функцию  $U^{(1,0)}$  и последующие определим методом, указанным выше:

$$U^{(1,0)}(r, \theta) = \frac{\tau^3}{H_0^3} \left[ \left( \frac{333}{140} + 3,64 \frac{1}{r^2} - 12 \frac{1}{r^2} \ln r - \frac{17}{2} \cdot \frac{1}{r^4} + \frac{61}{20} \cdot \frac{1}{r^6} - \frac{21}{20} \cdot \frac{1}{r^8} + \frac{27}{56} \cdot \frac{1}{r^{10}} \right) \sin 2\theta + \left( \frac{1}{4} - \frac{61}{40} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{23}{10} \cdot \frac{1}{r^4} - \frac{41}{40} \cdot \frac{1}{r^6} \right) \sin 6\theta \right]. \quad (\text{IV.125})$$

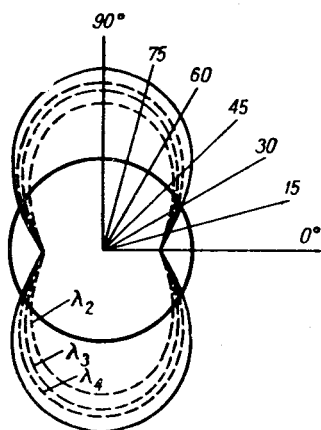


Рис. IV.6

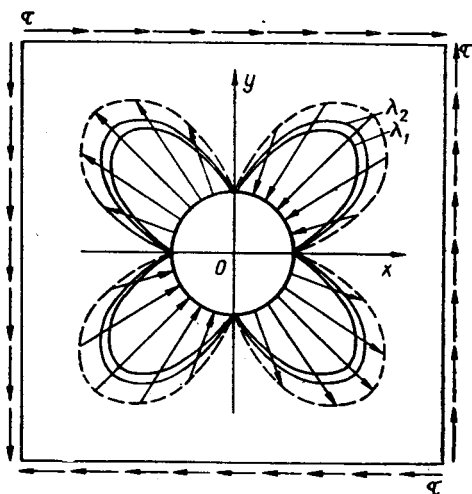


Рис. IV.7

Коэффициент концентрации напряжений по контуру отверстия во втором приближении

$$k^{(2)} = \left( \frac{\sigma_{\theta}}{\tau} \right)_{r=1} = (4 - 17,380\lambda\tau^2) \sin 2\theta - 6,200\lambda\tau^2 \sin 6\theta. \quad (\text{IV.126})$$

На рис. IV.7 показано изменение коэффициента концентрации  $k$  (IV.126) для двух случаев:  $\lambda = \lambda_1$ ,  $\tau = 70 \cdot 9,81 \cdot 10^4$  н/м<sup>2</sup> и  $\lambda = \lambda_3$ ,  $\tau = 700 \cdot 9,81 \cdot 10^4$  н/м<sup>2</sup>. Сплошные линии — данные нелинейной теории, а штриховые — линейной.

*Чистый изгиб полосы парами M*. Функция напряжений согласно линейной теории для первого приближения

$$U^{(0,0)} = \frac{M}{8JH_0} \left[ \left( -\frac{1}{r} - r^3 \right) \sin \theta + \left( -\frac{1}{r} + \frac{1}{3} r^3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{r^3} \right) \sin 3\theta \right]. \quad (\text{IV.127})$$

\* Подробнее см. И. А. Цурпал [4].

Подставляя функцию (IV.127) и ее производные в (IV.94), найдем дифференциальное уравнение для функции  $U^{(1,0)}$ , интегрируя которое получаем\*

$$\begin{aligned}
 U^{(1,0)}(r, \theta) = & \frac{M^3}{8JH_0} \left[ \frac{1}{28} \cdot \frac{1}{r^{11}} - \frac{19}{320} \cdot \frac{1}{r^9} + \frac{371}{1920} \cdot \frac{1}{r^7} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r^5} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{613}{2240} \cdot \frac{1}{r} + \frac{r^5}{12} \right) \sin \theta + \\
 & + \frac{1}{8} \left( -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r^{13}} + \frac{23}{224} \cdot \frac{1}{r^{11}} - \frac{43}{56} \cdot \frac{1}{r^9} - \frac{71}{40} \cdot \frac{1}{r^7} + \frac{7}{r^5} - \frac{391}{70} \cdot \frac{1}{r^3} - \right. \\
 & \left. - \frac{1247}{840} \cdot \frac{1}{r} + \frac{17}{8} r \right) \sin 3\theta + \frac{1}{8} \left( \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{r^{11}} - \frac{5}{56} \cdot \frac{1}{r^9} + \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{r^7} + \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{r^5} - \right. \\
 & \left. - \frac{19}{42} \cdot \frac{1}{r^3} + \frac{17}{24} \cdot \frac{1}{r} - \frac{7}{24} r \right) \sin 5\theta + \frac{1}{8} \left( -\frac{2401}{3360} \cdot \frac{1}{r^7} + \right. \\
 & \left. + \frac{139}{120} \cdot \frac{1}{r^5} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{r^3} - \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{r} + \frac{7}{96} r \right) \sin 7\theta + \frac{1}{8} \left( \frac{51}{280} \cdot \frac{1}{r^9} - \right. \\
 & \left. - \frac{41}{224} \cdot \frac{1}{r^7} - \frac{13}{56} \cdot \frac{1}{r^5} + \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{r^3} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{r} - \frac{9}{160} r \right) \sin 9\theta \Big]. \quad (\text{IV. 128})
 \end{aligned}$$

Коэффициент концентрации напряжений на контуре кругового отверстия

$$\begin{aligned}
 k = \left( \frac{\sigma_\theta}{M/J} \right)_{r=1} = & -\sin \theta + \sin 3\theta + \lambda \frac{M^2}{J^2} (1,453 \sin \theta - \\
 & - 2,363 \sin 3\theta + 0,021 \sin 5\theta - 0,228 \sin 7\theta + 0,096 \sin 9\theta). \quad (\text{IV. 129})
 \end{aligned}$$

**Эллиптическое отверстие.** *Всестороннее равномерное растяжение — сжатие.* Рассмотрим простейший случай всестороннего равномерного растяжения усилиями  $p$  бесконечной изотропной пластинки из физически нелинейного материала (рис. IV.8), подчиняющегося закону упругости (IV.78) при условиях (IV.80) с эллиптическим отверстием.

Функция, отображающая внешность эллиптического отверстия (IV.86) на внешность круга единичного радиуса для этого случая, как известно, имеет вид

$$z^* = R \left( \zeta + \frac{\varepsilon}{\zeta} \right), \quad (\text{IV. 130})$$

где

$$R = \frac{a+b}{2}, \quad \varepsilon = \frac{a-b}{a+b}, \quad \zeta = \rho e^{i\theta}, \quad z^* = R \rho e^{i\theta}; \quad (\text{IV. 131})$$

$a$  и  $b$  — полуоси эллипса (см. рис. IV.8). Функция  $f(\zeta)$  в (IV.86), как видим, в данном случае\*\*  $f(\zeta) = 1/\zeta$ .

\* См. И. А. Цурпал [12], а также его работы [6—9], где изучается влияние подкрепленного кругового отверстия упругим (линейным или нелинейным) кольцом.

\*\* Для квадратного и треугольного отверстий с закругленными углами функция  $f(\zeta)$  соответственно  $f(\zeta) = 1/\zeta^3$  и  $f(\zeta) = 1/\zeta^2$  (см. гл. I).

Приближенное решение этой задачи с учетом трех приближений сводится к последовательному интегрированию уравнений (IV.92) с учетом вида операторов (IV.93) — (IV.96). Функции напряжений первого — третьего приближений для всесторонне растянутой физически нелинейной упругой пластинки с круговым отверстием известны\*:

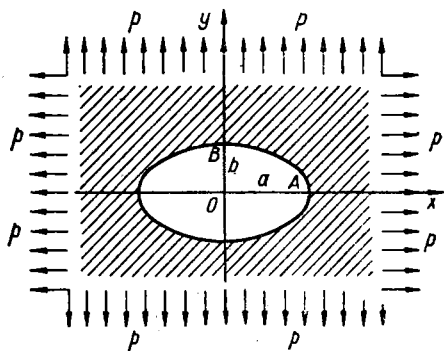


Рис. IV.8

$$U^{(0,0)} = \frac{p}{2H_0} (r^2 - 2 \ln r); \quad (\text{IV. 132})$$

$$U^{(1,0)} = -\frac{p^3}{H_0^3} \times \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{1}{r^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^4} \right) + \ln r \right]; \quad (\text{IV. 133})$$

$$U^{(2,0)} = \frac{p^5}{H_0^5} \left[ \frac{13}{5} \ln r + \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{r^2} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{r^4} + \frac{47}{36} \cdot \frac{1}{r^6} + \frac{51}{80} \cdot \frac{1}{r^8} \right) \right]. \quad (\text{IV. 134})$$

Функция напряжений для линейно-упругой пластинки с эллиптическим отверстием\*\*

$$U^{(0,1)}(r, \theta) = \frac{p}{H_0} \left( \frac{1}{r^2} - 1 \right) \cos 2\theta,$$

$$U^{(0,2)}(r, \theta) = \frac{p}{H_0} \left[ \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2} \right) \cos 4\theta - \ln r \right]. \quad (\text{IV. 135})$$

Подставляя функции (IV. 132) в (IV. 96 а), найдем функцию  $T^{(0,0)}(r, \theta)$  в виде

$$T^{(0,0)} = \frac{p^2}{H_0^2} \left( 1 + 3 \frac{1}{r^4} \right). \quad (\text{IV. 136})$$

Зная функции (IV. 132) и (IV. 135), из (IV. 96 а) найдем функцию

$$T^{(0,1)}(r, \theta) = 4 \frac{p^2}{H_0^2} \cdot \frac{1}{r^2} \left( 1 - 3 \frac{1}{r^2} + 9 \frac{1}{r^4} \right) \cos 2\theta. \quad (\text{IV. 137})$$

Подставляя функции (IV.132), (IV.135) — (IV.137) и их производные в (19), найдем развернутое выражение для оператора  $L^{(1,1)}$ .

Дифференциальное уравнение (IV.60) для функции  $U^{(1,1)}(r, \theta)$  будет иметь вид

$$\Delta \Delta U^{(1,1)} + 64 \frac{p^3}{H_0^3} \left( \frac{1}{r^8} + 36 \frac{1}{r^{10}} \right) \cos 2\theta = 0. \quad (\text{IV. 138})$$

Частный интеграл уравнения (IV. 138)

$$U_{\text{част}}^{(1,1)}(r, \theta) = -\frac{p^3}{H_0^3} \left( \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{r^4} + \frac{6}{5} \cdot \frac{1}{r^6} \right) \cos 2\theta. \quad (\text{IV. 139})$$

\* См. И. А. Цурпал [9].

\*\* См. А. Н. Гузь [2].

Общий интеграл однородного уравнения (IV. 138)

$$U_{\text{одн}}^{(1,1)}(r, \theta) = \sum_{m=2}^{\infty} (C_{m3} r^{-m+2} + C_{m4} r^{-m}) \cos m\theta. \quad (\text{IV. 140})$$

Постоянные интегрирования  $C_{m3}$  и  $C_{m4}$  в (IV. 140) определим из граничных условий (IV. 104):

$$\left( \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) U^{(1,1)}(\varrho, \theta) \Big|_{\varrho=1} + R \left[ \cos 2\theta \frac{\partial}{\partial \varrho} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \right] U^{(1,0)}(\varrho, \theta) \Big|_{\varrho=1} = 0, \quad (\text{IV. 141})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\varrho} U^{(1,1)}(\varrho, \theta) \Big|_{\varrho=1} - R \left[ 2 \sin 2\theta \left( \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) \right] U^{(1,0)}(\varrho, \theta) \Big|_{\varrho=1} = 0.$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательное выражение для функции  $U^{(1,1)}(r, \theta)$ :

$$U^{(1,1)}(r, \theta) = -\frac{1}{30} \cdot \frac{p^3}{H_0^3} \left( 32 - 73 \frac{1}{r^2} + 5 \frac{1}{r^4} + 36 \frac{1}{r^6} \right) \cos 2\theta. \quad (\text{IV. 142})$$

Функция напряжений (IV. 105) в третьем приближении

$$U_3(r, \theta, \mu, \varepsilon) = H_0 [U^{(0,0)} + \mu U^{(1,0)} + \mu^2 U^{(2,0)} + \varepsilon U^{(0,1)} + \varepsilon^2 U^{(0,2)} + \mu \varepsilon U^{(1,1)}]. \quad (\text{IV. 143})$$

По формулам (IV.90), приняв во внимание значения компонентов напряжений (IV.98), а также функций (IV.132)—(IV.137), (IV.142) и (IV.143), определим напряженное состояние в физически нелинейной тонкой пластинке, ослабленной эллиптическим отверстием, в третьем приближении. На контуре отверстия коэффициент концентрации напряжений

$$k^{(3)} = \left( \frac{\sigma_{\theta}}{p} \right)_{\varrho=1} = 2 [1 - 1, 500\lambda p^2 + 10, 605\lambda^2 p^4 + 2\varepsilon \cos 2\theta + 2\varepsilon^2 \cos 4\theta - 10, 660\lambda \varepsilon p^2 \cos 2\theta]. \quad (\text{IV. 144})$$

Из (IV.144) видим, что коэффициент концентрации напряжений при учете физической нелинейности материала, удовлетворяющего соотношениям упругости (IV.78) при условиях (IV.80), нелинейно зависит как от величины растягивающих усилий  $p$  (см. рис. IV.8), параметра  $\lambda$ , характеризующего механические свойства материала пластинки, так и от эллиптичности отверстия, характеризуемой параметром  $\varepsilon$  (IV.131). Положив в (IV.144)  $\varepsilon=0$ , получим значения  $k$  для кругового отверстия. Положив в (IV.144)  $\lambda=0$ , получим значения  $k$ , найденные А. Н. Гузем в [2] указанным выше приближенным методом для эллиптического отверстия для случая, когда материал пластинки следует закону Гука. Но для последнего случая имеется точное решение\*. Сопоставив соответствующие значения  $k$ , найденные из точного решения, с указанными выше приближенными, можно получить ясное представление о быстроте сходимости приближенного решения задач о концентрации напряжений

\* См. § 2 гл. II.



около криволинейных отверстий, для которых нет точных решений. Такое сопоставление приведено в первых двух строках табл. IV.2 и IV.3. Третье приближение даже для сильно вытянутого эллипса  $a/b=1,6$  дает для  $k$  (IV.144) очень хорошее совпадение с точным значением (разница не превосходит 2,5—3,0%). В таблицах приведены значения  $k$  (IV.144), подсчитанные для двух точек  $A$  и  $B$  (см. рис. IV.8) контура отверстия. Значения  $k$  в точке  $A$  ( $\vartheta=0$ ) даны в числителе, а в точке  $B$  ( $\vartheta=\pi/2$ ) — в знаменателе для различных значений  $a/b$ ,  $\rho$  и  $\lambda$ . Для  $\lambda$  были взяты значения  $\lambda_1$  (IV.117),  $\lambda_3$  (IV.119) и  $\lambda_4$  (IV.120). Приведенные данные показывают следующее: а) эллиптичность отверстия, как и в классическом случае, т. е. когда материал пластинки следует закону Гука, значительно влияет на величину коэффициента концентрации напряжений  $k$ ; б) при увеличении растягивающих усилий  $\rho$  (см. рис. IV.8) величина коэффициента  $k$  в точке  $A$  уменьшается, а в точке  $B$  — увеличивается. Отсюда следует, что с увеличением значений параметров  $\rho$  и  $\lambda$  «мягкая» (см. рис. IV.1) физическая нелинейность, как правило, приводит к более равномерному распределению напряжений по контуру отверстий.

Предложенный выше приближенный метод решения задач для произвольного криволинейного отверстия был основан на формальном разложении искомых функций в двойные ряды по малым параметрам  $\mu$  и  $\epsilon$  без оценки сходимости рассматриваемых рядов. Представление о быстроте сходимости предлагаемого метода в общем случае можно получить, подсчитав величины коэффициентов концентрации  $k^{(n-2)}$ ,  $k^{(n-1)}$ ,  $k^{(n)}$  по формулам, аналогичным (IV.144), соответствующих функциям напряжений  $U_{n-2}$ ,  $U_{n-1}$ ,  $U_n$  для предыдущих приближений.

Таблица IV.2

Теория		$a/b$	1,00	1,05	1,10	1,20	1,30	1,50	1,60
Линейная $\lambda$	Точное решение		$\frac{2}{2}$	$\frac{2,101}{1,904}$	$\frac{2,212}{1,818}$	$\frac{2,444}{1,666}$	$\frac{2,616}{1,538}$	$\frac{3,000}{1,333}$	$\frac{3,200}{1,250}$
	Приближенное решение		2	$\frac{2,097}{1,904}$	$\frac{2,198}{1,818}$	$\frac{2,435}{1,669}$	$\frac{2,587}{1,546}$	$\frac{2,960}{1,360}$	$\frac{3,136}{1,289}$
$\rho$		В линейной теории $k$ не зависит от $\rho$							
Нелинейная $\lambda_1$	60	$\frac{1,920}{1,920}$	$\frac{2,002}{1,843}$	$\frac{2,084}{1,775}$	$\frac{2,248}{1,658}$	$\frac{2,412}{1,565}$	$\frac{2,730}{1,431}$	$\frac{2,709}{1,557}$	
		$\frac{1,904}{1,904}$	$\frac{1,980}{1,834}$	$\frac{2,055}{1,772}$	$\frac{2,208}{1,667}$	$\frac{2,361}{1,584}$	$\frac{2,660}{1,469}$	$\frac{2,568}{1,667}$	
	80	$\frac{1,895}{1,895}$	$\frac{1,962}{1,832}$	$\frac{2,301}{1,777}$	$\frac{2,170}{1,686}$	$\frac{2,310}{1,616}$	$\frac{2,587}{1,522}$	$\frac{2,414}{1,802}$	
		$\frac{1,868}{1,868}$	$\frac{1,954}{1,841}$	$\frac{2,014}{1,794}$	$\frac{2,138}{1,718}$	$\frac{2,264}{1,662}$	$\frac{2,517}{1,593}$	$\frac{2,250}{1,966}$	
	90								

Одноосное растяжение. Функции напряжений первого и второго приближений в случае нелинейной задачи для кругового отверстия были найдены по формулам (IV.121) и (IV.122).

Таблица IV.3

Теория	$a/b$	1,00	1,05	1,10	1,20	1,30	1,50	1,60	
Линейная	Точное решение	$\frac{2,0000}{2,0000}$	$\frac{2,1010}{1,9047}$	$\frac{2,2120}{1,8182}$	$\frac{2,4440}{1,6667}$	$\frac{2,6160}{1,5387}$	$\frac{3,0000}{1,3333}$	$\frac{3,2006}{1,2509}$	
		$\frac{2,0000}{2,0000}$	$\frac{2,0970}{1,9048}$	$\frac{2,1980}{1,8188}$	$\frac{2,4350}{1,6696}$	$\frac{2,5870}{1,5460}$	$\frac{2,9600}{1,3600}$	$\frac{3,1360}{1,2896}$	
	Приближенное решение	$\frac{2,0000}{2,0000}$	$\frac{2,0970}{1,9048}$	$\frac{2,1980}{1,8188}$	$\frac{2,4350}{1,6696}$	$\frac{2,5870}{1,5460}$	$\frac{2,9600}{1,3600}$	$\frac{3,1360}{1,2896}$	
		$\frac{2,0000}{2,0000}$	$\frac{2,0970}{1,9048}$	$\frac{2,1980}{1,8188}$	$\frac{2,4350}{1,6696}$	$\frac{2,5870}{1,5460}$	$\frac{2,9600}{1,3600}$	$\frac{3,1360}{1,2896}$	
$\rho$	В линейной теории $k$ не зависит от $\rho$								
Нелинейная	600	$\lambda_3$	$\frac{1,9606}{1,9606}$	$\frac{2,0406}{1,8654}$	$\frac{2,1308}{1,7886}$	$\frac{2,3102}{1,6570}$	$\frac{2,4874}{1,5500}$	$\frac{2,8298}{1,3914}$	$\frac{2,8987}{1,4278}$
			$\frac{1,9682}{1,9682}$	$\frac{2,0622}{1,8790}$	$\frac{2,1562}{1,7984}$	$\frac{2,3424}{1,6600}$	$\frac{2,5260}{1,5466}$	$\frac{2,8790}{1,3774}$	$\frac{2,9909}{1,3712}$
		$\lambda_4$	$\frac{1,9226}{1,9226}$	$\frac{2,0050}{1,8450}$	$\frac{2,0878}{1,7756}$	$\frac{2,2534}{1,6578}$	$\frac{2,4196}{1,5616}$	$\frac{2,7380}{1,4272}$	$\frac{2,7248}{1,5460}$
			$\frac{1,9474}{1,9474}$	$\frac{2,0368}{1,8628}$	$\frac{2,1262}{1,7868}$	$\frac{2,3044}{1,6564}$	$\frac{2,4914}{1,5504}$	$\frac{2,8200}{1,3948}$	$\frac{2,8810}{1,4386}$
	800	$\lambda_3$	$\frac{1,9006}{1,9006}$	$\frac{1,9730}{1,8330}$	$\frac{2,0466}{1,7730}$	$\frac{2,1944}{1,6728}$	$\frac{2,3430}{1,5944}$	$\frac{2,6346}{1,4866}$	$\frac{2,5150}{1,7118}$
			$\frac{1,9258}{1,9258}$	$\frac{2,0092}{1,8472}$	$\frac{2,0930}{1,7768}$	$\frac{2,2604}{1,6572}$	$\frac{2,4266}{1,5612}$	$\frac{2,7494}{1,4222}$	$\frac{2,7468}{1,5302}$
		$\lambda_4$	$\frac{1,8946}{1,8946}$	$\frac{1,9550}{1,8390}$	$\frac{2,0168}{1,7906}$	$\frac{2,1432}{1,7120}$	$\frac{2,2722}{1,6532}$	$\frac{2,5292}{1,5800}$	$\frac{2,2279}{1,9353}$
			$\frac{1,9068}{1,9068}$	$\frac{1,9828}{1,8356}$	$\frac{2,0596}{1,7722}$	$\frac{2,2142}{1,6654}$	$\frac{2,3684}{1,5814}$	$\frac{2,6704}{1,4632}$	$\frac{2,5892}{1,6496}$
	1000	$\lambda_3$	$\frac{1,8946}{1,8946}$	$\frac{1,9550}{1,8390}$	$\frac{2,0168}{1,7906}$	$\frac{2,1432}{1,7120}$	$\frac{2,2722}{1,6532}$	$\frac{2,5292}{1,5800}$	$\frac{2,2279}{1,9353}$
			$\frac{1,9068}{1,9068}$	$\frac{1,9828}{1,8356}$	$\frac{2,0596}{1,7722}$	$\frac{2,2142}{1,6654}$	$\frac{2,3684}{1,5814}$	$\frac{2,6704}{1,4632}$	$\frac{2,5892}{1,6496}$
		$\lambda_4$	$\frac{1,8946}{1,8946}$	$\frac{1,9550}{1,8390}$	$\frac{2,0168}{1,7906}$	$\frac{2,1432}{1,7120}$	$\frac{2,2722}{1,6532}$	$\frac{2,5292}{1,5800}$	$\frac{2,2279}{1,9353}$
			$\frac{1,9068}{1,9068}$	$\frac{1,9828}{1,8356}$	$\frac{2,0596}{1,7722}$	$\frac{2,2142}{1,6654}$	$\frac{2,3684}{1,5814}$	$\frac{2,6704}{1,4632}$	$\frac{2,5892}{1,6496}$
	1200	$\lambda_3$	$\frac{1,8946}{1,8946}$	$\frac{1,9550}{1,8390}$	$\frac{2,0168}{1,7906}$	$\frac{2,1432}{1,7120}$	$\frac{2,2722}{1,6532}$	$\frac{2,5292}{1,5800}$	$\frac{2,2279}{1,9353}$
			$\frac{1,9068}{1,9068}$	$\frac{1,9828}{1,8356}$	$\frac{2,0596}{1,7722}$	$\frac{2,2142}{1,6654}$	$\frac{2,3684}{1,5814}$	$\frac{2,6704}{1,4632}$	$\frac{2,5892}{1,6496}$
		$\lambda_4$	$\frac{1,8946}{1,8946}$	$\frac{1,9550}{1,8390}$	$\frac{2,0168}{1,7906}$	$\frac{2,1432}{1,7120}$	$\frac{2,2722}{1,6532}$	$\frac{2,5292}{1,5800}$	$\frac{2,2279}{1,9353}$
			$\frac{1,9068}{1,9068}$	$\frac{1,9828}{1,8356}$	$\frac{2,0596}{1,7722}$	$\frac{2,2142}{1,6654}$	$\frac{2,3684}{1,5814}$	$\frac{2,6704}{1,4632}$	$\frac{2,5892}{1,6496}$

Функции же  $U^{(0,1)}(r, \theta)$  и  $U^{(0,2)}(r, \theta)$  имеют вид \*

$$U^{(0,1)}(r, \theta) = \frac{\rho}{2H_0} \left[ 2 \ln r - \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \cos 2\theta + \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4}\right) \cos 4\theta \right]; \quad (\text{IV.145})$$

$$U^{(0,2)}(r, \theta) = \frac{\rho}{2H_0} \left[ -\ln r + \left(1 - \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{r^2}\right) \cos 2\theta + \right. \\ \left. + \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{r^4}\right) \cos 4\theta + \left(\frac{9}{5} \cdot \frac{1}{r^4} - \frac{33}{14} \cdot \frac{1}{r^6}\right) \cos 6\theta \right]. \quad (\text{IV.146})$$

\* См. А. Н. Гузь [2].

Подставив функции (IV.121), (IV.122), (IV.145), (IV.146) и соответствующие им производные в уравнение (IV.92) при  $k=1$  и  $j=1$ , получим уравнение для определения функции  $U^{(1,1)}$ , интегрируя которое при условиях (IV.104), находим \*

$$\begin{aligned}
 U^{(1,1)}(r, \theta) = & \frac{p^3}{H_0^3} \left[ 0,9691 \ln r - 0,0312 \frac{1}{r^2} + \frac{1,3542}{r^4} - \frac{2,1146}{r^6} + \right. \\
 & + \frac{1,9375}{r^8} - \frac{0,9375}{r^{10}} + \frac{0,4018}{r^{12}} + \left( -0,6057 + \frac{0,3983}{r^2} + \frac{2,6250}{r^4} \ln r + \right. \\
 & + \frac{2,3187}{r^6} + \frac{1,9479}{r^8} - \frac{1,1919}{r^{10}} \left. \right) \cos 2\theta + \left( -0,0625 + \frac{3,6048}{r^2} - \right. \\
 & - \frac{1,5000}{r^4} \ln r + \frac{1,1693}{r^6} - \frac{12,3750}{r^8} \ln r - \frac{7,2250}{r^{10}} + \frac{2,9509}{r^{12}} - \\
 & - \frac{0,9062}{r^{14}} + \frac{0,4687}{r^{16}} \left. \right) \cos 4\theta + \left( -0,0312 - \frac{0,2375}{r^2} - \right. \\
 & - \frac{5,2214}{r^4} + \frac{4,5000}{r^6} \ln r + \frac{5,6509}{r^8} + \frac{7,5000}{r^{10}} \ln r - \frac{0,0045}{r^{12}} - \\
 & - \frac{0,1562}{r^{14}} \left. \right) \cos 6\theta + \left( -0,1875 \frac{1}{r^2} + \frac{1,2321}{r^4} - \frac{2,0955}{r^6} + \right. \\
 & \left. + \frac{1,0509}{r^8} \right) \cos 8\theta.
 \end{aligned} \tag{IV.147}$$

Подставляя найденные функции (IV.121), (IV.122), (IV.145) — (IV.147), в которых переменные  $r$  и  $\theta$  должны быть соответственно заменены на  $\rho$  и  $\vartheta$ , в формулы (IV.98), найдем компоненты напряжений  $\sigma_{\rho}^{(k,j)}$ ,  $\sigma_{\vartheta}^{(k,j)}$  и  $\tau_{\rho\vartheta}^{(k,j)}$  ( $k, j = 0, 1, 2$ ). При этом в дифференциальных операторах  $L_1^{(j-m)}$ ,  $L_2^{(j-m)}$ , ...,  $L_6^{(j-m)}$  (IV.106) функцию  $f(\zeta)$  следует взять из (IV.86), которая в случае эллиптического отверстия будет иметь вид  $f(\zeta) = 1/\zeta$ .

Приведем формулу для подсчета коэффициента концентрации напряжений по контуру эллиптического отверстия в третьем приближении:

$$\begin{aligned}
 k = & \left( \frac{\sigma_{\vartheta}}{\rho} \right)_{\rho=1} = 1 - 2 \cos 2\vartheta + 2\varepsilon (\cos 2\vartheta - \cos 4\vartheta) + \\
 & + \varepsilon^2 (2 \cos 4\vartheta - \cos 2\vartheta - \cos 6\vartheta) + \lambda \rho^2 (-3,0680 + \\
 & + 4,2922 \cos 2\vartheta - 2,1076 \cos 4\vartheta + 0,7738 \cos 6\vartheta) + \\
 & + \lambda \rho^2 \varepsilon (1,2977 - 11,5517 \cos 2\vartheta + 8,9039 \cos 4\vartheta - \\
 & - 5,3963 \cos 6\vartheta + 2,2834 \cos 8\vartheta).
 \end{aligned} \tag{IV.148}$$

В табл. IV.4 и IV.5 приведены значения коэффициента концентрации  $k$  (IV.148) для различных значений  $a/b$  и внешней нагрузки  $p$  со-

\* См. И. А. Цурпал [14].

ответственно для медной пластинки  $\lambda = \lambda_1$  (IV.117) и мартеновской стали  $\lambda = \lambda_4$ . Для сравнения представлены соответствующие данные линейной теории.

На рис. IV.9 показано изменение коэффициента концентрации  $k$  (IV.148) в точке контура  $\phi = \pi/2$  в зависимости от величины внешней нагрузки  $p$  и отношения  $a/b$  для медной пластинки  $\lambda = \lambda_1$  (IV.117) и пластинки из мартеновской стали  $\lambda = \lambda_4$  (IV.120), а на рис. IV.10 и IV.11 приведены графики, характеризующие изменение коэффициента концентрации  $k$  (IV.148) в зависимости от величины растягивающего напряжения  $p$  для различных физически нелинейных материалов с упругими характеристиками (IV.117) — (IV.120) при  $a/b = 1,5$  в той же точке контура отверстия  $\phi = \pi/2$ .

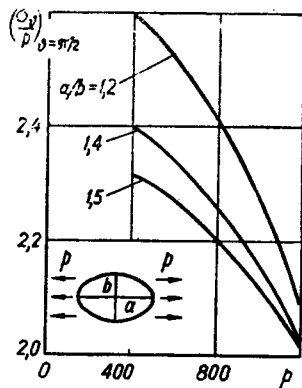


Рис. IV.9

**Квадратное отверстие с закругленными углами.** Рассмотрим напряженное состояние возле квадратного отверстия с закругленными углами \*, контур которого задан функцией

$$\omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\zeta^3} \right) \quad (IV. 149)$$

при  $q=1$ , ( $\zeta = qe^{i\theta}$ ,  $\varepsilon = 1/9$ ) в случае всестороннего растяжения физически нелинейной пластинки усилиями  $p$  на бесконечности, т. е. при

$$\sigma_r^{(\infty)} = \sigma_\theta^{(\infty)} = p, \quad \tau_{r\theta}^{(\infty)} = 0. \quad (IV. 150)$$

Приближенное решение этой задачи будем искать с учетом трех приближений, т. е. функцию напряжений (IV.105) будем искать в виде

$$U_3(r, \theta, \mu, \varepsilon) = H_0[U^{(0,0)} + \varepsilon U^{(0,1)} + \varepsilon^2 U^{(0,2)} + \mu U^{(1,0)} + \mu^2 U^{(2,0)} + \mu \varepsilon U^{(1,1)}]. \quad (IV. 151)$$

Таблица IV.4

Теория	$p$	$a/b$							
		1,00	1,10	1,30	1,50	$\frac{1}{1,10}$	$\frac{1}{1,20}$	$\frac{1}{1,30}$	$\frac{1}{1,50}$
Нелинейная $\lambda_1$	40	2,836	2,676	2,445	2,290	3,015	3,190	3,362	3,702
	50	2,754	2,605	2,393	2,255	2,921	3,087	3,250	3,573
	60	2,642	2,508	2,323	2,207	2,793	2,945	3,095	3,395
	70	2,508	2,393	2,240	2,151	2,642	2,777	2,912	3,186
Линейная		3,000	2,817	2,547	2,360	3,201	3,397	3,587	3,960

\* Для квадратного отверстия с более острыми углами в функции  $f(\zeta)$  (IV.86) следует удерживать большее количество членов (см. § 2 гл. II).

Функции  $U^{(0,0)}$ ,  $U^{(1,0)}$  и  $U^{(2,0)}$ , входящие в (IV.151) были определены формулами (IV.132) — (IV.134). Они дают решение для физически нелинейной пластинки с круговым отверстием.

Функции напряжений  $U^{(0,1)}$  и  $U^{(0,2)}$ , входящие в (IV.151), которые соответствуют линейно упругой пластинке с квадратным отверстием (IV.149),

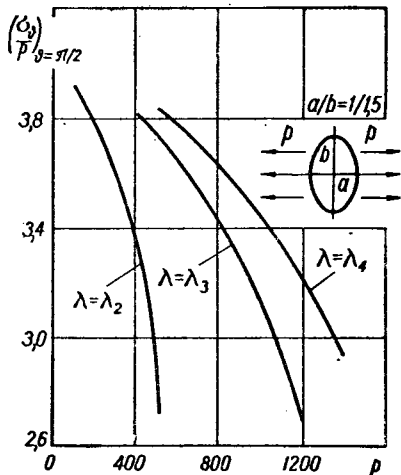


Рис. IV.10

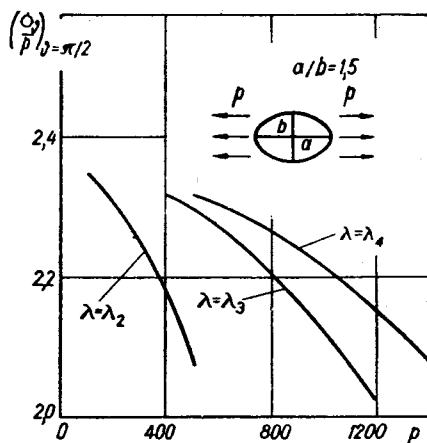


Рис. IV.11

определенные\* с точностью до  $\varepsilon$  и  $\varepsilon^2$ , имеют вид

$$U^{(0,1)}(r, \theta) = -\frac{p}{H_0} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4} \right) \cos 4\theta; \quad (\text{IV. 152})$$

$$U^{(0,2)}(r, \theta) = \frac{p}{H_0} \left[ \left( \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{r^3} - 3 \frac{1}{r^6} \right) \cos 8\theta - 3 \ln r \right]. \quad (\text{IV. 153})$$

Таблица IV.5

Теория	$\rho$	$a/b$						
		1,000	1,20	1,40	1,50	$\frac{1}{1,20}$	$\frac{1}{1,40}$	$\frac{1}{1,50}$
Нелинейная $\lambda_4$	500	2,918	2,609	2,403	2,326	3,294	3,653	3,831
	600	2,882	2,582	2,384	2,309	3,248	3,600	3,774
	700	2,839	2,550	2,362	2,291	3,194	3,536	3,707
	800	2,790	2,514	2,336	2,271	3,313	3,464	3,629
	900	2,735	2,473	2,307	2,247	3,062	3,382	3,542
	1000	2,672	2,427	2,274	2,221	2,984	3,290	3,444
	1100	2,604	2,376	2,238	2,171	2,897	3,188	3,556
	1200	2,528	2,321	2,199	2,159	2,801	3,076	3,216
Линейная		3,000	2,669	2,446	2,360	3,397	3,774	3,960

\* См. Г. Н. Савин и А. Н. Гузь [1].

Подставляя соответствующие функции из (IV. 132) — (IV. 134) и (IV. 152) в правую часть уравнения (IV. 92), найдем для функции  $U^{(1,1)}$  уравнение

$$\Delta \Delta U^{(1,1)} = 96 \frac{p^3}{H_0^3} \left( 28 \frac{1}{r^{10}} - 135 \frac{1}{r^{12}} \right) \cos 4\theta. \quad (\text{IV. 154})$$

Интегрируя уравнение (IV. 154) при граничных условиях (IV. 104), получаем\*

$$U^{(1,1)}(r, \theta) = \frac{p^3}{H_0^3} \left( -\frac{149}{70} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{89}{35} \cdot \frac{1}{r^4} + \frac{14}{5} \cdot \frac{1}{r^6} - \frac{45}{14} \cdot \frac{1}{r^8} \right) \cos 4\theta. \quad (\text{IV. 155})$$

Заменяя в функциях  $U^{(0,0)}$ ,  $U^{(0,1)}$ ,  $U^{(0,2)}$ ,  $U^{(1,0)}$ ,  $U^{(2,0)}$  и  $U^{(1,1)}$  (входящих в функцию  $U_3$  (IV. 151)) соответственно  $r$  и  $\theta$  на  $\rho$  и  $\vartheta$  и подставляя их в формулы (IV. 98), приняв во внимание вид функции (IV. 149) при установлении вида операторов  $L_1^{(j-m)}$ ,  $L_2^{(j-m)}$ , ...,  $L_6^{(j-m)}$  (IV. 106), найдем выражения для компонентов напряжений  $\sigma_{\rho}^{(k,j)}$ ,  $\sigma_{\vartheta}^{(k,j)}$  и  $\tau_{\rho\vartheta}^{(k,j)}$  ( $k, j = 0, 1, 2$ ). Подставив их в формулы (IV. 90), получим окончательные (с заданной степенью точности) выражения для искоемых компонентов напряжений в криволинейной ортогональной системе координат, даваемой отображающей функцией (IV. 149). Не будем выписывать этих выражений для  $\sigma_{\rho}$  и  $\sigma_{\vartheta}$  в виду их громоздкости, а приведем лишь формулу для коэффициента концентрации по контуру отверстия:

$$k^{(3)} = \left( \frac{\sigma_{\vartheta}}{p} \right)_{\vartheta=1} = 2(1 + 0,666 \cos 4\theta + 0,197 \cos 8\theta - 1,500\lambda\rho^2 - 3,152\lambda\rho^2 \cos 4\theta + 10,608\lambda^2\rho^4). \quad (\text{IV. 156})$$

На рис. IV.12 приведены значения  $k^{(3)}$  (IV.156), подсчитанные для алюминиевой бронзы  $\lambda = \lambda_3$  (IV.119) при  $p = 11 \cdot 9,81 \cdot 10^6$  н/м<sup>2</sup> и чистой меди  $\lambda = \lambda_2$  (IV.118) при  $p = 6 \cdot 9,81 \cdot 10^6$  н/м<sup>2</sup>. Сплошные линии соответствуют линейной теории, а штриховые — указанным физически нелинейным материалам.

В табл. IV.6 приведены значения  $k^{(3)}$  (IV.156) для меди  $\lambda = \lambda_4$  (IV.117) в точках  $\vartheta = 0$  и  $\vartheta = \pi/4$  контура отверстия.

Таблица IV.6

$\vartheta^\circ$	Линейная теория	Нелинейная теория					
		200	400	600	800	1000	1100
0	3,726	3,705	3,645	3,550	3,424	3,278	3,000
45	1,062	1,069	1,092	1,135	1,204	1,307	1,375

\* Подробнее см. И. А. Цурпал [11].

**Заключительные замечания.** Сопоставляя приведенные в § 3 решения с соответствующими результатами линейной теории, можно сделать следующие дополнительные выводы:

а) если в классической линейной теории упругости коэффициент концентрации напряжений (в этих задачах) не зависит от величины внешней нагрузки и упругих свойств материала, то при принятом учете физической нелинейности материала (IV.1) (при условии, что деформации малы, т. е. при них можно отождествлять координаты деформированного и недеформированного состояния тела) этот коэффициент концентрации напряжений существенно (нелинейно) зависит от упругих свойств материала и величины внешней нагрузки;

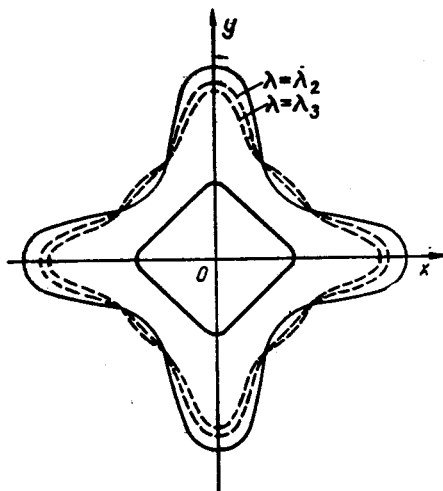


Рис. IV.12

б) учет физической нелинейности материала в виде (IV.1) приводит к понижению \* коэффициента концентрации в наиболее напряженных точках контура отверстия и к более равномерному распределению напряжений возле отверстия по сравнению с линейной теорией;

в) эллиптичность отверстия, как и в классическом случае, существенно влияет на величину коэффициента концентрации напряжений возле отверстия;

г) нелинейность материала, даже при небольшом отклонении от закона Гука, может значительно снизить пики напряжений в опасном месте возле отверстия.

## ЛИТЕРАТУРА

- Аветисян А. С. [1] Концентрация напряжений около ромбического отверстия с учетом физической нелинейности материала.— Прикл. мех., 1966, 2, 10.
- Бабаев М. А. [1] Физически нелинейная пластинка с отверстием, подкрепленным тонким упругим стержнем.— Прикл. мех., 1966, 2, 7.
- [2] Растянутая физически нелинейная пластинка с отверстием, подкрепленным тонким стержнем.— Прикл. мех., 1966, 2, 9.
- Бабаев М. А., Цурпал И. А. [1] Двухосное однородное напряженное состояние физически нелинейной пластинки с круговым отверстием.— Инж. журн., 1965, 5, 5.
- [2] Физически нелинейные пластинки с отверстием, подкрепленным упругим элементом.— В кн.: Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластин. «Наука» М., 1966.

\* Как будет показано в § 3 гл. IX, это явление наблюдается лишь в случае так называемой «мягкой» нелинейности, для «жесткой» же нелинейности имеем обратное.

- Гузь О. М. [1] Про наближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках.— Прикл. мех., 1962, 8, 6.  
[2] Концентрація напружень біля еліптичного отвору з малим ексцентриситетом в циліндричній оболонці.— ДАН УРСР, 1963, 10.
- Гузь А. Н., Савин Г. Н., Цурпал І. А. [1] Концентрація напружений около криволинейных отверстий в физически нелинейной упругой пластинке.— Arch. Mech. Stos., 1964, 16, 4.
- Каудерер Г. [1] Нелинейная механика. ИЛ, М., 1961.
- Морс Ф. М., Фешбах Г. [1] Методы теоретической физики. II. ИЛ, М., 1958.
- Мухелишвили Н. И. [1] Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М.—Л., 1954.
- Савин Г. М. [1] Концентрация напряжений около отверстий. ГИИТЛ, М.—Л., 1951.  
[2] Вплив фізичної нелінійності матеріалу на концентрацію напружень поблизу отворів.— Прикл. мех., 1963, 9, 1.  
[3] Концентрація напружень навколо отворів з урахуванням фізичної нелінійності матеріалу.— Прикл. мех., 1964, 10, 1.  
[4] Нелинейные задачи концентрации напряжений около отверстий в пластинах.— В кн.: Теория оболочек и пластин. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1964.  
[5] Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинах и оболочках.— В кн.: Аннот. докл. на II Всес. съезде по теор. и прикл. мех. Изд-во АН СССР, М., 1964.  
[6] Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинах и оболочках.— В кн.: Концентрация напряжений, I. «Наукова думка», К., 1965.  
[7] Concentration of stresses around curvilinear holes in plates and shells. Proceedings of the Eleventh International Congress of Appl. Mech., Munich (German), 1964, Springer-Verlag, Berlin, 1965.
- Савин Г. Н., Гузь А. Н. [1] О напряженном состоянии около криволинейных отверстий в оболочках.— Изв. АН СССР, мех. и маш., 1964, 6.
- Савин Г. Н., Хорошун Л. П. [1] Плоская задача физически нелинейных упругих тел.— Прикл. мех., 1965, 1, 4.
- Слезингер И. Н. [1] Основные уравнения нелинейной теории упругости в перемещениях.— Изв. Ясского политехн. ин-та. Новая серия, 1962, 8 (12), 1—2.  
[2] К расчету нелинейных деформаций некоторых деталей.— Изв. вузов, маш., 1965, 1.
- Слезингер И. Н. и Барская С. Я. [1] Нелинейная плоская деформация упругого пространства с круговой цилиндрической полостью.— Изв. вузов, строит. и арх., 1960, 5.  
[2] Нелинейная плоская деформация упругого пространства с цилиндрической полостью квадратного и треугольного сечения.— Прикл. мех., 1965, 1, 10.  
[3] Нелинейная деформация упругого пространства с эллипсоидальной полостью.— Прикл. мех., 1965, 1, 12.  
[4] Нелінійна плоска деформація пружного простору із впаином круглим циліндром.— Прикл. 1964, 10, 3.
- Снеддон И. Н., Берри Д. С. [1] Классическая теория упругости. Физматгиз, М., 1961.
- Хорошун Л. П. [1] Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинах в условиях ползучести.— В кн.: Аннот. докл. на V Всес. конф. по теории оболочек и пластин. «Наука», М., 1965.
- Хорошун Л. П., Цурпал І. А. [1] Концентрация напряжений возле цилиндрических полостей в физически нелинейной упругой среде.— В кн.: Пробл. мех. горных пород. Изд-во АН КазССР, Алма-Ата, 1966.
- Цурпал І. А. [1] Концентрація напружень біля кругового отвору в нелінійно пружній пластинці.— Прикл. мех., 1962, 8, 1.  
[2] Визначення напруженого стану товстостінного порожнистого циліндра при нелінійному законі пружності.— Прикл. мех., 1962, 8, 2.  
[3] Некоторые задачи физически нелинейной плоской теории упругости.— В кн.: Теория пластин и оболочек. Изд-во АН УССР, К., 1962.  
[4] Концентрація напружень навколо кругового отвору в фізично нелінійній пружній пластинці при чистому зсуві.— Прикл. мех., 1962, 8, 4.



- [5] Експериментальне визначення пружних констант нелінійної теорії пружності.— Прикл. мех., 1962, 8, 5.
- [6] Наближений розв'язок задачі про пружну рівновагу фізично нелінійної пружної пластинки з підкріпленням круговим отвором.— ДАН УРСР, 1963, 1.
- [7] Наближене розв'язання фізично нелінійних плоских задач концентрації напружень навколо отворів.— Прикл. мех., 1963, 9, 6.
- [8] Фізично нелінійна пружна пластинка з підкріпленням круговим отвором.— ДАН УРСР, 1964, 3.
- [9] Исследование напряженного и деформированного состояния физически нелинейной упругой пластинки с подкрепленным круговым отверстием.— В кн.: Теория пластин и оболочек. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1964.
- [10] Определение коэффициента Пуассона для физически нелинейных материалов.— Заводск. лаб., 1964, 9.
- [11] Физически нелинейные упругие пластины, ослабленные произвольным отверстием.— В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.
- [12] Чистый изгиб полосы, ослабленной круговым отверстием с учетом физической нелинейности.— Прикл. мех., 1965, 1, 2.
- [13] Напряженное состояние вблизи криволинейного отверстия в физически нелинейной пластинке.— В кн.: Прочность корпуса судна, 67. НТОсудпрома, Л., 1965.
- [14] Концентрация напряжений возле эллиптического отверстия в тонкой пластинке с учетом физической нелинейности.— В кн.: Аннот. докл. на V Всес. конф. по теории оболочек и пластин. «Наука», М., 1965.
- [15] Концентрация напряжений около квадратного отверстия в физически нелинейной упругой пластинке.— Изв. АН СССР, мех., 1965, 6.
- Jindra F. [1] Einige Anwendungen eines nichtlinearen Elastizitätsgesetzes.— Ing. Arch., 1954, 22, 2.

## ОБРАЗОВАНИЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН ИЛИ РАВНОВЕСНЫХ ТРЕЩИН ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЙ

### § 1. Постановка задачи

Результаты исследований, приведенные в предыдущих главах, показывают, что вокруг отверстия образуется некоторая зона повышенных напряжений — так называемая зона «концентрации напряжений». Ясно, что если эта зона достигает некоторой определенной величины, то рассматриваемый материал в окрестности отверстия не может быть упругим и перейдет в состояние, которое назовем «состоянием за пределом упругости». Предположим, что это состояние будет иметь место в некоторой области возле рассматриваемого отверстия\*. Напряженное и деформированное состояния за пределом упругости определяются соотношениями теории пластичности.

В теории пластичности различают «идеально пластические» и «упрочняющиеся» материалы.

Идеально пластический материал характеризуется тем, что не может воспринимать напряжения, превосходящие определенный предел текучести. Другими словами, для идеально пластических материалов существует вполне определенная функция

$$f(\sigma_{ij}) = 0, \quad (V.1)$$

называемая условием пластичности или функцией текучести.

При выполнении равенства (V.1) в данной точке тела могут возникать пластические деформации. В упругой области

$$f(\sigma_{ij}) < 0,$$

В отличие от идеально пластического в упрочняющемся материале для получения приращений пластических деформаций необходимо увеличения напряжений за пределом упругости.

Особенностью соотношений теории пластичности является их неголомомный (неинтегрируемый) характер. В отличие от упругого пластического состояния материала зависит не только от окончательных величин нагрузок, но и от характера нагружения тела (истории нагружения).

В пластической области приращения полной деформации складываются соответственно из приращений упругой и пластической деформаций:

$$de_{ij} = de_{ij}^e + de_{ij}^p. \quad (V.2)$$

\* В случае неоднородно напряженного состояния плоскости будем ограничивать ее размеры так, чтобы вне «зоны концентрации» напряженное состояние было упругим.

Предполагается, что упругие деформации в пластической области связаны с напряжениями законом Гука

$$\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma) + (1 - 2\nu)\delta_{ij} \frac{\sigma}{E}, \quad (\text{V. 3})$$

где  $E$ ,  $G$ ,  $\nu$  — соответственно модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона;  $\delta_{ij}$  — символ Кронеккера;  $\sigma$  — среднее давление.

Приращения пластических деформаций определяются соотношениями ассоциированного закона течения. Для идеально пластического материала

$$de_{ij}^p = d\mu \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (\text{V. 4})$$

где  $d\mu = 0$ , если  $f < 0$ .

Плоская задача теории идеальной пластичности обладает следующей особенностью: три уравнения — два уравнения равновесия плюс условие пластичности (V.1) — относительно трех компонент напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  определяют замкнутую систему уравнений. Поэтому плоскую задачу теории идеальной пластичности часто называют «статически определимой», подразумевая под этим замкнутость системы уравнений для напряжений. Однако к статически определимым задачам могут быть отнесены лишь те, граничные условия которых также заданы только в напряжениях (контур отверстия свободен от нагрузок или нагружен заданными усилиями).

Для анизотропного (металлического) тела условие пластичности имеет вид

$$f(\Sigma_2, \Sigma_3) = 0, \quad (\text{V. 5})$$

где  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$  — соответственно второй и третий инварианты девиатора напряжений (у металлов объемная деформация в достаточных пределах является упругой, поэтому условие пластичности (V.5) не зависит от первого инварианта тензора напряжений  $\sigma$ ).

Если для плоской деформации из условия  $e_z = 0$  следует

$$\sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y), \quad (\text{V. 6})$$

то третий инвариант девиатора напряжений  $\Sigma_3$  равен нулю, и условие пластичности (V.5) сводится к виду

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2 \quad k = \text{const}. \quad (\text{V. 7})$$

При условии пластичности Мизеса ( $\Sigma_2 = \text{const}$ ) соотношение (V.6) будет иметь место лишь в случае, когда материал является несжимаемым ( $\nu = 1/2$ ). Учет упругой сжимаемости материала при условии пластичности Мизеса требует совместного рассмотрения полей напряжений и скорости деформаций. Другими словами, задача в этом случае не является статически определимой. Это обстоятельство следует из рассмотрения условия пластичности Мизеса и соотношений (V.2) — (V.4) при условии  $e_z = e_{xz} = e_{yz} = 0$ .

При условии пластичности Треска (условие максимального касательного напряжения) условие пластичности (V.7) может иметь место и при  $\nu \neq 1/2$ . Однако здесь возникают определенные ограничения\* при использовании условия пластичности (V.5).

Вообще говоря, при решении статически определимых упруго-пластических задач можно ограничиться предположением о несжимаемости материала, необходимым при определении перемещений. Как показывают решения задач\*\*, это предположение о несжимаемости материала всюду в упругой и пластической зонах существенно влияет лишь на величину компоненты  $\sigma_z$ , однако знание последней обычно не представляет интереса.

Систему уравнений плоского деформированного состояния идеально пластического тела согласно (V.2) — (V.4) и (V.7) при  $\nu = 1/2$  можно представить в виде

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2; \quad (V.8)$$

$$\frac{2de_x^p}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2de_y^p}{\sigma_y - \sigma_x} = \frac{de_{xy}^p}{2\tau_{xy}},$$

$$e_x = e_x^p + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{4G}, \quad e_y = e_y^p + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{4G}, \quad e_{xy} = e_{xy}^p + \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad (V.9)$$

$$e_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right),$$

где  $u_x, u_y$  — компоненты перемещения вдоль осей  $x, y$ .

Пусть к контуру рассматриваемого отверстия приложены нормальные и тангенциальные усилия

$$\sigma_n = f_1(s, \lambda), \quad \tau_{nt} = f_2(s, \lambda), \quad (V.10)$$

а на бесконечности напряжения в состоянии упругости

$$\sigma_x^\infty = P_1(x, y, \lambda), \quad \sigma_y^\infty = P_2(x, y, \lambda), \quad \tau_{xy}^\infty = -P_3(x, y, \lambda),$$

где  $\lambda$  — параметр нагружения.

Допустим, что функция напряжений  $U_1(x, y, \lambda)$  в пластической области удовлетворяет некоторому уравнению гиперболического типа

$$f \left( x, y, \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}, \dots, \frac{\partial U_1}{\partial x}, \frac{\partial U_1}{\partial y} \right) = 0, \quad (V.11)$$

т. е. условию пластичности и краевым условиям (V.10).

Задача определения напряжений состоит в том, чтобы найти бигармоническую функцию  $U_2(x, y, \lambda)$  вне некоторого неизвестного контура

\* См. В. В. Соколовский [1].

\*\* См. Л. М. Качанов [1].

$L$ , охватывающего отверстие, при условии, чтобы на контуре  $L$  имели место соотношения

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y}, \quad (\text{V.12})$$

а при  $x \rightarrow \infty$  и  $y \rightarrow \infty$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} = P_2(x, y, \lambda), \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = P_1(x, y, \lambda), \quad \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} = P_3(x, y, \lambda). \quad (\text{V.13})$$

Основная трудность этой задачи состоит в определении контура  $L$ , отделяющего «пластическую» зону от упругой. Если этот контур известен, нахождение функции  $U_2(x, y)$  эквивалентно решению упругой задачи для плоскости с отверстием  $L$  при известных условиях как на этом контуре  $L$ , так и на бесконечности. Общего метода решения сформулированной задачи до сих пор нет. Однако, когда известны компоненты напряжений в пластической области

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = \sigma_x^{(1)}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \sigma_y^{(1)}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} = -\tau_{xy}^{(1)}, \quad (\text{V.14})$$

решение поставленной задачи удастся в некоторых случаях получить сравнительно простым методом.

Задача определения перемещений в пластической области решается после нахождения напряжений и сводится к решению системы уравнений (V.9) гиперболического типа. Перемещения на контуре  $L$ , известные из решения задачи в упругой области, играют роль начальных данных Коши для системы уравнений (V.9).

При решении упруго-пластических задач концентрации напряжений около отверстий необходимо определить такую область возможного изменения внешних нагрузок, чтобы при нагружении в пластических областях не возникали зоны разгрузки. При разгрузке использование системы уравнений (V.8), (V.9) становится незаконным.

## § 2. Упруго-пластическая задача для бесконечной плоскости с круговым отверстием (плоская деформация)

**Случай нормального давления на контуре кругового отверстия\*.**

Начало координат возьмем в центре кругового отверстия радиуса  $R$  (рис. V.1).

Уравнение (V.3), которое определяет напряжения в пластической области, т. е. «условие пластичности», представим\*\* в виде

\* Решение этой задачи впервые дано Л. А. Галиным [1] и позже иным методом — О. С. Парасюком [1].

\*\* См. А. Надаи [1].

$$\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2}\right)^2 + 4\left(\frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y}\right)^2 = 4k^2, \quad \text{V. 15}$$

где  $k$  — постоянная материала, равная:

а) по теории наибольших касательных напряжений

$$k = \frac{\sigma_s}{2};$$

б) по теории октаэдрических касательных напряжений

$$k = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}},$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести материала при одностороннем растяжении.

Пусть к контуру отверстия приложено только одно нормальное усилие, т. е. при  $r = R$ :

$$\sigma_r = -p, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad \text{(V. 16)}$$

а на бесконечности заданы напряжения

$$\sigma_x^{(\infty)} = A; \quad \sigma_y^{(\infty)} = B.$$

Решение уравнения (V. 15) при краевом условии (V. 16) имеет вид

$$U_1(x, y) = kr^2 \ln \frac{r}{R} - \frac{p+k}{2} r^2. \quad \text{(V. 17)}$$

По функции напряжений (V. 17) найдем компоненты напряжений  $\sigma_x^{(1)}$ ,  $\sigma_y^{(1)}$ ,  $\tau_{xy}^{(1)}$ , которые удобно представить в следующих комбинациях:

$$\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)} = 2k - 2p + 2k \ln \frac{\bar{z}}{R^2}, \quad \text{(V. 18)}$$

$$\sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2i\tau_{xy}^{(1)} = 2k \frac{\bar{z}}{z}.$$

Задача сводится к нахождению функции  $U_2(x, y)$  и контура  $L$ , разделяющего пластическую и упругую зоны, по таким условиям:

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = \begin{cases} 2k - 2p + 2k \ln \frac{\bar{z}}{R^2} & \text{на } L, \\ A + B & \text{при } z \rightarrow \infty; \end{cases} \quad \text{(V. 19)}$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} = \begin{cases} 2k \frac{\bar{z}}{z} & \text{на } L, \\ B - A & \text{при } z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad \text{(V. 20)}$$

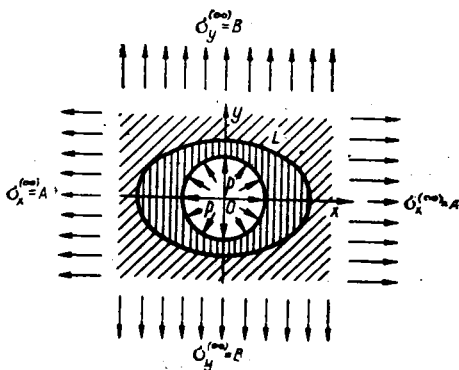


Рис. V.1.

Для любой бигармонической функции  $U_2(x, y)$  в области  $S$  (вне контура  $L$ ) всегда существуют две голоморфные в ней функции Мусхелишвили [1]  $\Phi_2^*(z)$  и  $\Psi_2^*(z)$ , такие, что

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = 4 \operatorname{Re} [\Phi_2^*(z)],$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} = 2[\bar{z} \Phi_2^{*\prime}(z) + \Psi_2^*(z)]. \quad (\text{V. 21})$$

Таким образом, задачу можно сформулировать так: найти контур  $L$ , ограничивающий пластическую область, и две функции  $\Phi_2^*(z)$  и  $\Psi_2^*(z)$ , голоморфные во всей плоскости вне контура  $L$  и непрерывные вплоть до  $L$ , по условиям

$$4 \operatorname{Re} \Phi_2^*(z) = \begin{cases} 2k - 2\rho + 2k \ln \frac{\bar{z}z}{R^2} & \text{на } L, \\ A + B & \text{при } z \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (\text{V. 22})$$

$$2[\bar{z} \Phi_2^{*\prime}(z) + \Psi_2^*(z)] = \begin{cases} 2k \frac{\bar{z}}{z} & \text{на } L, \\ B - A & \text{при } z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (\text{V. 23})$$

Для решения этой задачи отобразим внешность контура  $L$  на внешность единичного круга  $\gamma$  плоскости  $\zeta$  с помощью функции

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{c_n}{\zeta^n}. \quad (\text{V. 24})$$

Тогда, если положить

$$\Phi_2^*[\omega(\zeta)] = \Phi_2(\zeta), \quad \Psi_2^*[\omega(\zeta)] = \Psi_2(\zeta), \quad (\text{V. 25})$$

то условия (V. 22) и (V. 23) примут вид

$$4 \operatorname{Re} \Phi_2(\zeta) = \begin{cases} 2k - 2\rho + 2k \ln \frac{\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}}{R^2} & \text{на } \gamma, \\ A + B & \text{при } \zeta \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (\text{V. 26})$$

$$2 \left[ \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi_2'(\zeta) + \Psi_2(\zeta) \right] = \begin{cases} 2k \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)} & \text{на } \gamma, \\ B - A & \text{при } \zeta \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (\text{V. 27})$$

Функции  $\Phi_2(\zeta)$  и  $\Psi_2(\zeta)$  ищем в виде

$$\Phi_2(\zeta) = a_0 + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{a_n}{\zeta^n} + \dots, \quad (\text{V. 28})$$

$$\Psi_2(\zeta) = b_0 + \frac{b_1}{\zeta} + \frac{b_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{b_n}{\zeta^n} + \dots$$

Допустим, что функция  $z = \omega(\zeta)$  имеет вид

$$z = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2}. \quad (\text{V. 29})$$

Принимая во внимание, что на контуре единичного круга  $\gamma$

$$\bar{\zeta} = \bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{\zeta},$$

перепишем первое условие (V.27) в виде

$$2 \left[ \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \Phi_2'(\sigma) + \Psi_2(\sigma) \right] = 2k \frac{\bar{\bar{\omega}}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega(\sigma)}. \quad (\text{V.30})$$

Простым подсчетом убеждаемся, что

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega(\sigma)} = \frac{\bar{c} \frac{1}{\sigma} + \bar{c}_1 \sigma + \bar{c}_2 \sigma^2}{c\sigma + \frac{c_1}{\sigma} + \frac{c_2}{\sigma^2}} = \frac{\bar{c}_2}{c} \sigma + \frac{\bar{c}_1}{c} + M(\sigma), \quad (\text{V.31})$$

где  $M(\sigma)$  — функция, голоморфная вне  $\gamma$  и  $M(\infty) = 0$ .

Аналогично

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \Phi_2'(\sigma) = -\frac{\bar{c}_2}{c} a_1 + N(\sigma), \quad (\text{V.32})$$

где  $N(\sigma)$  — функция, голоморфная вне  $\gamma$  и  $N(\infty) = 0$ .

Умножим равенство (V.30) на  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ , где  $\zeta$  — точка внутри  $\gamma$ , и проинтегрируем по  $\gamma$ :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2 \left[ \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega'(\sigma)} \Phi_2'(\sigma) + \Psi_2(\sigma) \right]}{\sigma - \zeta} d\sigma = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2k \frac{\bar{\bar{\omega}}\left(\frac{1}{\sigma}\right)}{\omega(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma. \quad (\text{V.33})$$

Согласно теореме Гарнака\* условие (V.33) является следствием условия (V.30). Из (V.33) в силу известных свойств интеграла типа Коши, принимая во внимание соотношения (V.31) и (V.32) и второе условие (V.27), получаем

$$-2 \frac{\bar{c}_2}{c} a_1 + B - A = 2k \frac{c_2}{c} \zeta + 2k \frac{\bar{c}_1}{c}.$$

Отсюда следует, что  $\bar{c}_2 = 0$ ,  $B - A = 2k \frac{c_1}{c}$ , или

$$\bar{c}_1 = \frac{B - A}{2k} c = c_1 = c\beta,$$

где

$$\beta = \frac{B - A}{2k}.$$

\* См. Н. И. Muskhelishvili [1].



Таким образом, функция  $\omega(\zeta)$  (V.29) должна иметь вид

$$z = \omega(\zeta) = c \left( \zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right), \quad (\text{V.34})$$

где  $c$  — пока неопределенная постоянная, которую определим из условий (V.26).

Первое из условий (V.26) будет удовлетворено, если

$$\begin{aligned} \Phi_2(\zeta) &= k \ln \frac{\omega(\zeta)}{R} + \frac{k-p}{2} - k \ln \zeta = \\ &= k \ln c - k \ln R + k \ln \left( \zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right) + \frac{k-p}{2} - k \ln \zeta. \end{aligned} \quad (\text{V.35})$$

Второе условие (V.26) будет удовлетворено, если константу определить из уравнения

$$A + B = 4 \left( k \ln c - k \ln R + \frac{k-p}{2} \right).$$

Отсюда

$$c = Re^{\frac{1}{2k} \left( \frac{A+B}{2} + p - k \right)}. \quad (\text{V.36})$$

После того как найдены функции (V.34) и (V.35), функцию  $\Psi_2(\zeta)$  определим из первого условия (V.27):

$$\begin{aligned} \Psi_2(\zeta) &= k \frac{\bar{\omega} \left( \frac{1}{\zeta} \right)}{\omega(\zeta)} - \frac{\bar{\omega} \left( \frac{1}{\zeta} \right)}{\omega'(\zeta)} \Phi_2'(\zeta) = \\ &= k \frac{\bar{\omega} \left( \frac{1}{\zeta} \right)}{\omega(\zeta)} - k \frac{\bar{\omega} \left( \frac{1}{\zeta} \right)}{\omega'(\zeta)} \left[ \frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} - \frac{1}{\zeta} \right] = k \frac{\bar{\omega} \left( \frac{1}{\zeta} \right)}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{1}{\zeta}. \end{aligned} \quad (\text{V.37})$$

Таким образом, поставленная задача решена. Контур  $L$ , т. е. граница пластической области, будет эллипс с полуосями  $a = c(1 + \beta)$ ,  $b = c(1 - \beta)$ , где  $\beta = \frac{B-A}{2k}$ , а постоянная  $c$  определена формулой (V.36). Если  $A = B \neq 0$ , то как следует из (V.34) и (V.36), границей пластической области будет круг радиуса

$$c = Re^{\frac{1}{2k} (A+p-k)}. \quad (\text{V.38})$$

Если в частном случае  $A = B = 0$ , т. е. напряжения на бесконечности отсутствуют, то

$$c = Re^{\frac{p-k}{2k}}. \quad (\text{V.39})$$

Если контур кругового отверстия  $R$  свободен от внешних напряжений, а напряжения на бесконечности  $A = B \neq 0$ , границей пластической области также будет круг радиуса

$$c = Re^{\frac{A-k}{2k}}. \quad (\text{V.40})$$

Сравнивая (V.39) и (V.40), видим, что, если  $A=p$ , то возле кругового отверстия образуется пластическая зона одной и той же величины.

Напряжения в упругой зоне найдем по формулам (I.27), подставив в них найденные функции  $\omega(\zeta)$  (V.34),  $\Phi_2(\zeta)$  (V.35) и  $\Psi_2(\zeta)$  (V.37). Напряжения же в пластической области определяются функцией напряжений (V.17).

Из полученного решения можно сделать важный практический вывод: так как вид функций  $\Phi_2(\zeta)$  и  $\Psi_2(\zeta)$ , удовлетворяющих только первому условию (V.26) и первому условию (V.27), не зависит от специального выбора  $\omega(\zeta)$ , а функция  $z=\omega(\zeta)$  (V.34), определяющая границу пластической зоны, полностью определяется из второго условия (V.26) и второго условия (V.27), то можно взять любую функцию  $\omega(\zeta)$ , т. е. задать наперед границу пластической зоны, и, идя обратным путем, получить напряженное состояние на бесконечности, при котором функция  $\omega(\zeta)$  при  $|\zeta|=1$  определяла бы границу пластической зоны, т. е. контур  $L$ . Возьмем, например, функцию

$$z = \omega(\zeta) = c \left( \zeta + \frac{\beta}{\zeta} + \frac{\delta}{\zeta^2} \right), \quad (\text{V.41})$$

где  $c$ ,  $\beta$  и  $\delta$  — некоторые постоянные.

Тогда на основании (V.35)

$$\Phi_2(\zeta) = k \ln c - k \ln R + k \ln \left( \zeta + \frac{\beta}{\zeta} + \frac{\delta}{\zeta^2} \right) + \frac{k-p}{2} - k \ln \zeta, \quad (\text{V.42})$$

а на основании (V.37)

$$\Psi_2(\zeta) = k \frac{\frac{1}{\zeta} + \beta\zeta + \delta\zeta^2}{1 - \frac{\beta}{\zeta^2} - \frac{2\delta}{\zeta^3}} \frac{1}{\zeta}. \quad (\text{V.43})$$

Воспользовавшись соотношениями (V.22), (V.23) и формулами (V.21), найдем напряжения на бесконечности:

$$\sigma_x^{(\infty)} + \sigma_y^{(\infty)} = 4 \left( k \ln c - k \ln R + \frac{k-p}{2} \right), \quad (\text{V.44})$$

$$\sigma_y^{(\infty)} - \sigma_x^{(\infty)} + 2i\tau_{xy}^{(\infty)} = 2k\delta(x + iy) + 2k\beta.$$

Таким образом, если в достаточно удаленных частях плоскости (на бесконечности) будут заданы напряжения (V.44), а по контуру кругового отверстия радиуса  $R$  — усилия (V.16), границей пластической зоны, охватывающей отверстие, будет контур  $L$ , уравнение которого задано функцией  $\omega(\zeta)$  (V.41) при  $|\zeta|=1$ .

Рассмотрим ограничения, накладываемые на нагружение. Чтобы избежать разгрузки, недопустимой при условиях данной задачи, необходимо, чтобы пластическая зона в любой момент нагружения полностью содержала в себе пластическую зону в любой предыдущий момент нагружения.

Границей пластической области является эллипс с полуосями  $a=c(1+\beta)$ ,  $b=c(1-\beta)$ . Припишем величинам в предшествующий момент нагружения индекс 1, в последующий — индекс 2:

$$c_2(1+\beta_2) \geq c_1(1+\beta_1), \quad c_2(1-\beta_2) \geq c_1(1-\beta_1). \quad (V.45)$$

Величины  $c$ ,  $\beta$  определяются значениями нагрузок  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $P(\lambda)$ . Поэтому неравенства (V.45) определяют возможные пределы изменения нагрузок.

Следует также отметить, что полученное решение справедливо лишь в том случае, когда любая точка в пластической области может быть соединена с контуром отверстия двумя линиями скольжения, лежащими целиком внутри пластической области. Для этого необходимо, чтобы отношение полуосей эллипса, определяющего границу пластической зоны, не превосходило  $\sqrt{2}(\beta \leq 0,171)$ . В противном случае задача становится статически неопределимой.

Рассмотрим уравнения для определения перемещений (V.23). В полярной системе координат они примут вид

$$\frac{2de_r^p}{\sigma_r - \sigma_\theta} = \frac{2de_\theta^p}{\sigma_\theta - \sigma_r} = \frac{de_{r\theta}^p}{2\tau_{r\theta}}; \quad (V.46)$$

$$e_r = e_r^p + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{4G}, \quad e_\theta = e_\theta^p + \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{4G}, \quad e_{r\theta} = e_{r\theta}^p + \frac{\tau_{r\theta}}{G},$$

$$e_r = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta},$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right), \quad (V.47)$$

где  $u_r$ ,  $u_\theta$  — компоненты перемещений вдоль осей  $r$ ,  $\theta$ .

Из предположения о несжимаемости материала следует

$$e_r + e_\theta = 0. \quad (V.48)$$

В пластической области  $\tau_{r\theta}=0$ , поэтому из (V.47) следует, что  $e_{r\theta}=e_{r\theta}^p$ . Далее, из (V.46) следует, что в пластической области

$$de_{r\theta} = 0. \quad (V.49)$$

Уравнение (V.49) определяет приращение деформации в точке тела с изменением параметра нагружения, поэтому интегрирование соотношения (V.49) дает

$$e_{r\theta} = f(r, \theta). \quad (V.50)$$

Покажем, что постоянная в каждой точке величина правой части уравнения (V.50) равна нулю. Рассмотрим процесс деформирования. На границе пластической зоны  $L$  все компоненты напряжения и деформации непрерывны, поэтому из условия  $\tau_{r\theta}=0$  и закона Гука следует, что на контуре  $L$   $e_{r\theta}=0$ . Поэтому при последовательном распро-

странении пластической зоны в любой фиксированной точке в момент прохождения через нее границы пластической области  $e_{r,\theta}=0$ . А так как в любой последующий момент нагружения в пластической зоне имеет место соотношение (V.49), то, следовательно, деформация  $e_{r,\theta}$  в пластической области всегда будет равна нулю, т. е.  $f(r, \theta)=0$ .

Итак, для определения перемещений в пластической области имеют место уравнения

$$e_r + e_\theta = 0, \quad e_{r,\theta} = 0 \quad (\text{V.51})$$

или в компонентах перемещения:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} = 0. \quad (\text{V.52})$$

Система уравнений (V.52) принадлежит к гиперболическому типу, характеристики ее совпадают с характеристиками системы уравнений для напряжений. Уравнения (V.52) могут быть решены численно. В § 5 приведено решение системы уравнений (V.52) методом малого параметра для рассматриваемой задачи.

Решение задачи, изложенной в данном разделе, было продолжено В. Л. Фоминым [1, 2] на случай стационарного теплового поля при  $p=0$ ,  $\tau_{r,\theta}=0$  (к контуру кругового отверстия не приложено внешних усилий). Считалось, что поле термизолировано, а пластическая зона полностью охватывает круговое отверстие.

Граница  $L$ , отделяющая пластическую зону (охватывающую отверстие) от упругой, и в этом случае оказывается эллипсом, однако его центр смещается относительно центра отверстия; влияние указанного смещения определяется температурным полем. При этом вместо отображающей функции (V.34) будем иметь функцию

$$z = \omega(\zeta) = \frac{\gamma}{k} + c \left( \zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right),$$

где  $\gamma$  — постоянная, определяемая тепловым полем;

$$c = Re \left( \frac{A+B}{4k} - \frac{1}{2} \right); \quad \beta = \frac{A-B}{2k};$$

$A$  и  $B$  — значения напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  на бесконечности. Функция  $\omega(\zeta)$  отображает внешность единичного круга на внешность эллипса с центром в точке  $\frac{\gamma}{k} = x_0 + iy_0$  и с полуосями  $a = c(1+\beta)$ ,  $b = c(1-\beta)$ .

Случай, когда  $k$  является функцией радиуса  $r$ , т. е.  $k=k(r)$ , рассмотрен А. И. Кузнецовым [1].

Исследование упруго-пластической задачи для материала, обладающего линейным упрочнением в частном случае, когда на контуре кругового отверстия задано одно нормальное усилие, а на бесконечности напряжения отсутствуют, дано К. Н. Шевченко [1]. Исследование этой задачи для материала со степенным упрочнением проведено О. Л. Mangasarian [1]. В последней работе показано, что различие в

результатах, полученных по теории малых упруго-пластических деформаций и по теории течения, — небольшое.

**Случай нормальных и касательных усилий, приложенных к контуру кругового отверстия\***. Рассмотрим общий случай, когда к контуру кругового отверстия радиуса  $R$  приложены как нормальные, так и касательные усилия, т. е. при  $r=R$

$$\sigma_r = p, \quad \tau_{r\theta} = \tau, \quad (\text{V.53})$$

а на бесконечности, как и в предыдущем случае, напряжения

$$\sigma_x^{(\infty)} = A, \quad \sigma_y^{(\infty)} = B. \quad (\text{V.54})$$

Решение уравнения (V.15) при условии (V.53) найдено С. Г. Михлиным [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(1)} &= \varepsilon k \left[ 2 \ln (\sqrt{r^2 - C} + \sqrt{r^2 + C}) - \frac{\sqrt{r^4 - C^2}}{r^2} \right] + kD, \\ \sigma_\theta^{(1)} &= \varepsilon k \left[ 2 \ln (\sqrt{r^2 - C} + \sqrt{r^2 + C}) + \frac{\sqrt{r^4 - C^2}}{r^2} \right] + kD, \\ \tau_{r\theta}^{(1)} &= \frac{kC}{r^2}, \end{aligned} \quad (\text{V.55})$$

где

$$\varepsilon = \pm 1, \quad C = \frac{\tau R^2}{k};$$

$$D = \frac{p}{k} - \varepsilon \left[ 2 \ln (\sqrt{R^2 + C} + \sqrt{R^2 - C}) - \frac{\sqrt{R^4 - C^2}}{R^2} \right];$$

$r, \theta$  — полярные координаты.

Для наших целей будет удобно перейти к декартовым координатам и записать напряжения в следующих комбинациях:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)} &= 2\varepsilon k [2 \ln (\sqrt{r^2 - C} + \sqrt{r^2 + C})] + 2kD, \\ \sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2i\tau_{xy}^{(1)} &= (\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)} + 2i\tau_{r\theta}^{(1)}) e^{-2i\theta} = \\ &= 2ke^{-2i\theta} \left[ \frac{\varepsilon \sqrt{r^4 - C^2}}{r^2} + i \frac{C}{r^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{V.56})$$

Задача заключается в нахождении контура  $L$  и таких функций  $\Phi_2^*(z)$  и  $\Psi_2^*(z)$ , голоморфных вне  $L$ , которые удовлетворяли бы следующим соотношениям:

$$4 \operatorname{Re} \Phi_2^*(z) = \begin{cases} 2\varepsilon k [2 \ln (\sqrt{r^2 - C} + \sqrt{r^2 + C})] + 2kD & \text{на } L, \\ A + B & \text{при } z \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (\text{V.57})$$

$$2 [z\Phi_2^*(z) + \Psi_2^*(z)] = \begin{cases} 2k \left[ \frac{\varepsilon \sqrt{r^4 - C^2}}{r^2} + i \frac{C}{r^2} \right] e^{-2i\theta} & \text{на } L, \\ B - A & \text{при } z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (\text{V.58})$$

\* Решение дано О. С. Парасюком [1].

Точное решение представляет большие трудности. Однако, считая, что пластическая зона будет достаточно большой, можно в первом граничном условии (V.58) пренебречь величиной  $C/r^2$  и заменить это условие следующим:

$$2[z\bar{\Phi}_2^*(z) + \Psi_2^*(z)] = 2\epsilon k e^{-2i\theta}. \quad (\text{V.59})$$

Отобразим внешность контура  $L$  на внешность единичного круга  $\gamma$  плоскости  $\zeta$  с помощью функции

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^{-n} \quad (\text{V.60})$$

и положим, как и раньше,

$$\Phi_2^*[\omega(\zeta)] = \Phi_2(\zeta); \quad \Psi_2^*[\omega(\zeta)] = \Psi_2(\zeta).$$

Заменим соотношения (V.57)—(V.59) следующими:

$$4 \operatorname{Re} \Phi_2(\zeta) = \begin{cases} 2\epsilon k [2 \ln (\sqrt{\omega(z)\overline{\omega(\zeta)} - C} + \sqrt{\omega(\zeta)\overline{\omega(\zeta)} + C}) + 2kD] & \text{на } \gamma, \\ A + B & \text{при } \zeta \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (\text{V.61})$$

$$2 \left[ \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi_2'(\zeta) + \Psi_2(\zeta) \right] = \begin{cases} 2\epsilon k \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)} & \text{на } \gamma, \\ B - A & \text{при } \zeta \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (\text{V.62})$$

Дальнейший ход рассуждений такой же, как и в предыдущем случае. Приняв

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta}, \quad (\text{V.63})$$

умножим первое условие (V.62) на  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta}$ , где  $\zeta$  — точка внутри  $\gamma$ , и проинтегрируем по  $\gamma$ :

$$B - A = \frac{\bar{c}_1}{c} 2k\epsilon \quad (\text{V.64})$$

или

$$\bar{c}_1 = \frac{B - A}{2k\epsilon} c = \beta c = c_1, \quad (\text{V.65})$$

где

$$\beta = \frac{B - A}{2k\epsilon}, \quad \epsilon = +1.$$

Таким образом, из первого условия (V.62) функция определяется в виде

$$z = \omega(\zeta) = c \left( \zeta + \frac{\beta}{\zeta} \right). \quad (\text{V.66})$$

Определим константу  $c$  из второго условия (V.61). Если  $A=B \neq 0$  или  $A=B=0$ , то легко видеть из (V.65) и (V.66), что  $\beta=0$ , и границей пластической зоны будет круг.

Рассмотрим несколько примеров, решения которых представлены в таблице

№ примера	Напряжения на бесконечности		Напряжения по контуру отверстия		$c$	$\beta$	$R$
	$\frac{\sigma_x^{(\infty)}}{k}$	$\frac{\sigma_y^{(\infty)}}{k}$	$\frac{\tau_{r\theta}}{k}$	$\frac{\sigma_r}{k}$			
1	-1,23769	-0,57102	0,5	-4	3	1/3	1
2	-1,23769	-0,57102	0	-4	2,8513	1/3	1
3	1,49650	1,89650	0,5	0	1,5	0,2	1
4	0,49650	1,89650	0,5	-1	1,5	0,2	1
5	0,45299	1,11965	0,5	-1	1,5	1/3	1
6	0,47759	1,14425	0	-1	1,5	1/3	1

Сравнение примеров 1 и 2 показывает, что с добавлением касательного напряжения  $\tau_{r\theta} = \text{const}$  пластическая зона увеличивается. Для большей наглядности на рис. V.2

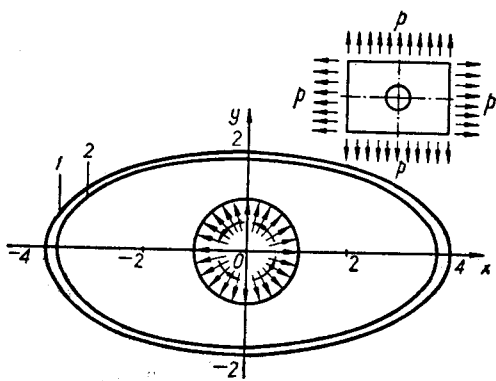


Рис. V.2

приводятся графики контуров  $L$ , отделяющих пластическую зону от упругой, для примеров 1 и 2 (соответственно кривые 1 и 2). Сравнение примеров 3 и 4, 5 и 6 показывает, как влияют нормальное давление и касательное напряжение, примененные к контуру отверстия, на пластическую зону, а именно с точки зрения величины пластической зоны приложение нормального давления определенной величины эквивалентно уменьшению напряжений на бесконечности соответственно на такую же величину, и приложение касательного напряжения также эквивалентно некоторому уменьшению напряжений на бесконечности.

### § 3. Влияние неоднородности напряженного поля на пластическую зону возле кругового отверстия \*

Пусть к контуру кругового отверстия радиуса  $R$  приложены усилия

$$\sigma_r = p, \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (V.67)$$

\* Случай чистого изгиба рассмотрен Л. А. Галиным [1]. Для более сложных случаев основного напряженного состояния решение дано Г. Н. Савным и О. С. Парасюком [1, 2].

Если материал возле отверстия перейдет в пластическое состояние, функция напряжений  $U_1(x, y)$  будет иметь вид (V.17):

$$U_1(r) = kr^2 \ln \frac{r}{R} + \frac{p-k}{2} r^2. \quad (\text{V.68})$$

Функция (V.68) обладает тем важным свойством, что она одновременно удовлетворяет двум уравнениям: условию пластичности (V.15) и бигармоническому уравнению (V.1). Это обстоятельство, впервые замеченное Л. А. Галиным [1], дает возможность решить упруго-пластическую задачу при более общих условиях на бесконечности, чем это было сделано в предыдущих параграфах, где рассматривалось только растяжение.

Рассмотрим упруго-пластическую задачу для случая, когда напряжения на бесконечности выражаются полиномами.

Найдем бигармоническую функцию  $U_2(x, y)$  вне некоторого неизвестного контура  $L$ , ограничивающего пластическую область, по следующим условиям:

1) на бесконечности (при  $z \rightarrow \infty$ )

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} = 4 \operatorname{Re} [\Phi_2^*(z)], \quad (\text{V.69})$$

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} - 2i \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y} = 2 [\bar{z} \Phi_2^{*\prime}(z) + \Psi_2^*(z)],$$

где

$$\Phi_2^*(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_m z^m; \quad (\text{V.70})$$

$$\Psi_2^*(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_m z^m, \quad (\text{V.71})$$

а  $m$  — целое вещественное число;

2) вдоль неизвестного гладкого контура  $L$ , ограничивающего пластическую область,

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U_2}{\partial x \partial y}, \quad (\text{V.72})$$

где  $U_1(x, y)$  — функция (V.68).

Учитывая, что  $U_1(x, y)$  и  $U_2(x, y)$  — бигармонические функции, введем бигармоническую функцию

$$U_3(x, y) = U_2(x, y) - U_1(x, y) \quad (\text{V.73})$$

и представим ее через две голоморфные функции  $\varphi_3^*(z)$  и  $\chi_3^*(z)$  по формуле Э. Гурса:

$$U_3(x, y) = \operatorname{Re} [\bar{z} \varphi_3^*(z) + \chi_3^*(z)]. \quad (\text{V.74})$$

Введем обозначения  $\varphi_3^*(z) = \Phi_3^*(z)$ ,  $\chi_3^*(z) = \Psi_3^*(z)$ .



Теперь задача может быть сформулирована так: найти две голоморфные вне контура  $L$  функции  $\Phi_3^*(z)$  и  $\Psi_3^*(z)$  по условиям

$$\operatorname{Re}[\Phi_3^*(z)] = \begin{cases} 0 & \text{на } L, \\ \operatorname{Re}[\Phi_2^*(z)] - \frac{\rho+k}{2} - k \ln \frac{r}{R} & \text{при } z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (\text{V.75})$$

$$\bar{z}\Phi_3^{\prime*}(z) + \Psi_3^*(z) = \begin{cases} 0 & \text{на } L, \\ \bar{z}\Phi_2^{\prime*}(z) + \Psi_2^*(z) - e^{-2i\theta} & \text{при } z \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (\text{V.76})$$

где  $\theta = \arg z$ ,  $L$  — неизвестный контур, отделяющий упругую область от пластической.

Отобразим область  $S$  плоскости  $xOy$ , внешнюю по отношению к  $L$ , на внешность единичного круга  $\gamma$  плоскости  $\xi O\eta$  с помощью функции

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \zeta^{-n}. \quad (\text{V.77})$$

Введем обозначения:

$$\Phi_3^*[\omega(\zeta)] = \Phi_3(\zeta), \quad \Psi_3^*[\omega(\zeta)] = \Psi_3(\zeta).$$

На основании (V.75) и (V.76)

$$\operatorname{Re}[\Phi_3(\zeta)] = \begin{cases} 0 & \text{на } \gamma, \\ \operatorname{Re} a_0 + \operatorname{Re}[a_1 c \zeta + a_2 c^2 \zeta^2 + \dots + a_m c^m \zeta^m] + \\ + k \ln R - \frac{k+\rho}{2} - k \ln |\zeta| - k \ln c & \text{при } \zeta \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (\text{V.78})$$

$$\left[ \frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi_3'(\zeta) + \Psi_3(\zeta) \right] = \begin{cases} 0 & \text{на } \gamma, \\ \bar{c} \zeta \Phi_2'(\zeta) + \Psi_2(c \zeta) - k e^{-2i\theta_1} & \text{при } \zeta \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (\text{V.79})$$

где  $\theta_1 = \arg \zeta$ ;  $a_0, a_1, \dots, a_m$  — коэффициенты функций  $\Phi_2^*(z)$ . Из соотношений (V.78) и (V.79) мы должны определить функции  $\Phi_3(\zeta)$ ,  $\Psi_3(\zeta)$ ,  $\omega(\zeta)$ . Очевидно, условия (V.78) будут удовлетворены, если

$$\Phi_3(\zeta) = a_1 c \zeta - \bar{a}_1 c \frac{1}{\zeta} + a_2 c^2 \zeta^2 - \bar{a}_2 c^2 \frac{1}{\zeta^2} + \dots + a_m c^m \zeta^m - \bar{a}_m c^m \frac{1}{\zeta^m} - k \ln \zeta, \quad (\text{V.80})$$

причем константу  $c$  определим так, чтобы

$$\operatorname{Re} a_0 + k \ln R - \frac{k+\rho}{2} - k \ln c = 0$$

или

$$c = R e^{\frac{1}{k} \left( \operatorname{Re} a_0 - \frac{k+\rho}{2} \right)}. \quad (\text{V.81})$$

Поскольку при  $\zeta \rightarrow \infty$

$$\frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi_3'(\zeta) = \bar{c} \zeta \Phi_2^{\prime*}(c \zeta) - k e^{-2i\theta_1},$$

на основании второго условия (V.79)

$$\Psi_3(\zeta) = \Psi_2^*(c\zeta) + M(\zeta), \quad (\text{V.82})$$

где  $M(\zeta)$  — функция, регулярная вне  $\gamma$  и  $M(\infty) = 0$ .

Первое условие (V.79) можно представить в виде

$$\overline{\omega(\zeta)} \Phi_3'(\zeta) = -\omega'(\zeta) \Psi_3(\zeta) \text{ на } \gamma. \quad (\text{V.83})$$

Это и есть основное функциональное уравнение, с помощью которого определим функцию  $\omega(\zeta)$ .

Предположив возможность разложения  $\omega(\zeta)$  в ряд вида (V.77), на основании (V.83) получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{c}{\zeta} + \bar{c}_1 \zeta + \bar{c}_2 \zeta^2 + \dots + \bar{c}_n \zeta^n + \dots \right) \Phi_3'(\zeta) = \\ & = - \left( c - \frac{c_1}{\zeta^2} - \frac{2c_2}{\zeta^3} - \dots - \frac{nc_n}{\zeta^{n+1}} - \dots \right) \Psi_3(\zeta) \text{ на } \gamma. \end{aligned} \quad (\text{V.84})$$

Функция  $\Psi_3(\zeta)$  известна с точностью до регулярной части вне  $\gamma$ , поэтому для определения коэффициентов функции  $\omega(\zeta)$  (V.77) из соотношения (V.84) достаточно сравнить члены с положительными степенями  $\zeta$ . В результате получим бесконечную систему уравнений, из которых нужно определить такие значения коэффициентов функции  $\omega(\zeta)$ , чтобы ряд (V.77) сходился всюду вне  $\gamma$ . Выбирая полиномы (V.70) и (V.71) определенного вида, получим решения ряда практических важных задач.

**Чистый изгиб полосы (балки).** В этом случае, как известно\*, полиномы (V.70) и (V.71) имеют вид

$$\Phi_2^*(z) = i \frac{M}{4J} z, \quad \Psi_2^*(z) = -i \frac{M}{4J} z,$$

где  $M$  — величина изгибающего момента;  $J$  — момент инерции поперечного сечения балки.

На основании (V.80) и (V.82)

$$\Phi_3(\zeta) = i \frac{Mc}{4J} \zeta + i \frac{Mc}{4J} \cdot \frac{1}{\zeta} - k \ln \zeta,$$

$$\Phi_3'(\zeta) = i \frac{Mc}{4J} - i \frac{Mc}{4J} \cdot \frac{1}{\zeta^2} - k \frac{1}{\zeta},$$

$$\Psi_3(\zeta) = -i \frac{Mc}{4J} \zeta + N(\zeta),$$

где  $N(\zeta)$  — функция голоморфная вне  $\gamma$ , и  $N(\infty) = 0$ .

\* См. формулы (II.95) и (II.96).

Основное соотношение (V.84) примет вид

$$\left[ \left( c \frac{1}{\xi} + \bar{c}_1 \bar{\xi} + \bar{c}_2 \bar{\xi}^2 + \dots + \bar{c}_n \bar{\xi}^n + \dots \right) \left( i \frac{Mc}{4J} - i \frac{Mc}{4J} \cdot \frac{1}{\xi^2} - \frac{k}{\xi} \right) \right] = \\ = \left[ \left( c - c_1 \frac{1}{\xi^2} - \frac{2c_2}{\xi^3} - \dots - \frac{nc_n}{\xi^{n+1}} - \dots \right) \left( i \frac{Mc}{4J} \xi - N(\xi) \right) \right].$$

Вводя обозначение  $\alpha = i \frac{Mc}{4J}$  и сравнивая коэффициенты при положительных степенях  $\xi$ , получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов  $c_k$  функции  $\omega(\xi)$ :

$$\begin{aligned} \bar{k}c_1 + \bar{\alpha}c_2 &= 0, \\ \bar{\alpha}c_1 - \bar{k}c_2 - \bar{\alpha}c_3 &= c\alpha, \\ \bar{\alpha}c_2 - \bar{k}c_3 - \bar{\alpha}c_4 &= 0, \\ \dots & \\ \dots & \\ \bar{\alpha}c_n - \bar{k}c_{n+1} - \bar{\alpha}c_{n+2} &= 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \end{aligned}$$

Для решения этой системы заметим, что, начиная с третьего уравнения, будем иметь разностное уравнение

$$\bar{c}_{n+2} + \frac{k}{\alpha} \bar{c}_{n+1} - \bar{c}_n = 0,$$

общее решение которого, как известно, имеет вид

$$\bar{c}_n = Av_1^n + Bv_2^n,$$

где  $v_1$  и  $v_2$  — корни характеристического уравнения

$$v^2 + \frac{k}{\alpha} v - 1 = 0$$

соответственно

$$v_1 = -\frac{k}{2\alpha} + \sqrt{\frac{k^2}{4\alpha^2} + 1}, \quad v_2 = -\frac{k}{2\alpha} - \sqrt{\frac{k^2}{4\alpha^2} + 1}.$$

Корень  $v_2$  по модулю больше единицы, поэтому его отбросим; тогда  $\bar{c}_n = Av_1^n$  при  $n \geq 2$ .

Из первых двух уравнений нашей системы определим  $\bar{c}_1$  и  $A$ :

$$\bar{c}_1 = \frac{\alpha^2}{\alpha^2 + k^2 + \alpha k v_1}, \quad A = -\frac{k\alpha c}{(\alpha^2 + k^2)v_1^2 + \alpha k v_1^3}.$$

Окончательно просуммировав ряд для  $\omega(\xi)$ , найдем

$$z = \omega(\xi) = c\xi + \frac{c_1}{\xi} + \frac{\bar{A}v_1^2}{\xi(\xi - v_1)}. \quad (\text{V.85})$$



Для решения системы (V.86) рассмотрим уравнение в конечных разностях:

$$\delta \bar{c}_{n+4} + \beta \bar{c}_{n+3} + k \bar{c}_{n+2} - \beta \bar{c}_{n+1} - \delta \bar{c}_n = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots),$$

общее решение которого имеет вид

$$\bar{c}_n = k_1 v_1^n + k_2 v_2^n + k_3 v_3^n + k_4 v_4^n, \quad (\text{V.87})$$

где  $k_1, k_2, k_3, k_4$  — произвольные константы;

$v_1, v_2, v_3, v_4$  — корни характеристического уравнения

$$\delta v^4 + \beta v^3 + kv^2 - \beta v - \delta = 0. \quad (\text{V.88})$$

Можно доказать, что при определенных условиях, наложенных на коэффициенты уравнения (V.88), последнее будет иметь корни, удовлетворяющие таким неравенствам:

$$\begin{aligned} |v_1| < 1; & \quad |v_2| < 1; \\ |v_3| > 1; & \quad |v_4| > 1. \end{aligned}$$

В самом деле, запишем уравнение (V.88) в виде

$$v^4 + \frac{\beta}{\delta} v^3 + \frac{k}{\delta} v^2 - \frac{\beta}{\delta} v - 1 = 0$$

и положим  $\frac{\beta}{\delta} = a, \frac{k}{\delta} = ib$ . Получим

$$v^4 + av^3 + ibv^2 - av - 1 = 0.$$

Запишем разложение

$$v^4 + av^3 + ibv^2 - av - 1 = (v^2 + pv + q)(v^2 + p_1v + q_1).$$

Сравнивая коэффициенты, получаем

$$\begin{aligned} p + p_1 &= a, & q_1 p + q p_1 &= -a, \\ qq_1 &= -1, & q_1 + q + p p_1 &= ib. \end{aligned}$$

Отсюда получим следующее уравнение для  $q$ :

$$\left(q - \frac{1}{q}\right) \left(q^2 + 2 + \frac{1}{q^2}\right) - a^2 \left(q - \frac{1}{q}\right) = ib \left(q^2 + 2 + \frac{1}{q^2}\right).$$

Положив теперь

$$q - \frac{1}{q} = iy,$$

получим

$$-y^3 + by^2 + (4 - a^2)y - 4b = 0.$$

Обозначим действительный корень последнего уравнения через  $y_0$ . Тогда легко убедиться, что корни уравнения (V.88)

$$v_{1,2} = -\frac{a\left[1 + i\frac{y_0}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}\right]}{4\sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{a^2\left(1 + i\frac{y_0}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}\right)}{16\left[1 - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2\right]} - i\frac{y_0}{2} - \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}};$$

$$v_{3,4} = \frac{a\left(1 + i\frac{y_0}{2} - \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}\right)}{4\sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}} \pm$$

$$\pm \sqrt{\frac{a^2\left(1 + i\frac{y_0}{2} - \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}\right)}{16\left[1 - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2\right]} - i\frac{y_0}{2} + \sqrt{1 - \left(\frac{y_0}{2}\right)^2}},$$

но так как  $y_0$  может быть принят достаточно большим, то легко видеть, что  $v_1$  и  $v_2$  попадут внутрь, а  $v_3$  и  $v_4$  — наружу единичного круга.

Полагая в (V.87)  $k_3 = k_4 = 0$  (в противном случае ряд для  $\omega(\zeta)$  (V.77) был бы расходящимся) будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{c}_2 &= k_1 v_1^2 + k_2 v_2^2, \\ \bar{c}_3 &= k_1 v_1^3 + k_2 v_2^3, \\ &\dots \dots \dots \\ \bar{c}_n &= k_1 v_1^n + k_2 v_2^n, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \tag{V.89}$$

Подставив (V.89) во второе и третье условия (V.86), получим

$$k_1 = -\frac{\bar{c}_1 - c}{v_2 - v_1},$$

$$k_2 = \frac{\bar{c}_1 - c}{v_2 - v_1}. \tag{V.90}$$

Подставляя теперь (V.89) и (V.90) в первое условие (V.86), найдем уравнение для определения  $c_1$ :

$$\begin{aligned} c_1 \delta - \bar{c}_1 [k + \beta(v_1 + v_2) + \delta(v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2)] = \\ = c \{ \alpha - \delta - [\beta(v_1 + v_2) + \delta(v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2)] \}. \end{aligned}$$

Следовательно, функция

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{\overline{k_1 v_1^2}}{\zeta(\zeta - v_1)} + \frac{\overline{k_2 v_2^2}}{\zeta(\zeta - v_2)}. \quad (\text{V.91})$$

Рассмотрим изгиб полосы (балки) постоянной перерезывающей силой  $Q$ . Пусть  $l = a = 300$  см,  $2h = 100$  см,  $p = 3k$ ,  $R = 5$  см.

При  $Q = 400$  кг уравнение контура, отделяющего пластическую зону от упругой, будет иметь вид

$$x \approx 13,56 \cos \theta + 3,26 \sin \theta - \frac{0,16\alpha + 0,68\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$y \approx 13,64 \sin \theta + 3,26 \cos \theta - \frac{0,68\alpha - 0,16\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

где

$$\alpha = \cos 2\theta + 0,05 \sin \theta; \quad \beta = \sin 2\theta - 0,05 \cos \theta.$$

При  $Q = 600$  кг уравнение контура  $L$  будет иметь вид

$$x \approx 13,45 \cos \theta + 5,23 \sin \theta - \frac{0,73\alpha + 1,92\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

$$y \approx 13,75 \sin \theta + 5,23 \cos \theta - \frac{1,92\alpha - 0,73\beta}{\alpha^2 + \beta^2},$$

где

$$\alpha = \cos 2\theta + 0,14 \sin \theta; \quad \beta = \sin \theta - 0,14 \cos \theta.$$

На рис. V.4 кривая 1 — круг радиуса  $c_0 = Re \frac{p-h}{2k}$  — граница пластической зоны во-

круг кругового отверстия, к контуру которого приложено усилие  $p = 3k$ , а напряжения на бесконечности равны нулю; кривые 2 и 3 — соответственно границы пластической зоны вокруг кругового отверстия, к контуру которого приложено усилие  $p = 3k$ , а напряжения на бесконечности соответствуют изгибу консольной балки (плоская деформация) постоянной перерезывающей силой  $Q$ , равной 4000 и 6000 кг.

Случай нормальных и касательных усилий, приложенных к контуру кругового отверстия при заданных комплексных потенциалах (V.70) и (V.71), изложенным здесь методом рассмотрен И. Ю. Хомой [1].

**Обратная упруго-пластическая задача** \*. Допустим, что неограниченная плоскость, находящаяся в условиях плоской деформации, ослаблена отверстием, по контуру  $L$  которого приложены постоянные нормальные и касательные усилия, а на бесконечности напряжения являются линейными функциями координат. Задача заключается в определении контура отверстия  $L$  при условии, что пластическая зона в момент зарождения сразу охватывает все отверстие  $L$ , не проникая в глубь тела, т. е. в пластическом состоянии находится лишь контур отверстия  $L$ .

Пусть на неизвестном контуре  $L$  заданы нормальные и касательные усилия

$$\sigma_n = p, \quad \tau_{tn} = \tau, \quad (\text{V.92})$$

где  $t$  и  $n$  — направления касательной и нормали к  $L$ .

\* Решение дано Г. П. Черепановым [1].

Принимаем, что в пластической зоне имеет место условие пластичности \*

$$(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2, \quad (\text{V.93})$$

которое можно записать так:

$$|\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}| = 2k. \quad (\text{V.94})$$

Поскольку величина левой части (V.94) является инвариантом относительно осей координат в данной точке тела, из условия (V.93) с учетом (V.92) имеем соотношение

$$\sigma_t = \rho \pm 2 \sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad (\text{V.95})$$

справедливое для всех точек контура  $L$ . Знак «плюс» или «минус» перед радикалом в (V.95) выбирается из физических соображений.

Компоненты напряжений в упругой области  $S$  (вне контура  $L$ ) выражаются через две аналитические функции Н. И. Мусхелишвили  $\Phi^*(z)$ ,  $\Psi^*(z)$  по формулам

$$\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)} = 4\text{Re} \Phi^*(z), \quad (\text{V.96})$$

$$\sigma_y^{(2)} - \sigma_x^{(2)} + 2i\tau_{xy}^{(2)} = 2[z\Phi^{*'}(z) + \Psi^*(z)].$$

Функции на бесконечности

$$\Phi^*(z) = a_0 + a_1 z,$$

$$\Psi^*(z) = b_0 + b_1 z, \quad (\text{V.97})$$

где  $a_0, a_1, b_0, b_1$  — известные комплексные постоянные.

Отобразим внешность контура  $L$  на внешность единичного круга  $\gamma$  плоскости  $\zeta$  с помощью функции

$$z = \omega(\zeta) = c\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^{-k}. \quad (\text{V.98})$$

Если положить

$$\Phi^*[\omega(\zeta)] = \Phi(\zeta), \quad \Psi^*[\omega(\zeta)] = \Psi(\zeta),$$

то функции (V.97) с учетом (V.98) при  $\zeta \rightarrow \infty$  примут вид

$$\Phi(\zeta) = a_0 + a_1 c \zeta; \quad (\text{V.99})$$

$$\Psi(\zeta) = b_0 + b_1 c \zeta. \quad (\text{V.100})$$

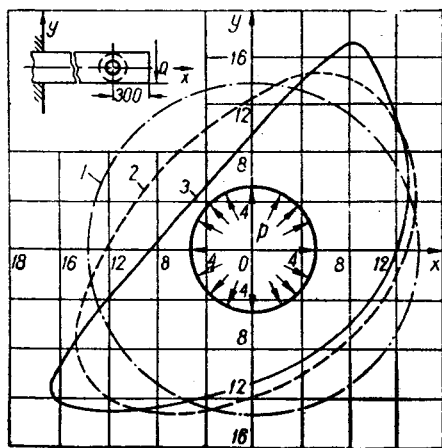


Рис. V.4.

\* См. Л. М. Качанов [1].



Воспользуемся следующими формулами:

$$\begin{aligned}\sigma_t - \sigma_n + 2i\tau_{nt} &= \frac{\zeta^2}{\rho^2} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{\omega'(\bar{\zeta})} [\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}], \\ \sigma_t + \sigma_n &= \sigma_x + \sigma_y.\end{aligned}\quad (\text{V.101})$$

Из соотношений (V.101) с учетом условий (V.92) и (V.96) получаем граничные условия на контуре единичного круга:

$$\operatorname{Re} \Phi(\zeta) = a \quad \text{при } |\zeta| = 1; \quad (\text{V.102})$$

$$\frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\omega'(\bar{\zeta})} \left[ \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) \right] = b \quad \text{при } |\zeta| = 1, \quad (\text{V.103})$$

где

$$2a = \rho \pm \sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad b = \pm \sqrt{k^2 - \tau^2} + i\tau. \quad (\text{V.104})$$

Таким образом, решение задачи состоит в нахождении функций  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$  по граничным условиям (V.102) и (V.103) с учетом соотношений (V.99) и (V.100).

Условия (V.102) и (V.99) будут удовлетворены, если функция

$$\Phi(\zeta) = a + a_1 c \zeta - \bar{a} c \frac{1}{\zeta}. \quad (\text{V.105})$$

При этом должно иметь место равенство

$$a_0 = a. \quad (\text{V.106})$$

Следовательно, усилия на контуре отверстия и на бесконечности не могут быть заданы произвольным образом—они должны быть связаны соотношениями (V.106).

Принимая во внимание, что на контуре единичного круга

$$\bar{\zeta} = \bar{\sigma} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\zeta},$$

перепишем условие (V.103):

$$b \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \zeta^2 \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi'(\zeta) = \zeta^2 \omega'(\zeta) \Psi(\zeta) \quad \text{на } \gamma. \quad (\text{V.107})$$

Обозначим левую часть уравнения (V.107) через

$$F^+(\zeta) = b \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \zeta^2 \bar{\omega}'\left(\frac{1}{\zeta}\right) \Phi'(\zeta). \quad (\text{V.108})$$

Тогда на основании формул (V.98) и (V.105) нетрудно видеть, что функция  $F^+(\zeta)$  будет аналитической внутри круга  $|\zeta| < 1$  кроме точки  $\zeta = 0$ , в которой она имеет полюс с главной частью  $-a_1 c^2 \zeta^{-1}$ .

Если функцию  $\Psi(\zeta)$  представить в виде

$$\Psi(\zeta) = b_1 c \zeta + b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k} \zeta^{-k}, \quad (\text{V.109})$$

что согласуется с условием (V.100), и обозначить правую часть уравнения (V.107) через

$$F^-(\zeta) = \zeta^2 \omega'(\zeta) \Psi(\zeta), \quad (\text{V.110})$$

то функция  $F^-(\zeta)$  будет аналитической вне круга  $|\zeta| > 1$ , кроме бесконечно удаленной точки, в которой

$$F^-(\zeta) = b_1 c^2 \zeta^3 + b_0 c \zeta^2 + c(b_{-1} - b_1 c_1) \zeta + c b_{-2} - 2b_1 c c_2 - b_0 c_1 + 0(\zeta^{-1}). \quad (\text{V.111})$$

Таким образом, функции  $F^+(\zeta)$  и  $F^-(\zeta)$  на основании краевого условия (V.107) являются аналитическим продолжением друг друга через единичный круг:

$$F^+(\zeta) = F^-(\zeta) \text{ на } \gamma. \quad (\text{V.112})$$

Отсюда согласно теореме Ж. Лиувилля единая аналитическая функция

$$F(\zeta) = -\bar{a}_1 c^2 \zeta^{-1} + c b_{-2} - 2b_1 c c_2 - b_0 c_1 + c(b_{-1} - b_1 c_1) \zeta + b_0 c \zeta^2 + b_1 c^2 \zeta^3. \quad (\text{V.113})$$

Из условия (V.110) согласно (V.113) находим функцию

$$\Psi(\zeta) = \frac{F(\zeta)}{\zeta^2 \omega'(\zeta)}. \quad (\text{V.114})$$

Для определения функции  $\omega(\zeta)$  разложим соотношение (V.108) с учетом (V.113) в ряд и сравним коэффициенты при одинаковых положительных степенях  $\zeta$ . Получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $c_k$ :

$$bc = c b_{-2} - 2b_1 c c_2 - b_0 c_1,$$

$$a_1 c + \bar{a}_1 \bar{c}_1 = -b_{-1} + b_1 c_1,$$

$$b \bar{c}_1 + \bar{a}_1 \bar{c} \bar{c}_2 = -b_0 c,$$

$$2b \bar{c}_2 + a_1 \bar{c} \bar{c}_1 + \bar{a}_1 \bar{c} \bar{c}_3 = -b_1 c^2, \quad (\text{V.115})$$

$$a_1 \bar{c} \bar{c}_4 + 3b \bar{c}_3 + a_1 \bar{c} \bar{c}_2 = 0,$$

$$a_1 \bar{c} \bar{c}_5 + 4b \bar{c}_4 + a_1 \bar{c} \bar{c}_3 = 0,$$

$$\dots$$

$$a_1 \bar{c} \bar{c}_{n+2} + (n+1) b \bar{c}_{n+1} + a_1 \bar{c} \bar{c}_n = 0,$$

$$\dots$$

т. е.  $a_1 = b_1 = 0$ , решение системы (V.115) будет иметь вид

$$c_1 = -\frac{\bar{b}_0}{b} c, \quad c_2 = c_3 = \dots = 0, \quad b_{-1} = 0, \quad b_{-2} = \frac{\bar{b}\bar{b} - \bar{b}_0\bar{b}_0}{\bar{b}}, \quad (\text{V.116})$$

где постоянная  $c$  — произвольна. Отсюда согласно (V.98), (V.105) и (V.114)

$$\omega(\zeta) = c \left( \zeta - \frac{\bar{b}_0}{b} \cdot \frac{1}{\zeta} \right), \quad \Phi(\zeta) = a,$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{b_0 \bar{b}_0 \zeta^2 + b \bar{b}}{b \zeta^2 + \bar{b}_0}, \quad (\text{V.117})$$

где  $a = a_0$ . Как видно из (V.117), искомые контуры отверстия представляются собой семейство эллипсов.

В случае, когда  $a_1 \neq 0$  или  $b_1 \neq 0$ , решение бесконечной системы уравнений (V.115) эквивалентно решению уравнения в конечных разностях\*. Как показано Г.П. Черепановым [1], и в этом случае контуры отверстия будут представлять собой семейство эллипсов.

В общепринятой прямой постановке решения упруго-пластических задач (см. § 1—3) заключаются в определении границы пластической зоны и компонент напряжений в упругой области по заданным значениям усилий по контуру отверстия и на бесконечности:  $\sigma_x^{(\infty)} = A$ ,  $\sigma_y^{(\infty)} = B$ . Изменяя некоторым образом эти значения усилий, можно получить двухпараметрическое семейство контуров  $L$ , разделяющих пластическую и упругую зоны. Таким образом, для двух, вообще говоря, различных точек внешности отверстия существуют такие значения напряжений на бесконечности, что определяемая ими граница  $L$  будет проходить через эти точки. Заметив это, П. И. Перлин [1, 2] предложил приближенный метод решения упруго-пластических задач в такой полуобратной постановке, суть которой состоит в том, что считается известным положение двух каких-либо точек границы  $L$ , а напряжения на бесконечности и сам контур  $L$  определяются в процессе решения задачи. На основе этой методики Ю. И. Солодиловым [1] рассмотрена упруго-пластическая задача для пластинки с эллиптическим отверстием. С. Сажиным [1, 2] этим методом сделана попытка определения границы пластической зоны, возникающей вокруг квадратного (с закругленными углами), овального и сводчатого отверстий.

\* См. А. О. Гельфанд [1].

### § 4. Пластические зоны возле кругового отверстия при двусном растяжении пластинки (точное решение \*)

Рассмотрим бесконечную тонкую пластинку, находящуюся в плоском напряженном состоянии, с круговым отверстием радиуса  $R$ . Поместим начало координат  $xOy$  (рис. V.5) в центре кругового отверстия, взяв за плоскость  $xOy$  срединную плоскость пластинки.

Пусть к контуру отверстия приложена постоянная нормальная нагрузка, т. е. при  $r=R$

$$\sigma_r = p, \quad \tau_{r\theta} = 0, \quad (\text{V.118})$$

а на бесконечности заданы напряжения

$$\sigma_x^{(\infty)} = A, \quad \sigma_y^{(\infty)} = B. \quad (\text{V.119})$$

Предполагается, что при заданной системе внешних усилий (V.118) и (V.119) пластическая зона полностью охватывает отверстие, а напряжения в пластической области определяются формой контура отверстия и граничной нагрузкой и не зависят от напряженного состояния в упругой области. Тогда компоненты напряжений в пластической области находятся из уравнений равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0, \quad (\text{V.120})$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

и условия пластичности \*\*. В качестве условия пластичности возьмем

$$\sigma_\theta = \sigma_s, \quad (\text{V.121})$$

где  $\sigma_s$  — предел текучести материала при простом растяжении.

Считается далее, что в пластической зоне имеет место неравенство  $\sigma_\theta^{(1)} \geq \sigma_r^{(1)} > 0$ .

Легко проверить, что уравнения равновесия (V.120) и условие пластичности (V.121) при граничных условиях (V.118) будут удовлетворены, если компоненты напряжений возьмем в виде

$$\sigma_r^{(1)} = \sigma_s + (p - \sigma_s) \frac{R}{r}, \quad \sigma_\theta^{(1)} = \sigma_s, \quad \tau_{r\theta}^{(1)} = 0. \quad (\text{V.122})$$

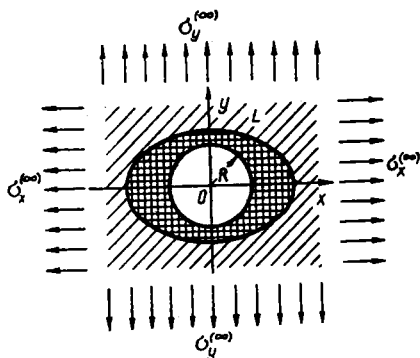


Рис. V.5.

\* Решение задачи дано Г. П. Черепановым [2].

\*\* См. В. В. Соколовский [1].

Из решения (V.122) видно, что для выполнения неравенства  $\sigma_r^{(1)} \geq \sigma_r^{(1)} > 0$  нагрузка  $p$  должна удовлетворять условию  $p \leq \sigma_s$ .

Для удобства перейдем от полярных координат к декартовым, записав компоненты напряжений (V.122) в следующих комбинациях:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)} &= 2\sigma_s + \frac{(p - \sigma_s)R}{r}, \\ \sigma_y^{(1)} - \sigma_x^{(1)} + 2i\tau_{xy}^{(1)} &= \frac{(\sigma_s - p)R}{r} e^{-2i\theta}. \end{aligned} \quad (V.123)$$

Компоненты напряжений в упругой области выражаются через две голоморфные функции Н. И. Muskhelishvili  $\Phi^*(z)$  и  $\Psi^*(z)$  по формулам (V.96). Тогда на контуре  $L$ , разделяющем упругую и пластическую зоны, будем иметь следующие граничные условия:

$$4 \operatorname{Re} \Phi^*(z) = 2\sigma_s + \frac{(p - \sigma_s)R}{r}, \quad (V.124)$$

$$2[z\bar{\Phi}^{*'}(z) + \Psi^*(z)] = \frac{(\sigma_s - p)R}{r} e^{-2i\theta}.$$

Отобразим внешность контура  $L$  на внешность единичного круга  $\gamma$  плоскости  $\zeta$  с помощью функции  $\omega(\zeta)$  (V.129). Вводя обозначения

$$\Phi^*[\omega(\zeta)] = \Phi(\zeta), \quad \Psi^*[\omega(\zeta)] = \Psi(\zeta),$$

граничные условия (V.124) представим в виде

$$4 \operatorname{Re} \Phi(\zeta) = 2\sigma_s + \frac{(p - \sigma_s)R}{|\omega(\zeta)|} \quad \text{на } \gamma; \quad (V.125)$$

$$2 \left[ \frac{\bar{\omega}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) \right] = \frac{(\sigma_s - p)R \bar{\omega}(\zeta)}{\omega(\zeta) |\omega(\zeta)|} \quad \text{на } \gamma. \quad (V.126)$$

Согласно (V.119) функции на бесконечности

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{4}(A + B) + o(\zeta^{-2}), \quad \Psi(\zeta) = \frac{1}{2}(B - A) + o(\zeta^{-2}). \quad (V.127)$$

Таким образом, задача заключается в нахождении по граничным условиям (V.125) и (V.126) с учетом соотношений (V.127) функций  $\Phi(\zeta)$ ,  $\Psi(\zeta)$  и  $\omega(\zeta)$ .

Из условий (V.126) следует, что для решения задачи необходимо рассмотреть вспомогательное функциональное уравнение

$$\frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) = \frac{(\sigma_s - p)R \bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{2\omega(\zeta) \sqrt{\omega(\zeta) \bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}} \quad (|\zeta| > 1), \quad (V.128)$$

решение которого (относительно функции  $\omega(\zeta)$ ) будем искать в виде

$$\omega(\zeta) = c\zeta + \bar{p}_n \left( \frac{1}{\zeta} \right), \quad (\text{V.129})$$

где  $\bar{p}_n$  — полином  $n$ -й степени с неопределенными пока коэффициентами. Подставляя решение (V.129) в уравнение (V.128) и раскладывая все функции в ряд в окрестности бесконечно удаленной точки, видим, что  $n=3$ . Следовательно, функция

$$\omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \frac{c_3}{\zeta^3}. \quad (\text{V.130})$$

Из условий симметрии следует, что постоянная  $c_2$  равна нулю, а остальные постоянные действительны. Следовательно, функции

$$\omega(\zeta) = \zeta \left( c + c_1 \frac{1}{\zeta^2} + c_3 \frac{1}{\zeta^4} \right), \quad (\text{V.131})$$

$$\bar{\omega} \left( \frac{1}{\zeta} \right) = \frac{1}{\zeta} (c + c_1 \zeta^2 + c_3 \zeta^4).$$

Очевидно, функция  $\omega(\zeta)$  имеет четыре нуля, расположенные внутри единичного круга, функция же  $\bar{\omega} \left( \frac{1}{\zeta} \right)$  имеет четыре нуля, расположенные вне единичного круга. Постоянные  $c$ ,  $c_1$  и  $c_3$  можно выбрать таким образом, чтобы правая часть функционального уравнения (V.128) была аналитической во внешности единичного круга, а для этого необходимо и достаточно потребовать, чтобы нули функции  $\bar{\omega} \left( \frac{1}{\zeta} \right)$  попарно совпадали. Для последнего условия, достаточно чтобы дискриминант биквадратного уравнения был равен нулю:

$$c_3 \zeta^4 + c_1 \zeta^2 + c = 0.$$

Отсюда

$$c_1^2 = 4cc_3. \quad (\text{V.132})$$

Тогда функции (V.131) при условии (V.132) можно записать в виде

$$\omega(\zeta) = \frac{c}{\zeta^3} \left( \zeta^2 + \frac{c_1}{2c} \right)^2, \quad \bar{\omega} \left( \frac{1}{\zeta} \right) = \frac{c_3}{\zeta} \left( \zeta^2 + \frac{c_1}{2c_3} \right)^2. \quad (\text{V.133})$$

На основании функций (V.133) граничное условие (V.125)

$$4\text{Re } \Phi(\zeta) = 2\sigma_s + \frac{(p - \sigma_s)R\zeta^2}{\sqrt{cc_3} \left( \zeta^2 + \frac{c_1}{2c_3} \right) \left( \zeta^2 + \frac{c_1}{2c} \right)}. \quad (\text{V.134})$$

Введем функцию

$$F^+(\zeta) = -2\bar{\Phi} \left( \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{2R(p - \sigma_s) \sqrt{cc_3}}{c_1(c_3 - c)} \cdot \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \frac{c_1}{2c_3}}, \quad (\text{V.135})$$

которая, как легко видеть, будет аналитической внутри единичного круга  $|\zeta| < 1$ ; функция же

$$F^-(\zeta) = 2\Phi(\zeta) - 2\sigma_s + \frac{2R(p - \sigma_s)\sqrt{cc_3}}{c_1(c_3 - c)} \cdot \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \frac{c_1}{2c}} \quad (\text{V.136})$$

будет аналитической всюду вне единичного круга  $|\zeta| > 1$ .

Нетрудно видеть, что краевое условие (V.134) с учетом соотношений (V.135) и (V.136) может быть представлено в виде

$$F^+(\zeta) = F^-(\zeta) \quad \text{на } \gamma. \quad (\text{V.137})$$

Таким образом, функции  $F^+(\zeta)$  и  $F^-(\zeta)$  являются аналитическим продолжением друг друга через единичную окружность. По теореме Ж. Лиувилля они равны тождественно одной и той же постоянной. Отсюда, а также из условий на бесконечности (V.127)

$$\Phi(\zeta) = \sigma_s - \frac{A + B}{4} - \frac{(p - \sigma_s)R\sqrt{cc_3}}{c_1(c_3 - c)} \cdot \frac{\zeta^2}{\zeta^2 + \frac{c_1}{2c}}. \quad (\text{V.138})$$

Для того чтобы выполнялись условия (V.127), входящие в (V.138), постоянные должны удовлетворять соотношению

$$A + B - 2\sigma_s + \frac{2(p - \sigma_s)R\sqrt{cc_3}}{c(c_3 - c)} = 0. \quad (\text{V.139})$$

Из функционального уравнения (V.128) находим функцию

$$\Psi(\zeta) = \frac{(\sigma_s - p)R\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{2\omega(\zeta)\sqrt{\omega(\zeta)\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}} - \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}{\omega'(\zeta)}\Phi'(\zeta). \quad (\text{V.140})$$

Подставляя в (V.140) значения функций (V.133) и  $\Phi(\zeta)$  (V.138), а также учитывая условия на бесконечности (V.127) получаем следующее соотношение между коэффициентами

$$B - A = \frac{(\sigma_s - p)R\sqrt{c_3}}{c\sqrt{c}} \cdot \frac{c + c_3}{c - c_3}. \quad (\text{V.141})$$

Таким образом, коэффициенты  $c$ ,  $c_1$ ,  $c_3$  находятся из системы трех уравнений — (V.132), (V.139) и (V.141), а функции  $\Phi(\zeta)$ ,  $\Psi(\zeta)$  и  $\omega(\zeta)$  определяются соответственно формулами (V.138), (V.140) и (V.133).

Решение системы уравнений (V.132), (V.139), (V.141) можно представить в виде

$$c = \frac{4R}{\alpha(a^2 - 4)}, \quad c_1 = \frac{4aR}{\alpha(a^2 - 4)}, \quad c_3 = \frac{a^2R}{\alpha(a^2 - 4)}, \quad (\text{V.142})$$

где  $\alpha = \frac{A+B-2\sigma_s}{\sigma_s-\rho}$ ;  $a$  — действительный корень кубического уравнения

$$a^3 + 4a + \beta = 0. \quad (\text{V.143})$$

Здесь

$$\beta = \frac{8(B-A)}{A+B-2\sigma_s}.$$

Таким образом, учитывая (V.142), получим функции

$$\omega(\zeta) = \frac{R(2\zeta^2+a)^2}{\alpha(a^2-4)\zeta^3},$$

$$\Phi(\zeta) = \sigma_s - \frac{A+B}{4} - \frac{\alpha(\rho-\sigma_s)\zeta^2}{2\zeta^2+a}, \quad (\text{V.144})$$

$$\Psi(\zeta) = \alpha(\rho-\sigma_s)\zeta^4 \frac{(a\zeta^2+a)[2(a^2+4)\zeta^2 - a(4-3a^2)]}{2(2\zeta^2+a)^2(2\zeta^2+a)(2\zeta^2-3a)}.$$

Решение задачи можно считать законченным, однако для полноты решения найдем те интервалы задания внешних усилий, при которых полученные решения существуют. Для определенности будем считать, что  $B \geq A \geq 0$  и, кроме того, должно выполняться неравенство  $B \leq \sigma_s$ . Отсюда следует, что

$$\alpha < 0, \quad \beta < 0, \quad a > 0.$$

Касание пластической зоны кругового отверстия произойдет в точках  $+i$  и  $-i$ . Таким образом, для полного охвата пластической зоной кругового отверстия необходимо, чтобы имело место неравенство  $iR < \omega(i)$ . Отсюда следует, что параметр  $a$  должен удовлетворять неравенству

$$a < 2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Тогда

$$0 < a < 2 \frac{1+\alpha}{1-\alpha}, \quad -1 < \alpha < 0 \quad (0 < a < 2). \quad (\text{V.145})$$

Для того чтобы функция  $\omega(\zeta)$  конформно отображала внешность контура  $L$  на внешность единичного круга  $\gamma$ , необходимо, чтобы всюду вне  $\gamma$  производная

$$\omega'(\zeta) = \frac{R(2\zeta^2+a)(2\zeta^2-3a)}{\alpha(a^2-4)\zeta^4} \quad (\text{V.146})$$

была отлична от нуля. Следовательно, как видно из (V.146), параметр  $a$  должен удовлетворять неравенству  $0 < a < \frac{2}{3}$ . Отсюда и из (V.146)

находим  $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ . В частном случае, когда  $A=B$ , исследование этой упруго-пластической задачи дано Г. Ю. Джанелидзе [1] для



двух случаев: когда в пластической зоне имеют место либо условия пластичности Мизеса, либо Сен-Венана.

В работе V. Рапс [1] на основе элементарного решения В. В. Соколовского [1] для осесимметричной неограниченной пластинки с круговым отверстием изучается распределение напряжений и деформаций для различных стадий загрузения.

### § 5. Пластические зоны возле криволинейных отверстий (приближенное решение)

Как видно из предыдущих параграфов, решения плоских упруго-пластических задач в замкнутом виде относятся в основном к областям с круговым отверстием. Что касается областей с некруговыми отверстиями, то каких-либо общих методов решения задач в замкнутом виде еще не разработано. Имеется ряд приближенных методов, одним из которых является метод малого параметра\*.

Представим компоненты напряжений, а также статические граничные условия в виде рядов по степеням малого параметра:

$$\sigma_r = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_r^{(k)}, \quad \sigma_{\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_{\theta}^{(k)}, \quad \tau_{r\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{r\theta}^{(k)}, \quad (\text{V.147})$$

где  $\varepsilon$  — безразмерный малый параметр, характеризующий отклонение контура отверстия от кругового.

Компоненты напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_{\theta}$ ,  $\tau_{r\theta}$  (для удобства используются полярные координаты) во всей области, т. е. как в упругой, так и в пластической областях, должны удовлетворять уравнениям равновесия (V.120). Кроме того, они должны удовлетворять в упругой области условию совместности, а в пластической — условию пластичности. В качестве условия пластичности для плоской деформации возьмем условие

$$\frac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_{\theta})^2 + \tau_{r\theta}^2 = 1. \quad (\text{V.148})$$

Здесь и далее компоненты напряжений отнесены к постоянной правой части условия пластичности. Для плоского напряженного состояния условие пластичности возьмем в виде

$$\frac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_{\theta})^2 + \tau_{r\theta}^2 = 1 \quad \text{при} \quad \sigma_r \sigma_{\theta} < \tau_{r\theta}^2; \quad (\text{V.149})$$

$$\frac{1}{4}(\sigma_r - \sigma_{\theta})^2 + \tau_{r\theta}^2 = \left(1 - \frac{1}{2}|\sigma_r + \sigma_{\theta}|\right)^2 \quad \text{при} \quad \sigma_r \sigma_{\theta} \geq \tau_{r\theta}^2. \quad (\text{V.150})$$

\* См. Д. Д. Ивлев [1—4].

Будем считать, что в пластической области условию (V.150) соответствует неравенство  $\sigma_\theta > \sigma_r > 0$ .

Подставляя разложения (V.147) в условие пластичности (V.148) и приравнивая члены при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$  при  $\tau_{r\theta}^{(0)} = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)} &= 2\mu, \\ \sigma_r^{(1)} - \sigma_\theta^{(1)} &= 0, \\ (\sigma_r^{(2)} - \sigma_\theta^{(2)})\mu + \tau_{r\theta}^{(1)2} &= 0, \\ (\sigma_r^{(3)} - \sigma_\theta^{(3)})\mu + 2\tau_{r\theta}^{(1)}\tau_{r\theta}^{(2)} &= 0, \\ (\sigma_r^{(4)} - \sigma_\theta^{(4)})\mu + \frac{1}{4}(\sigma_r^{(2)} - \sigma_\theta^{(2)})^2 + 2\tau_{r\theta}^{(1)}\tau_{r\theta}^{(3)} + \tau_{r\theta}^{(2)2} &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (\text{V.151})$$

где  $\mu = \text{sign}(\sigma_r^{(0)} - \sigma_\theta^{(0)})$ . Для плоского напряженного состояния условие пластичности (V.149) запишется в виде (V.151), а условие (V.150) при  $\tau_{r\theta}^{(0)} = 0$  примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(0)} &= 1, \quad \sigma_\theta^{(1)} = 0, \\ (1 - \sigma_r^{(0)})\sigma_\theta^{(2)} + \tau_{r\theta}^{(1)2} &= 0, \\ (1 - \sigma_r^{(0)})\sigma_\theta^{(3)} - \sigma_r^{(1)}\sigma_\theta^{(2)} + 2\tau_{r\theta}^{(1)}\tau_{r\theta}^{(2)} &= 0, \\ (1 - \sigma_r^{(0)})\sigma_\theta^{(4)} - \sigma_r^{(1)}\sigma_\theta^{(3)} - \sigma_r^{(2)}\sigma_\theta^{(2)} + 2\tau_{r\theta}^{(1)}\tau_{r\theta}^{(3)} + \tau_{r\theta}^{(2)2} &= 0, \\ \dots & \dots \end{aligned} \quad (\text{V.152})$$

Аналогично может быть линеаризировано условие пластичности Мизеса:

$$\frac{1}{3}(\sigma_r^2 - \sigma_r\sigma_\theta + \sigma_\theta^2) + \tau_{r\theta}^2 = 1. \quad (\text{V.153})$$

Пусть на контуре отверстия  $L$  заданы нормальные и касательные усилия

$$\sigma_n = p, \quad \tau_{tn} = \tau, \quad (\text{V.154})$$

где  $t$  и  $n$  — направления соответственно касательной и нормали к контуру  $L$ . Представим уравнение контура  $L$  в виде

$$r = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k r_k(\theta) \quad (r_0 = \text{const}). \quad (\text{V.155})$$

Считаем, что для компонент напряжений  $\sigma_n$  и  $\tau_{tn}$  справедливы разложения

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_n^{(k)}, \quad \tau_{tn} = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{tn}^{(k)}. \quad (\text{V.156})$$

Граничные условия (V.154) после подстановки в них разложений (V.155) и (V.156) могут быть представлены в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{k+m} \frac{d^m \sigma_n^{(k)}}{dr^m} \frac{(r_1 + \varepsilon r_2 + \dots)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \frac{d^m p}{dr^m} \frac{(r_1 + \varepsilon r_2 + \dots)^m}{m!}; \quad (\text{V.157})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^{k+m} \frac{d^m \tau_{tn}^{(k)}}{dr^m} \frac{(r_1 + \varepsilon r_2 + \dots)^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \frac{d^m \tau}{dr^m} \frac{(r_1 + \varepsilon r_2 + \dots)^m}{m!}. \quad (\text{V.158})$$

Из условия (V.157), приравнявая члены при одинаковых степенях параметра  $\varepsilon$ , находим

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} + \frac{d\sigma_n^{(0)}}{dr} r_1 &= \frac{dp}{dr} r_1; \\ \sigma_n^{(2)} + \frac{d\sigma_n^{(1)}}{dr} r_1 + \frac{d^2\sigma_n^{(0)}}{dr^2} \cdot \frac{r_1^2}{2!} + \frac{d\sigma_n^{(0)}}{dr} r_2 &= \frac{d^2p}{dr^2} \frac{r_1^2}{2} + \frac{dp}{dr} r_2; \\ \sigma_n^{(3)} + \frac{d\sigma_n^{(2)}}{dr} r_1 + \frac{d^2\sigma_n^{(1)}}{dr^2} \cdot \frac{r_1^2}{2!} + \frac{d^3\sigma_n^{(0)}}{dr^3} \frac{r_1^3}{3!} + \frac{d\sigma_n^{(0)}}{dr} r_3 + \\ + \frac{d\sigma_n^{(1)}}{dr} r_2 + \frac{d^2\sigma_n^{(0)}}{dr^2} r_1 r_2 &= \frac{d^3p}{dr^3} \frac{r_1^3}{3!} + \frac{d^2p}{dr^2} r_1 r_2 + \frac{dp}{dr} r_3; \end{aligned} \quad (\text{V.159})$$

Аналогично находим линейризованные граничные условия (V.154) для  $\sigma_n$  и  $\tau_{tn}$  по формулам теории упругости

$$\sigma_n = \sigma_r \cos^2 \theta^* + \sigma_\theta \sin^2 \theta^* + 2\tau_{r\theta} \sin \theta^* \cos \theta^*, \quad (\text{V.160})$$

$$\tau_{tn} = (\sigma_\theta - \sigma_r) \sin \theta^* \cos \theta^* + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta^* - \sin^2 \theta^*),$$

где  $\theta^* = \theta_1 - \theta$  — угол, показанный на рис. V.6.

В результате преобразований линейризованные граничные условия будут иметь вид

$$\sigma_r^{(1)} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_1 = \frac{dp}{dr} r_1;$$

$$\tau_{r\theta}^{(1)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \dot{\varrho}_1 = \frac{d\tau}{dr} r_1;$$

$$\sigma_r^{(2)} + \frac{d\sigma_r^{(1)}}{dr} r_1 + \frac{d^2\sigma_r^{(0)}}{dr^2} \frac{r_1^2}{2!} + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_2 + (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \dot{\varrho}_1^2 -$$

$$- 2\tau_{r\theta}^{(1)} \dot{\varrho}_1 = \frac{d^2p}{dr^2} \cdot \frac{r_1^2}{2!} + \frac{dp}{dr} r_2;$$

$$\tau_{r\theta}^{(2)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) (\dot{\varrho}_2 - \dot{\varrho}_1 \dot{\varrho}_1) - (\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}) \dot{\varrho}_1 + \frac{d}{dr} [\tau_{r\theta}^{(1)} -$$

$$- (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \dot{\varrho}_1] r_1 = \frac{d^2\tau}{dr^2} \frac{r_1^2}{2!} + \frac{d\tau}{dr} r_2;$$

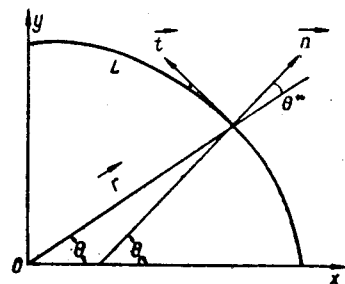


Рис. V.6.

$$\begin{aligned} & \sigma_r^{(3)} + \frac{d\sigma_r^{(2)}}{dr} r_1 + \frac{d^2\sigma_r^{(1)}}{dr^2} \frac{r_1^2}{2!} + \frac{d^3\sigma_r^{(0)}}{dr^3} \frac{r_1^3}{3!} + 2(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) (\dot{q}_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_1) + \\ & + \frac{d(\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)})}{dr} \dot{q}_1^2 r_1 + (\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}) \dot{q}_1^2 - 2\tau_{r\theta}^{(1)} (\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_1) - 2 \frac{d\tau_{r\theta}^{(1)}}{dr} r_1 \dot{q}_1 - \\ & - 2\tau_{r\theta}^{(2)} \dot{q}_1 + \frac{d\sigma_r^{(1)}}{dr} r_2 + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_1 r_2 + \frac{d\sigma_r^{(0)}}{dr} r_3 = \frac{d^3 p}{dr^3} \frac{r_1^3}{3!} + \frac{d^2 p}{dr^2} r_1 r_2 + \frac{dp}{dr} r_3; \end{aligned} \quad (V.161)$$

$$\begin{aligned} & \tau_{r\theta}^{(3)} - 2\tau_{r\theta}^{(1)} \dot{q}_1^2 - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) (\dot{q}_3 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_1^2 \dot{q}_1 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1^3) - \\ & - (\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}) (\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_1) - (\sigma_\theta^{(2)} - \sigma_r^{(2)}) \dot{q}_1 + \frac{d}{dr} [\tau_{r\theta}^{(2)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \times \\ & \times (\dot{q}_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_1) - (\sigma_\theta^{(1)} - \sigma_r^{(1)}) \dot{q}_1] r_1 + \frac{d^2}{dr^2} [\tau_{r\theta}^{(1)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \dot{q}_1] \frac{r_1^2}{2} + \\ & + \frac{d}{dr} [\tau_{r\theta}^{(1)} - (\sigma_\theta^{(0)} - \sigma_r^{(0)}) \dot{q}_1] r_2 = \frac{d^3 \tau}{dr^3} \frac{r_1^3}{3!} + \frac{d^2 \tau}{dr^2} r_1 r_2 + \frac{d\tau}{dr} r_3. \end{aligned}$$

Здесь  $q_i = r_i/r_0$ , а точка сверху, т. е.  $\dot{q} = dq/d\theta$ , обозначает дифференцирование по  $\theta$ .

Из непрерывности компонент напряжений на общей границе  $L_s$ , разделяющей упругую и пластическую зоны, имеем

$$[\sigma_r] = [\sigma_\theta] \Rightarrow [\tau_{r\theta}] = 0 \text{ на } L_s, \quad (V.162)$$

где через [...] обозначены приращения соответствующей компоненты, заключенной в квадратные скобки, при переходе через границу  $L_s$ . Если уравнение контура представить в виде

$$L_s = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k r_{ks}(\theta), \quad (V.163)$$

то для получения условий сопряжения необходимо заменить в (V.159)  $\sigma_n$  соответственно на  $\sigma_r^{(k)}$ ,  $\sigma_\theta^{(k)}$ ,  $\tau_{r\theta}^{(k)}$ , а  $r_k$  — на  $r_{ks}$ , заключить в квадратные скобки и приравнять нулю. При  $\tau_{r\theta}^{(0)} = 0$  из уравнений равновесия (V.120) и условий сопряжения (V.162) следует, что на  $L_s$  будет  $\left[ \frac{\partial \sigma_r^{(0)}}{\partial r} \right] = 0$ . Итак, в  $k$ -м приближении условия сопряжения  $\sigma_r^{(k)}$  и  $\tau_{r\theta}^{(k)}$  не содержат членов  $r_{ks}$ . Величина  $r_{ks}$  определяется из условия сопряжения  $\sigma_\theta^{(k)}$ , а  $\sigma_r^{(k)}$  и  $\tau_{r\theta}^{(k)}$  играют роль граничных условий для определения напряжений в упругой области.

Уравнения равновесия (V.120) будут удовлетворены, если компоненты напряжений выразим через функцию напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(k)} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U^{(k)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta^{(k)} = \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial r^2}, \\ \tau_{r\theta}^{(k)} &= - \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (V.164)$$

Подставив (V.164) в линеаризованные условия пластичности (V.151) и (V.152), получим последовательность линейных уравнений, из которых определяется функция напряжений  $U^{(k)}$ , а следовательно, и компоненты напряжений.

Наибольший интерес представляет определение границы пластической зоны  $L_s$ . Рассмотрим несколько примеров.

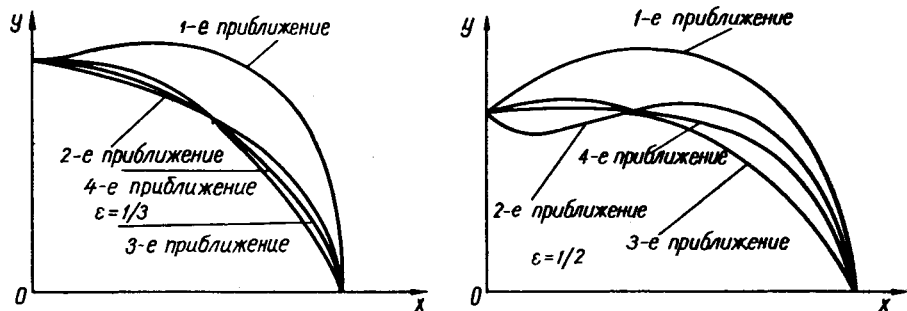


Рис. V.7.

**Двуосное растяжение плоскости, ослабленной круговым отверстием, при плоской деформации.** Пусть плоскость, ослабленная круговым отверстием радиуса  $R$ , на бесконечности растягивается постоянными усилиями  $A$  и  $B$ . Опуская выкладки, для контура границы пластической зоны находим формулу

$$r_s = 1 + \varepsilon \cos 2\theta - \frac{3}{4} \varepsilon^2 (1 - \cos 4\theta) + \frac{5}{8} \varepsilon^3 (-\cos 2\theta + \cos 6\theta) + \frac{7}{64} \varepsilon^4 (-1 - 4 \cos 4\theta + 5 \cos 8\theta) + \dots, \quad (\text{V.165})$$

где

$$\varepsilon = \frac{B - A}{2k}.$$

Легко проверить, что разложение (V.165) совпадает с разложением уравнения эллипса с полуосями  $1 + \varepsilon$  и  $1 - \varepsilon$ , который дает точное решение этой задачи (см. § 2).

На рис. V.7 приведены графики границы пластической зоны для двух значений параметра  $\varepsilon = 1/3$  и  $\varepsilon = 1/2$ , из которых очевидна сходимость полученных приближений.

Метод малого параметра позволяет получить для перемещений приближенные аналитические выражения\*. Приписывая компонентам, относящимся к упругой области, индекс  $e$ , к пластической — индекс  $p$ , получаем

$$\frac{4Gu_r^e}{ka} = \frac{2}{r} - 2\varepsilon \left( r - \frac{2}{r} - \frac{1}{r^3} \right) \cos 2\theta + \varepsilon^2 \left[ \frac{2}{r} + 4 \left( -\frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^5} \right) \cos 4\theta \right] + \varepsilon^3 \left[ \frac{2}{r^3} \cos 2\theta - 2 \left( \frac{4}{r^5} - \frac{5}{r^7} \right) \cos 6\theta \right] + \dots$$

$$\frac{4Gu_\theta^e}{ka} = 2\varepsilon \left( r + \frac{1}{r^3} \right) \sin 2\theta + 2\varepsilon^2 \left( -\frac{1}{r^3} + \frac{2}{r^5} \right) \sin 4\theta +$$

\* См. Д. Д. Ивлев [3, 4].

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^3 \left[ \frac{2}{r^3} \sin 2\theta + 2 \left( -\frac{8}{3r^5} + \frac{5}{r^7} \right) \sin 6\theta \right] + \dots \\
\frac{4Gu_r^p}{ka} &= \frac{2}{r} - 4\varepsilon \left[ \cos(\sqrt{3} \ln r) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3} \ln r) \right] \cos 2\theta + \frac{2\varepsilon^2}{r} - \\
& - 2\varepsilon^3 \left\{ \left[ \cos(\sqrt{3} \ln r) - \frac{3}{\sqrt{3}} \sin(\sqrt{3} \ln r) \right] \cos 2\theta + \right. \\
& \left. + \left[ \cos(\sqrt{35} \ln r) - \frac{3}{\sqrt{35}} \sin(\sqrt{35} \ln r) \right] \cos 6\theta \right\} + \dots \quad (V.166)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{4Gu_\theta^p}{ka} &= 2\varepsilon \left[ 2 \cos(\sqrt{3} \ln r) + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \right) \sin(\sqrt{3} \ln r) \right] \sin 2\theta + \\
& + 2\varepsilon^2 \left[ \cos(\sqrt{15} \ln r) + \frac{1}{\sqrt{15}} \sin(\sqrt{15} \ln r) \right] \sin 4\theta - \varepsilon^3 \left\{ \left[ 2 \cos(\sqrt{3} \ln r) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left( \frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) \sin(\sqrt{3} \ln r) \right] \sin 2\theta + \left[ \frac{2}{3} \cos(\sqrt{35} \ln r) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left( \frac{1}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{35}}{3} \right) \sin(\sqrt{35} \ln r) \right] \sin 6\theta \right\} + \dots
\end{aligned}$$

Полученные приближения дают хорошую сходимость. Подсчеты показывают, что при двусном растяжении контур отверстия увеличивается, приобретая вытянутость в направлении большей из действующих сил.

**Двусное растяжение тонкой пластины с круговым отверстием радиуса  $R$  силами  $A$  и  $B$  (плоское \* напряженное состояние).** Границу  $L_s$  пластической зоны находим по формуле

$$\begin{aligned}
r_s &= 1 + 4\varepsilon^* \cos 2\theta - 8\varepsilon^{*2} (1 - 2 \cos 4\theta) - 80\varepsilon^{*3} (\cos 2\theta - \cos 6\theta) + \\
& + 32\varepsilon^{*4} (1 - 16 \cos 4\theta + 14 \cos 8\theta) + \dots, \quad (V.167)
\end{aligned}$$

где

$$\varepsilon^* = \frac{A - B}{2\alpha k}.$$

Здесь  $\alpha = R/r_s^0$  ( $R$  — радиус отверстия;  $r_s^0$  — размерный радиус пластической зоны при  $\varepsilon^* = 0$ ). На рис. V.8 (а, б) приведены графики границы пластической зоны для двух значений параметра  $\varepsilon^*$  — 0,05 и 0,10.

**Двусное растяжение тонкой пластинки с эллиптическим отверстием.** Пусть тонкая пластинка с эллиптическим отверстием растягивается на бесконечности взаимно перпендикулярными усилиями  $A^* = \text{const}$  и  $B^* = \text{const}$ , направленными под некоторым углом к главным осям эллипса. Предполагается, что  $A^* \gg B^*$  и усилие  $A^*$  направлено под углом  $\theta_0$  к большей оси эллипса. Усилия

$$A^* = \frac{A + B}{2} + d_2 \frac{A - B}{2}, \quad B^* = \frac{A + B}{2} - d_2 \frac{A - B}{2}, \quad (V.168)$$

где  $d_2$  — некоторый параметр.

\* Решение задачи впервые дано А. П. Соколовым [1]. В § 4 гл. IV монографии Г. Н. Савина [1] приведено решение данной задачи.

Представим уравнение контура эллиптического отверстия в виде

$$r = \alpha + \varepsilon a d_1 \cos 2\theta - \varepsilon^2 \frac{3a d_1^2}{4} (1 - \cos 4\theta) + \dots, \quad (\text{V.169})$$

где  $\varepsilon = \frac{A-B}{2k}$ ,  $\alpha = R/r_s^0$  ( $R$  — радиус исходного кругового отверстия;  $r_s^0$  — размерный радиус пластической зоны нулевого приближения),  $d_1$  — параметр.

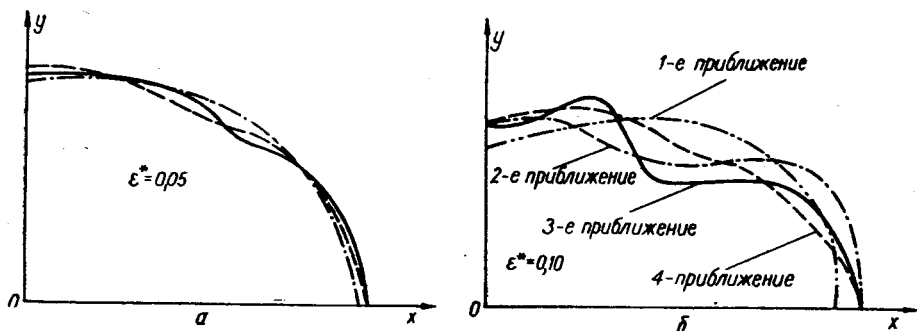


Рис. V.8.

Уравнение контура  $L_s$ , т. е. границы пластической зоны, в предположении, что контур отверстия свободен от внешних усилий,

$$\begin{aligned} r_s = 1 + \varepsilon^* [4d_2 \cos(\theta - \theta_0) + 3a d_1 \cos 2\theta] + \varepsilon^{*2} \left\{ d_1^2 \left( \frac{\alpha^2}{4} - 8\alpha^4 \right) - \right. \\ \left. - (18d_1 d_2 a \cos 2\theta_0 + 8d_2^2) + \left[ -d_1^2 \left( \frac{15}{4\alpha^2} - 8\alpha^8 - \frac{3}{4\alpha^4} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (18d_1 d_2 a \cos 2\theta_0 + 16d_2^2 \cos 4\theta_0) \right] \cos 4\theta + [18d_1 d_2 a \sin 2\theta_0 + 16d_2^2 \sin 4\theta_0] \sin 4\theta \right\} + \dots \end{aligned} \quad (\text{V.170})$$

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\alpha} = \frac{A-B}{2a k}.$$

Изменяя в (V.170) параметры  $d_1$ ,  $d_2$  и  $\theta_0$ , получаем решение для ряда важных частных случаев. Так, при  $d_1=0$ ,  $d_2=1$  и  $\theta_0=0$  будем иметь случай двусосного растяжения пластинки с круговым отверстием усилиями  $A$  и  $B$  на бесконечности; при  $d_2=0$  и  $d_1=1$  — случай равномерного растяжения пластинки с эллиптическим отверстием  $A^* = B^* = \frac{A+B}{2}$  на бесконечности. В последнем случае граница пластической зоны

$$r_s = 1 + 3\varepsilon \cos 2\theta + \varepsilon^2 \left[ \left( \frac{1}{4} - 8\alpha^2 \right) - \left( \frac{15}{4} - 8\alpha - \frac{3}{4} \alpha^2 \right) \cos 4\theta \right] + \dots \quad (\text{V.171})$$

На рис. V.9 приведены графики границы пластической зоны при двусосном растяжении тонкой пластинки с эллиптическим отверстием силами  $A$  и  $B$ , направленными под углом  $45^\circ$  к главным осям эллипса, при значениях параметров  $\varepsilon=0,20$  и  $\varepsilon^*=0,05$ . Штриховой линией показана граница пластической зоны при двусосном растяжении пластинки с круговым отверстием этими же силами.

На рис. V.10 приведен график равномерного всестороннего растяжения пластинки с эллиптическим отверстием усилиями  $A^*=B^* = \frac{A+B}{2}$  при  $\varepsilon=0,166$ ,  $\alpha=0,500$ .

Пластическая зона около кругового отверстия в пластине, находящейся в состоянии деформации, когда к контуру отверстия приложено нормальное давление, распределенное по закону прямолинейной равнобокой трапеции, рассмотрена А. П. Соколовым [2]. Экспериментальным методом А. I. Durelli, С. А. Sciamarella [1] определено распределение упруго-пластических напряжений и деформаций возле кругового отверстия в конечной алюминиевой пластинке при больших пластических деформациях. В работе I. S. Tuba [1] рассматривается концентрация напряжений около кругового отверстия при упруго-пластической деформации в равномерно растянутой пластине из линейно упрочняющегося материала (см. также I. S. Tuba [2]). Пластическая зона в физически нелинейной пластине определялась И. Ю. Хомой [3].

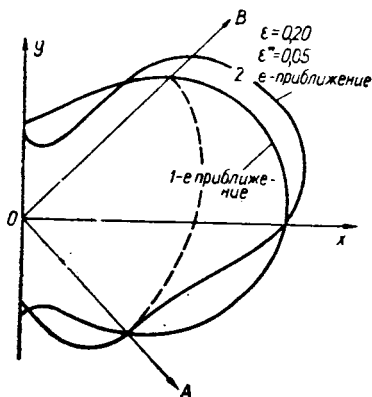


Рис. V.9.

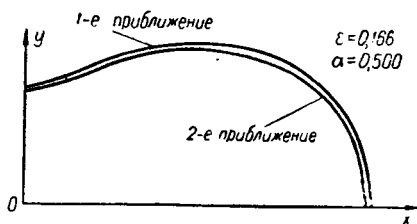


Рис. V.10.

### § 6. Упруго-пластическая задача для плоскости, ослабленной бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий \*

Рассмотрим пластину, находящуюся в плоском деформированном состоянии, с бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий, центры которых расположены на оси  $Ox$  и находятся на расстоянии  $l$  друг от друга. Будем считать, что к контурам отверстий радиуса  $R$  (для простоты примем  $R=1$ ) приложены нормальные усилия  $p$ , а на бесконечности заданы постоянные усилия  $A$  и  $B$  (рис. V.11).

Пусть под действием заданной системы внешних сил возле отверстий возникают пластические зоны, полностью охватывающие отверстия, но не сливающиеся между собой. Задача заключается теперь в нахождении линий раздела упругой и пластической зон, а также напряженного состояния пластинки. Обозначим через  $L_s$  границу пластической зоны, охватывающую круговое отверстие, в центре которого помещено начало координат. Это отверстие будем считать основным.

В силу геометрической и силовой симметрии форма линий  $L_s$  раздела зон возле каждого отверстия будет такой же, как и возле основного отверстия. Поскольку напряжения в пластической области определяются лишь формой контура отверстия и граничной нагрузкой,

\* Решение задачи дано А. С. Космодамианским [1].



то в каждой пластической зоне они будут такими же, как и возле основного отверстия. Следовательно, в данном случае они будут удовлетворять соотношениям (V.16). Эти напряжения не зависят от усилий на бесконечности и от влияния соседних отверстий. Последние могут влиять на изменение линии  $L_s$  раздела зон и на напряженное состояние в упругой области.

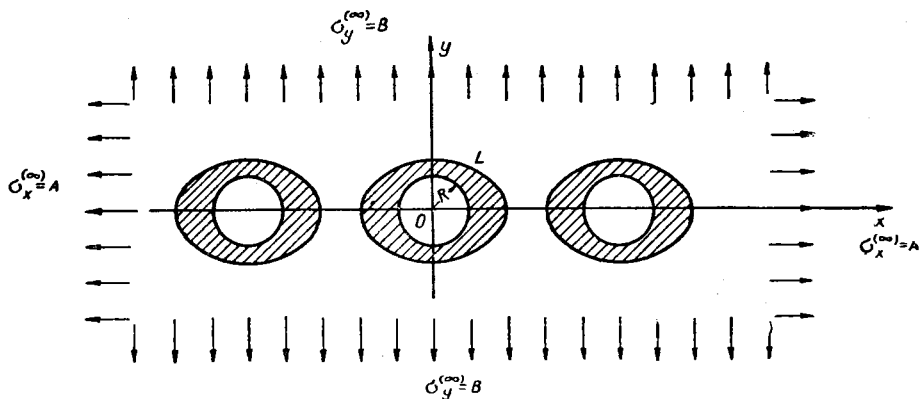


Рис. V.11.

Дополнительные компоненты напряжений в упругой области, появившиеся из-за наличия отверстий, выразим по формулам (V.96) через две голоморфные функции  $\Phi^*(z)$ ,  $\Psi^*(z)$ . Из условий непрерывности компонент напряжений в упругой и пластической зонах на общей границе  $L_s$ , разделяющей эти зоны, получим

$$4 \operatorname{Re} \Phi^*(z) = 2(k-p) + 2k \ln \frac{\bar{z}z}{R^2} - (A+B), \quad (\text{V.172})$$

$$2[\bar{z}\Phi^*(z) + \Psi^*(z)] = 2k \frac{\bar{z}}{z} - (B-A).$$

Функция  $\Phi^*(z)$ , которая непосредственно связана с компонентами напряжений, является периодической в направлении оси  $Ox$ . Следуя С. Г. Михлину [2], введем периодическую функцию

$$\tilde{\Psi}^*(z) = \Psi^*(z) + z\Phi^*(z). \quad (\text{V.173})$$

Подставив значение  $\Psi^*(z)$  из (V.173) в (V.172), получим условия на контуре  $L_s$ :

$$4 \operatorname{Re} \Phi^*(z) = 2(k-p) + 2k \ln \frac{\bar{z}z}{R^2} - (A+B), \quad (\text{V.174})$$

$$(\bar{z}-z)\Phi^*(z) + \tilde{\Psi}^*(z) = k \frac{\bar{z}}{z} - \frac{B-A}{2}.$$

Аналитические функции, исчезающие на бесконечности, представим\* в виде

$$\Phi^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{[\zeta(z)]^k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{[\zeta(z-ne)]^k}, \quad (V.175)$$

$$\Psi^*(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{[\zeta(z)]^k} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{[\zeta(z-ne)]^k},$$

где знак \* означает отсутствие в суммах членов с номером  $n = 0$

Переменная  $\zeta$  связана с  $z$  зависимостью

$$z - nl = \omega(\zeta) = c\zeta + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^{-k}. \quad (V.176)$$

Первые суммы в (V.175) являются аналитическими функциями вне контура  $L_s$ . Обозначим их в преобразованной (с помощью функции  $\omega(\zeta)$  (V.176)) плоскости  $\zeta$  через  $\Phi_2(\zeta)$  и  $\Psi_2(\zeta)$ , т. е.

$$\Phi_2(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{[\zeta(z)]^k}, \quad \Psi_2(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{[\zeta(z)]^k}. \quad (V.177)$$

Вторые суммы в (V.175) будут голоморфными функциями внутри контура  $L_s$ . Они зависят также от малого параметра  $\varepsilon = \frac{1}{l}$ . Разложив их в ряд по степеням этого параметра и сохранив члены, содержащие, например,  $\varepsilon^2$ , получим

$$\tilde{\Phi}_2(\zeta) = \frac{1}{3} a_2 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 - \frac{1}{3} a_1 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 \omega(\zeta), \quad (V.178)$$

$$\tilde{\Psi}_2(\zeta) = \frac{1}{3} b_2 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 - \frac{1}{3} b_1 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 \omega(\zeta).$$

Граничные условия (V.174) согласно (V.177) и (V.178) могут быть записаны в виде

$$2 \operatorname{Re} \Phi_2(\zeta) = (k - p) + k \ln \frac{\omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}}{R^2} - \frac{A + B}{2} + \\ + \frac{2}{3} a_1 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 [\omega(\zeta) + \overline{\omega(\zeta)}] - \frac{2}{3} a_2 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 \text{ на } \gamma;$$

$$\frac{\overline{\omega(\zeta)} - \omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi_2'(\zeta) + \Psi_2(\zeta) = k \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)} - \frac{B - A}{2} + \\ + \frac{1}{3} a_1 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 [\overline{\omega(\zeta)} - \omega(\zeta)] + \frac{1}{3} b_1 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 \omega'(\zeta) - \frac{1}{3} b_2 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 \text{ на } \gamma. \quad (V.179)$$

\* См. И. И. Ворович, А. С. Космодамианский [1].

Методом Н. И. Мусхелишвили\* из краевых условий (V.179) находим функции

$$\Phi_2(\zeta) = k \ln \frac{\omega(\zeta)}{c\zeta},$$

$$\Psi_2(\zeta) = k \left[ 1 + \frac{\bar{\omega}\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \frac{1}{\zeta} \right] - \frac{B-A}{2} - \frac{1}{3} b_2 c^2 \pi^2 \varepsilon^2. \quad (\text{V.180})$$

где

$$\omega(\zeta) = c\zeta + \frac{c_1}{\zeta}. \quad (\text{V.181})$$

Постоянные, входящие в формулы (V.180), определяются из следующей системы уравнений:

$$c = R \exp \left\{ \frac{1}{2k} \left( p - k + \frac{A+B}{2} + \frac{2}{3} a_2 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 \right) \right\},$$

$$c_1 = \frac{c}{k} \left( \frac{B-A}{2} + \frac{1}{3} b_2 c^2 \pi^2 \varepsilon^2 \right),$$

$$a_2 = k \frac{c_1}{c}, \quad (\text{V.182})$$

$$b_2 = \frac{2kc + (B-A)c_1 - 4kc_1}{2c \left( 1 - \frac{1}{3} cc_1 \pi^2 \varepsilon^2 \right)}.$$

Определив функции  $\Phi_2(\zeta)$ ,  $\Psi_2(\zeta)$  и  $\tilde{\Phi}_2(\zeta)$ ,  $\tilde{\Psi}_2(\zeta)$ , находим компоненты напряжений в упругой области:

$$\sigma_x^{(2)} + \sigma_y^{(2)} = A + B + 4 \operatorname{Re} \Phi(\zeta), \quad (\text{V.183})$$

$$\sigma_y^{(2)} - \sigma_x^{(2)} + 2i\tau_{xy}^{(2)} = B - A + 2 \left[ \frac{\bar{\omega}(\zeta^{-1}) - \omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) \right].$$

Таким образом, поставленная задача решена.

Рассмотрим случай, когда  $p=3k$ ,  $A=B=0$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{l} = 0,1$ . Из решения системы (V.182) находим  $c=2,85 R$ ,  $c_1=0,499 R$ . Тогда линиями  $L_s$  раздела будут эллипсы с полуосями  $a=3,35 R$ ,  $b=2,35 R$ . В этом случае для области с одним отверстием (см. § 2) границей пластической области будет окружность радиуса  $r=2,72 R$ .

\* См. § 1 гл. I.

### § 7. Пластические зоны возле кругового отверстия при одноосном растяжении пластинки

При двусосном растяжении пластинки при определенных значениях внешних усилий на бесконечности образующаясь возле отверстия пластическая зона будет частично или полностью его охватывать. При растяжении же вдоль одной из осей координат пластическая зона начнет развиваться в окрестности точек *A* и *B* (рис. V.12) и может не охватывать полностью отверстия, а иметь вид, указанный штриховкой. Определим величину этих пластических зон. Допустим, что тонкая пластинка толщиной  $2h$ , шириной

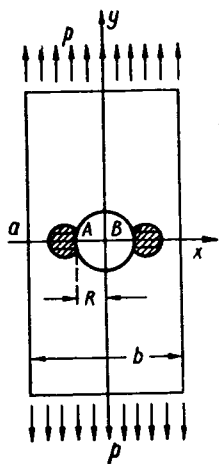


Рис. V.12.

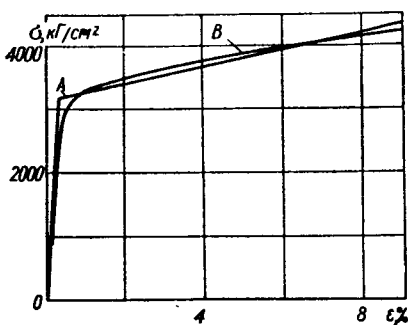


Рис. V.13.

$b$  с круговым отверстием радиуса  $R$ , край которого свободен от внешних усилий, растягивается вдоль оси  $Oy$  усилиями

$$p_y^{(\infty)} = p = 2\epsilon h \sigma_s, \tag{V.184}$$

где  $\epsilon$  — безразмерный параметр ( $0 \leq \epsilon \leq 1$ ). Будем считать, что отверстие мало, т. е.  $\frac{b}{2R} \geq 4$ . При этом предположении при  $\epsilon \geq 1/3$  пластические зоны возникнут в точках *A* и *B* возле отверстия. Точного решения этой задачи до сих пор еще не дано, поэтому приведем основные результаты приближенного решения, принадлежащего И. И. Фаербергу [1], основанного на теории упруго-пластического изгиба кривого бруса.

И. И. Фаерберг [1] построил графики \* для дюралевой пластинки  $D=16T$  с круговым отверстием при  $n = \frac{b}{2R} = 7$  и  $n=6$ . Диаграмма растяжения материала пластинки дюрала дана на рис. V.13. При вычислениях вместо действительной диаграммы растяжения была взята

\* Рис. V.13—V.18 заимствованы из работы И. И. Фаерберга [1].

диаграмма, состоящая из двух прямолинейных участков  $OA$  и  $AB$ . Как показано на рис. V.13, для дюрала  $E_{пл} = \frac{E}{60}$  и  $k = \frac{E_{пл}}{E} = 0,0167$ .

На рис. V.14 и V.15 приведены кривые, представляющие границы между упругой и пластической областями для различных значений  $\epsilon$ . Эти кривые показывают, что пластическая зона, возникнув в точках

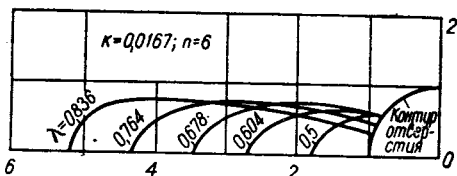


Рис. V.14.

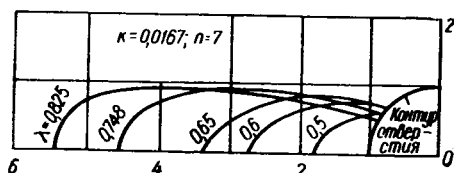


Рис. V.15.

$A$  и  $B$  (см. рис. V.12), при  $\epsilon = 1/3$  и дальнейшем увеличении  $\epsilon$  от  $1/3$  до  $0,65$  быстро распространяется вдоль контура отверстия. При  $\epsilon > 0,65$  пластические зоны растут в направлении, перпендикулярном к направлению растягивающих усилий, уменьшаясь возле самого отверстия. На рис. V.16 и V.17 изображены кривые распределения деформаций по

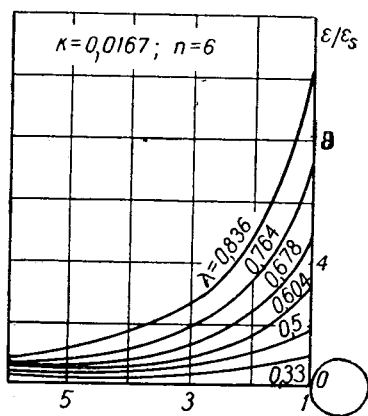


Рис. V.16.

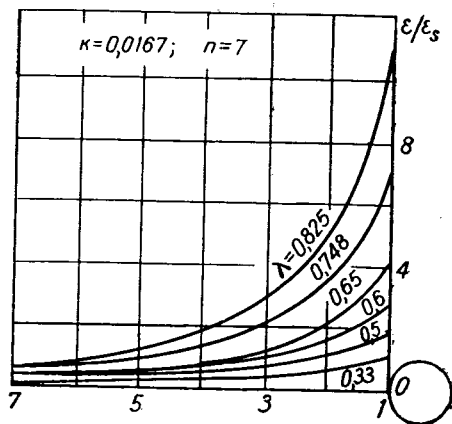


Рис. V.17.

сечению  $aA$  (см. рис. V.12) в зависимости от  $n$  для некоторых значений  $\epsilon$ . С увеличением  $\epsilon$  или, что то же, с увеличением растягивающего усилия  $p = 2h\epsilon\sigma_s$  деформации вблизи отверстия возрастают значительно быстрее, чем на внешних краях пластинки.

На рис. V.18 точечная кривая представляет собой зависимость между  $\frac{\epsilon}{\epsilon_s}$  ( $\epsilon_s$  — деформация в момент образования пластической зоны) для точки  $A$  (см. рис. V.12) и величиной  $\epsilon$ , найденную И. И. Фаербергом [1] экспериментально при помощи тензометров Гугенберга с базой 2 мм.

Для сравнения на этом же рисунке приведена сплошная кривая, представляющая теоретическую зависимость между  $\varepsilon$  и  $\frac{e}{e_s}$ . Величина  $e$

измерялась в точке  $A$  в направлении растяжения дюралевой пластинки размерами  $800 \times 180 \times 5$  мм и отверстие радиуса  $R = 15$  мм. Как видим, экспериментальные данные почти точно совпадают с теоретическими для  $\varepsilon \leq 0,5$  и несколько уклоняются для  $\varepsilon > 0,5$ . Таким образом, решение поставленной задачи дает хорошее приближение. О. Г. Рыбакиной [1] этот метод обобщается на случай больших пластических деформаций с учетом истинного закона упрочнения.

Применяя вариационные методы в сочетании с методом Релея-Ритца, В. Budiansky, R. Vidensek [1] дали приближенное решение задачи в рассматриваемой постановке о напряжениях возле кругового от-

верстия в бесконечной пластинке, находящейся под действием одноосного растяжения. Р. Ю. Керимовым и Л. П. Хорошуном [1] и Р. Ю. Керимовым [1] проведено исследование упруго-пластической задачи для случая степенного упрочнения материала\*. В работе Е. G. Marcetos [1] изучается развитие пластической зоны около кругового отверстия в растянутой полосе на основе метода оптически активных покрытий.

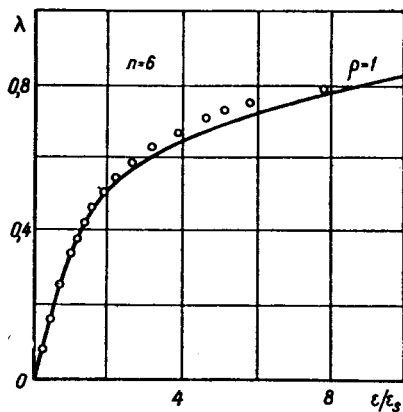


Рис. V.18.

## § 8. О полосах скольжения возле эллиптического отверстия

В настоящей главе рассматривались достаточно развитые пластические деформации, занимающие значительную область возле отверстия. Эксперименты показывают, что пластические деформации на первых этапах их развития обычно локализуются в немногих тонких слоях (полосах скольжения), занимающих незначительный объем тела по сравнению с его упругой частью. Такое развитие пластических деформаций особенно характерно для материалов, обладающих (при обычных испытаниях) четко выраженной площадкой текучести, а также при наличии достаточной неоднородности поля, т. е. поля напряжений с достаточно большим градиентом напряжений.

\* Задача (плоская деформация) об изменении во времени радиуса пластической зоны возле кругового отверстия в плоскости из линейно упрочняющегося релаксирующего материала (модель А. Ю. Ишлинского [1]) рассмотрена в работе М. И. Розовского [1]. При этом показано, что при наличии релаксации упрочнение оказывает не только количественное, но и качественное влияние на процесс изменения пластической зоны.

В этом параграфе будут рассмотрены простейшие случаи возникновения и развития слюев (полос) скольжения в тонких пластинках, которые возникают возле эллиптического отверстия при  $b=0$  и  $a=b$ , т. е. в двух крайних случаях: возле щели и кругового отверстия ( $a$  и  $b$  — полуоси эллипса).

При аналитическом исследовании возникновения и развития полос скольжения может быть применен следующий метод\*. Ввиду малости ширины этих полос пластическая деформация считается сосредоточенной вдоль некоторых линий, т. е. полоса заменяется срединной ее линией. При этом на таких линиях необходимо допустить наличие разрывов перемещений. Эти допускаемые разрывы перемещений не должны противоречить кинематически возможной схеме пластического течения и не должны означать наличия трещин (пустот) в теле, если последние в результате пластической деформации не образуются, т. е. если сохраняется сплошность материала. В тонких пластинах таким требованиям могут удовлетворять разрывы как тангенциальные, так и нормальные к линии разрыва. В случае нормального разрыва нарушения сплошности материала может быть исключено за счет возможности локального утоньшения или утолщения пластинки.

Таким образом, вследствие локального характера развития полос скольжения задача об упруго-пластической деформации в пластинке может быть сведена к задаче о деформации линейно-упругой пластинки, перемещения которой по определенным линиям претерпевают разрыв. Действующие по этим линиям усилия должны удовлетворять принятому условию пластичности. Вид и длина линий разрыва (скольжения) должны быть определены в процессе решения задачи. В общем случае это — довольно трудная задача, особенно определение формы линий разрыва. Однако в ряде частных случаев вид линий скольжения можно предугадать. Тогда решение задачи значительно облегчается.

Рассмотрим\*\* задачу развития первых полос скольжения при одноосном растяжении тонких пластин со щелью или с круговым отверстием. Размер щели и отверстия будем считать малым, а материал пластинок — изотропным упруго идеально-пластичным. В качестве условия пластичности примем условие Треска-Сен-Венана:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sigma_T = \text{const.} \quad (\text{V.185})$$

Комплексные потенциалы при наличии полос скольжения представим в виде

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi_0(z) + \varphi_*(z), \\ \psi(z) &= \psi_0(z) + \psi_*(z), \end{aligned} \quad (\text{V.186})$$

\* См. П. М. Витвицкий, М. Я. Леонов [3], где указанный подход к решению задач о развитии полос скольжения в тонких пластинках четко сформулирован. По существу этот же метод, хотя и не четко сформулированный, используется в работе D. S. Dugdale [1]. Аналогичный метод исследования простейших случаев пластической деформации пластин применяется А. Р. Фжанициным [1].

\*\* См. И. М. Витвицкий, М. Я. Леонов [3]. Зависимость длины полос скольжения от растягивающих усилий для пластинки со щелью найдена также D. S. Dugdale [1].

где функциями  $\varphi_0(z)$  и  $\psi_0(z)$  определяется поле напряжений и деформаций в предположении, что пластинка все время деформируется упруго (основное поле); дополнительными функциями  $\varphi_*(z)$  и  $\psi_*(z)$  учитывается наличие полос скольжения (разрывов перемещений).

**Растяжение пластинки со щелью.** Пусть тонкая бесконечная пластинка с прямолинейной щелью длины  $2l$  растягивается перпендикулярно к направлению щели усилиями  $\sigma_y^{(\infty)} = p$  (рис. V.19).

Как следует из § 2 гл. II, какой бы малой ни была величина усилий  $p$ , по концам узкой щели условия упругости не соблюдаются, и здесь могут появиться либо пластические деформации, либо трещины при хрупком разрушении материала.

Максимальные напряжения в пластинке возникают на линии продолжения щели (на линии  $y=0$  при  $|x| \geq l$ ), причем

$$\sigma_y(x, 0) > \sigma_x(x, 0) > \sigma_z(x, y) = 0,$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0. \quad (\text{V.187})$$

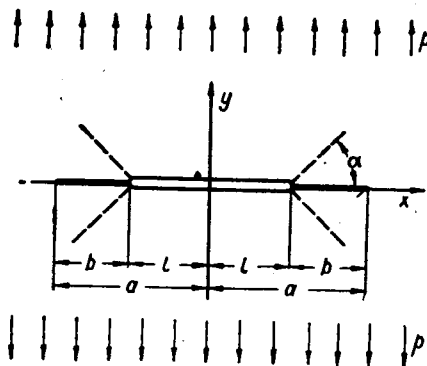


Рис. V.19.

Поэтому условие пластичности (V.185) на оси абсцисс принимает вид

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_T. \quad (\text{V.188})$$

Площадки скольжения совпадают с осью  $Ox$  и наклонены под углом  $\pm \frac{\pi}{4}$  к плоскости пластинки. Первые полосы скольжения, таким образом, распространяются по оси абсцисс\*. Пусть они при некоторой нагрузке занимают отрезки  $l \leq |x| \leq a$ . При сдвигах по площадкам скольжения на этих отрезках возникает локальное утоньшение пластинки — результат разрыва нормальной к оси  $Ox$  составляющей  $v(x, 0)$  вектора перемещений.

Поскольку узкую щель также можно рассматривать как линию разрыва перемещений  $v(x, 0)$ , будем считать, что такой разрыв имеет место на всем отрезке  $|x| \leq a$ , причем на этом отрезке

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0; \quad \sigma_y(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{при } |x| \leq l, \\ \sigma_T & \text{при } l < |x| \leq a. \end{cases} \quad (\text{V.189})$$

\* После первых элементарных пластических сдвигов поле напряжений, вообще говоря, несколько изменится, однако (как будет следовать из дальнейшего) соотношение (V.187) сохраняется. Это и обеспечивает развитие первых полос скольжения по оси абсцисс.



Тогда в качестве функций, соответствующих растяжению сплошной пластинки усилиями  $\sigma_y^{(\infty)} = p$ , следует взять

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{4}pz, \quad \Psi_0(z) = \frac{1}{2}pz. \quad (\text{V.190})$$

Функции  $\Phi_*(z)$  и  $\Psi_*(z)$ , учитывающие наличие разрыва перемещений, найдем, решив следующую вспомогательную задачу. Пусть в изотропной упругой плоскости на отрезке  $|x| \leq a$  оси абсцисс перемещения  $v(t, 0)$  претерпевают разрыв величины  $\lambda(t)$ , а перемещения  $u(t, 0)$  и напряжения  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  непрерывны, т. е.

$$\left. \begin{aligned} [u(t) + iv(t)]^+ - [u(t) + iv(t)]^- &= i\lambda(t), \\ [X_n(t) + iY_n(t)]^+ - [X_n(t) + iY_n(t)]^- &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } |t| = |x| \leq a, \quad (\text{V.191})$$

где значками  $+$  и  $-$  обозначены соответственно левые и правые граничные значения величин. Будем считать, что функция  $\lambda(t)$  удовлетворяет условию Гельдера и  $\lambda(a) = \lambda(-a) = 0$ .

На основании формул (I.9), (I.10) и соотношений (V.191) имеем

$$\left. \begin{aligned} \Phi_*^+(t) - \Phi_*^-(t) &= \frac{2\mu}{\kappa + 1} i\lambda(t), \\ \Psi_*^+(t) - \Psi_*^-(t) &= \frac{2\mu}{\kappa + 1} i[\lambda(t) - t\lambda'(t)] \end{aligned} \right\} \text{при } |t| \leq a. \quad (\text{V.192})$$

Таким образом, мы пришли к задаче линейного сопряжения (задача Гильберта) для кусочно-голоморфных на всей плоскости функций  $\Phi_*(z)$  и  $\Psi_*(z)$ . Решение этой задачи известно\*:

$$\Phi_*(z) = D \int_{-a}^a \frac{\lambda(t) dt}{t-z}, \quad (\text{V.193})$$

$$\Psi_*(z) = D \int_{-a}^a \frac{\lambda(t) - t\lambda'(t)}{t-z} dt,$$

где

$$D = \frac{\mu}{\pi(\kappa + 1)}.$$

Производные от этих функций, через которые определяются напряжения, могут быть представлены в виде

$$\Phi_*'(z) = \Phi_*'(z) = D \int_{-a}^a \frac{\lambda'(t) dt}{t-z}, \quad (\text{V.194})$$

$$\Psi_*'(z) = \Psi_*'(z) = -Dz \int_{-a}^a \frac{\lambda'(t) dt}{(t-z)^2}.$$

\* См. Н. И. Мусхелишвили [1].

Вернемся теперь к основной задаче о полосах скольжения. Для того чтобы ее решить, необходимо определить функцию  $\lambda'(t)$  и параметр  $a$  так, чтобы выполнялось условие (V.189) и обеспечивалась ограниченность и непрерывность напряжений в точках  $z = \pm a$ . Принимая во внимание формулы (I.2), (I.9), (I.6) и (I.13), из условия (V.189) получим уравнение для определения функции  $\lambda'(t)$  и параметра  $a$ :

$$\frac{1}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{\lambda'(t) dt}{t-x} = f(x) \equiv \begin{cases} \frac{ip}{2\pi D} & \text{при } |x| \leq l, \\ \frac{i}{2\pi D} (\rho - \sigma_\tau) & \text{при } l < |x| \leq a. \end{cases} \quad (\text{V.195})$$

Нетрудно показать, что только решение уравнения (V.195), равное нулю в точках  $|x| = a$ , обеспечивает в последних непрерывность напряжений. Такое решение, как известно \*, существует при условии

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = 0 \quad (\text{V.196})$$

и дается формулой

$$\lambda'(t) = \frac{\sqrt{a^2-t^2}}{\pi i} \int_{-a}^a \frac{f(x)}{\sqrt{a^2-x^2}} \frac{dx}{x-t}. \quad (\text{V.197})$$

Подставив в (V.197) значение  $f(x)$  и вычислив интегралы, найдем функцию

$$\lambda'(t) = \frac{\sigma_\tau}{2\pi^2 D} \ln \left| \frac{l\sqrt{a^2-t^2} - t\sqrt{a^2-l^2}}{l\sqrt{a^2-t^2} + t\sqrt{a^2-l^2}} \right| \quad (|t| \leq a) \quad (\text{V.198})$$

и параметр, определяющий длину полосы скольжения:

$$a = l \sec \frac{\pi p}{2\sigma_\tau}. \quad (\text{V.199})$$

Из (V.198) и (V.194) находим функции

$$\Phi_*(z) = -\frac{\sigma_\tau}{2\pi i} \ln \frac{l^2 - z^2 + li\sqrt{a^2-l^2} - z\sqrt{z^2-a^2}}{l^2 - z^2 - li\sqrt{a^2-l^2} - z\sqrt{z^2-a^2}}, \quad (\text{V.200})$$

$$\Psi_*(z) = \frac{\sigma_\tau}{\pi} \frac{zl\sqrt{a^2-l^2}}{(z^2-l^2)\sqrt{z^2-a^2}}.$$

Здесь в выражении  $\sqrt{z^2-a^2}$  принимается ветвь, голоморфная на плоскости  $z$ , с разрывом вдоль отрезка  $|x| \leq a$ , такая, что  $\sqrt{z^2-a^2} \rightarrow z$  при  $|z| \rightarrow \infty$ ; в логарифмической функции принимаем ветвь, голоморфную на плоскости с таким же разрезом, за исключением точек  $z = \pm l$ , и на бесконечности принимающую нулевое значение.

\* См. Н. И. Мусхелишвили [2].

Напряжения в пластике со щелью

$$\sigma_y + \sigma_x = p - \frac{2}{\pi} \sigma_T \operatorname{arg} \ln \frac{l^2 - z^2 + li \sqrt{a^2 - l^2} - z \sqrt{z^2 - a^2}}{l^2 - z^2 - li \sqrt{a^2 - l^2} - z \sqrt{z^2 - a^2}}, \quad (\text{V.201})$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = p + \frac{2}{\pi} \sigma_T \frac{(z - \bar{z}) l \sqrt{a^2 - l^2}}{(z^2 - l^2) \sqrt{z^2 - a^2}}.$$

На рис. V.20 показаны графики напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  по сечениям  $Ox$  и  $Oy$  при  $p = \frac{1}{2} \sigma_T$  (длина полосы скольжения  $b = a - l = (\sqrt{2} - 1)l \approx 0,41l$ ).

Найденное решение относится к первой стадии упруго-пластического равновесия пластинки, когда полосы скольжения распространяются по оси абсцисс. Однако при некоторой нагрузке возникают новые полосы скольжения, наклоненные под углом  $\alpha$  к первым (на рис. V.19 показаны штриховой линией). Это — вторая стадия упруго-пластического равновесия пластинки. Новые полосы скольжения зарождаются, когда в окрестности концов щели достигают предела текучести максимальные касательные напряжения  $\tau_{\max} = \frac{1}{2} \left| \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} \right|$ , действующие в площадках, перпендикулярных к плоскости пластинки. Эти напряжения найдем исходя из формул (V.201), полагая  $z = l + re^{i\theta}$  и определяя при  $r \rightarrow 0$  их максимальное значение в зависимости от  $\theta$ :

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_T}{\pi} + \sqrt{p^2 + \frac{\sigma_T^2}{\pi^2}} \right). \quad (\text{V.202})$$

На основании формул (II.23) и (II.201) можно показать, что эти напряжения действуют на площадках, угол  $\alpha$  наклона которых к оси абсцисс удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\pi \frac{p}{\sigma_T} \quad \left( \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \right). \quad (\text{V.203})$$

По условию пластичности (V.185) из (V.202) найдем, что новые полосы скольжения зарождаются при нагрузке

$$p = \sigma_T \sqrt{1 - \frac{2}{\pi}} \approx 0,60\sigma_T. \quad (\text{V.204})$$

Из формул (V.203) и (V.204) следует, что начальный угол наклона новых полос скольжения

$$\alpha = \frac{1}{2} [\pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\pi(\pi - 2)}] \approx \frac{\pi}{3}. \quad (\text{V.205})$$

Таким образом, эксперименты с растяжением пластин из мягкой стали со щелью подтверждают характер развития пластических деформаций, следующий из аналитического решения: сначала всегда появ-

ляются полосы скольжения на линиях продолжения щели, а потом при определенной нагрузке возникают новые полосы, направленные под углом к первым. Полученная зависимость длины первых полос скольжения от нагрузки удовлетворительно согласуется с теоретической зависимостью\*.

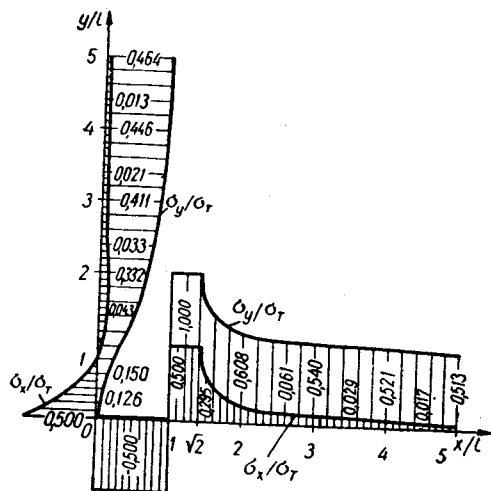


Рис. V.20

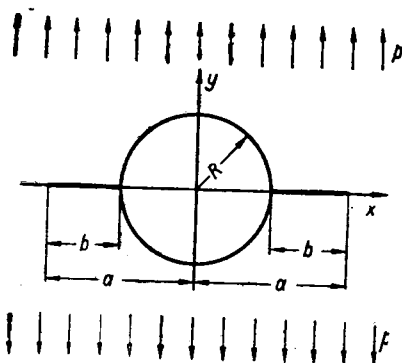


Рис. V.21.

**Растяжение пластинки с круговым отверстием.** Пусть тонкая бесконечная пластинка с круговым отверстием радиуса  $R$  растягивается усилиями  $\sigma_y^{(\infty)} = p$  (рис. V.21). Из анализа поля упругих напряжений (см. § 2 гл. II) следует, что в окрестности точек  $z = \pm R$ , где напряжения максимальны, имеет место соотношение (V.187) и, следовательно, условие пластичности имеет вид (V.188). Поэтому возникающие при  $p \geq \frac{1}{3} \sigma_T$  полосы скольжения распространяются по оси абсцисс и сдвиги в них проходят таким же образом, как и в первых полосах скольжения в пластинке со щелью.

Определим функции  $\Phi_*(z)$  и  $\Psi_*(z)$  для плоскости с круговым отверстием при наличии на отрезках  $R \leq |x| \leq a$  разрыва перемещений  $v^+(t, 0) - v^-(t, 0) = \lambda(t)$ , причем  $\lambda(\pm a) = 0$ . Для этого представим их в виде

$$\Phi_*(z) = \Phi_*^{(1)}(z) + \Phi_*^{(2)}(z), \quad \Psi_*(z) = \Psi_*^{(1)}(z) + \Psi_*^{(2)}(z), \quad (V.206)$$

где функции  $\Phi_*^{(1)}(z)$  и  $\Psi_*^{(1)}(z)$  соответствуют указанному разрыву перемещений в плоскости без отверстия (они даются формулами (V.194)), а функциями  $\Phi_*^{(2)}(z)$  и  $\Psi_*^{(2)}(z)$  учитывается наличие отверстия, т. е. обеспечивается отсутствие внешних напряжений на контуре отверстия.

\* См. М. Я. Леонов, П. М. Витвицкий, С. Я. Ярема [1], а также D. S. Dugdale [1].

Функции  $\Phi_*^{(2)}(z)$  и  $\Psi_*^{(2)}(z)$  найдем по известным формулам\*, решив задачу для бесконечной плоскости с отверстием радиуса  $R$ , на контуре которого приложены нормальные и касательные напряжения  $N + iT$ , противоположные по знаку напряжениям  $\sigma_r + i\tau_{r\theta}$ , которые вызываются на контуре окружности  $|z| = R$  разрывом перемещений на указанных выше участках в плоскости без отверстия. Напряжения  $\sigma_r + i\tau_{r\theta}$  нетрудно получить, подставив функции  $\Phi_*(z)$  и  $\Psi_*(z)$  из (V.193) в формулу (I.18) при  $z = Re^{i\theta}$ .

Складывая соответственно функции  $\Phi_*^{(1)}(z)$ ,  $\Psi_*^{(1)}(z)$  и  $\Phi_*^{(2)}(z)$ ,  $\Psi_*^{(2)}(z)$ , получаем

$$\Phi_*(z) = -D[\lambda(R) - \lambda(-R)] \frac{1}{z} + D \int_L \left[ \frac{1}{t-z} + \frac{R^4(z-t)}{zt(zt-R^2)^2} \right] \lambda'(t) dt,$$

$$\Psi_*(z) = -D[\lambda(R) - \lambda(-R)] \left( \frac{1}{z} + 2 \frac{R^2}{z^3} \right) +$$

$$+ D \int_L \left\{ -\frac{z}{(t-z)^2} + \frac{R^2}{z^2 t} \left[ 1 + \frac{zt}{zt-R^2} + \frac{R^4(z-2t)}{z(zt-R^2)^2} + \frac{2R^4 t(z-t)}{(zt-R^2)^3} \right] \right\} \lambda'(t) dt, \quad (\text{V.207})$$

где интегралы берутся по линии  $L = [-a, -R] + [R, a]$ . Зная эти функции, по формулам (I.13) легко определить вызванные разрывом перемещений напряжения  $\sigma_y^*(x, 0)$ . Складывая последнее напряжение с напряжением  $\sigma_y^0(x, 0)$  основного поля (оно дается соответствующими формулами § 2 гл. II), на основе условия пластичности (V.188) получаем интегральное уравнение для определения функции  $\lambda'(t)$  и параметра  $a$ :

$$4D \int_R^a \left\{ \frac{t}{t^2-x^2} + \frac{R^4}{t} \left[ \frac{1}{R^2 x^2} + \frac{R^4(x^2-t^2)}{x^2(t^2 x^2 - R^4)^2} + 4R^2 t^2 \frac{(t^2-R^2)(x^2-R^2)}{(t^2 x^2 - R^4)^3} \right] \right\} \lambda'(t) dt + \frac{1}{2} \rho \left( 2 + \frac{R^2}{x^2} + 3 \frac{R^4}{x^4} \right) = \sigma_T \quad (R < |x| < a). \quad (\text{V.208})$$

В уравнении (V.208) учтены условия  $\lambda(t) = \lambda(-t)$  и  $\lambda'(t) = -\lambda'(-t)$ , имеющие место, очевидно, вследствие симметрии задачи.

Вводя замену  $\frac{x^2}{R^2} = \xi$ ,  $\frac{t^2}{R^2} = \eta$ ,  $\lambda'(t) = \lambda'(R\sqrt{\eta}) = \lambda'_0(\eta)$ ,  $\frac{a^2}{R^2} = \alpha$ , уравнение (V.208) приведем к виду

$$\int_1^\alpha \left[ \frac{1}{\eta-\xi} + \frac{1}{\xi\eta} + \frac{\xi-\eta}{\eta\xi(\eta\xi-1)^2} + \frac{4(\eta-1)(\xi-1)}{(\xi\eta-1)^3} \right] \lambda'_0(\eta) d\eta + \frac{\rho}{4D} \left( 2 + \frac{1}{\xi} + \frac{3}{\xi^2} \right) = \frac{\sigma_T}{2D} \quad (1 < \xi < \alpha). \quad (\text{V.209})$$

\* См. Н. И. Мусхелишвили [1].



приближенное значение функции  $\lambda'_0(\eta)$ . После этого можно подсчитать поле напряжений.

На рис. V.22 изображена зависимость длины полос скольжения  $b/R$  от нагрузки  $p/\sigma_T$ , а на рис. V.23 показаны графики \* напряжений  $\sigma_y, \sigma_x$  по оси абсцисс и на рис. V.24 —  $\sigma_\theta$  на контуре отверстия для случая, когда  $b=R$ , т. е.  $p=0,66 \sigma_T$ . Графики построены при трехчленном приближенном значении  $\lambda'_2(\eta)$  (V.210) и при  $\xi_0 = 1, \xi_1 = \frac{1+\alpha}{2}, \xi_2 = \alpha = \frac{a^2}{R^2}$ .

### § 9. О критических нагрузках, вызывающих начало развития трещин возле отверстия

Допустим, что тело будет вести себя упруго вплоть до разрушения. В этом случае разрушение тела будет происходить от развития образовавшихся в зоне повышенных напряжений равновесных трещин хрупкого разрушения \*\*.

Рассмотрим \*\*\* напряженное состояние в бесконечной упругой плоскости, ослабленной криволинейным отверстием или двумя трещинами (разрезами) длиной  $l$ , когда контур  $L$  отверстия и трещин свободен от внешних нагрузок, а в достаточно удаленных от отверстия и трещин точках, т. е. на бесконечности, приложены постоянные растягивающие напряжения  $\sigma_y^{(\infty)} = p$  (одноосное или всестороннее растяжение), как показано на рис. V.25.

В дальнейшем будем рассматривать отверстия с гладкими контурами, для которых ось  $Ox$  будет осью симметрии, и уравнения этих контуров имеют вид

$$\begin{aligned} x &= R \left| \cos \varphi + \sum_{n=1}^N a_n \cos n\varphi \right|, \\ y &= R \left[ \sin \varphi - \sum_{n=1}^N a_n \sin n\varphi \right], \end{aligned} \quad (V.212)$$

\* Штриховыми линиями изображены графики напряжений для основного поля в предположении, что пластинка деформируется все время (даже при  $p > \frac{\sigma_T}{3}$ ) упруго; штрих-пунктирными линиями — напряжения, вызванные полосами скольжения (разрывом перемещений); сплошными линиями — суммарные напряжения.

\*\* Исследованию напряженного состояния возле различно ориентированных как прямолинейных, так и криволинейных трещин посвящена гл. VIII.

\*\*\* Решение этой задачи дано А. А. Каминским [1]. Для частного случая кругового отверстия решение ранее получено О. L. Bowie [1]. См. также § 5 гл. VIII, где приведены решения других авторов.

где  $R$ ,  $a_n$  — действительные параметры;  $N$  и  $n$  — целые положительные числа.

Обозначим через  $k$  число трещин. При  $k=2$  будем рассматривать уравнение контуров (V.212) с нечетными  $n$ .

Граничное условие (I.11) и условие, сопряженное с ним, в данном случае

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0, \quad (V.213)$$

$$\overline{\varphi(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = 0.$$

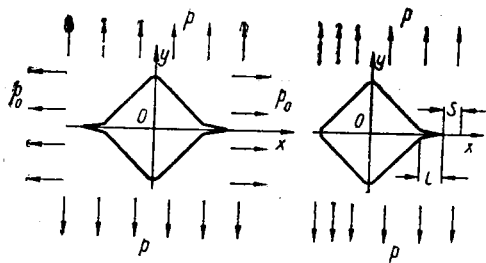


Рис. V.25.

Функция  $\omega(\zeta)$ , которая отображает внешность контура (V.212) с одним и двумя равными прямолинейными разрезами длиной  $l$  в плоскости  $z$  на внешность единичной окружности  $\zeta$  в плоскости  $\zeta$ , имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = R \left[ \zeta^* + \sum_{n=1}^N \frac{a_n}{\zeta^{*n}} \right], \quad (V.214)$$

где при  $k = 1$

$$\zeta^* = \frac{L_0 + 1}{4} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{L_0 - 1}{2} + \sqrt{\left[ \frac{L_0 + 1}{4} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{L_0 - 1}{2} \right]^2 - 1};$$

при  $k = 2$

$$\zeta^* = \frac{L_0}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \sqrt{\frac{L_0^2}{4} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)^2 - 1}.$$

Здесь  $L_0 = \frac{1}{2} \left( 1 + l_0 + \frac{1}{1 + l_0} \right)$ ,  $l_0$  — действительный параметр.

В случае эллиптического отверстия с полуосями  $a$ ,  $b$  отображающая функция (V.214) будет иметь такой вид:

при  $k = 1$

$$\omega(\zeta) = R \left\{ (1 + m) \left[ \frac{L_0 + 1}{4} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{L_0 - 1}{2} \right] + (1 - m) \sqrt{\left[ \frac{L_0 + 1}{4} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + \frac{L_0 - 1}{2} \right]^2 - 1} \right\}; \quad (V.215)$$

при  $k = 2$

$$\omega(\zeta) = R \left\{ \frac{L_0(1+m)}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) + (1-m) \sqrt{\frac{L_0^2}{4} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right)^2 - 1} \right\}. \quad (V.216)$$



Здесь

$$R = \frac{a+b}{2}, \quad m = \frac{a-b}{a+b},$$

$$1 + l_0 = \frac{1}{a+b} [a + l + \sqrt{(a+l)^2 - (a^2 - b^2)}].$$

Отображающую функцию (V.214) можно разложить в ряд и представить в виде

$$\omega(\zeta) = R_1 \left[ \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{c}_n \zeta^{1-kn} \right], \quad (\text{V.217})$$

где  $R_1, \tilde{c}_n$  — действительные параметры.

Ряд (V.217) и разложение  $\omega'(\zeta)$  сходится везде в  $|\zeta| \geq 1$ , за исключением точек  $b_k$  контура  $\gamma$ , которые соответствуют точкам пересечения берегов трещин с контуром отверстия. Берега равновесных трещин на концах должны плавно смыкаться\*, поэтому методами, изложенными в § 2 гл. I, нельзя аппроксимировать отображающую функцию (V.214), так как при такой аппроксимации концы трещин будут закруглены.

Удержав (V.217)  $N+1$  первых членов ряда, заменим коэффициенты  $\tilde{c}_n$  некоторыми близкими коэффициентами  $c_n$  таким образом, чтобы для новой отображающей функции

$$\omega_N(\zeta) = R_1 \left[ \zeta + \sum_{n=1}^N c_n \zeta^{1-kn} \right] \quad (\text{V.218})$$

выполнялось условие

$$\omega'_N(\zeta) = R_1 (1 - \zeta^{-h}) Q_N(\zeta), \quad (\text{V.219})$$

где  $Q_N$  — полином по отрицательным степеням  $\zeta$ , все корни которого лежат внутри единичного круга в плоскости  $\zeta$ . При построении функции (V.218) требуется также, чтобы  $\omega_N(\zeta) \rightarrow \omega(\zeta)$ ,  $\omega'_N(\zeta) \rightarrow \omega'(\zeta)$  при  $N \rightarrow \infty$  везде в  $|\zeta| \geq 1$ , за исключением точек  $b_k$  контура  $\gamma$ . Построенная таким образом функция (V.218) будет отображать внешность некоторого нового контура  $L'$  на внешность контура  $\gamma$ , на котором сохранены точки возврата в остриях трещин, а закруглены лишь углы на пересечении берегов трещин с контуром отверстия. Функции напряжений, соответствующие  $\omega_N(\zeta)$ , будем обозначать в виде  $\varphi_N(\zeta)$ ,  $\psi_N(\zeta)$ .

Особенность решения, возникающая вследствие наличия угловых точек возврата контура, может быть отнесена за счет функции  $\psi_N(\zeta)$  и не влияет на другую функцию  $\varphi_N(\zeta)$ , причем функция  $\psi_N(\zeta)$  в точках  $\gamma$ , соответствующих точкам возврата контура  $L'$ , имеет полюс первого порядка\*\*.

\* См. Г. И. Баренблатт [1, 2].

\*\* См. С. М. Белоносов [1].

В случае всестороннего растяжения «на бесконечности» усилиями  $p$  определим функцию

$$\varphi_N(\zeta) = R_1 p \left[ \frac{\zeta}{2} + \sum_{n=1}^N \alpha_n \zeta^{1-kn} \right]. \quad (\text{V.220})$$

Здесь  $\alpha_n$  — действительные коэффициенты. Второе граничное условие (V.213) для функций  $\varphi_N(\zeta)$  и  $\psi_N(\zeta)$  представим в виде

$$\omega'_N(\sigma) \psi_N(\sigma) = -\varphi_N\left(\frac{1}{\sigma}\right) \omega'_N(\sigma) - \omega_N\left(\frac{1}{\sigma}\right) \varphi'_N(\sigma). \quad (\text{V.221})$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\sigma$  в разложении правой и левой частей (V.221), получаем систему линейных алгебраических уравнений для определения  $\alpha_n$ :

$$\alpha_p + \sum_{n=1}^{N-p} \alpha_{n+p} c_n (1 - kn) + \sum_{n=1}^{N-p} c_{p+n} \alpha_n (1 - kn) + \frac{c_p}{2} = 0. \quad (\text{V.222})$$

Умножая обе части (V.221) на  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1}{\sigma - \zeta}$ , где  $\zeta$  — точка вне  $\gamma$ , и интегрируя по  $\gamma$ , получаем

$$\omega'_N(\zeta) \psi_N(\zeta) = -\varphi_N\left(\frac{1}{\zeta}\right) \omega'_N(\zeta) - \omega_N\left(\frac{1}{\zeta}\right) \varphi'_N(\zeta). \quad (\text{V.223})$$

Поскольку  $\omega_N(\zeta) \rightarrow \omega(\zeta)$  и  $\omega'_N(\zeta) \rightarrow \omega'(\zeta)$ , можно предположить\*, что при  $N \rightarrow \infty$   $\varphi_N(\zeta) \rightarrow \varphi(\zeta)$ ;  $\varphi'_N(\zeta) \rightarrow \varphi'(\zeta)$ ;  $(1 - \zeta^{-k}) \psi_N(\zeta) \rightarrow (1 - \zeta^{-k}) \psi(\zeta)$  везде в  $|\zeta| \geq 1$ , за исключением точек  $b_k$ , которые соответствуют угловым точкам контура  $L$ , отличных от точек возврата.

Переходя к пределу в правой и левой частях (V.223) при  $N \rightarrow \infty$  для действительных  $z$  (на продолжении трещин), получим

$$\psi(\zeta) = -\varphi\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta). \quad (\text{V.224})$$

Для случая, когда «на бесконечности» приложены растягивающие усилия  $p$  в направлении, нормальном к поверхностям трещин, функцию напряжений представим в виде

$$\varphi_N(\zeta) = p R_1 \left[ \frac{\zeta}{4} + \sum_{n=1}^N \alpha_n \zeta^{1-kn} \right], \quad (\text{V.225})$$

где  $\alpha_n$  — действительные коэффициенты.

Повторяя все выкладки и рассуждения, приведенные выше, получим, что  $\psi(\zeta)$  для действительных  $z$  (на продолжении трещин) также

\* См. Н. И. Мухелишвили [1].

выражается формулой (V.224), а коэффициенты  $\alpha_n$  функции  $\Phi_N(\zeta)$  определяются из алгебраических систем уравнений:

при  $k=1$

$$\alpha_p + \sum_{n=1}^{N-p} \alpha_{n+p} c_n (1-n) + \sum_{n=1}^{N-p} c_{n+p} \alpha_n (1-n) + \frac{c_p}{4} = \begin{cases} 0, & p \neq 2, \\ -\frac{1}{2}, & p = 2; \end{cases} \quad (\text{V.226})$$

при  $k=2$

$$\alpha_p + \sum_{n=1}^{N-p} \alpha_{n+p} c_n (1-2n) + \sum_{n=1}^{N-p} c_{n+p} \alpha_n (1-2n) + \frac{c_p}{4} = \begin{cases} 0, & p > 1, \\ -\frac{1}{2}, & p = 1; \end{cases} \quad (\text{V.227})$$

$p = 1, 2, 3, \dots, N.$

Заменой переменного  $z$  на  $\omega(\zeta)$  формулы (I.13) преобразуются к виду

$$\sigma_x + \sigma_y = 4 \operatorname{Re} \{ \Phi(\zeta) \},$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left\{ \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \Psi(\zeta) \right\}. \quad (\text{V.228})$$

Вследствие полной симметрии можно ограничиться рассмотрением только правой трещины (если их две).

Напряжения возле конца трещины найдем из (V.228), приняв во внимание соотношения (V.214) и (V.224):

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{\omega'(1+e)} \left[ \Phi'(1+e) + \frac{1}{(1+e)^2} \Phi' \left( \frac{1}{1+e} \right) \right], \quad (\text{V.229})$$

где

$$e = f(l, r_k) \sqrt{s};$$

$s$  — малое расстояние от рассматриваемой точки на оси  $x$  до конца трещины (см. рис. V.25), а  $f(l, r_k)$  — известная функция от длины трещины  $l$  и характерных параметров отверстия  $r_k$ .

**Эллиптическое отверстие.** Соотношение (V.229) преобразуется к такому виду:

при  $k=1$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{p}{2} \left[ \tilde{\Phi}'(\zeta) + \frac{1}{\zeta^2} \tilde{\Phi}' \left( \frac{1}{\zeta} \right) \right] \sqrt{\frac{\alpha + \frac{l}{2} \left[ 1 - \frac{1}{(1+l_0)^2} \right] \left[ 1 + \frac{1}{1+l_0} \right]}{2s \left[ 1 - \frac{m}{(1+l_0)^2} \right] \left[ 1 + \frac{m}{1+l_0} \right]}}; \quad (\text{V.230})$$

при  $k = 2$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{\rho}{2} \left[ \tilde{\varphi}'(\xi) + \frac{1}{\xi^2} \tilde{\varphi}'\left(\frac{1}{\xi}\right) \right] \sqrt{\frac{a+l}{2s} \cdot \frac{1 - \frac{1}{(1+l_0)^4}}{1 - \frac{m^2}{(1+l_0)^4}}}, \quad (\text{V.231})$$

где

$$\tilde{\varphi}'(\xi) = \frac{\varphi'(\xi)}{R_1 \rho}.$$

Нагрузка будет критической, если выполняется условие\*

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{K}{\pi \sqrt{s}} + O(1), \quad (\text{V.232})$$

где  $K$  — модуль сцепления.

Из (V.230) — (V.232) получаем выражения для определения критической нагрузки, необходимой для начала развития трещин возле эллиптического отверстия:

при  $k = 1$

$$\rho_* = \frac{K}{\pi \tilde{\varphi}'(1)} \sqrt{\frac{2}{a + \frac{l}{2}} \cdot \frac{\left[1 - \frac{m}{(1+l_0)^2}\right] \left[1 + \frac{m}{1+l_0}\right]}{\left[1 - \frac{1}{(1+l_0)^2}\right] \left[1 + \frac{1}{1+l_0}\right]}}; \quad (\text{V.233})$$

при  $k = 2$

$$\rho_* = \frac{K}{\pi \tilde{\varphi}'(1)} \sqrt{\frac{2}{a+l} \cdot \frac{1 - \frac{m^2}{(1+l_0)^4}}{1 - \frac{1}{(1+l_0)^4}}}. \quad (\text{V.234})$$

Поскольку функции  $\varphi'(\xi)$  и  $\varphi'_N(\xi)$  в точке  $\xi = 1$  не имеют особенностей и при  $N \rightarrow \infty$   $\varphi'_N(1) \rightarrow \varphi'(1)$ , то, выбирая  $N$  достаточно большим, можно сделать разницу между  $\varphi'_N(1)$  и  $\varphi'(1)$  сколь угодно малой. Поэтому для достаточно больших  $N$ , заменив в (V.233) и (V.234)  $\tilde{\varphi}'(1)$  на  $\tilde{\varphi}'_N(1) = \frac{\varphi'_N(1)}{R_1 \rho}$ , получим приближенные формулы, позволяющие с достаточной степенью точности вычислять критическую нагрузку.

На рис. V.26 приведены кривые  $\tilde{\rho}_* = \frac{\pi \rho_*}{K} \sqrt{R}$  в зависимости от  $\lambda = \frac{l}{R}$  для различных значений  $m = \frac{a-b}{a+b}$  в случае всестороннего растяжения при  $k = 2$ , построенные по формулам (V.233) и (V.234), когда функция  $\tilde{\varphi}'(1)$  аппроксимировалась функцией  $\tilde{\varphi}'_N(1)$ . При этом в отображающей фун-

\* См. Г. И. Баренблатт [2].

кции (V.218) удерживается тридцать четыре члена. На рис. V.27 представлены аналогичные кривые для случая одноосного растяжения плоскости\*.

Из приведенных данных следует, что в случае вестороннего растяжения для всех  $0 < m < 1$  уже при  $l > \frac{R}{2}$  функция  $\tilde{\varphi}'_N(1)$  отличается

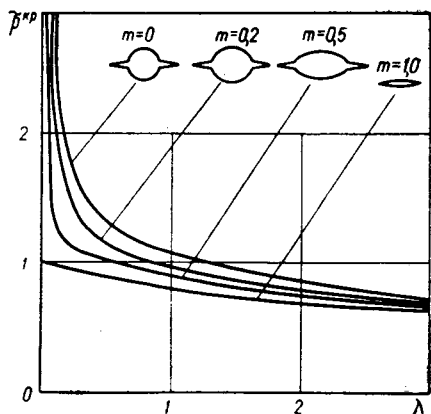


Рис. V.26.

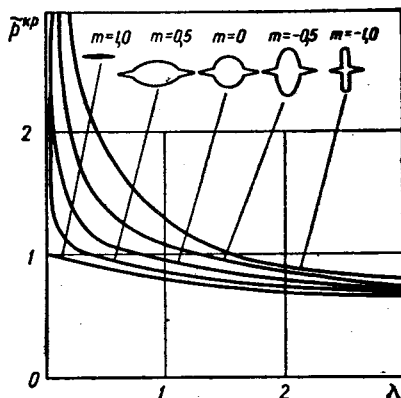


Рис. V.27.

от единицы на величину порядка 5%, причем с ростом  $\lambda$  это различие уменьшается. Таким образом, в данном случае, заменяя  $\tilde{\varphi}'(1)$  единицей, получаем простые приближенные формулы:

при  $k=1$

$$p_* = \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{a + \frac{l}{2}} \cdot \frac{\left[1 - \frac{m}{(1+l_0)^2}\right] \left[1 + \frac{m}{1+l_0}\right]}{\left[1 - \frac{1}{(1+l_0)^2}\right] \left[1 + \frac{1}{1+l_0}\right]}}; \quad (\text{V.235})$$

при  $k=2$

$$p_* = \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{a+l} \cdot \frac{1 - \frac{m^2}{(1+l_0)^4}}{1 - \frac{1}{(1+l_0)^4}}}. \quad (\text{V.236})$$

Из соотношений (V.233) и (V.234) при  $m=1$  (т. е. в случае прямолинейной изолированной трещины) получим известную формулу Гриффитса\*\*:

\* Как показано А. А. Каминским [1], при  $k=1$  кривые зависимости  $\tilde{p}_*$  от  $\lambda$  качественно соответствуют кривым, изображенным на рис. V.26 и V.27.

\*\* См. Griffith [1, 2].

$$p_* = \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{c}}, \quad (\text{V.237})$$

где

$$c = a + \frac{l}{2} \text{ при } k = 1 \text{ и } c = a + l \text{ при } k = 2.$$

Рассмотрен \* также предельный случай эллиптического отверстия при  $b > a$ , когда  $a \rightarrow 0$ , т. е. при  $m \rightarrow -1$ . При этом предполагается, что берега вертикальной щели, параллельные растягивающим усилиям  $p$ , не соприкасаются друг с другом.

Критическая нагрузка для крестообразной трещины, получаемой в пределе из эллиптического отверстия и двух горизонтальных трещин, выходящих на контур отверстия при  $m \rightarrow -1$ , отличается от критической нагрузки (V.237) для прямолинейной трещины на величину порядка 10%, что свидетельствует о незначительном влиянии вертикальной щели на развитие горизонтальной трещины.

Исследования, проведенные с помощью ЭЦВМ, показали, что при трещинах большой длины для получения необходимой точности (порядка 5%) результатов требовалось удерживать сравнительно небольшое количество членов в отображающей функции (V.218); с уменьшением длины трещины для получения той же точности требуется удерживать в отображающей функции (V.218) значительно большее число членов — двадцать четыре и тридцать четыре. Как показывают подсчеты, увеличение числа членов в отображающей функции (V.218) на десять приводит к сравнительно малым отклонениям в величине критической нагрузки.

**Круговое отверстие \*\*.** Если в соотношениях (V.233) и (V.234) положить  $m=0$ , получим критическую нагрузку для кругового отверстия радиуса  $R$ . В случае всестороннего растяжения из (V.233) и (V.234) при  $m=0$  получим для всех значений  $\lambda$  простые формулы \*\*\*:

при  $k=1$

$$p_* = \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{R + \frac{l}{2}} \cdot \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2\right] \left[1 + \frac{1}{1+\lambda}\right]}}; \quad (\text{V.238})$$

при  $k=2$

$$p_* = \frac{K}{\pi} \sqrt{\frac{2}{R+l} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^4}}. \quad (\text{V.239})$$

Формулы (V.238) и (V.239) и кривые зависимости  $\tilde{p}$  от  $\lambda$  (см. рис. V.26 и V.27), полученные А. А. Каминским [1], хорошо согласуются с

\* См. А. А. Каминский [1, 2], И. Ю. Бабич, А. А. Каминский [1].

\*\* В работах Н. Ф. Виесклер [1], П. М. Витвицкого и М. Я. Леонова [1] другими методами исследуются задачи о развитии трещин возле кругового отверстия в постановке, отличной от приведенной. В § 5 гл. VIII изложено решение П. М. Витвицкого и М. Я. Леонова.

\*\*\* См. А. А. Каминский [1].

Влияние локального поля напряжений возле отверстия на развитие трещин. В предельном случае при  $\lambda \rightarrow 0$

$$\frac{(\rho_*)^{**}}{(\rho_*)^*} \rightarrow \frac{k^{**}}{k^*},$$

где двумя звездочками обозначен случай одноосного растяжения, одной — всестороннего растяжения, а  $k^{**}$  и  $k^*$  — соответственно коэффициенты концентрации напряжений на контуре отверстия в местах пересечения контура отверстия осью  $Ox$ . Этот факт свидетельствует о значительном влиянии локального поля напряжений на развитие малых трещин.

Как следует из § 2 гл. II, щель, совпадающая с направлением растягивающих усилий  $p$ , не оказывает влияния на напряженное состояние плоскости. Отсюда вытекает следствие \*, что

$$\frac{(\rho_*)^{**}}{(\rho_*)^*} = 1.$$

Подсчеты показывают, что во всех рассмотренных случаях с ростом длины трещины

$$\frac{(\rho_*)^{**}}{(\rho_*)^*} \rightarrow 1;$$

в случае кругового отверстия с трещинами уже при  $l > R$  поле напряжений около отверстия практически мало (порядка 5%) влияет на величину критической нагрузки:

$\lambda$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,0	2,0	3,0	4,0
$\frac{(\rho_*)^{**}}{(\rho_*)^*}$	1,3936	1,2543	1,1721	1,1214	1,0885	1,0766	1,0237	1,0100	1,0053

В случае эллиптического отверстия зона влияния отверстия на развитие трещины уменьшается, когда  $m \rightarrow 1$ , т. е. когда эллипс превращается в горизонтальную щель.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Гриффитс И. Ю., Каминский А. А. [1] О критических нагрузках, вызывающих развитие трещины возле эллиптического отверстия.— Прикл. мех., 1965, 1, 9.  
 Гриффитс Г. И. [1] О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении.— Прикл. мат. и мех., 1959, 3—5.  
 [2] Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении.— ПМТФ, 1961, 4.

\* См. Griffith [1].

- Витвицкий П. М., Леонов М. Я. [1] Крикке руйнування пластинки з круговим отвором.— ДАН УРСР, 1962, 2.  
[2] Растяжение за пределами упругости пластинки с круговым отверстием.— ПМТФ, 1962, 1.  
[3] Полосы скольжения при неоднородной деформации пластинки.— В кн.: Вопросы механики реального твердого тела, 1. Изд. АН УССР, К., 1962.
- Белоносов С. М. [1] Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
- Ворович И. И., Космодамианский А. С. [1]. Упругое равновесие изотропной пластинки, ослабленной бесконечным рядом одинаковых отверстий.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1959, 4.
- Галин Л. А. [1] Плоская упруго-пластическая задача.— Прикл. мат. и мех., 1946, 10, 3.  
Гельфанд А. О. [1] Исчисление конечных разностей. Гостехиздат, М., 1952.
- Джанелидзе Г. Ю. [1]. Концентрация напряжений на краю кругового отверстия в равномерно напряженном поле при пластической деформации.— В кн.: Труды ЛПИ, 3, 1947.
- Загубиженко П. А. [1] Про напруження в анізотропній площині, ослабленій прямолінійними щілинами.— ДАН УРСР, 1954, 6.
- Ивлев Д. Д. [1]. Приближенное решение упруго-пластических задач теории идеальной пластичности.— ДАН СССР, 1957, 113, 2.  
[2] Приближенное решение методом малого параметра плоских упруго-пластических задач теории идеальной пластичности.— Вести МГУ, 1957, 5.  
[3] Об определении перемещений в задаче Л. А. Галина.— ПММ, 1957, 21, 5.  
[4] К определению перемещений в задаче Л. А. Галина.— ПММ, 1959, 23, 5.
- Ишлинский А. Ю. [1]. Плоская деформация при наличии линейного упрочнения.— ПММ, 1941, 5, 1.
- Каминский А. А. [1] О критических нагрузках, вызывающих начало развития трещин возле отверстия.— МТТ, 1966, 4.  
[2] О критических нагрузках для областей, ослабленных отверстиями с трещинами.— В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.  
[3] Развитие трещины разрушения, выходящей на поверхность цилиндрической полости.— В кн.: Пробл. мех. горн. пород. Изд-во КазССР, Алма-Ата, 1966.  
[4] Определение критических нагрузок, вызывающих развитие расширенных трещин.— Прикл. мех., 1966, 2, 11.
- Качанов Л. М. [1] Основы теории пластичности. ГИТТЛ, М., 1956.
- Керимов Р. Ю. [1] Развитие пластических зон возле кругового отверстия при одноосном растяжении пластинки.— Прикл. мех., 1965, 1, 9.
- Керимов Р. Ю., Хорошун Л. П. [1] Упруго-пластическое напряженное состояние пластинки с отверстием.— Изв. АН АзССР, физ.-тех. и мат., 1965, 3.
- Космодамианский А. С. [1] Упруго-пластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых выработок.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1961, 4.
- Кошелев П. Ф., Ужик Г. В. [1] Исследование пластичности деформации в местах концентрации напряжений методом травления.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1959, 1.
- Кузнецов А. И. [1] Плоская деформация неоднородных пластических тел.— Вестник ЛГУ, 1958, 13.
- Леонов М. Я., Витвицкий П. М., Ярема С. Я. [1] Полосы пластичности при растяжении пластин с трещиновидным концентратором.— ДАН СССР, 1963, 148, 3.
- Михлин С. Г. [1]. Теория пластичности. Изд-во АН СССР, М., 1934.  
[2] Интегральные уравнения. Гостехиздат, М., 1949.
- Мусхелишвили Н. И. [1] Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.  
[2] Сингулярные интегральные уравнения. ГТТИ, М.— Л., 1946.
- Надаи А. [1] Пластичность. ОНТИ, М.— Л., 1936, 158.  
[2] Пластичность и разрушение твердых тел. ИЛ, М., 1954.



- Парасюк О. С. [1] Упруго-пластическая задача с небигармоническим пластическим состоянием.— ДАН СССР, 1948, 63, 4.
- Перлин П. И. [1] Приближенный метод решения упруго-пластических задач.— В кн.: Инж. сб., 28. Изд-во АН СССР, М., 1960.  
[2] Упруго-пластическое распределение напряжений вокруг отверстий.— В кн.: Тр. Московск. физико-техн. ин-та, 5, 1960.
- Ржаницын А. Р. [1] Приближенное решение задач теории пластичности.— В кн.: Иссл. по вопросам строит. мех. и теории пластичн. Стройиздат, М., 1956.
- Розовский М. И. [1] Об уравнениях плоской деформации при линейном упрочнении с временными интегральными операторами.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1960, 5.
- Рыбакина О. Г. [1] Растяжение полосы с отверстием при больших пластических деформациях.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1963, 4.
- Савин Г. Н. [1] Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М.— Л., 1951.
- Савин Г. Н., Парасюк О. С. [1] Влияние неоднородного напряженного поля на пластичную зону біля отвору.— ДАН УРСР, 1948, 3.  
[2] Пластические зоны возле отверстия в неоднородно напряженном плоском поле.— Уч. зап. Львовск. ун-та, сер. физ.-мат., 1949, 12, 3.
- Сажин В. С. [1] Упруго-пластическое распределение напряжений вокруг отверстия, близкого к квадрату.— Инж. журн., 1964, 4, 2.  
[2] К вопросу о разработке инженерной теории горного давления. Упруго-пластическое распределение напряжений вокруг выработок квадратной, овальной и сводчатой форм.— В кн.: Вопросы горного давления. Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1964.  
[3] Упруго-пластическая задача для бесконечной плоскости с квадратным отверстием.— Прикл. мех., 1965, 1, 1.
- Соколов А. П. [1] Об упруго-пластическом состоянии пластинки.— ДАН СССР, 1948, 10, 1.  
[2] К задаче о деформации упруго-пластического тела.— В кн.: Тр. Московск. энерг. ин-та, 32, 1959.
- Соколовский В. В. [1] Теория пластичности. ГИТТЛ, М., 1950.
- Солодилов Ю. И. [1] Упруго-пластическое распределение напряжений в пластине с овальным отверстием.— Инж. журн., 1961, 1, 4.
- Фаерберг И. И. [1] Растяжение пластинки с круговым отверстием за пределом упругости.— В кн.: Труды ЦАГИ, № 615, 1947.
- Фомин В. Л. [1] Упруго-пластическое равновесие плоскости с круговым вырезом при наличии стационарного температурного поля.— Уч. зап. ЛГУ, 1960, 280, 35.  
[2] Некоторые задачи о термических напряжениях и упруго-пластических средах. Автореферат. канд. диссерт., ЛГУ, 1963.
- Хома И. Ю. [1] Пластичні зони біля кругового отвору в плоскому нерівномірно напруженому полі при врахуванні нормальних і дотичних зусиль.— Прикл. мех., 1963, 9, 2.  
[2] Упруго-пластическая задача о напряжениях возле кругового отверстия.— Прикл. мех., 1967, 3, 2.
- Хилл Р. [1] Математическая теория пластичности. ГТИ, М., 1956.
- Черепанов Г. П. [1] Обратная упруго-пластическая задача в условиях плоской деформации.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1963, 1.  
[2] Об одном методе решения упруго-пластической задачи.— Прикл. мех. и мат., 1963, 27, 3.  
[3] Некоторые задачи теории упругости и пластичности с неизвестной границей.— В кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды. 1. «Наука», М., 1965.
- Шевченко К. Н. [1] Осесимметричная упруго-пластическая задача для пластинки, ослабленной круговым вырезом.— Прикл. мат. и мех., 1951, 15, 4.
- Bowie O. L. [1] Analysis of an infinite plate containing radial cracks, originating at the boundary of an internal hole.— J. Math. and Phys., 1956, 25.
- Budiansky B., Mangasarian O. L. [1] Plastic stress concentration at a circular hole in an infinite sheet subjected to equal biaxial tension, Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, N APMW-16, 1959.

- Budiansky B., Vidensek R. I. [1] Analysis of stresses in the plastic range around a circular hole in a plate subjected to uniaxial tension, Nat. Advis. Comm. Aeronaut, Techn. Notes, N 3542, 1955.
- Bueckner H. F. [1] Some stress singularities and their computation by means of integral equations in «Boundary problems in differential equations». Univ. Wisconsin Press, 1960.
- Griffith A. A. [1] The phenomenon of rupture and flow of solids.—Trans. Rog. Soc., A. 221, 1920.  
[2] The theory of rupture, Proc. First Intern. Congr. Appl. Mech., Delft, 1924.
- Dugdale D. S. [1] Yielding of steel sheets containing slits.—J. of the mechanics and phys. of solids, 1960, 8, 2.
- Duffing G. [1] Forschung auf dem Gebiet des Ingeniernesens, 1931, 2, 3.
- Durelli A. J., Sciammarella C. A. [1] Elastoplastic stress and strain distribution in a finite plate with a circular hole subjected to unidimensional load., Paper Amer. Soc. Mech. Engrs. N WA—152, 1962.
- Koiter W. T. [1] On partially plastic thick-walled tubes, Dizenno Ann. Vola, Haarlem, 1953.
- Marcelos E. G. [1] Elastic-plastic strain and stress distribution of a plate containing a circular hole under uniaxial tension.—Ann. techn., 1964, 41, 4.
- Tuba I. S. [1] Elastic-plastic stress and strain concentration factors at a circular hole in a uniformly stressed infinite plate.—Trans. ASME, 32, 3, 1965.  
[2] Elastic-plastic stress and strain concentration. Doct. diss. Univ. Pittsburgh, 1964.
- Panc V. [1] Some problems of plane stress concentration for elastic-plastic materials Proc. 2-nd Conf. Dimens and Strength Calculat., Budapest. 1961, Budapest, 1965.

# ВЛИЯНИЕ НЕСИММЕТРИЧНОСТИ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЙ

## § 1. Общие замечания

Классическая теория упругости довольно хорошо объясняет поведение реальных твердых тел, находящихся под различной нагрузкой, во всех случаях, когда «зернистость» строения рассматриваемых тел не является для этих явлений характерной. Однако классическая теория упругости не в состоянии удовлетворительно объяснить некоторые явления, которые мы можем наблюдать в реальных упругих телах. В частности, с точки зрения теоретических решений задач классической теории упругости не удастся объяснить и предсказать законы распространения коротких акустических волн в кристаллических твердых телах, поликристаллических металлах и высоких полимерах.

Классическая теория упругости не объясняет также влияния градиента напряжений на усталостные характеристики поликристаллических материалов.

Причину указанных выше несогласованностей, очевидно, следует прежде всего искать в том, что сплошная модель твердого тела, лежащая в основе классической теории упругости, не в состоянии отобразить те упругие свойства реальных тел, которые определяются их дискретной структурой.

Для объяснения этих явлений, очевидно, нужна новая модель твердого тела механики сплошной среды, в которой свойства, вытекающие из дискретной структуры реальных тел, были бы явно стражены.

Рассмотрим один из возможных подходов к построению такой модели.

Итак, допустим, что в сплошной упругой среде малые перемещения материальных точек определяются двумя векторными полями:

$$\vec{u} = \vec{u}(x, y, z),$$

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}(x, y, z).$$

(VI. 1)

Первый вектор  $\vec{u}$  характеризует малые перемещения, а второй вектор  $\vec{\omega}$  — малые повороты. Вектор  $\vec{\omega}$ , вообще говоря, может быть взят кинематически независимым от вектора  $\vec{u}$ .

Напряженное состояние в каждой точке этой сплошной среды по какой-либо площадке, характеризуемой нормалью  $\vec{n}$ , будем определять векторами обычных  $\vec{\tau}^{(n)}$  и моментных  $\vec{\mu}^{(n)}$  напряжений. Массовые силы этой среды также будут двух видов: обычные  $\vec{F}$  и моментные  $\vec{M}$ .

Из теории сплошной среды известно, что вектор  $\vec{u}$  определяет одновременно как деформацию

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{VI. 2})$$

бесконечно малой окрестности рассматриваемой точки сплошной среды, так и вращение (как жесткого целого)

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \quad (\text{IV. 3})$$

рассматриваемой окрестности точки сплошной среды.

Если к этой модели приложить внешние усилия или сообщить поверхностным точкам ее соответствующие перемещения, то в ней при соответствующих условиях возникает напряженное состояние, характеризующееся несимметричным тензором напряжений, т. е. возникнут напряжения, для которых не будет выполняться закон парности касательных напряжений.

В 1887 г. W. Voigt [1] впервые рассмотрел модель среды с вращательным взаимодействием ее частиц при изучении упругих свойств кристаллов.

Первая попытка построения теории упругости с несимметричным тензором напряжений принадлежит (1909 г.) E. et F. Cosserat [1]. В основу этой ветви теории упругости ими была положена указанная выше модель сплошной упругой среды с вращательным взаимодействием частиц.

При описании перемещений частиц новой модели сплошной среды нет единой точки зрения.

В работах Э. Л. Аэро и Е. В. Кувшинского [1, 2], Р. Д. Миндлина и Г. Ф. Тирстена [1], Ю. Н. Немиша [1—4], Хартренфта и Си [1], Хоппмена и Шоуэна [1], Вейтцмана [1], В. Т. Койтера [1] и М. Mişicu [1—3] сохраняется концепция классической теории упругости, т. е.

считается, что перемещения  $\vec{u}$  точек этой среды и их жесткие малые вращения  $\vec{\omega}$  полностью описываются вектором  $\vec{u}(x, y, z)$  при  $\vec{\omega} = 1/2 \text{rot } \vec{u}$ . Будем называть этот вариант теории упругости с несимметричным тензором напряжения **первым** вариантом.

В работах В. А. Пальмова [1, 2], В. Новацкого [1] и Н. Neuber [1] для описания перемещений частиц рассматриваемой среды наряду с обычным полем перемещений  $\vec{u}(x, y, z)$  вводится кинематически независимое поле векторов  $\vec{\Phi}(x, y, z)$ , характеризующих малые вращения частиц среды. Этот вариант моментной теории упругости будем называть **вторым** вариантом.

Легко видеть, что во втором варианте этой теории общий поворот частиц среды будет состоять из суммы двух независимых друг от друга слагаемых: поворота  $\vec{\omega} = 1/2 \text{rot } \vec{u}$ , даваемого вектором  $\vec{u}$ , и поворота,

даваемого вектором  $\vec{\Phi}$ . Естественно, что эти варианты, т. е. различные допущения о природе деформации новой модели сплошной среды, приводят к разному числу упругих ее констант. Так, для идеально изотропной среды в первом варианте моментной теории упругости упругое поведение новой модели характеризуется четырьмя упругими константами:  $E$ ,  $\nu$ ,  $l$  и  $\eta$ , из которых  $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $l$  и  $\eta$  — новые постоянные материала ( $l$  имеет размерность длины, а  $\eta$  — безразмерная постоянная типа коэффициента Пуассона). Во втором варианте упругое поведение новой изотропной модели характеризуется шестью упругими константами:  $E$ ,  $\nu$ ,  $l$ ,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$ , из которых  $E$  и  $\nu$  — соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $l$  — новая постоянная, имеющая размерность длины,  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  и  $\eta_3$  — новые безразмерные постоянные. Упругое поведение новой анизотропной (в самом общем случае анизотропии) модели моментной теории упругости во втором варианте будет характеризоваться \* 171 упругой постоянной \*\*.

Ниже рассмотрим плоскую задачу теории упругости с несимметричным тензором напряжений, предполагая, что деформация среды

полностью характеризуется вектором перемещений  $\vec{u}$ , а вектор  $\vec{\omega}$ , определяющий «жесткое» вращение частиц этой среды, выражается формулой (VI.3). Среду будем считать идеально упругой и изотропной.

Наиболее существенные поправки к решениям задач классической теории упругости следует ожидать для тех случаев, когда напряженное состояние имеет наибольший градиент напряжений. Таким классом задач будут, в частности, задачи о концентрации напряжений возле отверстий.

Известно, что выбором соответствующей формы отверстия и ориентации его по отношению к внешним усилиям можно получить возле отверстия большой градиент напряжений. Поэтому представляет большой интерес исследовать влияние несимметричности тензора напряжений на концентрацию напряжений около отверстий.

Результаты, полученные в этой главе для плоской задачи применительно к первому варианту моментной теории, будут справедливы \*\*\* и для несимметричной теории упругости во втором ее варианте, так как основные уравнения для плоской задачи, в частности, для плоской деформации, в этих вариантах, как показал В. А. Пальмов [1, 2], совпадают с точностью до постоянных коэффициентов.

\* См. Н. Neuber [1].

\*\* В классической теории упругости общий случай анизотропии среды требует знания 21 упругой постоянной.

\*\*\* См. Г. Н. Савин [2].

## § 2. Плоская задача моментной теории упругости изотропной среды

**Основные уравнения и соотношения.** Плоская задача моментной теории упругости при отсутствии объемных сил и моментов сводится к интегрированию системы уравнений равновесия\* в напряжениях и моментных напряжениях

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \mu_x}{\partial x} + \frac{\partial \mu_y}{\partial y} + \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0 \quad (\tau_{xy} \neq \tau_{yx}) \end{aligned} \quad (\text{VI.4})$$

и условий совместности

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yx}), \\ \frac{\partial \mu_x}{\partial y} = \frac{\partial \mu_y}{\partial x}, \\ \mu_x = l^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) - 2 \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \right\}, \\ \mu_y = l^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] - \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{VI.5})$$

при соответствующих граничных условиях.

В случае плоской деформации для изотропной упругой среды соотношения упругости имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_x + \sigma_y)], \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1+\nu}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_y)], \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{1+\nu}{2E} (\tau_{xy} + \tau_{yx}), \\ \sigma_z = \nu (\sigma_x + \sigma_y), \end{aligned} \quad (\text{VI.6})$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.

Следя общей тенденции линейной теории упругости, допустим, что кривизны  $\kappa_x$  и  $\kappa_y$  волокон прямо пропорциональны моментным напряжениям  $\mu_x$  и  $\mu_y$ , т. е.

$$\kappa_x = \frac{\mu_x}{4\eta}, \quad \kappa_y = \frac{\mu_y}{4\eta}, \quad (\text{VI.7})$$

где  $\eta$  — новая константа материала (изгибно-крутильный модуль).

\* См. Р. Д. Миндлин [1].

Связь между напряжениями  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$  и моментными напряжениями  $\mu_x$  и  $\mu_y$  осуществляется при помощи соотношений\*

$$\begin{aligned}\mu_x &= l^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) - 2 \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \right\}, \\ \mu_y &= l^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] - \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \right\};\end{aligned}\quad (VI. 8)$$

при этом

$$l^2 = \frac{2(1+\nu)\eta}{E} = \frac{\eta}{G}. \quad (VI. 9)$$

Из формул (VI.7) и (VI.8) легко видеть, что изгибно-крутильный модуль  $\eta$  имеет размерность силы, а ввиду того что модуль сдвига  $G$  имеет размерность силы, деленной на квадрат длины, то постоянная  $l$  имеет размерность длины, которую можно вместо постоянной  $\eta$  принять в качестве новой константы материала.

**Функции напряжений.** Если функции напряжений  $U$  и  $F$  ввести соотношениями\*\*

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, & \sigma_y &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, & \tau_{yx} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \\ \mu_x &= \frac{\partial F}{\partial x}, & \mu_y &= \frac{\partial F}{\partial y},\end{aligned}\quad (VI. 10)$$

то при отсутствии сил и объемных моментов плоская задача моментной теории упругости сводится к решению уравнений

$$\begin{aligned}\nabla^2 \nabla^2 U &= 0, \\ \nabla^2 (F - l^2 \nabla^2 F) &= 0\end{aligned}\quad (VI. 11)$$

при определенных граничных условиях.

Функции напряжений  $U$  и  $F$  независимы; они связаны между собой условиями

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} (F - l^2 \nabla^2 F) &= -2(1-\nu) l^2 \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 U, \\ \frac{\partial}{\partial y} (F - l^2 \nabla^2 F) &= 2(1-\nu) l^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 U,\end{aligned}\quad (VI. 12)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (VI. 13)$$

\* См. Н. Schaefer [1], Р. Д. Миндлин [1].

\*\* См. Н. Neuber [1], Р. Д. Миндлин [1].

Напряжения и моментные напряжения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$ ,  $\tau_{\theta r}$ ,  $\mu_r$  и  $\mu_\theta$  в полярных координатах  $(r, \theta)$  выражаются через соответствующие им величины  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yx}$ ,  $\mu_x$  и  $\mu_y$  в декартовых координатах:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - (\tau_{xy} + \tau_{yx}) \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cos^2 \theta - \tau_{yx} \sin^2 \theta, \\ \tau_{\theta r} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta - \tau_{xy} \sin^2 \theta + \tau_{yx} \cos^2 \theta, \\ \mu_r &= \mu_x \cos \theta + \mu_y \sin \theta, \\ \mu_\theta &= -\mu_x \sin \theta + \mu_y \cos \theta,\end{aligned}\tag{VI. 14}$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}.\tag{VI. 15}$$

Если соотношения (VI. 10) подставить в формулы (VI. 14) и учесть вид операторов

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta},\end{aligned}\tag{VI. 16}$$

то формулам (VI. 14) можно придать вид

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta}, \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta}, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \\ \tau_{\theta r} &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \\ \mu_r &= \frac{\partial F}{\partial r}, \quad \mu_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta}.\end{aligned}\tag{VI. 17}$$

В полярных координатах условия (VI. 12) будут иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} (F - l^2 \nabla^2 F) &= -2(1 - \nu) l^2 \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 U, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} (F - l^2 \nabla^2 F) &= 2(1 - \nu) l^2 r \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 U,\end{aligned}\tag{VI. 18}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.\tag{VI. 19}$$



**Основные граничные задачи статики упругого тела \***.

*Первая основная граничная задача.* Найти упругое равновесие тела, если заданы компоненты внешних усилий (напряжений  $X_n$ ,  $Y_n$  и моментных напряжений  $M_n$ ), действующих на поверхность  $S$  рассматриваемого тела.

Граничные условия в случае плоской задачи, т. е. на контуре  $L$ , имеют вид

$$\begin{aligned} X_n &= \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{yx} \cos(n, y), \\ Y_n &= \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y), \\ M_n &= \mu_x \cos(n, x) + \mu_y \cos(n, y). \end{aligned} \quad (\text{VI. 20})$$

Здесь  $\vec{n}$  — единичная нормаль к контуру  $L$  в рассматриваемой точке. Граничные условия (VI.20) легко выразить через функции напряжений  $U$  и  $F$ :

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial x} \right), \\ Y_n &= - \frac{d}{ds} \left( \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \right), \\ M_n &= \frac{\partial F}{\partial n}, \end{aligned} \quad (\text{VI. 21})$$

где принято во внимание, что

$$\cos(n, x) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n, y) = - \frac{dx}{ds}. \quad (\text{VI. 22})$$

*Вторая основная граничная задача.* Найти упругое равновесие тела, если на его поверхности  $S$  заданы компоненты вектора перемещения  $\vec{u}$  и составляющая вектора вращения  $\vec{\omega} = 1/2 \operatorname{rot} \vec{u}$ , лежащая в касательной плоскости к поверхности  $S$  в рассматриваемой ее точке.

Граничные условия на контуре  $L$  имеют вид

$$u = f_1(x, y), \quad v = f_2(x, y), \quad \omega_z = \omega = f_3(x, y), \quad (\text{VI. 23})$$

где  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  и  $f_3(x, y)$  — заданные функции на границе рассматриваемой области, т. е. по контуру  $L$ .

*Третья (смешанная) граничная задача.* Найти компоненты напряжений как функции координат по заданным внешним усилиям  $X_n$ ,  $Y_n$  и  $M_n$  на части поверхности  $S_1$  и заданным перемещениям и вращениям на остальной части поверхности  $S_2 = S - S_1$ . Для плоской задачи роль поверхности  $S$  будет играть контур  $L$ , ограничивающий данную область.

Итак, в случае смешанной плоской граничной задачи на части контура  $L_1$  крайевые условия имеют вид (VI.20), а на оставшейся части контура  $L_2 = L - L_1$  граничные условия имеют вид (VI.23).

\* См. Г. Н. Савин [2], § 3, п. 7.

### § 3. Применение теории функций комплексного переменного к решению граничных задач моментной теории упругости

Некоторые соотношения в комплексных переменных. Переходя в формулах (VI.17) к комплексным переменным  $z=x+iy$  и  $\bar{z}=x-iy$ , получим

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2 \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} - \operatorname{Re} \left( \frac{z}{z} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \operatorname{Im} \left( \frac{z}{z} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) \right], \\ \sigma_\theta &= 2 \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + \operatorname{Re} \left( \frac{z}{z} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) - \operatorname{Im} \left( \frac{z}{z} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) \right], \\ \tau_{r\theta} &= 2 \left[ -\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} + \operatorname{Re} \left( \frac{z}{z} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) + \operatorname{Im} \left( \frac{z}{z} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \right], \\ \tau_{\theta r} &= 2 \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial \bar{z}} + \operatorname{Re} \left( \frac{z}{z} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \right) + \operatorname{Im} \left( \frac{z}{z} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) \right], \\ \mu_r &= 2 \operatorname{Re} \left( \sqrt{\frac{z}{z}} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \right); \quad \mu_\theta = -2 \operatorname{Im} \left( \sqrt{\frac{z}{z}} \cdot \frac{\partial F}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (\text{VI. 24})$$

Возьмем общее решение второго уравнения системы (VI. 11) в виде

$$iF = f(z) - \overline{f(z)} + i\Omega, \quad (\text{VI. 25})$$

где  $f(z)$  — некоторая гармоническая функция, а  $\Omega$  — решение уравнения

$$\Omega - l^2 \nabla^2 \Omega = 0. \quad (\text{VI. 26})$$

Бигармоническую функцию можно представить по формуле Э. Гурса

$$U = \operatorname{Re} [\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)], \quad (\text{VI. 27})$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\chi(z)$  — функции, голоморфные в односвязной области.

Подставляя выражения (VI. 25) и (VI. 26) в условия (VI. 18), получаем

$$f(z) = 4(1-\nu)l^2\varphi'(z). \quad (\text{VI. 28})$$

Если функции (VI. 25) и (VI. 27) подставить в (VI. 24) и принять во внимание условие (VI. 28), то после некоторых преобразований получим формулы для компонентов напряжений\*:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \operatorname{Re} [2\Phi(z) - H(z, \bar{z})], \\ \sigma_\theta &= \operatorname{Re} [2\Phi(z) + H(z, \bar{z})], \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{2} \nabla^2 \Omega + \operatorname{Im} H(z, \bar{z}),\end{aligned}\quad (\text{VI. 29})$$

\* См. Ю. Н. Немиш [1].

$$\tau_{\theta r} = \frac{1}{2} \nabla^2 \Omega + \operatorname{Im} H(z, \bar{z}),$$

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} + \frac{i}{2l^2} \Omega - H(z, \bar{z}),$$

$$\mu_r = \operatorname{Re} L(z, \bar{z}), \quad \mu_\theta = -\operatorname{Im} L(z, \bar{z}),$$

где

$$H(z, \bar{z}) = \frac{z}{2} \left[ \bar{z} \Phi'(z) + 8(1-\nu) l^2 \Phi''(z) + \Psi(z) + 2i \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right],$$

$$L(z, \bar{z}) = 2 \sqrt{\frac{z}{2}} \left[ -4i(1-\nu) l^2 \Phi'(z) + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right], \quad (\text{VI. 30})$$

$$\Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z), \quad \psi(z) = \chi'(z).$$

Из (VI. 29) легко находим

$$\sigma_\theta + \sigma_r = 4 \operatorname{Re} \{\Phi(z)\}, \quad \tau_{\theta r} - \tau_{r\theta} = \frac{1}{l^2} \Omega,$$

$$\begin{aligned} & \sigma_\theta - \sigma_r + i(\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}) = \\ & = 2e^{2i\theta} \left[ \bar{z} \Phi'(z) + 8(1-\nu) l^2 \Phi''(z) + \Psi(z) + 2i \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{VI. 31})$$

$$\mu_r - i\mu_\theta = 2e^{i\theta} \left[ -4i(1-\nu) l^2 \Phi'(z) + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right].$$

Из уравнений упругости (VI. 6), приняв во внимание представления функций (VI. 27) и (VI. 28), найдем

$$\begin{aligned} 2\mu(u+iv) = (3-4\nu)\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - 8(1-\nu)l^2\overline{\varphi''(z)} - \\ - \overline{\psi(z)} + 2i\frac{\partial\Omega}{\partial z}. \end{aligned} \quad (\text{VI. 32})$$

Представляя вращение в виде

$$\omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2i} \left[ \frac{\partial(u+iv)}{\partial z} - \frac{\partial(u-iv)}{\partial \bar{z}} \right] \quad (\text{VI. 33})$$

и подставляя сюда значения  $u+iv$  и  $u-iv$  из (VI. 32), получаем

$$4\eta\omega = \Omega - 4i(1-\nu)l^2[\varphi'(z) - \overline{\varphi'(\bar{z})}]. \quad (\text{VI. 34})$$

Граничные условия (VI. 20), (VI. 21) и (VI. 23) основных задач моментной теории упругости можно представить в таком виде: для первой основной задачи

$$\begin{aligned} \Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})} + \frac{i}{2l^2} \Omega - e^{2i\theta} \left[ \bar{z} \Phi'(z) + 8(1-\nu) l^2 \Phi''(z) + \Psi(z) + \right. \\ \left. + 2i \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right] = N - iT, \end{aligned} \quad (\text{VI. 35})$$

$$\operatorname{Re} \left\{ e^{i\theta} \left[ -4i(1-\nu) l^2 \Phi'(z) + \frac{\partial \Omega}{\partial z} \right] \right\} = M;$$

для второй основной задачи

$$(3 - 4\nu)\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - 8(1 - \nu)l^2\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi(z)} + 2i\frac{\partial\Omega}{\partial z} = 2\mu(q_1 + iq_2),$$

$$\Omega + 8(1 - \nu)l^2\text{Im}[\varphi'(z)] = 4\eta q_3, \quad (\text{VI. 36})$$

где  $M, N, T, q_1, q_2, q_3$  — заданные функции на границе  $L$  рассматриваемой области.

При решении конкретных задач комплексные потенциалы  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  будем брать в том же общем виде\*, что и для соответствующих задач классической теории упругости.

Полное решение уравнения Гельмгольца (VI.26) имеет вид\*\*

$$\Omega = c_0 K_0(r/l) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) K_n(r/l) +$$

$$+ h_0 I_0(r/l) + \sum_{n=1}^{\infty} (h_n \cos n\theta + t_n \sin n\theta) I_n(r/l). \quad (\text{VI. 37})$$

Здесь  $I_n(r/l)$  ( $n=0, 1, \dots$ ) — модифицированные функции Бесселя I рода;  $K_n(r/l)$  — модифицированные функции Бесселя II рода (функции Макдональда).

При решении конкретных задач о концентрации напряжений для бесконечных областей с отверстиями в уравнении (VI.37) необходимо сохранить лишь первую его часть, так как функции  $I_n(r/l)$  при  $r \rightarrow \infty$  неограниченно возрастают. Аналогично при рассмотрении конечных областей, содержащих точку  $r=0$  при решении задачи о концентрации напряжений, следует удерживать в уравнении (VI.37) только вторую его часть.

**Постановка задачи о концентрации напряжений около отверстий.** Будем рассматривать упругую изотропную плоскость (плоская деформация) или тонкую пластинку (плоское напряженное состояние), где при соответствующих условиях может возникнуть\*\*\* напряженное состояние, характеризующееся несимметричным тензором напряжений.

Допустим, что в упругой плоскости, находящейся в ненапряженном состоянии, характеризуемом компонентами

$$\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0, \tau_{yx}^0, \mu_x^0, \mu_y^0, \quad (\text{VI. 38})$$

сделано отверстие произвольной формы, контур которого не имеет угловых точек. Отверстие внесет, вообще говоря, некоторые перераспределения напряжений в этой плоскости, особенно в области, непосредственно

\* См. Н. И. Мусхелишвили [1], Г. Н. Савин [1].

\*\* См. Г. Н. Ватсон [1].

\*\*\* Как видно из соотношений (VI.8), не при всяком напряженном состоянии моментные напряжения  $\mu_x$  и  $\mu_y$  будут отличны от нуля.

примыкающей к отверстию, и вместо напряженного состояния (VI.38) будем иметь новое распределение напряжений:

$$\sigma_x^*, \sigma_y^*, \tau_{xy}^*, \tau_{yx}^*, \mu_x^*, \mu_y^*. \quad (\text{VI. 39})$$

В силу линейности задачи напряженное состояние (VI.39) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x^* &= \sigma_x^0 + \sigma_x, & \sigma_y^* &= \sigma_y^0 + \sigma_y, \\ \tau_{xy}^* &= \tau_{xy}^0 + \tau_{xy}, & \tau_{yx}^* &= \tau_{yx}^0 + \tau_{yx}, \\ \mu_x^* &= \mu_x^0 + \mu_x, & \mu_y^* &= \mu_y^0 + \mu_y, \end{aligned} \quad (\text{VI. 40})$$

где

$$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{yx}, \mu_x, \mu_y — \quad (\text{VI. 41})$$

компоненты дополнительного напряженного состояния, возникшего вследствие наличия отверстия.

Основному напряженному состоянию (VI.38), а также напряженным состояниям (VI.39) и (VI.41), как следует из (VI.11), будут соответствовать по две функции напряжений:  $U^0(x, y)$  и  $F^0(x, y)$ ;  $U^*(x, y)$  и  $F^*(x, y)$ ;  $U(x, y)$  и  $F(x, y)$ , которые в силу (VI.40) будут связаны между собой соотношениями

$$U^*(x, y) = U^0(x, y) + U(x, y), \quad F^*(x, y) = F^0(x, y) + F(x, y). \quad (\text{VI. 42})$$

Известно, что влияние отверстия на напряженное состояние в рассматриваемой области имеет местный характер, поэтому компоненты напряжений (VI.41) по мере удаления от отверстия будут быстро затухать. Отсюда, а также из (VI.40), (VI.42) и (VI.10) следует, что функции напряжений  $U(x, y)$  и  $F(x, y)$  в достаточно удаленных от отверстия точках плоскости должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \rightarrow 0; & \quad \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right)_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \rightarrow 0; & \quad \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right)_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \rightarrow 0; \\ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \rightarrow 0; & \quad \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (\text{VI. 43})$$

Условия (VI.43) и будут условиями на «бесконечности» для искомых функций  $U(x, y)$  и  $F(x, y)$ . Из (VI.10) также следует, что по заданным компонентам напряжений функция  $U(x, y)$  определяется с точностью до выражения вида  $C_1 x + C_2 y + C_3$ , а функция  $F(x, y)$  — с точностью до постоянного  $C_4$ , где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные (вещественные) постоянные.

В дальнейшем нас будет интересовать влияние несимметричности тензора напряжений на концентрацию напряжений около отверстий, т. е.

влияние моментных напряжений на величины коэффициентов концентрации

$$k_1 = \frac{\sigma_r^*}{\sigma_r^0}, \quad k_2 = \frac{\sigma_\theta^*}{\sigma_\theta^0}, \quad k_3 = \frac{\tau_{r\theta}^*}{\tau_{r\theta}^0}, \quad k_4 = \frac{\tau_{\theta r}^*}{\tau_{\theta r}^0}, \quad k_5 = \frac{\mu_r^*}{\mu_r^0}, \quad k_6 = \frac{\mu_\theta^*}{\mu_\theta^0}. \quad (\text{VI. 44})$$

На контуре отверстия, свободном от внешних усилий, очевидно,  $\sigma_r^* = \tau_{r\theta}^* = \mu_r^* = 0$ ; следовательно,  $k_1 = k_3 = k_5 = 0$  и отличными от нуля будут лишь коэффициенты  $k_2, k_4$  и  $k_6$ , из которых наибольший интерес для нас будет представлять коэффициент концентрации  $k_2$ .

Из формул (VI. 8) следует, что если основное напряженное состояние однородно, т. е.  $\sigma_x^0 = \text{const}$ ,  $\sigma_y^0 = \text{const}$ ,  $\tau_{xy}^0 = \text{const}$  и  $\tau_{yx}^0 = \text{const}$ , моментные напряжения будут отсутствовать, т. е.

$$\mu_x^0 = \mu_y^0 = 0, \quad (\text{VI. 45})$$

и

$$\tau_{xy}^0 = \tau_{yx}^0.$$

Если же основное напряженное состояние линейно зависит от координат  $x$  и  $y$ , то компоненты  $\mu_x^0$  и  $\mu_y^0$  будут постоянными величинами, т. е.

$$\mu_x^0 = \text{const}, \quad \mu_y^0 = \text{const}. \quad (\text{VI. 46})$$

Поскольку  $\mu_x = \frac{\partial F}{\partial x}$  и  $\mu_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ , то в случаях (VI. 45) и (VI. 46) будем иметь

$$\frac{\partial^2 F^0}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F^0}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F^0}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{VI. 47})$$

и, следовательно, функция напряжений  $F^0(x, y)$  в этих случаях будет иметь вид  $F^0(x, y) = C_1 x + C_2 y + C_3$ .

Из (VI.10) и (VI.47) следует, что для случая (VI.45) основное напряженное состояние (VI.38) будет характеризоваться лишь одной функцией напряжений  $U^0(x, y)$ . Указанное обстоятельство позволяет считать, что в этих случаях моментные напряжения  $\mu_x$  и  $\mu_y$ , возникшие в непосредственной близости отверстия, не изменяют качественно характера распределения напряжений около рассматриваемого отверстия по сравнению с аналогичной задачей классической теории упругости, а влияют лишь на размеры зоны возмущений около отверстия и величину коэффициентов концентрации напряжений в ней.

Интегрируя второе уравнение системы (VI.11), найдем

$$F - l^2 \nabla^2 F = Q(x, y), \quad (\text{VI. 48})$$

где

$$Q(x, y) = 2(1 - \nu) l^2 \left\{ \int \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 U) dy - \int \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 U) dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \iint \left[ \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\nabla^2 U) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\nabla^2 U) \right] dx dy \right\}. \quad (\text{VI. 49})$$

Из системы уравнений (VI.11) следует, что  $Q(x, y)$  — гармоническая функция, которая, являясь правой частью дифференциального уравнения (VI.48), одновременно представляет собой и частное решение этого уравнения.

#### § 4. Концентрация напряжений около кругового отверстия

**Решение первой основной задачи. Одноосное растяжение плоскости с круговым отверстием\*.** Рассмотрим напряженное состояние около кругового отверстия радиуса  $a_0$  (рис. VI.1). Остановимся на случае растяжения плоскости «на бесконечности» усилиями  $p = \text{const}$  вдоль оси  $Ox$ , т. е. примем

$$\sigma_x^0 = p, \quad \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = \tau_{yx}^0 = \mu_x^0 = \mu_y^0 = 0. \quad (\text{VI. 50})$$

Комплексные потенциалы Колосова—Мусхелишвили для этого случая, даваемые классической теорией упругости, имеют вид\*\*

$$\varphi^*(z) = \frac{p}{4} \left( z + \frac{2a_0^2}{z} \right), \quad \psi^*(z) = -\frac{p}{2} \left( z + \frac{a_0^2}{z} - \frac{a_0^4}{z^3} \right). \quad (\text{VI. 51})$$

Поскольку основное напряженное состояние (VI.50) удовлетворяет условию (VI.46), то, согласно отмеченному выше, комплексные потенциалы для поставленной задачи в моментной теории упругости возьмем в виде

$$\begin{aligned} \varphi^*(z) &= \frac{p}{4} z + \frac{C}{z}, \\ \psi^*(z) &= -\frac{p}{2} z + \frac{A}{z} - \frac{2B}{z^3}. \end{aligned} \quad (\text{VI. 52})$$

Первые слагаемые в (VI.52) характеризуют основное напряженное состояние (VI.50), а последующие — возмущенное напряженное состояние, возникшее вследствие наличия отверстия.

Из (VI.52) получаем

$$\chi^*(z) = \int \psi^*(z) dz + \text{const} = -\frac{p}{4} z^2 + A \ln z + \frac{B}{z^2} + \text{const}. \quad (\text{VI. 53})$$

Если функции  $\varphi^*(z)$  и  $\chi^*(z)$  известны, то по формуле Э. Гурса (VI. 27) находим

$$U^*(r, \theta) = \frac{pr^2}{4} (1 - \cos 2\theta) + A \ln r + \left( \frac{B}{r^2} + C \right) \cos 2\theta. \quad (\text{VI. 54})$$

\* См. Н. Г. Савин [2]. Эта задача впервые решена Р. Д. Миндлиным [1]; позднее, несколько иным путем, — Ю. Н. Немишем [1].

\*\* См. Н. И. Мусхелишвили [1].

В рассматриваемом случае слагаемые в формулах (VI.42) будут иметь вид

$$U^0(r, \theta) = \frac{pr^2}{4} (1 - \cos 2\theta),$$

$$U(r, \theta) = A \ln r + \left( \frac{B}{r^2} + C \right) \cos 2\theta. \quad (\text{VI.55})$$

Поскольку

$$\nabla^2 U^*(r, \theta) = p - \frac{4C}{r^2} \cos 2\theta, \quad (\text{VI.56})$$

из условий (VI.18) получаем

$$F - l^2 \nabla^2 F = 8C(1 - \nu) l^2 \frac{1}{r^2} \sin 2\theta. \quad (\text{VI.57})$$

Согласно отмеченному выше правая часть уравнения (VI.57) является гармонической функцией, следовательно

$$F_{\text{частн}}(r, \theta) = 8C(1 - \nu) l^2 \frac{1}{r^2} \sin 2\theta. \quad (\text{VI.58})$$

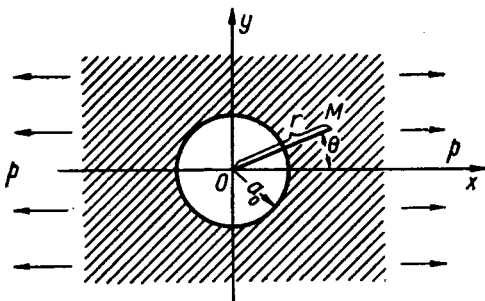


Рис. VI.1.

Полное решение уравнения (VI.57) можно представить в виде

$$F(r, \theta) = \Omega(r, \theta) + F_{\text{частн}}(r, \theta), \quad (\text{VI.59})$$

где  $\Omega$  — решение уравнения Гельмгольца (VI.26).

Вид частного решения (VI.58), а также общие рассуждения показывают, что решение уравнения (VI.26) следует искать в виде

$$\Omega(r, \theta) = R(r/l) \sin 2\theta. \quad (\text{VI.60})$$

Подставляя функцию (VI.60) в уравнение (VI.26) и учитывая, что из двух модифицированных функций  $I_2(r/l)$  и  $K_2(r/l)$  условиям «на бесконечности» удовлетворяет только последняя, получаем

$$R(r/l) = DK_2(r/l), \quad (\text{VI.61})$$

где  $D$  — вещественная постоянная.

Учитывая формулы (VI.59) — (VI.61), найдем \*

$$F^*(r, \theta) = F(r, \theta) = \left[ DK_2(r/l) + \frac{8C(1 - \nu) l^2}{r^2} \right] \sin 2\theta. \quad (\text{VI.62})$$

Итак, функции (VI.54) и (VI.62) определены с точностью до постоянных коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , которые должны быть опреде-

\* Напомним, что в рассматриваемом случае основного напряженного состояния (VI.50) функция  $F^0(r, \theta) \equiv 0$ .



лены из граничных условий (VI.20). Однако, если контур отверстия свободен от внешних усилий, вместо условий (VI.20) граничные условия удобнее брать в виде

$$\sigma_r^* = \tau_{r\theta}^* = \mu_r^* = 0. \quad (\text{VI.63})$$

Заметим, что если в формулах (VI.14) и (VI.17) компоненты напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \mu_y, \sigma_r, \sigma_\theta, \dots, \mu_\theta$  и функции напряжений  $U$  и  $F$  заменить соответственно значениями  $\sigma_x^*, \sigma_y^*, \dots, \mu_y^*; \sigma_r^*, \sigma_\theta^*, \dots, \mu_\theta^*$ ;  $U^*$  и  $F^*$ , получим необходимые соотношения для общего искомого напряженного состояния (VI.39). Если в полученные выражения вместо функций напряжений  $U^*(r, \theta)$  и  $F^*(r, \theta)$  ввести их значения из (VI.54) и (VI.62), а также принять во внимание рекуррентные соотношения\*

$$K_{m+1}(r/l) = \frac{2ml}{r} K_m(r/l) + K_{m-1}(r/l), \quad (\text{VI.64})$$

$$K'_m(r/l) = -\frac{m}{r} K_m(r/l) - \frac{1}{l} K_{m-1}(r/l) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

между тремя функциями  $K_{m-1}(r/l)$ ,  $K_m(r/l)$  и  $K_{m+1}(r/l)$ , найдем окончательно формулы для компонентов напряжений в полярных координатах для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned} \sigma_r^* &= \frac{p}{2} (1 + \cos 2\theta) + \frac{A}{r^2} - \left( \frac{4C}{r^2} + 6 \frac{B-\mathcal{E}}{r^4} \right) \cos 2\theta + \\ &+ \frac{2D}{lr} \left[ 3 \frac{l}{r} K_0(r/l) + \left( 1 + 6 \frac{l^2}{r^2} \right) K_1(r/l) \right] \cos 2\theta; \\ \sigma_\theta^* &= \frac{p}{2} (1 - \cos 2\theta) - \frac{A}{r^2} + 6 \frac{B-\mathcal{E}}{r^4} \cos 2\theta - \\ &- \frac{2D}{lr} \left[ 3 \frac{l}{r} K_0(r/l) + \left( 1 + 6 \frac{l^2}{r^2} \right) K_1(r/l) \right] \cos 2\theta; \\ \tau_{r\theta}^* &= - \left( \frac{p}{2} + 2 \frac{C}{r^2} + 6 \frac{B-\mathcal{E}}{r^4} \right) \sin 2\theta + \\ &+ \frac{D}{lr} \left[ 6 \frac{l}{r} K_0(r/l) + \left( 1 + 12 \frac{l^2}{r^2} \right) K_1(r/l) \right] \sin 2\theta; \\ \tau_{\theta r}^* &= - \left( \frac{p}{2} + 2 \frac{C}{r^2} + 6 \frac{B-\mathcal{E}}{r^4} \right) \sin 2\theta + \\ &+ \frac{D}{l^2} \left[ \left( 1 + 6 \frac{l^2}{r^2} \right) K_0(r/l) + \left( 3 \frac{l}{r} + 12 \frac{l^3}{r^3} \right) K_1(r/l) \right] \sin 2\theta; \end{aligned} \quad (\text{VI.65})$$

\* См. Г. Н. Ватсон [1].

$$\begin{aligned}\mu_r^* &= -\frac{2\mathcal{E}}{r^3} \sin 2\theta - \frac{D}{l} \left[ 2\frac{l}{r} K_0(r/l) + \left(1 + 4\frac{l^2}{r^2}\right) K_1(r/l) \right] \sin 2\theta; \\ \mu_\theta^* &= \frac{2\mathcal{E}}{r^3} \cos 2\theta + \frac{2D}{r} \left[ K_0(r/l) + 2\frac{l}{r} K_1(r/l) \right] \cos 2\theta,\end{aligned}\quad (\text{VI.66})$$

где для удобства введено обозначение

$$\mathcal{E} = \beta_1 C = 8(1-\nu)l^2 C.$$

Подставляя из (VI.65) выражения для  $\sigma_r^*$ ,  $\tau_{r\theta}^*$  и  $\mu_r^*$  при  $r = a_0$  в граничные условия (VI.63) и приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых синусах и косинусах, найдем систему уравнений

$$\frac{p}{2} + \frac{A}{a_0^2} = 0;$$

$$\frac{p}{2} - 4\frac{C}{a_0^2} - \frac{6}{a_0^4}(B - \mathcal{E}) + \frac{2D}{la_0} \left[ 3\frac{l}{a_0} K_0(a_0/l) + \left(1 + 6\frac{l^2}{a_0^2}\right) K_1(a_0/l) \right] = 0;$$

$$-\frac{p}{2} - 2\frac{C}{a_0^2} - \frac{6}{a_0^4}(B - \mathcal{E}) + \frac{D}{la_0} \left[ 6\frac{l}{a_0} K_0(a_0/l) + \left(1 + 12\frac{l^2}{a_0^2}\right) K_1(a_0/l) \right] = 0;$$

$$-2\frac{\mathcal{E}}{a_0^3} - \frac{D}{l} \left[ 2\frac{l}{a_0} K_0(a_0/l) + \left(1 + 4\frac{l^2}{a_0^2}\right) K_1(a_0/l) \right] = 0.\quad (\text{VI.67})$$

Решая систему (VI.67), находим

$$A = -\frac{pa_0^2}{2}; \quad B = -\frac{pa_0^4(1 - \mathcal{H}_1)}{4(1 + \mathcal{H}_1)};$$

$$C = \frac{pa_0^2}{2(1 + \mathcal{H}_1)}; \quad D = -\frac{pa_0 l \mathcal{H}_1}{(1 + \mathcal{H}_1) K_1(a_0/l)}; \quad (\text{VI.68})$$

$$\mathcal{E} = \frac{4(1-\nu)a_0^2 l^2 p}{1 + \mathcal{H}_1},$$

$$\mathcal{H}_1 = \frac{8(1-\nu)}{4 + \frac{a_0^2}{l^2} + 2\frac{a_0}{l} \frac{K_0(a_0/l)}{K_1(a_0/l)}}. \quad (\text{VI.69})$$

Ввиду того что

$$\lim_{\frac{a_0}{l} \rightarrow \infty} \frac{K_1(a_0/l)}{K_0(a_0/l)} = 1, \quad (\text{VI.70})$$

из (VI.65) легко получаем известное решение G. Kirsch.

Напряжения (VI.65) по контуру отверстия

$$\sigma_\theta^* = p \left( 1 - \frac{2 \cos 2\theta}{1 + \mathcal{H}_1} \right). \quad (\text{VI.71})$$

Максимальные значения  $\sigma_{\theta}^*$  будут (см. рис. VI.1) в точках  $\theta = \pm \pi/2$

$$(\sigma_{\theta}^*)_{\max} = p \frac{3 + \mathcal{H}_1}{1 + \mathcal{H}_1}. \quad (\text{VI.72})$$

Поскольку при заданном коэффициенте Пуассона  $\nu$  величина  $\mathcal{H}_1$  зависит от новой упругой постоянной материала  $l$  и величины радиуса отверстия  $a_0$ , то

$$(k_{\max})_{\max} = \frac{(\sigma_{\theta}^*)_{\max}}{p} = 3 \quad (\text{VI.73})$$

будет при  $l = 0$ , т. е. при  $\mathcal{H}_1 = 0$ .

Однако  $(\mathcal{H}_1)_{\min}$  будет достигаться \* при  $a_0/l = 3$ , т. е.

$$(\mathcal{H}_1)_{\min} = 0,44(1 - \nu), \quad (\text{VI.74})$$

и, следовательно,

$$(k_{\max})_{\min} = \frac{3,44 - 0,44\nu}{1,44 - 0,44\nu}. \quad (\text{VI.75})$$

Так как  $0 \leq \nu \leq 0,5$ , то

$$2,39 \leq (k_{\max})_{\min} \leq 2,64, \quad (\text{VI.76})$$

что значительно меньше  $k = 3$ , полученного по классической теории упругости.

Для выяснения влияния несимметричности тензора напряжений на величину возмущенной зоны возле отверстия подсчитаны значения напряжений  $\sigma_{\theta}^*$  и  $\sigma_r^*$  (VI.65) соответственно по сечениям  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 0$

$$(\sigma_{\theta}^*)_{\theta = \pi/2} = p - \frac{A}{r^2} - 6 \frac{B - \mathcal{G}}{r^4} + \frac{2D}{lr} \left[ 3 \frac{l}{r} K_0(r/l) + \left( 1 + 6 \frac{l^2}{r^2} \right) K_1(r/l) \right]; \quad (\text{VI.77})$$

$$(\sigma_r^*)_{\theta = 0} = p + \frac{A}{r^2} - 4 \frac{C}{r^2} - 6 \frac{B - \mathcal{G}}{r^4} + \frac{2D}{lr} \left[ 3 \frac{l}{r} K_0(r/l) + \left( 1 + 6 \frac{l^2}{r^2} \right) K_1(r/l) \right].$$

На рис. VI.2 сплошные кривые соответствуют значениям  $\sigma_{\theta}^*$  и  $\sigma_r^*$  (VI.77) при  $\nu = 0,25$ ,  $\frac{a_0}{l} = 3$  и  $a_0 = 30$  см, а штриховые — значениям  $\sigma_{\theta}$  и  $\sigma_r$  по тем же сечениям согласно классической теории упругости. Из этих графиков видно, что моментные напряжения при  $\frac{a_0}{l} = 3$  уменьшают возмущенную зону возле отверстия примерно в 1,3 раза.

*Чистый изгиб плоскости, ослабленной круговым отверстием \*\*.* Найдем упругое равновесие бесконечной плоскости, ослабленной свободным от внешних усилий круговым отверстием радиуса  $a_0$ , находящейся в поле чистого изгиба, усилиями  $py$  (рис. VI.3), т. е. «на бесконечности»

$$\sigma_x^0 = py, \quad \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = \tau_{yx}^0 = 0. \quad (\text{VI.78})$$

Из соотношений (VI.8)

$$\mu_x^0 = -2p(1 - \nu)l^2, \quad \mu_y^0 = 0. \quad (\text{VI.79})$$

\* Р. Д. Миндлин [1] указывает интервал изменения отношения  $\frac{a_0}{l}$ , равный  $3 \leq \frac{a_0}{l} < \infty$ .

\*\* Решение этой задачи впервые дано Ю. Н. Немишем [1].

Основному напряженному состоянию (VI.78) и (VI.79) соответствуют функции напряжений

$$U^0 = \frac{1}{6} p y^3, \quad F^0 = -2p(1-\nu)l^2 x. \quad (\text{VI.80})$$

Решение этой задачи можно было бы получить методом, изложенным выше, однако мы покажем и другой подход к решению подобных задач; при этом будем следовать указаниям, изложенным в монографии

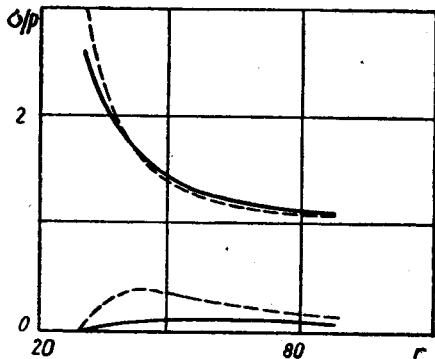


Рис. VI.2.

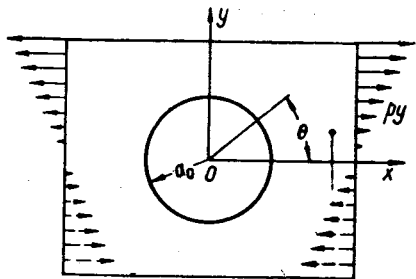


Рис. VI.3.

Н. И. Muskhelishvili [1]. Для этого воспользуемся граничными условиями (VI.35). Допустим, что заданные на контуре кругового отверстия функции  $M$  и  $N - iT$  разлагаются в сходящиеся комплексные ряды Фурье:

$$N - iT = \sum_{-\infty}^{\infty} A_n e^{in\theta}, \quad (\text{VI.81})$$

$$M = \sum_{-\infty}^{\infty} B_n e^{in\theta}, \quad B_n = \bar{B}_{-n}.$$

Поскольку по условию задачи контур отверстия свободен от внешних усилий, то в (VI.81) следует положить  $A_n = B_n = 0$  при всех  $n$ .

Согласно отмеченному выше (см. § 3) функции

$$\Phi(z) = -\frac{pi}{4}z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad \Psi(z) = \frac{pi}{4}z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n}, \quad (\text{VI.82})$$

где коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ), вообще говоря, — комплексные постоянные:

$$a_n = a'_n + ia''_n; \quad b_n = b'_n + ib''_n. \quad (\text{VI.83})$$

Решение уравнения Гельмгольца (VI.26) возьмем в виде

$$\Omega = c_0 K_0(r/l) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta) K_n(r/l), \quad (\text{VI.84})$$

где  $c_n, d_n$  — вещественные постоянные.

Подставляя теперь разложения (VI.81), (VI.82) и (VI.84) в граничные условия (VI.35) и учитывая рекуррентные соотношения (VI.64) для функций Макдональда, после приравнивания нулю коэффициентов при одинаковых синусах и косинусах получим систему уравнений, из которой находим

$$a_3^* = -\frac{\rho a_0^4 \mathcal{H}_2}{4(\mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3)}, \quad b_5^* = -\frac{\rho a_0^6 \left( \mathcal{H}_2 - \frac{1}{3} \mathcal{H}_3 \right)}{\mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3},$$

$$b_3^* = \frac{\rho a_0^4}{4} + 2\rho(1-\nu)l^2 a_0^2 \left( 1 + \frac{1}{\mathcal{H}_4} \right),$$

$$c_1 = -\frac{2\rho(1-\nu)l^2}{a_0 \mathcal{H}_4 K_1(a_0/l)}, \quad c_3 = \frac{6\rho(1-\nu)l^3}{(\mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3) K_2(a_0/l)}, \quad (\text{VI.85})$$

где

$$\mathcal{H}_2 = 1 + 3 \frac{l^2}{a_0^2} \frac{8 + \frac{a_0^2}{l^2} + 4 \frac{a_0}{l} \cdot \frac{K_0(a_0/l)}{K_1(a_0/l)}}{2 + \frac{a_0}{l} \cdot \frac{K_0(a_0/l)}{K_1(a_0/l)}},$$

$$\mathcal{H}_3 = 24(1-\nu) \frac{l^2}{a_0^2}; \quad \mathcal{H}_4 = 1 + \frac{a_0}{l} \frac{K_0(a_0/l)}{K_1(a_0/l)}. \quad (\text{VI.86})$$

В рассматриваемом случае

$$\Phi(z) = i \left( \frac{\rho}{4} z + \frac{a_3^*}{z^3} \right); \quad \Psi(z) = i \left( \frac{\rho}{4} z + \frac{b_3^*}{z^3} + \frac{b_5^*}{z^5} \right);$$

$$\Omega = c_1 K_1(r/l) \cos \theta + c_3 K_3(r/l) \cos 3\theta. \quad (\text{VI.87})$$

Функции (VI.87) определяют искомое напряженное состояние. На основании формул (VI.31)

$$\sigma_\theta + \sigma_r = \rho r \sin \theta + 4 \frac{a_3^*}{r^3} \sin 3\theta;$$

$$\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta} = \frac{1}{l^2} [c_1 K_1(r/l) \cos \theta + c_3 K_3(r/l) \cos 3\theta];$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_r + i(\tau_{\theta r} + \tau_{r\theta}) = 2i \left\{ \frac{\rho r}{4} (e^{3i\theta} - e^{i\theta}) + \frac{b_3^*}{r^3} e^{-i\theta} + \right. \\ \left. + \left[ -3 \frac{a_3^*}{r^3} + \frac{96(1-\nu) l^2 a_3^*}{r^6} + \frac{b_5^*}{r^6} \right] e^{-3i\theta} + \right. \end{aligned} \quad (\text{VI.88})$$

$$+ \frac{c_1}{4l^2} [K_1(r/l) e^{i\theta} + K_3(r/l) e^{-i\theta}] + \frac{c_3}{4l^2} K_1[(r/l) e^{3i\theta} + K_5(r/l) e^{-3i\theta}];$$

$$\begin{aligned} \mu_r - i\mu_\theta = -8(1-\nu) l^2 \left( \frac{\rho}{4} e^{i\theta} + \frac{3a_3^*}{r^4} e^{-3i\theta} \right) - \\ - \frac{1}{2l} \{ c_1 [K_0(r/l) e^{i\theta} + K_2(r/l) e^{-i\theta}] + c_3 [K_2(r/l) e^{3i\theta} + K_4(r/l) e^{-3i\theta}] \}. \end{aligned}$$

Напряжения  $\sigma_\theta$  и  $\mu_\theta$  при  $l \neq 0$ ,  $r = a_0$  и  $\theta = \pi/2$  будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = \rho a_0 \left( 2 - \frac{\mathcal{H}_3}{\mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3} \right), \\ \mu_\theta = 2\rho(1-\nu) l^2 \left( 1 - \frac{3}{\mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3} + \frac{1}{\mathcal{H}_4} \right). \end{aligned} \quad (\text{VI.89})$$

Из (VI.88), приняв во внимание (VI.85) и условие (VI.70), можно легко получить решение соответствующей задачи классической теории упругости.

**Решение второй основной задачи моментной теории упругости. Одноосное растяжение.** Пусть требуется определить напряженное состояние бесконечной изотропной пластинки\*, ослабленной круговым отверстием радиуса  $a_0$ , в которое впаина абсолютной жесткой шайба (см. рис. VI.1). На бесконечности пластинка находится под действием усилий  $\sigma_x = \rho$ , т. е. основное напряженное состояние характеризуется формулами (VI.50). Задача заключается в решении системы дифференциальных уравнений (VI.11) при граничных условиях (VI.36).

Допустим, что заданные на контуре  $L$  функции  $2\mu(q_1 + iq_2)$  и  $4\eta q_3$  разлагаются в сходящиеся комплексные ряды Фурье:

$$2\mu(q_1 + iq_2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n e^{in\theta}; \quad (\text{VI.90})$$

$$4\eta q_3 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta} \quad (P_n = \bar{P}_{-n}).$$

\* Основные уравнения для плоского напряженного состояния при одноосном растяжении приведены в работе Г. Н. Савина [2], § 3, п. 13. В этой же работе приведены аналогичные уравнения для случая чистого изгиба (см. ниже).

Заметим, что в случае абсолютно жесткой шайбы коэффициенты рядов  $Q_n = P_n = 0$  при всех  $n$ .

Комплексные потенциалы, как и в классической теории упругости,

$$\varphi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(\kappa + 1)} \ln z + \Gamma z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad (\text{VI.91})$$

$$\psi(z) = \frac{X - iY}{2\pi(\kappa + 1)} \ln z + \Gamma' z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{-n},$$

где  $a_n$  и  $b_n$  имеют вид (VI.83)

$$\Gamma = \frac{1}{4}(N_1 + N_2), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha}, \quad (\text{VI.92})$$

причем  $X, Y$  — компоненты главного вектора всех усилий, приложенных к контуру  $L$ ;  $N_1$  и  $N_2$  — главные напряжения на бесконечности;  $\alpha$  — угол между направлением усилия, соответствующего  $N_1$ , и осью  $Ox$ .

Функцию  $\Omega(r, \theta)$ , как и раньше, возьмем в виде (VI.84), а задачу будем решать в предположении, что  $X = Y = 0$ .

Из граничных условий (VI.36) найдем коэффициенты разложений функций (VI.91) и функции (VI.84):

$$a'_1 = -\frac{\rho a_0^2 \Gamma_1}{2\kappa}, \quad b'_1 = \frac{1}{4}(\kappa - 1)\rho a_0^2,$$

$$b'_3 = -\frac{\rho a_0^4 \Gamma_1}{2\kappa} \left[ 1 + (\kappa + 1) \frac{l}{a_0} \frac{K_1(a_0/l)}{K_2(a_0/l)} \right], \quad (\text{VI.93})$$

$$d_2 = \frac{(\kappa + 1) l^2 \rho \Gamma_1}{\kappa K_2(a_0/l)}, \quad a'_2 = a'_3 = \dots = a'_n = 0,$$

$$b'_2 = b'_4 = \dots = b'_n = 0; \quad d_1 = d_3 = \dots = d_n = 0,$$

где

$$T_1 = \frac{2 + \frac{a_0}{l} \cdot \frac{K_0(a_0/l)}{K_1(a_0/l)}}{1 - \frac{1}{\kappa} + \frac{a_0}{l} \cdot \frac{K_0(a_0/l)}{K_1(a_0/l)}}. \quad (\text{VI.94})$$

Таким образом,

$$\varphi(z) = \Gamma z + \frac{a'_1}{z}, \quad \psi(z) = \Gamma' z + \frac{b'_1}{z} + \frac{b'_3}{z^3}, \quad (\text{VI.95})$$

$$\Omega = d_2 K_2(r/l) \sin 2\theta.$$

Напряженное состояние в пластинке найдем, подсчитав компоненты напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= 2\Gamma + b'_1 r^{-2} - \left\{ \Gamma' + 4a'_1 r^{-2} - 12(\kappa + 1) l^2 r^{-4} a'_1 - 3b'_3 r^{-4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d_2}{4l^2} [K_4(r/l) - K_0(r/l)] \right\} \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= 2\Gamma - b'_1 r^{-2} + \left\{ \Gamma' - 12(\kappa + 1) l^2 r^{-4} a'_1 - 3b'_3 r^{-4} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{d_2}{4l^2} [K_4(r/l) - K_0(r/l)] \right\} \cos 2\theta,\end{aligned}\tag{VI.96}$$

$$\begin{aligned}\tau_{r\theta} &= \left\{ \Gamma' - \frac{2a'_1}{r^2} + \frac{12(\kappa + 1) l^2 a'_1}{r^4} + \frac{3b'_3}{r^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_2}{4l^2} [K_4(r/l) - 2K_2(r/l) + K_0(r/l)] \right\} \sin 2\theta, \\ \tau_{\theta r} &= \left\{ \Gamma' - \frac{2a'_1}{r^2} + \frac{12(\kappa + 1) l^2 a'_1}{r^4} + \frac{3b'_3}{r^4} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_2}{4l^2} [K_4(r/l) + 2K_2(r/l) + K_0(r/l)] \right\} \sin 2\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_r &= \left\{ \frac{4(\kappa + 1) l^2 a'_1}{r^3} + \frac{d_2}{2l} [K_3(r/l) - K_1(r/l)] \right\} \cos 2\theta, \\ \mu_\theta &= - \left\{ \frac{4(\kappa + 1) l^2 a'_1}{r^3} + \frac{d_2}{2l} [K_3(r/l) + K_1(r/l)] \right\} \sin 2\theta.\end{aligned}\tag{VI.97}$$

При этом в случае плоского напряженного \* состояния  $\kappa = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}$ .

На контуре отверстия при  $r = a_0$

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{\kappa + 1}{2} + \frac{1}{\kappa} \left[ \kappa + T_1 + (\kappa + 1) T_1 \frac{l}{a_0} \cdot \frac{K_1(a_0/l)}{K_2(a_0/l)} \right] \cos 2\theta \right\}, \\ \sigma_\theta &= \frac{p}{2} \left\{ \frac{3 - \kappa}{2} + \frac{1}{\kappa} \left[ -\kappa + 3T_1 - (\kappa + 1) T_1 \frac{l}{a_0} \cdot \frac{K_1(a_0/l)}{K_2(a_0/l)} \right] \cos 2\theta \right\}, \\ \tau_{r\theta} &= \frac{p}{2\kappa} \left[ \kappa + T_1 + (\kappa + 1) T_1 \frac{l}{a_0} \cdot \frac{K_1(a_0/l)}{K_2(a_0/l)} \right] \sin 2\theta, \\ \tau_{\theta r} &= \frac{p}{2\kappa} \left[ -\kappa + (1 + 2\kappa) T_1 - (\kappa + 1) T_1 \frac{l}{a_0} \cdot \frac{K_1(a_0/l)}{K_2(a_0/l)} \right] \sin 2\theta; \\ \mu_r &= - \frac{(\kappa + 1) l p T_1}{2\kappa} \cdot \frac{K_1(a_0/l)}{K_2(a_0/l)} \sin 2\theta, \quad \mu_\theta = 0,\end{aligned}\tag{VI.98}$$

где  $T_1$  определяется формулой (IV.94).

\* Вывод основных уравнений см. Г. Н. Савин [2].



**Чистый изгиб.** Определим упругое равновесие бесконечной пластинки с впаиной в круговое отверстие радиуса  $a_0$  абсолютно жесткой шайбой, находящейся в поле чистого изгиба усилиями  $\sigma_x = \rho y$  (см. рис. VI.3).

Основное напряженное состояние характеризуется напряжениями (VI.78) и (VI.79), а функции напряжений для основного напряженного состояния имеют вид (VI.80).

Из граничных условий (VI.36), где вместо  $\nu$  следует \* положить  $\nu^* = \frac{\nu}{1+\nu}$ , коэффициенты искоемых функций для добавочного напряженного состояния, вызванного наличием отверстия,

$$\begin{aligned} a_2^* &= -\frac{\rho a_0^4}{8\kappa(1-T_2)}, & b_0^* &= \frac{1}{4}\rho a_0^2(1+T_3), \\ b_2^* &= \frac{1}{8}\rho a_0^4(\kappa+2T_3), & b_4^* &= -\frac{\rho a_0^6(2+\kappa T_2)}{8\kappa(1-T_2)}, \\ c_1 &= \frac{(\kappa+1)\rho a_0 l^2}{2K_1(a_0/l)}, & c_3 &= -\frac{\rho a_0^2 l T_2}{4(1-T_2)K_3(a_0/l)}, \end{aligned} \quad (\text{VI.99})$$

где

$$T_2 = \frac{2(\kappa+1)}{\kappa} \frac{2 + \frac{a_0 K_0(a_0/l)}{l K_1(a_0/l)}}{8 + \frac{a_0^2}{l^2} + 4 \frac{a_0 K_0(a_0/l)}{l K_1(a_0/l)}}; \quad T_3 = (\kappa+1) \frac{l^2}{a_0^2} \left[ 2 + \frac{a_0 K_0(a_0/l)}{l K_1(a_0/l)} \right].$$

В данном случае

(VI.100)

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= i \left( -\frac{\rho z^2}{8} + \frac{a_2^*}{z^2} \right), & \psi(z) &= i \left( \frac{\rho z^2}{8} + b_0^* + \frac{b_2^*}{z^2} + \frac{b_4^*}{z^4} \right), \\ \Omega &= \{c_1 K_1(r/l) \cos \theta + c_3 K_3(r/l) \cos 3\theta\}. \end{aligned} \quad (\text{VI.101})$$

Компоненты напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \left[ \frac{3}{4} \rho r - 2 \frac{b_2^*}{r^3} + 2 \frac{c_1}{l r} K_2(r/l) \right] \sin \theta + \left\{ 2 \frac{a_2^*}{r^3} - 48(\kappa+1) l^2 \frac{a_2^*}{r^5} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho r}{4} - 4 \frac{b_4^*}{r^5} + \frac{c_3}{2l^2} [K_5(r/l) - K_1(r/l)] \right\} \sin 3\theta; \\ \sigma_r &= \left[ \frac{1}{4} \rho r + 2 \frac{b_2^*}{r^3} - 2 \frac{c_1}{l r} K_2(r/l) \right] \sin \theta + \left\{ -10 \frac{a_2^*}{r^3} + 48(\kappa+1) l^2 \frac{a_2^*}{r^5} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \rho r + 4 \frac{b_4^*}{r^5} - \frac{c_3}{2l^2} [K_5(r/l) - K_1(r/l)] \right\} \sin 3\theta; \end{aligned}$$

\* См. Г. Н. Савин [2].

$$\tau_{\theta r} = \left\{ -\frac{1}{4} pr - 2\frac{b_2''}{r^3} + \frac{c_1}{2l^2} [K_3(r/l) + 3K_1(r/l)] \right\} \cos \theta + \quad (\text{VI.102})$$

$$+ \left\{ \frac{1}{4} pr + 6\frac{a_2''}{r^3} - 48(\kappa + 1)l^2\frac{a_2''}{r^5} - 4\frac{b_4''}{r^5} + \frac{c_3}{2l^2} [K_5(r/l) + \right.$$

$$\left. + 2K_3(r/l) + K_1(r/l)] \right\} \cos 3\theta;$$

$$\tau_{r\theta} = \left\{ -\frac{1}{4} pr - 2\frac{b_2''}{r^3} + \frac{c_1}{2l^2} [K_3(r/l) - K_1(r/l)] \right\} \cos \theta + \left\{ \frac{1}{4} pr + \right.$$

$$\left. + 6\frac{a_2''}{r^3} - 48(\kappa + 1)l^2\frac{a_2''}{r^5} - 4\frac{b_4''}{r^5} + \frac{c_3}{2l^2} [K_5(r/l) - 2K_3(r/l) + K_1(r/l)] \right\} \cos 3\theta;$$

$$\mu_r = -\left\{ \frac{1}{2} \rho(\kappa + 1)l^2 + \frac{c_1}{l} [K_2(r/l) + K_0(r/l)] \right\} \cos \theta +$$

$$+ \left\{ 12(\kappa + 1)l^2\frac{a_2''}{r^4} - \frac{c_3}{l} [K_4(r/l) + K_2(r/l)] \right\} \cos 3\theta;$$

$$\mu_\theta = \left\{ \frac{1}{2} \rho(\kappa + 1)l^2 - \frac{c_1}{l} [K_2(r/l) - K_0(r/l)] \right\} \sin \theta +$$

$$+ \left\{ 12(\kappa + 1)l^2\frac{a_2''}{r^4} - \frac{c_3}{l} [K_4(r/l) - K_2(r/l)] \right\} \sin 3\theta.$$

Коэффициенты  $a_2''$ ,  $b_0''$ , ...,  $c_3$ , входящие в соотношения (VI.101) и (VI.102), даны формулами (VI.99).

На контуре отверстия при  $r=a_0$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{4}(3 - \kappa) \rho a_0 \left[ \sin \theta + \frac{\sin 3\theta}{\kappa(1 - T_2)} \right],$$

$$\sigma_r = \frac{1}{4}(1 + \kappa) \rho a_0 \left[ \sin \theta + \frac{\sin 3\theta}{\kappa(1 - T_2)} \right],$$

$$\tau_{\theta r} = \frac{1}{4}(1 + \kappa) \rho a_0 \left[ \cos \theta - \frac{\cos 3\theta}{\kappa(1 - T_2)} \right],$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{4}(1 + \kappa) \rho a_0 \left[ \cos \theta - \frac{\cos 3\theta}{\kappa(1 - T_2)} \right],$$

(VI.103)

$$\mu_r = -\frac{1}{2}(\kappa + 1) \rho a_0 l \frac{K_2(a_0/l)}{K_1(a_0/l)} \cos \theta + \frac{\rho a_0^2 T_2}{4(1 - T_2)} \cos 3\theta, \quad \mu_\theta = 0.$$

Из найденных решений второй основной задачи при  $a_0/l \rightarrow \infty$  получаем значения компонентов напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  и  $\tau_{r\theta}$  для аналогичных задач классической теории упругости.

Из (VI.98) и (VI.103) имеем

$$\lim_{a_0/l \rightarrow \infty} \tau_{r\theta} = - \lim_{a_0/l \rightarrow \infty} \tau_{\theta r}, \quad (\text{VI.104})$$

т. е. при  $a_0/l \rightarrow \infty$  мы все-таки не получаем полностью симметричного тензора напряжений ( $\tau_{r\theta} \neq \tau_{\theta r}$ ), лежащего в основе классической теории упругости.

### § 5. Концентрация напряжений около произвольного криволинейного отверстия

**Метод возмущения формы границы** \*. Будем рассматривать отверстия, контуры которых не имеют угловых точек и заданы уравнениями

$$\begin{aligned} x^* &= R \left( \cos \vartheta + \varepsilon \sum_{k=1}^n c_k \cos k\vartheta \right), \\ y^* &= R \left( \sin \vartheta - \varepsilon \sum_{k=1}^n c_k \sin k\vartheta \right), \end{aligned} \quad (\text{VI.105})$$

где  $c_1 = 1$ ,  $c_k$  — постоянные коэффициенты.

Уравнения (VI.105) представляют собой действительную и мнимую части функции

$$\begin{aligned} z^* &= \omega(\zeta) = R \left( \zeta + \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{\zeta^k} \right), \\ z^* &= x^* + iy^* = r^* e^{i\theta}, \quad \zeta = \rho e^{i\vartheta}, \end{aligned} \quad (\text{VI.106})$$

конформно отображающей внешность единичного круга на область  $\Sigma$ , представляющую собой внешность рассматриваемого отверстия (рис. VI.4).

Для простоты выкладок будем предполагать, что рассматриваемые отверстия имеют по крайней мере одну ось симметрии, например ось  $Ox$ . При этом условии коэффициенты  $c_k$  ( $k=2, 3, \dots$ ) и функции (VI.105) будут, если за ось  $Ox$  взять эту ось симметрии, вещественными величинами.

\* Более подробнее об этом методе в применении его к плоским задачам моментной теории упругости для бесконечных односвязных областей см. Г. Н. Савин [2]. Для бесконечных областей, ослабленных конечным числом произвольно расположенных отверстий, контуры которых являются гладкими кривыми, метод решения задач плоской моментной теории упругости дан в работе Г. Н. Савина и А. Н. Гузя [2].

Постоянную  $R$  в (VI.106), характеризующую абсолютные размеры отверстия и его ориентацию по отношению к выбранной системе координат  $Oxy$ , будем считать действительной величиной. Параметр  $\varepsilon$  будем считать вещественной и малой величиной, изменяющейся в интервале  $0 < |\varepsilon| \ll 1$ , характеризующей степень «отклонения» рассматриваемого отверстия от кругового.

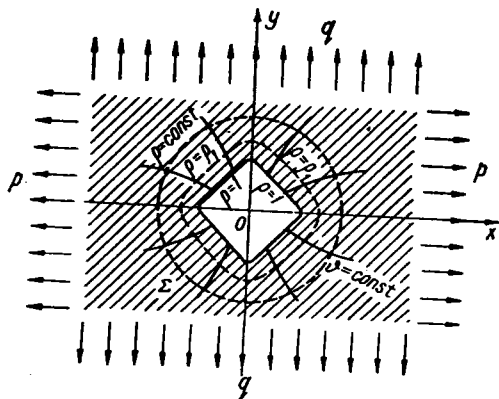


Рис. VI.4.

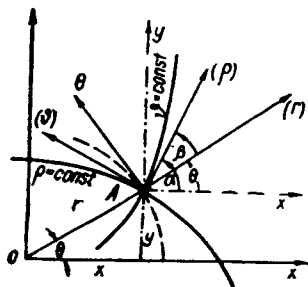


Рис. VI.5.

В дальнейшем изложении удобно перейти к безразмерным декартовым  $x, y$  и полярным  $r$  и  $\theta$  координатам:

$$z = \frac{z^*}{R} = x + iy = re^{i\theta}. \quad (\text{VI.107})$$

Уравнения (VI.105) и (VI.106) в безразмерных координатах будут соответственно иметь вид

$$x = \cos \vartheta + \varepsilon \sum_{k=1}^n c_k \cos k\vartheta, \quad (\text{VI.108})$$

$$y = \sin \vartheta - \varepsilon \sum_{k=1}^n c_k \sin k\vartheta$$

$$z = \frac{1}{R} \omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta), \quad (\text{VI.109})$$

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta} + \frac{c_2}{\zeta^2} + \dots + \frac{c_n}{\zeta^n};$$

$$\zeta = \rho e^{i\theta}. \quad (\text{VI.110})$$

Уравнения (VI.108) представляют собой параметрические уравнения «естественной» криволинейной ортогональной системы координат  $\rho = \text{const}$  и  $\vartheta = \text{const}$  (см. рис. VI.4).

Согласно (VI.40) полные напряжения около отверстия

$$\begin{aligned}\sigma_q^* &= \sigma_q^0 + \sigma_q, & \sigma_\vartheta^* &= \sigma_\vartheta^0 + \sigma_\vartheta, & \mu_\vartheta^* &= \mu_\vartheta, \\ \tau_{q\vartheta}^* &= \tau_{q\vartheta}^0 + \tau_{q\vartheta}, & \tau_{\vartheta q}^* &= \tau_{\vartheta q}^0 + \tau_{\vartheta q}, & \mu_q^* &= \mu_q,\end{aligned}\quad (\text{VI.111})$$

где  $\sigma_q^0, \sigma_\vartheta^0, \dots, \tau_{q\vartheta}^0$  — компоненты основного напряженного состояния, а  $\sigma_q, \sigma_\vartheta, \dots, \mu_\vartheta$  — дополнительные компоненты напряжений, возникшие вследствие наличия отверстия. Компоненты напряжений  $\sigma_q, \sigma_\vartheta, \tau_{q\vartheta}, \tau_{\vartheta q}, \mu_q$  и  $\mu_\vartheta$  в криволинейной системе координат  $(q, \vartheta)$ , выраженные через  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta r}, \mu_r$  и  $\mu_\theta$  в полярной системе координат  $(r, \theta)$ , как следует из (VI.14), будут иметь вид

$$\begin{aligned}\sigma_q &= \sigma_r \cos^2 \beta + \sigma_\theta \sin^2 \beta + \frac{\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}}{2} \sin 2\beta, \\ \sigma_\vartheta &= \sigma_r \sin^2 \beta + \sigma_\theta \cos^2 \beta - \frac{\tau_{r\theta} + \tau_{\theta r}}{2} \sin 2\beta, \\ \tau_{q\vartheta} &= \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} \sin 2\beta + \tau_{r\theta} \cos^2 \beta - \tau_{\theta r} \sin^2 \beta, \\ \tau_{\vartheta q} &= \frac{\sigma_\theta - \sigma_r}{2} \sin 2\beta - \tau_{r\theta} \sin^2 \beta + \tau_{\theta r} \cos^2 \beta, \\ \mu_q &= \mu_r \cos \beta + \mu_\theta \sin \beta, \\ \mu_\vartheta &= -\mu_r \sin \beta + \mu_\theta \cos \beta,\end{aligned}\quad (\text{VI.112})$$

где  $\beta$  — угол поворота осей  $(\rho) A(\vartheta)$  относительно полярной системы координат  $(r) A(\theta)$  (рис. VI.5).

Компоненты напряжений в полярных координатах  $(r, \theta)$  (см. рис. VI.5), как следует из (VI.17), определяются по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{1}{R^2} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right], \\ \sigma_\theta &= \frac{1}{R^2} \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta} \right], \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{1}{R^2} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right], \\ \tau_{\theta r} &= -\frac{1}{R^2} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right], \\ \mu_r &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial F}{\partial r}, \\ \mu_\theta &= \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial \theta}.\end{aligned}\quad (\text{VI.113})$$

В уравнениях (VI.11) оператор Лапласа  $\nabla^2$  должен быть взят в «безразмерных» полярных координатах  $(r, \theta)$ , т. е. в виде

$$\nabla^2 = \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad (\text{VI.114})$$

а под функциями  $U(r, \theta)$  и  $F(r, \theta)$  будем подразумевать дополнительные функции напряжений, соответствующие дополнительному напряженному состоянию (VI.41).

Функции же напряжений  $U^{(0)}(r, \theta)$  и  $F^{(0)}(r, \theta)$  определяются по заданному основному напряженному состоянию (VI.38), так как произвол, содержащийся в этих функциях, не влияет на конечное напряженное состояние около отверстия.

Из (VI.109) легко находим

$$\begin{aligned} x(\varrho, \vartheta) &= \varrho \cos \vartheta + \varepsilon \frac{f(\zeta) + \overline{f(\zeta)}}{2}, \\ y(\varrho, \vartheta) &= \varrho \sin \vartheta + \varepsilon \frac{f(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{2i}, \end{aligned} \quad (\text{VI.115})$$

а также

$$r(\varrho, \vartheta) = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\varrho^2 + \varepsilon [\zeta \overline{f(\zeta)} + \overline{\zeta} f(\zeta)] + \varepsilon^2 \overline{f(\zeta)} f(\zeta)}, \quad (\text{VI.116})$$

$$\theta(\varrho, \vartheta) = \text{arctg} \frac{y}{x} = \text{arctg} \frac{\sin \vartheta + \varepsilon \frac{f(\zeta) - \overline{f(\zeta)}}{2i\varrho}}{\cos \vartheta + \varepsilon \frac{f(\zeta) + \overline{f(\zeta)}}{2\varrho}}. \quad (\text{VI.117})$$

Из рис. VI.5 видим, что

$$e^{i\alpha} = e^{i(\vartheta + \beta)} = e^{i\vartheta} \cdot e^{i\beta}. \quad (\text{VI.118})$$

Представим вектор, лежащий на оси  $A(\varrho)$ , т. е. по касательной к линии  $\vartheta = \text{const}$ , в виде

$$dz = |dz| \cdot e^{i\alpha} = \frac{1}{R} |\omega'(\zeta)| \cdot |d\zeta| \cdot e^{i\alpha} \quad (\zeta = \varrho e^{i\vartheta}).$$

Следовательно,  $|d\zeta| = |d\varrho e^{i\vartheta} + i\varrho e^{i\vartheta} d\vartheta|$ .

Вдоль линии  $\vartheta = \text{const}$   $d\vartheta = 0$ , поэтому  $|d\zeta| = d\varrho$ .

Следовательно,

$$e^{i\alpha} = \frac{dz}{|dz|} = \frac{\omega'(\zeta) e^{i\vartheta} d\varrho}{|\omega'(\zeta)| d\varrho} = \frac{\zeta}{\varrho} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}, \quad (\text{VI.119})$$

$$e^{i\beta} = \frac{\zeta}{\varrho} \cdot \frac{\sqrt{1 + \varepsilon f'(\zeta)}}{\sqrt{1 + \varepsilon f'(\zeta)}} \cdot \frac{\sqrt{\varrho^2 + \varepsilon [\zeta \overline{f(\zeta)} + \overline{\zeta} f(\zeta)] + \varepsilon^2 \overline{f(\zeta)} f(\zeta)}}{\zeta + \varepsilon f(\zeta)}. \quad (\text{VI.120})$$

Для применения метода возмущения формы границы необходимо иметь все величины и функции, входящие в формулы (VI.112) и (VI.113), в виде разложений по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Начнем

эти разложения с функции (VI.116). Разлагая  $r$  в ряд по степеням  $\varepsilon$ , получаем

$$r = \varrho \left\{ 1 + \varepsilon \frac{\bar{\zeta}f(\zeta) + \zeta\bar{f}(\bar{\zeta})}{2\varrho^2} - \varepsilon^2 \frac{[\bar{\zeta}f(\zeta) - \zeta\bar{f}(\bar{\zeta})]^2}{8\varrho^4} + \dots \right\}. \quad (\text{VI.121})$$

Функции (VI.117) и (VI.120) также разложим в ряды по  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \theta(\varrho, \vartheta) = \vartheta + \varepsilon \left[ \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta})}{2\varrho i} \cos \vartheta - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})}{2\varrho} \sin \vartheta \right] + \\ + \frac{\varepsilon^2}{4} \left[ \frac{f^2(\zeta) + \bar{f}^2(\bar{\zeta})}{\zeta\bar{\zeta}} \sin 2\vartheta - \frac{f^2(\zeta) - \bar{f}^2(\bar{\zeta})}{\zeta\bar{\zeta}i} \cos \vartheta \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI.122})$$

Так как  $z = re^{i\theta}$ , то

$$e^{i\theta} = \frac{z}{r} = \frac{\zeta + \varepsilon f(\zeta)}{r}. \quad (\text{VI.123})$$

Принимая во внимание (VI.116), получаем

$$e^{i\theta} = \frac{\zeta + \varepsilon f(\zeta)}{\sqrt{\varrho^2 + \varepsilon [\bar{\zeta}f(\zeta) + \zeta\bar{f}(\bar{\zeta})] + \varepsilon^2 f(\zeta)\bar{f}(\bar{\zeta})}}. \quad (\text{VI.124})$$

Из (VI.118), (VI.119) и (VI.123) легко находим

$$e^{i\theta} = e^{i\alpha} \cdot e^{-i\theta} = \frac{\zeta}{\varrho} \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \left[ \frac{\omega(\zeta)}{Rr} \right]^{-1} \quad (\text{VI.125})$$

или

$$e^{i\theta} = \frac{\zeta}{|\zeta|} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|} \cdot \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{|\omega(\zeta)|}. \quad (\text{VI.126})$$

Подставляя в (VI.126) выражения из (VI.109) и принимая во внимание, что

$$|\omega'(\zeta)| = \sqrt{\omega'(\zeta)\overline{\omega'(\zeta)}},$$

найдем

$$\begin{aligned} e^{i\theta} = 1 + \varepsilon \frac{\zeta\bar{f}(\bar{\zeta}) - \bar{\zeta}f(\zeta) + \zeta\bar{\zeta}[f'(\zeta) - \bar{f}'(\bar{\zeta})]}{2\zeta\bar{\zeta}} - \\ - \frac{\varepsilon^2}{8} \left[ 2 \frac{f(\zeta)\bar{f}(\bar{\zeta})}{\zeta\bar{\zeta}} + \frac{f^2(\zeta)}{\zeta^2} + 2 \frac{\bar{f}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} \bar{f}'(\bar{\zeta}) + 2 \frac{f(\zeta)}{\zeta} f'(\zeta) + f'^2(\zeta) + \right. \\ \left. + 2f'(\zeta)\bar{f}'(\bar{\zeta}) - 3 \frac{f^2(\zeta)}{\zeta^2} - 3\bar{f}'^2(\bar{\zeta}) - 2 \frac{\bar{f}(\bar{\zeta})}{\bar{\zeta}} \bar{f}'(\bar{\zeta}) - 2 \frac{f(\zeta)}{\zeta} f'(\zeta) \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI.127})$$

Представим теперь в виде разложения по  $\varepsilon$  произвольную функцию  $V\{r(\varrho, \vartheta, \varepsilon), \theta(\varrho, \vartheta, \varepsilon)\}$ , имеющую необходимое число непрерывных производных:

$$\begin{aligned} V(r, \theta) = \\ = V \left\{ \sqrt{\varrho^2 + \varepsilon [\bar{\zeta}f(\zeta) + \zeta\bar{f}(\bar{\zeta})] + \varepsilon^2 f(\zeta)\bar{f}(\bar{\zeta})}, \arctg \frac{\sin \vartheta + \varepsilon \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta})}{2i\varrho}}{\cos \vartheta + \varepsilon \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})}{2\varrho}} \right\} = \end{aligned}$$

$$= V(\varrho, \vartheta) + \varepsilon \left\{ J_1 \frac{\partial}{\partial \varrho} + J_2 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right\} V(\varrho, \vartheta) + \\ + \frac{\varepsilon}{2i} \left\{ J_3 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + J_4 \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \vartheta} + J_5 \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + J_6 \frac{\partial}{\partial \varrho} + J_7 \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right\} V(\varrho, \vartheta) + \dots, \quad (\text{VI.128})$$

где для сокращения записи введены обозначения:

$$J_1 = \frac{\bar{\zeta} f(\zeta) + \zeta \bar{f}(\bar{\zeta})}{2\varrho}, \\ J_2 = \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta})}{2i\varrho} \cos \vartheta - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})}{2\varrho} \sin \vartheta, \\ J_3 = \frac{\bar{\zeta} f(\zeta) + \zeta \bar{f}(\bar{\zeta})}{4\varrho^2}, \\ J_4 = \frac{\bar{\zeta} f(\zeta) + \zeta \bar{f}(\bar{\zeta})}{\varrho^2} \left[ \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta})}{2i} \cos \vartheta - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})}{2} \sin \vartheta \right], \quad (\text{VI.129}) \\ J_5 = \frac{4if(\zeta)\bar{f}(\bar{\zeta}) - 2i[f^2(\zeta) + \bar{f}^2(\bar{\zeta})] \cos 2\vartheta - 2[f^2(\zeta) - \bar{f}^2(\bar{\zeta})] \sin 2\vartheta}{8i\varrho^2}, \\ J_6 = \frac{[\bar{\zeta} f(\zeta) - \zeta \bar{f}(\bar{\zeta})]^2}{4\varrho^3}, \\ J_7 = \frac{[\bar{f}^2(\bar{\zeta}) + f^2(\zeta)] i \sin 2\vartheta - [f^2(\zeta) - \bar{f}^2(\bar{\zeta})] \cos 2\vartheta}{2i\varrho}.$$

Допустим, что основное напряженное состояние (VI.38) характеризуется симметричным тензором напряжений, т. е.  $\mu_x^0 = \mu_y^0 = 0$ .

В этом случае функция  $\nabla^2 U = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}]$  будет определена с точностью до неопределенных коэффициентов, так как функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$ , характеризующие дополнительное напряженное состояние, возникшее вследствие наличия отверстия, должны быть взяты в общем виде, который дает классическая теория упругости\*. Последние коэффициенты должны быть найдены из граничных условий задачи.

Представим решение бигармонического уравнения системы (VI.11) в полярных координатах  $(r, \theta)$  в виде

$$U(r, \theta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k U_k(r, \theta). \quad (\text{VI.130})$$

Если подставить правую часть функции (VI.130) в первое уравнение системы (VI.11) и приравнять коэффициенты при одинаковых степе-

\* См. Н. И. Muskhelishvili [1], § 36.



нях  $\varepsilon$  нулю, получим дифференциальное уравнение для любого приближения в виде

$$\nabla^2 \nabla^2 U_k(r, \theta) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{VI.131})$$

В нашем случае нет необходимости решать уравнения (VI.131) потому, что, взяв функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  в общем виде, который дает для аналогичного случая классическая теория упругости, но только с неопределенными коэффициентами, будем иметь функцию (VI.130). Раскладывая последнюю в ряд Маклорена по степеням  $\varepsilon$ , найдем правую часть (VI.130).

Представим решение уравнения

$$\nabla^2 (F - l^2 \nabla^2 F) = 0 \quad (\text{VI.132})$$

в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ , т. е.

$$F(r, \theta, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k F_k(r, \theta). \quad (\text{VI.133})$$

Подставив (VI.133) в уравнение (VI.132), получим дифференциальные уравнения для любого приближения в виде

$$\nabla^2 [F_k(r, \theta) - l^2 \nabla^2 F_k(r, \theta)] = 0, \quad (\text{VI.134})$$

где оператор  $\nabla^2$  имеет вид (VI.114).

Компоненты дополнительного напряженного состояния, вызванного наличием отверстия в «естественной» криволинейной ортогональной системе координат  $(\rho, \vartheta)$ , даваемой отображающей функцией  $z = \frac{1}{R} \omega(\xi)$  (VI.109), также представим в виде рядов по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \sigma_\rho &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_\rho^{(k)}, & \sigma_\vartheta &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \sigma_\vartheta^{(k)}, \\ \tau_{\rho\vartheta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{\rho\vartheta}^{(k)}, & \tau_{\vartheta\rho} &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \tau_{\vartheta\rho}^{(k)}, \\ \mu_\rho &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu_\rho^{(k)}, & \mu_\vartheta &= \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k \mu_\vartheta^{(k)}. \end{aligned} \quad (\text{VI.135})$$

Подставив разложения для  $\sigma_\rho, \dots, \mu_\vartheta$  (VI.135) в левые части соотношений (VI.112), а в правые части — выражения для компонентов  $\sigma_r, \dots, \mu_\theta$  из (VI.113), приняв во внимание разложения для  $e^{i\beta}$  (VI.127), (VI.121), (VI.122) и функции  $V(r, \theta)$  (VI.128), и приравнявая в правых и левых частях коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем для

$k$ -го приближения компоненты напряжений в криволинейной ортогональной системе координат  $(\rho, \vartheta)$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho}^{(k)} &= \tilde{\sigma}_{\rho}^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1} \left[ L_1^{(k-m)} \tilde{\sigma}_{\rho}^{(m)} + L_2^{(k-m)} (\tilde{\sigma}_{\vartheta}^{(m)} - \tilde{\sigma}_{\rho}^{(m)}) + \frac{1}{2} L_3^{(k-m)} (\tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(m)} + \tilde{\tau}_{\vartheta\rho}^{(m)}) \right]; \\ \sigma_{\vartheta}^{(k)} &= \tilde{\sigma}_{\vartheta}^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1} \left[ L_1^{(k-m)} \tilde{\sigma}_{\vartheta}^{(m)} - L_2^{(k-m)} (\tilde{\sigma}_{\vartheta}^{(m)} - \tilde{\sigma}_{\rho}^{(m)}) - \frac{1}{2} L_3^{(k-m)} (\tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(m)} + \tilde{\tau}_{\vartheta\rho}^{(m)}) \right]; \\ \tau_{\rho\vartheta}^{(k)} &= \tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1} \left[ L_1^{(k-m)} \tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(m)} - L_2^{(k-m)} (\tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(m)} + \tilde{\tau}_{\vartheta\rho}^{(m)}) + \frac{1}{2} L_3^{(k-m)} (\tilde{\sigma}_{\vartheta}^{(m)} - \tilde{\sigma}_{\rho}^{(m)}) \right]; \\ \tau_{\vartheta\rho}^{(k)} - \tau_{\rho\vartheta}^{(k)} &= \tilde{\tau}_{\vartheta\rho}^{(k)} - \tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1} L_1^{(k-m)} (\tilde{\tau}_{\vartheta\rho}^{(m)} - \tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(m)}); \\ \mu_{\rho}^{(k)} &= \tilde{\mu}_{\rho}^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1} [L_5^{(k-m)} \tilde{\mu}_{\rho}^{(m)} + L_6^{(k-m)} \tilde{\mu}_{\vartheta}^{(m)}]; \\ \mu_{\vartheta}^{(k)} &= \tilde{\mu}_{\vartheta}^{(k)} + \sum_{m=0}^{k-1} [L_5^{(k-m)} \tilde{\mu}_{\vartheta}^{(m)} - L_6^{(k-m)} \tilde{\mu}_{\rho}^{(m)}],\end{aligned}\tag{VI.136}$$

где для сокращения записи введены обозначения:

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{\rho}^{(k)} &= \frac{1}{R^2} \left\{ \left[ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right] U_k(\rho, \vartheta) - \frac{\partial^2}{\partial \vartheta \partial \rho} \left[ \frac{1}{\rho} F_k(\rho, \vartheta) \right] \right\}; \\ \tilde{\sigma}_{\vartheta}^{(k)} &= \frac{1}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} U_k(\rho, \vartheta) + \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \vartheta} \left[ \frac{1}{\rho} F_k(\rho, \vartheta) \right] \right\}; \\ \tilde{\tau}_{\rho\vartheta}^{(k)} &= -\frac{1}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \vartheta} \left[ \frac{1}{\rho} U_k(\rho, \vartheta) \right] + \left[ \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \right] F_k(\rho, \vartheta) \right\}; \\ \tilde{\tau}_{\vartheta\rho}^{(k)} &= -\frac{1}{R^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \vartheta} \left[ \frac{1}{\rho} U_k(\rho, \vartheta) \right] - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} F_k(\rho, \vartheta) \right\}; \\ \tilde{\mu}_{\rho}^{(k)} &= \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} F_k(\rho, \vartheta); \quad \tilde{\mu}_{\vartheta}^{(k)} = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta} F_k(\rho, \vartheta).\end{aligned}\tag{VI.137}$$

В (VI.137) под  $U_k(\rho, \vartheta)$  и  $F_k(\rho, \vartheta)$  следует понимать соответственно решение  $U_k(r, \theta)$  бигармонического уравнения (VI.131) и решение  $F_k(r, \theta)$  уравнения (VI.134), в  $k$ -ом приближении в полярных координатах  $(r, \theta)$ , если в этих решениях просто заменить буквы  $r$  на  $\rho$ , а буквы  $\theta$  — соответственно на  $\vartheta$ .

В формулу (VI.136) входят еще пять операторов  $L_1^{(k-m)}$ ,  $L_2^{(k-m)}$ ,  $L_3^{(k-m)}$ ,  $L_5^{(k-m)}$  и  $L_6^{(k-m)}$ . Приведем эти операторы в развернутом виде\* для отобра-

\* См. Г. Н. Савин, А. Н. Гузь [1].

жающей функции  $z = \frac{1}{R} \omega(\zeta)$ , взятой в форме (VI.109) в первом, втором и третьем приближениях\*:

$$L_1^{(0)} = L_2^{(0)} = L_3^{(0)} = L_5^{(0)} = L_6^{(0)} \equiv 0;$$

$$L_1^{(1)} = P_1 \frac{\partial}{\partial \varrho} + P_2 \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$L_1^{(2)} = P_3 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + P_4 \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} + P_5 \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + P_6 \frac{\partial}{\partial \varrho} + P_7 \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$L_2^{(1)} \equiv 0; \quad L_3^{(1)} = \frac{\zeta \bar{\zeta} [f'(\zeta) - \overline{f'(\zeta)}] + \zeta f(\zeta) - \bar{\zeta} \bar{f}(\zeta)}{i \zeta \bar{\zeta}};$$

$$L_3^{(2)} = \frac{\bar{\zeta}^2 f^2(\zeta) - \zeta^2 \overline{f^2(\zeta)} + \zeta^2 \bar{\zeta}^2 [f'^2(\zeta) - \overline{f'^2(\zeta)}]}{2i \zeta^2 \bar{\zeta}^2} + P_8 \frac{\partial}{\partial \varrho} + P_9 \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad (\text{VI.138})$$

$$L_5^{(1)} = L_1^{(1)}; \quad L_5^{(2)} = L_1^{(2)} - \frac{1}{2} L_2^{(2)}; \quad L_6^{(1)} = \frac{1}{2} L_3^{(1)};$$

$$L_6^{(2)} = \frac{1}{2} L_3^{(2)},$$

де введены обозначения:

$$P_1 = \frac{\bar{\zeta} f(\zeta) + \zeta \bar{f}(\zeta)}{2\varrho};$$

$$P_2 = \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\zeta)}{2i\varrho} \cos \theta - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\zeta)}{2\varrho} \sin \theta;$$

$$P_3 = \frac{[\bar{\zeta} f(\zeta) + \zeta \bar{f}(\zeta)]^2}{8\varrho^2};$$

$$P_4 = \frac{\bar{\zeta} f(\zeta) + \zeta \bar{f}(\zeta)}{\varrho^2} \left[ \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\zeta)}{4i} \cos \theta - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\zeta)}{4} \sin \theta \right];$$

$$P_5 = \frac{2i f(\zeta) \bar{f}(\zeta) - i [f^2(\zeta) + \bar{f}^2(\zeta)] \cos 2\theta - [f^2(\zeta) - \bar{f}^2(\zeta)] \sin 2\theta}{8i\varrho^2}; \quad (\text{VI.139})$$

$$P_6 = - \frac{[\bar{\zeta} f(\zeta) - \zeta \bar{f}(\zeta)]^2}{8\varrho^2};$$

$$P_7 = \frac{[f^2(\zeta) + \bar{f}^2(\zeta)] i \sin 2\theta - [f^2(\zeta) - \bar{f}^2(\zeta)] \cos 2\theta}{4i\varrho^2};$$

$$P_8 = \frac{\bar{\zeta} f(\zeta) + \zeta \bar{f}(\zeta)}{2\varrho} \left[ \frac{f'(\zeta) - \bar{f}'(\zeta)}{i} + \frac{\zeta \bar{f}'(\zeta) - \bar{\zeta} f'(\zeta)}{i \zeta \bar{\zeta}} \right];$$

$$P_9 = \left[ \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\zeta)}{2i\varrho} \cos \theta - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\zeta)}{2\varrho} \sin \theta \right] \left[ \frac{f'(\zeta) - \bar{f}'(\zeta)}{i} + \frac{\zeta \bar{f}'(\zeta) - \bar{\zeta} f'(\zeta)}{i \zeta \bar{\zeta}} \right].$$

\* Принимая за первое приближение решение задачи при  $\varepsilon=0$ , т. е. для круглого отверстия.

Таким образом, задача о концентрации напряжений возле какого-либо отверстия, контур которого не имеет угловых точек и задан уравнениями (VI.115) при  $\rho=1$  по методу «возмущения формы границы» сводится к последовательному решению соответствующих краевых задач для кругового отверстия. Покажем применение этого метода на простом примере эллиптического отверстия.

**Одноосное растяжение области с эллиптическим отверстием.** Рассмотрим напряженное состояние около эллиптического отверстия с полуосями  $a$  и  $b$  (рис. VI.6) при одноосном растяжении «на бесконечности» плоскости (плоское напряженное состояние или плоская деформация\*) усилиями  $\rho = \text{const}$  вдоль оси  $Ox$ , т. е. при основном напряженном состоянии, характеризуемом формулами (VI.50).

Отображающую функцию получим из (VI.109), удержав в (VI.110) всего лишь один член:

$$z = \zeta + \frac{\varepsilon}{\zeta} \quad (\zeta = \rho e^{i\theta}), \quad (\text{VI.140})$$

где параметр

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$$

характеризует «степень» отклонения рассматриваемого эллипса от единичного круга.

Ось  $Ox$  всегда будем совмещать с полуосью эллипса  $a$ , а ось  $Oy$  — с полуосью  $b$  (см. рис. VI.6).

Очевидно, что при  $\varepsilon > 0$  полуось  $a > b$ , и эллипс будет вытянут вдоль оси  $Ox$ . При  $b > a$  параметр  $\varepsilon < 0$ , и эллипс будет вытянут вдоль оси  $Oy$ , т. е. расположен так, как это изображено на рис. VI.6. При  $b = a$  параметр  $\varepsilon = 0$ , и эллипс превращается в окружность.

При основном напряженном состоянии (VI.50) наибольший интерес представляет случай  $\varepsilon < 0$  (рис. VI.6). Функции напряжений  $U^*$  и  $F^*$ , соответствующие напряженному состоянию (VI.40), будем искать в виде (VI.42). В случае основного напряженного состояния (VI.50) функции  $F^{(0)} \equiv 0$  и  $F^* = F$ .

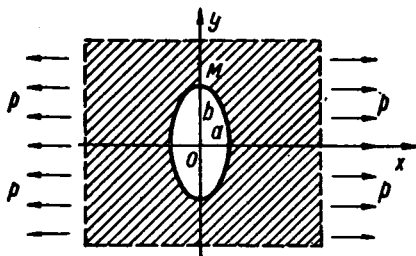


Рис. VI.6.

Бигармоническую функцию напряжений  $U^* = U^{(0)} + U$  возьмем в виде, даваемом классической теорией упругости для аналогичной задачи, но с неопределенными коэффициентами. Итак, функцию  $U^*(r, \theta, \varepsilon) = U^{(0)}(r, \theta, \varepsilon) + U(r, \theta, \varepsilon)$  представим в виде

$$U^*(r, \theta, \varepsilon) = \text{Re} \{ \bar{z} [\varphi_1^{(0)}(z) + \varphi_1(z)] + \chi_1^{(0)}(z) + \chi_1(z) \}, \quad (\text{VI.141})$$

где  $z = re^{i\theta}$ ,  $\varphi_1^{(0)}(z)$ ,  $\chi_1^{(0)}(z)$  и  $\varphi_1(z)$ ,  $\chi_1(z)$  — комплексные потенциалы Колосова—Мусхелишвили соответственно для основного и дополнительного напряженных состояний.

\* Так как уравнения плоской деформации и плоского напряженного состояния совпадают с точностью до постоянных коэффициентов (см. Г. Н. Савин [2], § 3, п. 13).

Для основного напряженного состояния (VI.50) классическая теория\* дает

$$\varphi_1^{(0)}(z) = \frac{p}{4} z, \quad \psi_1^{(0)}(z) = -\frac{p}{2} z, \quad (VI.142)$$

$$\chi_1^{(0)}(z) = \int \psi_1^{(0)}(z) dz = -\frac{p}{4} z^2 + \text{const.}$$

Из (VI.140) — (VI.142) находим функцию напряжений для основного напряженного состояния:

$$U^{(0)}(\varrho, \vartheta, \varepsilon) = \frac{p}{4} \left( \varrho^2 - 2\varepsilon + \frac{\varepsilon}{\varrho} \right) (1 - \cos 2\vartheta). \quad (VI.143)$$

Компоненты  $\sigma_{\vartheta}^0$ ,  $\sigma_{\varrho}^0$  и  $\tau_{\varrho\vartheta}^0 = \tau_{\vartheta\varrho}^0$  основного напряженного состояния (VI.50) в криволинейных ортогональных координатах  $\varrho = \text{const}$  и  $\vartheta = \text{const}$  (см. рис. VI.4) определим по [формулам\*\*

$$\sigma_{\vartheta}^0 + \sigma_{\varrho}^0 = 4\text{Re} \left[ \frac{\varphi^{(0)'(\zeta)}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right],$$

$$\sigma_{\vartheta}^0 - \sigma_{\varrho}^0 + i(\tau_{\varrho\vartheta}^0 + \tau_{\vartheta\varrho}^0) = \frac{2\zeta^2}{\varrho^2 \omega'(\zeta)} \left\{ \overline{\omega(\zeta)} \left[ \frac{\varphi^{(0)'(\zeta)}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right]' + \psi^{(0)'(\zeta)} \right\}, \quad (VI.144)$$

где  $\tau_{\varrho\vartheta}^0 = \tau_{\vartheta\varrho}^0$ ;  $\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$ ;

$$\varphi^{(0)}(\zeta) = \frac{p}{4} \left( \zeta + \frac{\varepsilon}{\zeta} \right); \quad \psi^{(0)}(\zeta) = -\frac{p}{2} \left( \zeta + \frac{\varepsilon}{\zeta} \right);$$

$$\omega(\zeta) = \zeta + \frac{\varepsilon}{\zeta}.$$

Отделив в (VI.144) действительные части от мнимых, найдем формулы для  $\sigma_{\varrho}^0$ ,  $\sigma_{\vartheta}^0$ ,  $\tau_{\varrho\vartheta}^0$  и  $\tau_{\vartheta\varrho}^0$ . Представим их в виде разложения по малому параметру

$$\begin{aligned} \sigma_{\varrho}^0 &= \frac{p}{2} \left[ 1 + \cos 2\vartheta - \varepsilon \left( -\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2} \cos 4\vartheta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left( -\frac{1}{\varrho^4} \cos 2\vartheta + \frac{1}{\varrho^4} \cos 6\vartheta \right) + \dots \right], \\ \sigma_{\vartheta}^0 &= \frac{p}{2} \left[ 1 - \cos 2\vartheta - \varepsilon \left( \frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho^2} \cos 4\vartheta \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{\varrho^4} \cos 2\vartheta - \frac{1}{\varrho^4} \cos 6\vartheta \right) + \dots \right], \\ \tau_{\varrho\vartheta}^0 &= \tau_{\vartheta\varrho}^0 = \frac{p}{2} \left[ -\sin 2\vartheta + \frac{\varepsilon}{\varrho^2} \sin 4\vartheta + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{\varrho^4} \sin 2\vartheta - \frac{1}{\varrho^4} \sin 6\vartheta \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (VI.145)$$

\* См. Н. И. Мусхелишвили [1].

\*\* Там же, § 50.

Перейдем к определению функции  $U(r, \theta, \varepsilon)$  для дополнительного напряженного состояния, вызванного наличием отверстия эллиптической формы.

Функции для аналогичной задачи классической теории упругости\* имеют вид

$$\begin{aligned}\varphi^{(кл)}(\zeta) &= \frac{p}{2} \frac{1 + \varepsilon}{\zeta}, \\ \psi^{(кл)}(\zeta) &= -\frac{p}{2} \left[ \frac{\varepsilon^2 - 1 + (\varepsilon + 1)^2 \zeta^2}{\zeta(\zeta^2 + \varepsilon)} \right].\end{aligned}\quad (\text{VI.146})$$

Функции (VI.146) удобно представить как функции переменной  $z = \zeta + \frac{\varepsilon}{\zeta}$  (VI.140).

Подставляя в (VI.146) вместо  $\zeta$  ее значение\*\* из (VI.140),

$$\zeta = \frac{1}{2}(z + \sqrt{z^2 + 4\varepsilon}), \quad (\text{VI.147})$$

найдем

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(кл)}(z, \varepsilon) &= p \frac{1 + \varepsilon}{z + \sqrt{z^2 + 4\varepsilon}}, \\ \psi_1^{(кл)}(z, \varepsilon) &= -p \frac{4(\varepsilon^2 - 1) + (\varepsilon + 1)^2 (z + \sqrt{z^2 + 4\varepsilon})^2}{(z + \sqrt{z^2 + 4\varepsilon}) [(z + \sqrt{z^2 + 4\varepsilon})^2 + 4\varepsilon]}.\end{aligned}\quad (\text{VI.148})$$

Разлагая функции (VI.148) в ряды Маклорена по  $\varepsilon$ , будем иметь

$$\varphi_1^{(кл)}(z, \varepsilon) = \varphi_1^{(кл)}(z, 0) - \varepsilon \varphi_1^{(кл)'}(z, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \varphi_1^{(кл)''}(z, 0) + \dots, \quad (\text{VI.149})$$

$$\psi_1^{(кл)}(z, \varepsilon) = \psi_1^{(кл)}(z, 0) - \varepsilon \psi_1^{(кл)'}(z, 0) + \frac{\varepsilon^2}{2!} \psi_1^{(кл)''}(z, 0) + \dots, \quad (\text{VI.150})$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_1^{(кл)}(z, 0) &= \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{z}, \\ \varphi_1^{(кл)'}(z, 0) &= -\frac{p}{2} \left( \frac{1}{z} - \frac{1}{z^3} \right), \\ \varphi_1^{(кл)''}(z, 0) &= -p \left( \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^5} \right); \\ \psi_1^{(кл)}(z, 0) &= -\frac{p}{2} \cdot \frac{1}{z} + \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{z^3},\end{aligned}\quad (\text{VI.151})$$

\* Для отличия от других функций эти функции отмечены индексом (кл).

\*\* В соответствии с рассматриваемым случаем, представленным на рис. VI.6, как и в формулах (VI.145) параметр  $\varepsilon$  заменен на  $-\varepsilon$  ( $\varepsilon = \left| \frac{a-b}{a+b} \right|$ ).

$$\psi_1^{(\kappa\lambda)'}(z, 0) = p \frac{1}{z} + p \frac{1}{z^3} - 2p \frac{1}{z^5}, \quad (\text{VI.152})$$

$$\psi_1^{(\kappa\lambda)''}(z, 0) = -p \frac{1}{z} + 3p \frac{1}{z^3} - 6p \frac{1}{z^5} + 15p \frac{1}{z^7}.$$

Нам понадобится также функция  $\chi_1^{(\kappa\lambda)}(z, \varepsilon) = \int \psi_1^{(\kappa\lambda)}(z, \varepsilon) dz$ . Интегрируя по  $z$  функцию (VI.150), получаем

$$\begin{aligned} \chi_1^{(\kappa\lambda)}(z, \varepsilon) &= -\frac{p}{2} \ln z - \frac{p}{4} \cdot \frac{1}{z^2} - \varepsilon \left[ p \ln z + \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{z^2} - \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{z^4} \right] + \\ &+ \varepsilon^2 \left[ -\frac{p}{2} \ln z - \frac{3p}{4} \cdot \frac{1}{z^2} + \frac{3p}{4} \cdot \frac{1}{z^4} - \frac{5p}{4} \cdot \frac{1}{z^6} \right] + \dots; \\ \varphi_1^{(\kappa\lambda)}(z, \varepsilon) &= \frac{p}{2} \cdot \frac{1}{z} - \varepsilon \left[ -\frac{p}{2z} + \frac{p}{2z^3} \right] + \varepsilon^2 \left[ \frac{p}{z^5} - \frac{p}{2z^3} \right] + \dots \quad (\text{VI.153}) \end{aligned}$$

Определив функции (VI.153), можно перейти к построению функций  $\varphi(z, \varepsilon)$  и  $\chi(z, \varepsilon)$  для нашей задачи. Эти функции будем брать в виде разложений по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \chi(z, \varepsilon) &= A \ln z + \frac{B}{z^2} - \varepsilon \left( a_1 \ln z + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^4} \right) + \\ &+ \varepsilon^2 \left( a_4 \ln z + \frac{a_5}{z^2} + \frac{a_6}{z^4} + \frac{a_7}{z^6} \right) - \dots, \\ \varphi(z, \varepsilon) &= \frac{C}{z} - \varepsilon \left( \frac{a_8}{z} + \frac{a_9}{z^3} \right) + \varepsilon^2 \left( \frac{a_{10}}{z} + \frac{a_{11}}{z^3} + \frac{a_{12}}{z^5} \right) - \dots \quad (\text{VI.154}) \end{aligned}$$

Зная функции (VI.154), по формуле Э. Гурса (VI.27) определим функцию напряжений  $U(r^*, \theta, \varepsilon)$ , которую удобно представить в полярных координатах  $r^* = Rr$  и  $\theta$  в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} U(r^*, \theta, \varepsilon) &= A \ln r^* + \left( \frac{B}{r^{*2}} + C \right) \cos 2\theta - \varepsilon \left[ a_1 \ln r^* + \left( \frac{a_2}{r^{*2}} + a_8 \right) \cos 2\theta + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{a_3}{r^{*4}} + \frac{a_9}{r^{*2}} \right) \cos 4\theta \right] + \varepsilon^2 \left[ a_4 \ln r^* + \left( \frac{a_5}{r^{*2}} + a_{10} \right) \cos 2\theta + \left( \frac{a_6}{r^{*4}} + \frac{a_{11}}{r^{*2}} \right) \cos 4\theta + \right. \\ &+ \left. \left( \frac{a_7}{r^{*6}} + \frac{a_{12}}{r^{*4}} \right) \cos 6\theta \right] + \dots \quad (\text{VI.155}) \end{aligned}$$

Полагая в функции (VI.155)  $\varepsilon = 0$ , получаем функцию  $U(r^*, \theta)$  (VI.55) что, конечно, и следовало ожидать. Неопределенные коэффициенты  $A, B, C, a_1, a_2, \dots, a_{12}$ , входящие в функцию (VI.155), должны быть определены из граничных условий (VI.63).

Из (VI.155) следует, что в безразмерных координатах  $r = \frac{r^*}{R}$  и  $\theta$  функции

$$\begin{aligned} U_0(r, \theta) &= A \ln Rr + \left( \frac{B}{R^2 r^2} + C \right) \cos 2\theta, \\ U_1(r, \theta) &= a_1 \ln Rr + \left( \frac{a_2}{R^2 r^2} + a_3 \right) \cos 2\theta + \left( \frac{a_8}{R^4 r^4} + \frac{a_9}{R^2 r^2} \right) \cos 4\theta, \\ U_2(r, \theta) &= a_4 \ln Rr + \left( \frac{a_5}{R^2 r^2} + a_{10} \right) \cos 2\theta + \left( \frac{a_6}{R^4 r^4} + \frac{a_{11}}{R^2 r^2} \right) \cos 4\theta + \\ &\quad + \left( \frac{a_7}{R^6 r^6} + \frac{a_{12}}{R^4 r^4} \right) \cos 6\theta. \end{aligned} \quad (\text{VI.156})$$

Из (VI.149) и (VI.154) легко находим

$$\begin{aligned} \nabla^2 U &= 2 [\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] = -4 \left[ \frac{C}{r^{*2}} \cos 2\theta - \varepsilon \left( \frac{a_8}{r^{*2}} \cos 2\theta + \frac{3a_9}{r^{*4}} \cos 4\theta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left( \frac{a_{10}}{r^{*2}} \cos 2\theta + \frac{3a_{11}}{r^{*4}} \cos 4\theta + \frac{5a_{12}}{r^{*6}} \cos 6\theta \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.157})$$

Функцию  $F(r, \theta)$  при выбранной функции  $\nabla^2 U$  (VI.157) будем искать в безразмерных полярных координатах  $r, \theta$  из условий (VI.18), где оператор  $\nabla^2$  должен быть взят в виде (VI.114) в тех же координатах.

Интегрируя (VI.34) при  $\nabla^2 U$  (VI.157) и включая постоянную интегрирования в функцию  $F(r^*, \theta)$ , получаем для последней дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} F - l^2 \nabla^2 F &= 8(1 - \nu) l^2 \left[ \frac{C}{r^{*2}} \sin 2\theta - \varepsilon \left( \frac{a_8}{r^{*2}} \sin 2\theta + \frac{3a_9}{r^{*4}} \sin 4\theta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left( \frac{a_{10}}{r^{*2}} \sin 2\theta + \frac{3a_{11}}{r^{*4}} \sin 4\theta + \frac{5a_{12}}{r^{*6}} \sin 6\theta \right) + \dots \right], \end{aligned} \quad (\text{VI.158})$$

частное решение которого в полярных координатах  $(r, \theta)$  будет иметь вид

$$\begin{aligned} F_{\text{частн}}(r, \theta) &= 8(1 - \nu) l^2 \left[ \frac{C}{R^2 r^2} \sin 2\theta - \varepsilon \left( \frac{a_8}{R^2 r^2} \sin 2\theta + \frac{3a_9}{R^4 r^4} \sin 4\theta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2 \left( \frac{a_{10}}{R^2 r^2} \sin 2\theta + \frac{3a_{11}}{R^4 r^4} \sin 4\theta + \frac{5a_{12}}{R^6 r^6} \sin 6\theta \right) + \dots \right]. \end{aligned} \quad (\text{VI.159})$$

Полное решение уравнения (VI.158) берем в виде (VI.59).

Будем искать решение  $\Omega(r, \theta, \varepsilon)$  уравнения (VI.26) в виде разложения по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \Omega \left( \frac{Rr}{l}, \theta, \varepsilon \right) &= R_0 \left( \frac{Rr}{l} \right) \sin 2\theta - \varepsilon \left[ R_1 \left( \frac{Rr}{l} \right) \sin 2\theta + R_2 \left( \frac{Rr}{l} \right) \sin 4\theta \right] + \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[ R_3 \left( \frac{Rr}{l} \right) \sin 2\theta + R_4 \left( \frac{Rr}{l} \right) \sin 4\theta + R_5 \left( \frac{Rr}{l} \right) \sin 6\theta \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI.160})$$



Подставляя функцию (VI.160) в уравнение (VI.26) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$  для каждой из функций  $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4$  и  $R_5$ , получаем соответствующие уравнения вида уравнений Бесселя, из которых найдем \*

$$\begin{aligned} R_0 &= DK_2(r/l^*), & R_1 &= a_{13}K_2(r/l^*), \\ R_2 &= a_{14}K_4(r/l^*), & R_3 &= a_{15}K_2(r/l^*), \\ R_4 &= a_{16}K_4(r/l^*), & R_5 &= a_{17}K_6(r/l^*), \end{aligned} \quad (\text{VI. 161})$$

где  $K_2, K_4$  и  $K_6$  — модифицированные функции Бесселя II рода (функции Макдональда или модифицированные функции Ганкеля) и для сокращения записи введено обозначение:

$$l^* = \frac{l}{R_1}. \quad (\text{VI. 162})$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Omega\left(\frac{r}{l^*}, \theta, \varepsilon\right) &= DK_2(r/l^*) \sin 2\theta - \varepsilon [a_{13}K_2(r/l^*) \sin 2\theta + \\ &+ a_{14}K_4(r/l^*) \sin 4\theta] + \varepsilon^2 [a_{15}K_2(r/l^*) \sin 2\theta + a_{16}K_4(r/l^*) \sin 4\theta + \\ &+ a_{17}K_6(r/l^*) \sin 6\theta] + \dots \end{aligned} \quad (\text{VI. 163})$$

Следовательно, функция

$$\begin{aligned} F(r, \theta, \varepsilon) &= \left[ DK_2(r/l^*) + \frac{8(1-\nu)l^2C}{R^2r^2} \right] \sin 2\theta - \\ &- \varepsilon \left\{ \left[ a_{13}K_2(r/l^*) + \frac{8(1-\nu)l^2a_8}{R^2r^2} \right] \sin 2\theta + \right. \\ &+ \left. \left[ a_{14}K_4(r/l^*) + \frac{24(1-\nu)l^2a_9}{R^4r^4} \right] \sin 4\theta \right\} + \\ &+ \varepsilon^2 \left\{ \left[ a_{15}K_2(r/l^*) + \frac{8(1-\nu)l^2a_{10}}{R^2r^2} \right] \sin 2\theta + \left[ a_{16}K_4(r/l^*) + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{24(1-\nu)l^2a_{11}}{R^4r^4} \right] \sin 4\theta + \left[ a_{17}K_6(r/l^*) + \frac{40(1-\nu)l^2a_{12}}{R^6r^6} \right] \sin 6\theta \right\} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{VI. 164})$$

где

$$D, C, a_8, a_9, \dots, a_{17} — \quad (\text{VI. 165})$$

постоянные интегрирования, подлежащие в дальнейшем определению. Из (VI. 164) следует

$$\begin{aligned} F_0(r, \theta) &= \left[ DK_2 + \frac{\beta_1^* C}{r^2} \right] \sin 2\theta; \\ F_1(r, \theta) &= \left[ a_{13}K_2 + \frac{\beta_1^* a_8}{r^2} \right] \sin 2\theta + \left[ a_{14}K_4 + \frac{3\beta_1^* a_9}{R^2r^4} \right] \sin 4\theta; \end{aligned} \quad (\text{VI. 166})$$

\* В решении уравнения (VI.26) сохраним только те функции, которые удовлетворяют условиям (VI.43), т. е. условиям «на бесконечности».

$$F_2(r, \theta) = \left[ a_{15} K_2 + \frac{\beta_1^* a_{10}}{r^2} \right] \sin 2\theta + \left[ a_{16} K_4 + \frac{3\beta_1^* a_{11}}{R^2 r^4} \right] \sin 4\theta + \\ + \left[ a_{17} K_6 + \frac{5\beta_1^* a_{12}}{R^4 r^6} \right] \sin 6\theta,$$

где

$$\beta_1^* = 8(1-\nu) l^2 / R^2.$$

Постоянные интегрирования (VI.165), входящие в функции (VI.155) и (VI.164), должны быть определены из граничных условий (VI.63) на контуре эллиптического отверстия (см. рис. VI.6). Операторы  $L_1^{(0)}, \dots, L_6^{(2)}$  (VI.138) для отображающей функции  $z = \omega(\zeta)$  (VI.140), взятые с точностью до  $\varepsilon^2$  включительно, будут иметь вид

$$L_1^{(0)} = L_2^{(0)} = L_3^{(0)} = L_5^{(0)} = L_6^{(0)} = 0;$$

$$L_1^{(1)} = \frac{\cos 2\theta}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\sin 2\theta}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta};$$

$$L_1^{(2)} = \frac{1 + \cos 4\theta}{4\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \frac{\sin 4\theta}{2\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\rho} + \frac{1 - \cos 4\theta}{4\rho^4} \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right); \quad (\text{VI. 167})$$

$$L_2^{(1)} \equiv 0; \quad L_3^{(1)} = 4 \frac{\sin 2\theta}{\rho^2}; \quad L_2^{(2)} = 2 \frac{1 - \cos 4\theta}{\rho^4};$$

$$L_3^{(2)} = 2 \frac{\sin 4\theta}{\rho^3} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} - 2 \frac{1 - \cos 4\theta}{\rho^4} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Подставив теперь в (VI.111) найденные значения компонентов напряжений  $\sigma_\rho^0, \sigma_\theta^0, \tau_{\rho\theta}^0 = \tau_{\theta\rho}^0$  (VI.145) и значения компонентов  $\sigma_\rho, \sigma_\theta, \dots, \mu_\theta$  (VI.135), удержав в них лишь по три члена и приняв во внимание: а) значения  $\sigma_\rho^{(k)}, \sigma_\theta^{(k)}, \tau_{\rho\theta}^{(k)}, \tau_{\theta\rho}^{(k)}, \mu_\rho^{(k)}, \mu_\theta^{(k)}$  (VI.136) ( $k = 0, 1, 2$ );

б) вид операторов (VI.167); в) значения  $\tilde{\sigma}_\rho^{(k)}, \tilde{\sigma}_\theta^{(k)}, \dots, \tilde{\mu}_\theta^{(k)}$  (VI.137), найдем\* компоненты напряжений около эллиптического отверстия:

$$\sigma_\rho^* = \sigma_\rho^0 + \sigma_\rho^{(0)} - \varepsilon \sigma_\rho^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_\rho^{(2)},$$

$$\sigma_\theta^* = \sigma_\theta^0 + \sigma_\theta^{(0)} - \varepsilon \sigma_\theta^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_\theta^{(2)};$$

$$\tau_{\rho\theta}^* = \tau_{\rho\theta}^0 + \tau_{\rho\theta}^{(0)} - \varepsilon \tau_{\rho\theta}^{(1)} + \varepsilon^2 \tau_{\rho\theta}^{(2)},$$

$$\tau_{\theta\rho}^* = \tau_{\theta\rho}^0 + \tau_{\theta\rho}^{(0)} - \varepsilon \tau_{\theta\rho}^{(1)} + \varepsilon^2 \tau_{\theta\rho}^{(2)}; \quad (\text{VI. 168})$$

$$\mu_\rho^* = \mu_\rho^0 + \mu_\rho^{(0)} - \varepsilon \mu_\rho^{(1)} + \varepsilon^2 \mu_\rho^{(2)},$$

$$\mu_\theta^* = \mu_\theta^0 + \mu_\theta^{(0)} - \varepsilon \mu_\theta^{(1)} + \varepsilon^2 \mu_\theta^{(2)}.$$

\* В функциях  $U_k(r, \theta)$  (VI.156) и  $F_k(r, \theta)$  (VI.166) ( $k=0, 1, 2$ ) буквы  $r$  и  $\theta$  должны быть просто заменены соответственно на  $\rho$  и  $\theta$ .

Внося из (VI. 167) найденные выражения для компонентов  $\sigma_0^*$ ,  $\tau_{00}^*$  и  $\mu_0^*$  в граничные условия (VI. 63), получим систему линейных уравнений, из которой определим искомые коэффициенты:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\rho R^2}{2}; & B &= -\frac{\rho R^4 (1 - \mathcal{H})}{4(1 + \mathcal{H})}; \\ C &= \frac{\rho R^2}{2(1 + \mathcal{H})}; & D &= -\frac{\rho R l \mathcal{H}}{(1 + \mathcal{H}) K_1(R/l)}; \\ a_1 &= \frac{\rho R^2}{1 + \mathcal{H}}; & a_2 &= \frac{\rho R^4}{2(1 + \mathcal{H})}; \\ a_8 &= -\frac{\rho R^2}{2(1 + \mathcal{H})}; & a_{13} &= \frac{\rho R l \mathcal{H}}{(1 + \mathcal{H}) K_1(R/l)}; \\ a_9 &= -\frac{R^2(T_2 - T_3 + 3T_1 T_4)}{6(1 + 6\beta_1^* T_4)}; & a_{14} &= \frac{T_1 - 2\beta_1^*(T_2 - T_3)}{K_4'(R/l)(1 + 6\beta_1^* T_4)}; \end{aligned} \quad (\text{VI. 169})$$

$$a_3 = -\frac{R^2}{40} \{R^2(T_2 + T_3 + 5T_1 T_5) + 30a_9[1 + 2\beta_1^*(T_5 - 2)]\},$$

где

$$\beta_1^* = 8(1 - \nu) \frac{l^2}{R^2}; \quad \mathcal{H} = \frac{8(1 - \nu)}{4 + \frac{R^2}{l^2} + 2 \frac{R K_0(R/l)}{l K_1(R/l)}};$$

$$T_1 = \frac{\rho R^2}{2(1 + \mathcal{H})} \left\{ -7\beta_1^* + \mathcal{H} \left[ 5 + 28 \frac{l^2}{R^2} + \left( \frac{R}{l} + 14 \frac{l}{R} \right) \frac{K_0(R/l)}{K_1(R/l)} \right] \right\}; \quad (\text{VI. 170})$$

$$T_2 = \frac{\rho R^2}{1 + \mathcal{H}} \left\{ 1 + 15\beta_1^* - \mathcal{H} \left[ 19 + 60 \frac{l^2}{R^2} + \left( 2 \frac{R}{l} + 30 \frac{l}{R} \right) \frac{K_0(R/l)}{K_1(R/l)} \right] \right\};$$

$$T_3 = \frac{\rho R^2}{2(1 + \mathcal{H})} \left\{ 8 + 30\beta_1^* - \mathcal{H} \left[ 32 + 120 \frac{l^2}{R^2} + \left( \frac{R}{l} + 60 \frac{l}{R} \right) \frac{K_0(R/l)}{K_1(R/l)} \right] \right\};$$

$$T_4 = \frac{1 + 8 \frac{l^2}{R^2} + 4 \frac{l}{R} \frac{K_0(R/l)}{K_1(R/l)}}{1 + 40 \frac{l^2}{R^2} + 192 \frac{l^4}{R^4} + 8 \frac{l}{R} \left( 1 + 12 \frac{l^2}{R^2} \right) \frac{K_0(R/l)}{K_1(R/l)}};$$

$$T_5 = \frac{1 + 72 \frac{l^2}{R^2} + 384 \frac{l^4}{R^4} + \left( 12 \frac{l}{R} + 192 \frac{l^3}{R^3} \right) \frac{K_0(R/l)}{K_1(R/l)}}{1 + 40 \frac{l^2}{R^2} + 192 \frac{l^4}{R^4} + 8 \frac{l}{R} \left( 1 + 12 \frac{l^2}{R^2} \right) \frac{K_0(R/l)}{K_1(R/l)}}.$$

Из рекуррентных соотношений (VI. 64) находим

$$K_4(R/l) = \left( 1 + \frac{24l^2}{R^2} \right) K_0(R/l) + \frac{8l}{R} \left( 1 + \frac{6l^2}{R^2} \right) K_1(R/l); \quad (\text{VI. 171})$$

$$K_4'(R/l) = -8 \left( 1 + 12 \frac{l^2}{R^2} \right) K_0(R/l) - \frac{l}{R} \left( 40 + 192 \frac{l^2}{R^2} + \frac{R^2}{l^2} \right) K_1(R/l).$$

Коэффициенты  $a_4, a_5, a_6, a_7, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{15}, a_{16}, a_{17}$ , входящие в функции  $U_k(r, \theta)$  (VI. 156) и функции  $F_k(r, \theta)$  (VI. 166), определяются из граничных условий для третьего приближения.

Из (VI. 170) при условии (VI. 70) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} T_1 = 0; \quad \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} T_2 = \rho R^2; \quad \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} T_3 = 4\rho R^2; \\ \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} T_4 = \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} T_5 = 1. \end{aligned} \quad (\text{VI. 172})$$

Таким образом, из (VI. 169) при условии (VI. 172) будем иметь

$$\begin{aligned} A = -\frac{\rho R^2}{2}; \quad B = -\frac{\rho R^4}{4}; \quad C = \frac{\rho R^2}{2}; \quad a_1 = \rho R^2; \\ a_2 = \frac{\rho R^4}{2}; \quad a_3 = -\frac{\rho R^6}{2}; \quad a_8 = -\frac{\rho R^2}{2}; \quad a_9 = \frac{\rho R^4}{2}. \end{aligned} \quad (\text{VI. 173})$$

Значения коэффициентов (VI.173) совпадают\* с соответствующими значениями коэффициентов функций  $\varphi_1^{(к,л)}(z, \varepsilon)$  и  $\chi_1^{(к,л)}(z, \varepsilon)$ .

Из (VI.169) следуют формулы (VI.68) для кругового отверстия. Представляет большой интерес исследовать влияние несимметричности тензора напряжений на величину коэффициентов концентрации напряжений около эллиптического отверстия в точке контура с наименьшим радиусом кривизны (см. рис. VI.6) (в нашем случае этой точкой контура будет точка  $M$ ) и на величину зоны возмущения возле рассматриваемого отверстия.

Чтобы ответить на первый вопрос, необходимо подсчитать значения  $\sigma_\theta^*$  при  $\varrho=1$  и  $\theta=\pi/2$ :

$$\begin{aligned} (\sigma_\theta^*)_{\substack{\varrho=1 \\ \theta=\frac{\pi}{2}}} = \rho + \frac{1}{R^2} \left[ -A - \frac{6B}{R^2} + \frac{6\beta_1 C}{R^2} - 2D(K_2'(R/l) - K_2(R/l)) \right] - \\ - \frac{\varepsilon}{R^2} \left[ -a_1 - \frac{24B}{R^2} + \frac{24\beta_1 C}{R^2} + 2D(K_2'(R/l) - 2K_2'(R/l) + 2K_2(R/l)) + \frac{20a_8}{R^4} + \right. \\ \left. + \frac{6a_9}{R^2} \left( 1 - \frac{10\beta_1}{R^2} \right) + 4a_{14}(K_4'(R/l) - K_4(R/l)) - 2A - \frac{6a_2}{R^2} + \frac{6\beta_{14} a_8}{R^2} - \right. \\ \left. - 2a_{13}(K_2'(R/l) - K_2(R/l)) \right], \end{aligned} \quad (\text{VI. 174})$$

а на второй вопрос — достаточно подсчитать значения  $\sigma_\theta^*$  и  $\sigma_\rho^*$  соответственно по сечениям  $\theta=\pi/2$  и  $\theta=0$  и сравнить полученные эпюры этих напряжений с одноименными, даваемыми классической теорией упру-

\* Если принять во внимание вид оператора Лапласа в полярных координатах (VI.19) и в безразмерных полярных координатах (VI.114).

гости. Такое сопоставление эюр  $\sigma_p^*$  и  $\sigma_\phi^*$  приведено на рис. VI.7 и VI.8 для  $\varepsilon=0,2$ , где сплошные кривые соответствуют моментной теории упругости, а штриховые кривые — классической теории упругости. Напряжения  $\sigma_p^*$  по сечению  $\phi=0$  (см. рис. VI.6) показаны на рис. VI.7, а  $\sigma_\phi^*$  по сечению  $\phi=\pi/2$  (см. рис. VI.6) — на рис. VI.8. Численные значения компонентов напряжений, приведенных на этих рисунках, получены при  $\nu=0,25$  и  $(R/l)_{\min}=3$ .

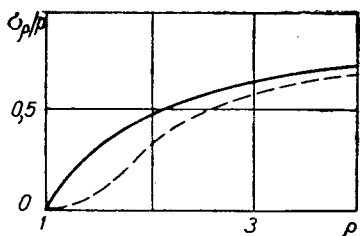


Рис. VI.7.

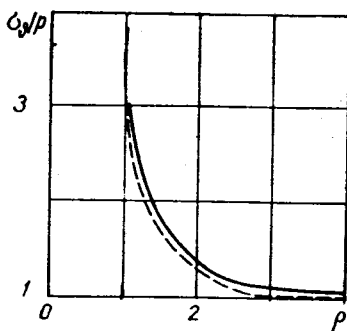


Рис. VI.8.

**Всестороннее растяжение области, ослабленной эллиптическим отверстием\***. Исследуем концентрацию напряжений около эллиптического отверстия с полуосями  $a$  и  $b$  (рис. VI.9) при равномерном всестороннем растяжении «на бесконечности» усилиями  $p=\text{const}$ , т. е. при основном напряженном состоянии

$$\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = p, \quad \tau_{xy}^0 = \tau_{yx}^0 = \mu_x^0 = \mu_y^0 = 0. \quad (\text{VI. 175})$$

Поступая как и для случая одноосного растяжения, получаем

$$\varphi_1^{(\kappa, \lambda)}(z, \varepsilon) = -\varepsilon \frac{p}{z} - \varepsilon^2 \frac{p}{z^3} + \dots,$$

$$\chi_1^{(\kappa, \lambda)}(z, \varepsilon) = -p \ln z + \varepsilon \frac{p}{z^2} + \varepsilon^2 p \left( -\ln z + \frac{3}{2z^4} \right) + \dots \quad (\text{VI. 176})$$

Получив функции (VI.176), можем на основании изложенного выше выбрать функции для рассматриваемого случая моментной теории упругости:

$$\varphi(z, \varepsilon) = \varepsilon \frac{b_1}{z} + \varepsilon^2 \frac{b_2}{z^3} + \dots;$$

$$\chi(z, \varepsilon) = b_3 \ln z + \varepsilon \frac{b_4}{z^2} + \varepsilon^2 \left( b_5 \ln z + \frac{b_6}{z^4} \right) + \dots \quad (\text{VI. 177})$$

\* Несколько иное решение дано Ю. Н. Немишем [2].

Зная функции  $\varphi(z, \varepsilon)$  и  $\chi(z, \varepsilon)$ , по формуле Э. Гурса определим функцию  $U(r^*, \theta, \varepsilon)$ , которую, как и раньше, представим в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$U(r^*, \theta, \varepsilon) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] = b_3 \ln r^* + \varepsilon \left( b_1 + \frac{b_4}{r^{*2}} \right) \cos 2\theta + \\ + \varepsilon^2 \left[ b_5 \ln r^* + \left( \frac{b_2}{r^{*2}} + \frac{b_6}{r^{*4}} \right) \cos 4\theta \right] + \dots \quad (\text{VI. 178})$$

Из (VI. 178) следует, что в безразмерных полярных координатах  $r$  и  $\theta$  функции

$$U_0(r, \theta) = b_3 \ln Rr,$$

$$U_1(r, \theta) = \left( b_1 + \frac{b_4}{R^2 r^2} \right) \cos 2\theta, \quad (\text{VI. 179})$$

$$U_2(r, \theta) = b_5 \ln Rr + \left( \frac{b_2}{R^2 r^2} + \frac{b_6}{R^4 r^4} \right) \cos 4\theta.$$

Определив на основании (VI. 178) функцию  $\nabla^2 U$ , получим уравнение для функции  $F(r, \theta)$

$$F - l^2 \nabla^2 F = 8(1 - \nu) l^2 \times \\ \times \left[ \varepsilon \frac{b_1}{R^2 r^2} \sin 2\theta + \varepsilon^2 \frac{3b_2}{R^4 r^4} \sin 4\theta + \dots \right]. \quad (\text{VI. 180})$$

Рассуждая аналогично, как это было сделано для случая одноосного растяжения, найдем решение уравнения (VI.180) в виде

$$F(r, \theta) = \varepsilon \left[ \beta_1^* \frac{b_1}{r^2} \sin 2\theta + b_7 K_2(r/l^*) \sin 2\theta \right] + \\ + \varepsilon^2 \left[ 3 \frac{\beta_1^* b_2}{R^2 r^4} \sin 4\theta + b_8 K_4(r/l^*) \sin 4\theta \right] + \dots, \quad (\text{VI. 181})$$

где, как и раньше,

$$\beta_1^* = 8(1 - \nu) l^2 / R^2.$$

Следовательно,

$$F_0(r, \theta) = 0,$$

$$F_1(r, \theta) = \left[ \frac{\beta_1^* b_1}{r^2} + b_7 K_2(r/l^*) \right] \sin 2\theta, \quad (\text{VI. 182})$$

$$F_2(r, \theta) = \left[ \frac{3\beta_1^* b_2}{R^2 r^4} + b_8 K_4(r/l^*) \right] \sin 4\theta.$$

Постоянные коэффициенты  $b_n$  ( $n=1, 2, \dots, 8$ ), входящие в (VI.179) и (VI.182), определяются из граничных условий (VI.63) на контуре эллиптического отверстия, т. е. при  $q=1$ .

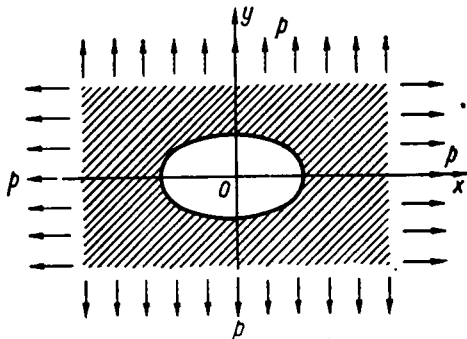


Рис. VI.9.

Для рассматриваемого случая

$$\begin{aligned}\sigma_q^* &= \sigma_q^0 + \sigma_q^{(0)} + \varepsilon \sigma_q^{(1)} + \varepsilon^2 \sigma_q^{(2)}, \\ \tau_{q\theta}^* &= \tau_{q\theta}^0 + \tau_{q\theta}^{(0)} + \varepsilon \tau_{q\theta}^{(1)} + \varepsilon^2 \tau_{q\theta}^{(2)}, \\ \mu_q^* &= \mu_q^0 + \mu_q^{(0)} + \varepsilon \mu_q^{(1)} + \varepsilon^2 \mu_q^{(2)},\end{aligned}\tag{VI.183}$$

где, как легко видеть из (VI.175),  $\sigma_q^0 = p$ ;  $\tau_{q\theta}^0 = \mu_q^0 = 0$ , а компоненты напряжений  $\sigma_q^{(0)}$ ,  $\sigma_q^{(1)}$ , ...,  $\mu_q^{(2)}$  определяются заданными функциями напряжений (VI.179) и (VI.182) по формулам (VI.136) и (VI.137).

Итак, удовлетворив граничным условиям (VI.63), найдем

$$\begin{aligned}b_1 &= -\frac{pR^2}{1+Q_1}; \quad b_2 = -\frac{pR^4}{6(1+Q_1)(1+Q_2)} \left\{ 2(3+Q_1) + Q_2 \left( \frac{7}{2} + Q_4 \right) - Q_3 \right\}; \\ b_3 &= -pR^2; \quad b_4 = \frac{pR^4}{1+Q_1}; \quad b_5 = -pR^2 \frac{1-Q_1}{1+Q_1}; \\ b_6 &= -\frac{pR^6}{20} \left\{ 6p - \frac{2p}{1+Q_1} [9 + \beta_1^* (15 + Q_5)] + \frac{6}{R^4} (3 - 10\beta_1^*) b_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4}{R^2} \left[ K_4' \left( \frac{R}{l} \right) - K_4 \left( \frac{R}{l} \right) \right] b_8 \right\}, \\ b_7 &= -\frac{2\beta_1^* pR^2}{(1+Q_1) K_2' \left( \frac{R}{l} \right)}; \quad b_8 = -\frac{2\beta_1^* pR^2}{(1+Q_1)(1+Q_2) K_4' \left( \frac{R}{l} \right)} \left\{ \frac{1}{2} (5 + 4Q_1) - \right. \\ &\quad \left. - Q_3 - Q_4 \right\},\end{aligned}\tag{VI.184}$$

где

$$\begin{aligned}Q_1 &= \beta_1^* \left[ 1 + 2 \frac{K_2 \left( \frac{R}{l} \right)}{K_2' \left( \frac{R}{l} \right)} \right]; \\ Q_2 &= 6\beta_1^* \left[ 1 + 4 \frac{K_4 \left( \frac{R}{l} \right)}{K_4' \left( \frac{R}{l} \right)} \right]; \\ Q_3 &= \beta_1^* \frac{3K_2' \left( \frac{R}{l} \right) + 5K_2 \left( \frac{R}{l} \right) - 8K_2 \left( \frac{R}{l} \right)}{K_2' \left( \frac{R}{l} \right)}; \\ Q_4 &= \frac{K_2' \left( \frac{R}{l} \right) - 2K_2 \left( \frac{R}{l} \right) + 4K_2 \left( \frac{R}{l} \right)}{2K_2' \left( \frac{R}{l} \right)};\end{aligned}\tag{VI.185}$$

$$Q_5 = \frac{2K_2''\left(\frac{R}{l}\right) - 5K_2'\left(\frac{R}{l}\right) + 8K_2\left(\frac{R}{l}\right)}{K_2'\left(\frac{R}{l}\right)}$$

Из (VI. 185) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} \beta_1^* &= \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} Q_1 = \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} Q_2 = \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} Q_3 = 0; \\ \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} Q_4 &= \lim_{\frac{R}{l} \rightarrow \infty} Q_5 = \infty. \end{aligned} \quad (\text{VI.186})$$

Из (VI. 184) при условии (VI. 186) найдем

$$\begin{aligned} b_1 &= -\rho R^2; \quad b_2 = -\rho R^4; \quad b_3 = -\rho R^2; \quad b_4 = \rho R^4; \\ b_5 &= -\rho R^2; \quad b_6 = \frac{3}{2} \rho R^6; \quad b_7 = b_8 = \infty. \end{aligned} \quad (\text{VI.187})$$

Приняв во внимание вид оператора Лапласа (VI.114) в безразмерных полярных координатах  $(r, \theta)$ , видим, что значения коэффициентов (VI.187) совпадают с соответствующими им значениями (VI.176).  
Напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_\rho^* &= \rho + \frac{b_3}{R^2 \rho^2} + \frac{\varepsilon}{R^2} \left\{ b_1 \left( -\frac{4}{\rho^2} + \frac{6\beta_1^*}{\rho^4} \right) - \frac{2b_3}{\rho^4} - \frac{6b_4}{R^2 \rho^4} - \right. \\ &- 2b_7 \frac{K_2'(\rho/l^*) \rho - K_2(\rho/l^*)}{\rho^2} \left. \right\} \cos 2\theta + \frac{\varepsilon^2}{R^2} \left\{ b_1 \left( -\frac{4}{\rho^4} + \frac{6\beta_1^*}{\rho^6} \right) - \right. \\ &- \frac{3b_3}{\rho^6} - \frac{6b_4}{R^2 \rho^6} + \frac{b_5}{\rho^2} - b_7 \frac{K_2'(\rho/l^*) \rho - 4K_2(\rho/l^*)}{\rho^4} + \\ &+ \left[ b_1 \left( \frac{12}{\rho^4} - \frac{30\beta_1^*}{\rho^6} \right) + b_2 \left( -\frac{18}{R^2 \rho^4} + \frac{60\beta_1^*}{R^2 \rho^6} \right) + \frac{6b_3}{\rho^6} + \right. \\ &+ \frac{30b_4}{R^2 \rho^6} - \frac{20b_5}{R^4 \rho^6} - b_7 \frac{2K_2''(\rho/l^*) \rho^2 - 5K_2'(\rho/l^*) \rho + 8K_2(\rho/l^*)}{\rho^4} - \\ &\left. \left. - 4b_8 \frac{K_4'(\rho/l^*) \rho - K_4(\rho/l^*)}{\rho^2} \right] \cos 4\theta \right\}; \end{aligned} \quad (\text{VI.188})$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^* &= \rho - \frac{b_3}{R^2 \rho^2} + \frac{\varepsilon}{R^2} \left\{ -\frac{6\beta_1^* b_1}{\rho^4} + \frac{2b_3}{\rho^4} + \frac{6b_4}{R^2 \rho^4} + 2b_7 \frac{K_2' \rho - K_2}{\rho^2} \right\} \cos 2\theta + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{R^2} \left\{ b_1 \left( \frac{4}{\rho^4} - \frac{6\beta_1^*}{\rho^6} \right) + \frac{3b_3}{\rho^6} + \frac{6b_4}{R^2 \rho^6} - \frac{b_5}{\rho^2} + b_7 \frac{K_2' \rho - 4K_2}{\rho^4} + \right. \end{aligned}$$



$$+ \left[ b_1 \left( -\frac{4}{\rho^4} + \frac{30\beta_1^*}{\rho^6} \right) + b_2 \left( \frac{6}{R^2\rho^4} - \frac{60\beta_1^*}{R^2\rho^6} \right) - \frac{6b_3}{\rho^6} - \frac{30b_4}{R^2\rho^6} + \right. \\ \left. + 20 \frac{b_6}{R^4\rho^6} + b_7 \frac{2K_2'\rho^2 - 5K_2'\rho + 8K_2}{\rho^4} + 4b_8 \frac{K_4'\rho - K_4}{\rho^2} \right] \cos 4\vartheta, \quad (\text{VI.189})$$

где коэффициенты  $b_1, b_2, \dots, b_8$  определяются формулами (VI.184).

На рис. VI.10 представлены графики, характеризующие изменение коэффициента концентрации  $k_2 = \sigma_{\vartheta}/\rho$  по сечению  $\vartheta=0$  при  $\varepsilon=0,2$ ,  $\nu=0,25$  и  $(R/l)_{\min}=3$  (сплошная кривая). Штриховая кривая соответствует значению коэффициента

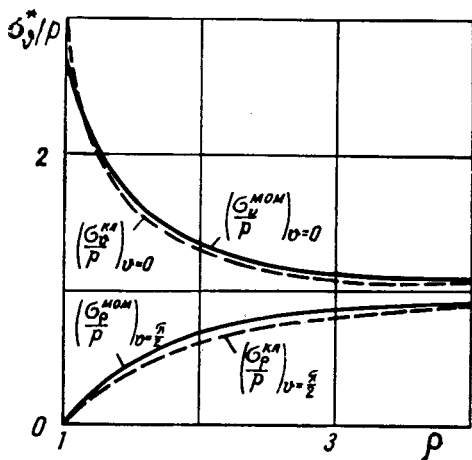


Рис. VI.10.

концентрации напряжений  $k_2$  в том же сечении, найденного по формулам классической теории упругости. Здесь также изображено изменение коэффициента

концентрации  $k_1 = \frac{\sigma_{\rho}}{\rho}$  по сече-

нию  $\vartheta=\pi/2$  (обозначения те же, что и для коэффициента  $k_2$ ). Кривые, показывающие изменение коэффициента концентрации, по классической теории упругости, построены по формулам

$$(\sigma_{\vartheta}^*)_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = p \left\{ 1 - \frac{1}{\rho^2} - 4\varepsilon \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^4} \right) + \varepsilon^2 \left( -\frac{1}{\rho^2} + \frac{10}{\rho^4} - \frac{9}{\rho^6} \right) \right\}; \quad (\text{VI.190})$$

$$(\sigma_{\vartheta}^*)_{\vartheta=0} = p \left\{ 1 + \frac{1}{\rho^2} + \frac{4\varepsilon}{\rho^4} + \varepsilon^2 \left( \frac{1}{\rho^2} - \frac{6}{\rho^4} + \frac{9}{\rho^6} \right) \right\}. \quad (\text{VI.191})$$

**Треугольное и квадратное отверстие в поле равномерного всестороннего растяжения\*.** Предположим, что функция (VI.109), осуществляющая конформное отображение бесконечной упругой изотропной плоскости  $z$ , ослабленной криволинейным отверстием с контуром  $\Gamma$ , на бесконечную плоскость  $\zeta$  с круговым отверстием единичного радиуса, имеет вид

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{\varepsilon}{\zeta^N} \right) \quad (z = re^{i\alpha}, \zeta = \rho e^{i\vartheta}), \quad (\text{IV.192})$$

т. е. функция (VI.110)  $f(\zeta) = 1/\zeta^N$ . Параметры  $R, \varepsilon$  и  $N$  (целое положительное число) характеризуют размеры и формы отверстий.

Заметим, что, подбирая соответственно  $\varepsilon$  и  $N$ , получим отображающие функции для эллиптического, квадратного и треугольного отверстий (последние с закругленными углами).

\* См. Ю. Н. Немиш [2].

Определим концентрацию напряжений около отверстий, соответствующих отображающей функции (VI.192) в случае равномерного всестороннего растяжения «на бесконечности» постоянными усилиями  $p = \text{const}$ . При этом основное напряженное состояние имеет вид (VI.175). Согласно (VI.25) и (VI.27) для  $k$ -го приближения функции напряжений (VI.130) и (VI.134) имеем

$$\begin{aligned} U_k &= \text{Re} [\bar{z} \varphi_k(z) + \chi_k(z)], \\ F_k &= 8(1-\nu) R^2 \text{Im} \varphi'_k(z) + \Omega_k. \end{aligned} \quad (\text{VI.193})$$

Функции  $\varphi_k$ ,  $\chi_k$  и  $\Omega_k$  удобно взять в виде

$$\begin{aligned} \varphi_k &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(k)} R^{n+1} z^{-n}, \\ \psi_k = \chi'_k &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n^{(k)} R^{n+1} z^{-n}, \\ \Omega_k &= R^2 \sum_{-\infty}^{\infty} C_n^{(k)} K_n \left( \frac{R}{l} r \right) e^{ina}. \end{aligned} \quad (\text{VI.194})$$

Определяя дифференциальные операторы  $L_i^j$  (VI.138) для отображающей функции (VI.192) и учитывая комплексное представление  $k$ -го приближения функции напряжений  $U_k$  и  $F_k$  (VI.193), по формулам (VI.136) находим компоненты напряженного состояния в  $k$ -ом приближении.

Учитывая выражения для компонентов обычных и моментных напряжений в нулевом, первом и втором приближениях, из граничных условий (VI.183) получаем системы алгебраических уравнений, решая которые, находим

$$\begin{aligned} B_1^{(0)} &= -p; \quad A_N^{(1)} = -\frac{p}{1+Q_1}; \quad B_{N+2}^{(1)} = -\frac{(N+1)p}{1+Q_1}; \\ C_{N+1}^{(1)} &= -\frac{N(N+1)tp}{(1+Q_1)K'_{N+1}\left(\frac{R}{l}\right)}; \quad B_1^{(2)} = -Np \frac{1-Q_1}{1+Q_1}; \\ A_{2N+1}^{(2)} &= -\frac{Np}{2(2N+1)(1+Q_1)(1+Q_2)} \left\{ 2[1+N(2+Q_1)] + \right. \\ &\quad \left. + Q_2 \left[ \frac{3N+4}{2} + \frac{T_{N+1}^{+(4)}\left(\frac{R}{l}\right)}{K'_{N+1}\left(\frac{R}{l}\right)} \right] - Q_3 \right\}; \end{aligned} \quad (\text{VI.195})$$

$$C_{2N+2}^{(2)} = - \frac{N(N+1)tp}{(1+Q_1)(1+Q_2)K'_{2N+2}\left(\frac{R}{l}\right)} \left\{ \frac{N}{2}(5+4Q_1) - \frac{T_{N+1}^{+(4)}\left(\frac{R}{l}\right)}{K'_{N+1}\left(\frac{R}{l}\right)} - Q_3 \right\};$$

$$(2N+3)B_{2N+3}^{(2)} = (N^2+2N+3)p - \frac{(N+1)p}{1+Q_1} \left\{ 3(N+2) + \right.$$

$$\left. + Nt \left[ (N+2)(2N+3) + \frac{T_{N+1}^{+(1)}\left(\frac{R}{l}\right)}{K'_{N+1}\left(\frac{R}{l}\right)} \right] \right\} + 2(2N+1)[N+2 -$$

$$- (N+1)(2N+3)t] A_{2N+1}^{(2)} + 2(N+1)M_{2N+2}^{(1)}\left(\frac{R}{l}\right) C_{2N+2}^{(2)}.$$

Здесь

$$t = 8(1-\nu) \frac{l^2}{R^2};$$

$$Q_j = \frac{1}{2} t j (N+1) [j(N+1) - 1] \left[ 1 + j(N+1) \frac{K_{j(N+1)}\left(\frac{R}{l}\right)}{K'_{j(N+1)}\left(\frac{R}{l}\right)} \right] \quad (\text{VI.196})$$

$$(j = 1; 2);$$

$$Q_3 = (N+1)t \frac{T_{N+1}^{+(1)}\left(\frac{R}{l}\right) - T_{N+1}^{+(2)}\left(\frac{R}{l}\right)}{K'_{N+1}\left(\frac{R}{l}\right)};$$

$$T_n^{\pm(1)}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) = \frac{1}{2\varrho^{N+1}} \left[ n\varrho M_n^{(1)'}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \mp n^2 M_n^{(1)}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \pm (N+1) M_n^{(3)}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \right];$$

$$T_n^{\pm(2)}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) = \frac{1}{2\varrho^{N+1}} \left[ \varrho M_n^{(2)'}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \mp n M_n^{(2)}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \mp 2(N+1) n M_n^{(1)}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \right];$$

$$T_n^{\pm(4)}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) = \frac{1}{2\varrho^{N+1}} \left[ \varrho K_n^*\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \mp n K_n'\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \pm (N+1) n K_n\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \right];$$

$$M_n^{(1)}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) = \frac{1}{\varrho^2} \left[ \varrho K_n'\left(\frac{R}{l} \varrho\right) - K_n\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \right];$$

$$M_n^{(2)}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) = \frac{1}{\varrho^2} \left[ \varrho K_n'\left(\frac{R}{l} \varrho\right) - n^2 K_n\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \right];$$

$$M_n^{(3)}\left(\frac{R}{l} \varrho\right) = \frac{1}{\varrho^2} \left[ \varrho^2 K_n^*\left(\frac{R}{l} \varrho\right) - \varrho K_n'\left(\frac{R}{l} \varrho\right) + n^2 K_n\left(\frac{R}{l} \varrho\right) \right].$$

Формулы для напряжений  $\sigma_{\phi}^*$  и  $\sigma_{\rho}^*$  с точностью до  $\varepsilon^2$  будут такими:

$$\begin{aligned} \sigma_{\phi}^* = & p - \frac{1}{\rho^2} B_1^{(0)} + \varepsilon \left\{ \frac{2}{\rho^{N+3}} B_1^{(0)} + \frac{N}{\rho^{N+1}} \left[ N - 1 - \frac{(N+1)(N+2)t}{\rho^2} \right] A_N^{(1)} - \right. \\ & \left. - \frac{N+2}{\rho^{N+3}} B_{N+2}^{(1)} + (N+1) M_{N+1}^{(1)} \left( \frac{R}{l} \rho \right) C_{N+1}^{(1)} \right\} \cos(N+1)\theta + \\ + \varepsilon^2 & \left\{ \frac{N(N+2)}{\rho^{2N+4}} B_1^{(0)} + \frac{N(N+1)}{\rho^{2N+2}} \left[ N+1 - \frac{N(N+2)t}{\rho^2} \right] A_N^{(1)} - \frac{N(N+2)}{\rho^{2N+2}} B_{N+2}^{(1)} + \right. \\ & + T_{N+1}^{(1)} \left( \frac{R}{l} \rho \right) C_{N+1}^{(1)} - \frac{1}{\rho^2} B_1^{(2)} + \left[ -\frac{N^2+2N+3}{\rho^{2N+4}} B_1^{(0)} - \frac{N(N+1)}{\rho^{2N+2}} \times \right. \\ \times & \left. \left( 2N - \frac{(N+2)(2N+3)t}{\rho^2} \right) A_N^{(1)} + \frac{2(2N+1)}{\rho^{2N+2}} \left( N - \frac{(N+1)(2N+3)t}{\rho^2} \right) A_{2N+1}^{(2)} + \right. \\ & \left. + \frac{(N+2)(2N+3)}{\rho^{2N+4}} B_{N+2}^{(1)} - \frac{2N+3}{\rho^{2N+4}} B_{2N+3}^{(2)} + T_{N+1}^{(1)} \left( \frac{R}{l} \rho \right) C_{N+1}^{(1)} + \right. \\ & \left. + 2(N+1) M_{2N+2}^{(1)} \left( \frac{R}{l} \rho \right) C_{2N+2}^{(2)} \right\} \cos 2(N+1)\theta; \quad (\text{VI.197}) \\ \sigma_{\rho}^* = & -\sigma_{\phi}^* + 2p - \frac{4N\varepsilon}{\rho^{N+1}} A_N^{(1)} \cos(N+1)\theta + \\ & + \frac{4\varepsilon^2}{\rho^{2N+2}} [N(N+1) A_N^{(1)} - (2N+1) A_{2N+1}^{(2)}] \cos 2(N+1)\theta. \end{aligned}$$

Заметим, что предельным переходом при  $\frac{R}{l} \rightarrow \infty$  из (VI.195) — (VI.197) получаем приближенные формулы классической теории упругости. Однако для плоскости с отверстием вида (VI.192), которая равномерно растягивается усилиями  $p$  в направлениях осей  $x$  и  $y$ , по методу Н. И. Мусхелишвили (1) для напряжений  $\sigma_{\phi}^*$  на контуре  $\Gamma$  в классической теории упругости получаем точную формулу

$$\sigma_{\phi}^* |_{\Gamma} = 2p \frac{1 - N^2 \varepsilon^2}{1 - 2N\varepsilon \cos(N+1)\theta + N^2 \varepsilon^2}. \quad (\text{VI.198})$$

Подбирая соответствующие значения  $\varepsilon$  и  $N$  из приведенных формул можно получить решения рассматриваемых задач для следующих отверстий:

эллиптического  $\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$ ;  $N=1$ ;  $R = \frac{a+b}{2}$  ( $a, b$  — полуоси эллипса);

равностороннего треугольного  $N=2$ ,  $\varepsilon = \pm 1/3$  или  $\varepsilon = \pm 1/4$ ;

квадратного  $N=3$ ,  $\varepsilon = \pm 1/6$  или  $\varepsilon = \pm 1/9$ .

На рис. VI.11 изображено распределение  $\frac{\sigma_{\phi}^*}{\rho}$  и  $\frac{\sigma_{\phi}^*}{\rho}$  вдоль половины контура треугольного отверстия при  $\varepsilon = -1/4$ , а на рис.

VI.12 — вдоль четверти контура квадратного отверстия при  $\varepsilon = -1/9$ . Графики построены по формулам (VI.197), т. е. с учетом второго приближения. Численные значения напряжений получены для величины коэффициента Пуассона  $\nu = 0,25$  и  $\frac{R}{l} = 3$ .

Анализируя полученные результаты, видим, что для свободных отверстий (кругового, эллиптического, треугольного и квадратного)

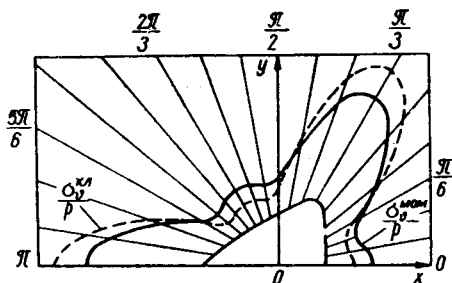


Рис. VI.11.

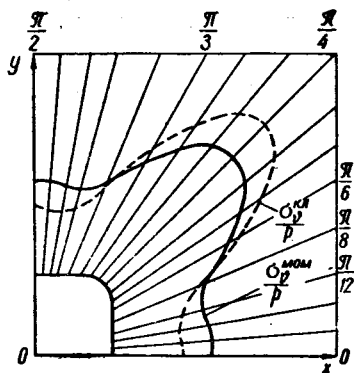


Рис. VI.12.

заметна общая закономерность: максимальное значение коэффициента концентрации для моментной теории понижается в зависимости от величины коэффициента Пуассона  $\nu$  и отношений  $R/l$ .

**Плоская задача для многосвязных (бесконечных) областей\***. Рассмотрим бесконечную область, ослабленную конечным числом произвольно расположенных отверстий (рис. VI.13), контуры  $L_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) которых являются гладкими кривыми и заданы функциями

$$z_k = \omega_k(\zeta_k) = R_k [\zeta_k + \varepsilon \eta_k f_k(\zeta_k)]; \quad (\text{VI.199})$$

$$\varepsilon < 1; \eta_k \leq 1; \varepsilon \eta_k = \varepsilon_k; \varepsilon = \max \{\varepsilon_k\}$$

$$k = 1, 2, \dots, m.$$

Здесь  $f_k(\zeta_k)$  — функции вида  $f_k(\zeta) = \sum_{p=1}^n \frac{C_p^{(k)}}{\zeta^p}$ , где  $C_p^{(k)}$  — известные постоянные коэффициенты.

Функция  $z_k(\zeta)$  осуществляет конформное отображение бесконечной плоскости с круговым отверстием единичного радиуса на бесконечную плоскость с отверстием  $L_k$ .

\* См. Г. Н. Савин и А. Н. Гузь [2], а также А. Н. Гузь и Г. Н. Савин [1].

С каждым из контуров  $L_k$  свяжем систему координат  $(x_k, y_k)$ , а  $(x, y)$  — с произвольной точкой плоскости (рис. VI.13):

$$\begin{aligned} z &= x + iy = re^{i\theta}; \quad z_k = x_k + iy_k = r_k e^{i\theta_k}, \\ \zeta_k &= \rho_k e^{i\theta_k}; \quad z = z_k + l_k; \quad z_k = z_q + R_{kq} e^{i\alpha_{kq}}. \end{aligned} \quad (\text{VI.200})$$

Координатная линия  $\rho_k=1$  совпадает с контуром  $L_k$   $k$ -го отверстия; параметр  $r_0 R_k$  характеризует абсолютные \* размеры  $k$ -го отверстия;  $\beta_q$  — угол между  $r_k$  и  $\rho_q$  (или  $\vec{n}_q$ ) линиями.

Введение функции  $z_k$  (VI.199) дает возможность свести поставленную задачу для функций напряжений к последовательности  $m$  краевых задач для области, соответствующей связности с круговыми в плоскости  $\zeta_k$  отверстиями единичного радиуса.

Решение задачи для многосвязной области сводится к нахождению функций напряжений  $U$  и  $F$ , характеризующих дополнительное напряженное состояние (VI.41) возле отверстий, из уравнений (VI.11) и (VI.12) при граничных условиях (VI.20) или равнозначных им (VI.21). Эти функции должны «на бесконечности» удовлетворять как условиям (VI.43), так и условиям однозначности перемещений.

В силу линейности задачи решение системы уравнений (VI.11) для  $m$ -связной области представляется в виде суммы полных решений для соответствующих односвязных областей, ограниченных контурами  $L_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ), т. е.

$$\begin{aligned} U(r, \theta, \varepsilon) &= \sum_{k=1}^m U^{(k)}(r_k, \theta_k, \varepsilon); \\ F(r, \theta, \varepsilon) &= \sum_{k=1}^m F^{(k)}(r_k, \theta_k, \varepsilon), \end{aligned} \quad (\text{VI.201})$$

причем для каждого  $k$  функции  $U^{(k)}$  и  $F^{(k)}$  имеют вид соответственно (VI.130) и (VI.133). Каждая пара функций  $U^{(k)}$  и  $F^{(k)}$  в отдельности должна удовлетворять условиям «на бесконечности», и, кроме того, эти функции таковы, что главный вектор и главный момент усилий, приложенных к  $L_k$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) контуру, должны быть равны нулю.

\* Все координаты и линейные параметры — безразмерные, отнесенные к  $r_0$ .

Дополнительные трудности, возникающие при решении задачи для многосвязных областей, заключаются в преобразовании  $2(m-1)$  функций  $U^{(k)}$  и  $F^{(k)}$  к  $k$ -ой системе координат  $(r_k, \theta_k)$  (рис. VI.13) и представление этих функций в виде рядов с разделенными переменными.

Переход к  $k$ -ой системе координат необходим для удовлетворения граничных условий задачи на каждом контуре отверстия и, следовательно, для получения полной системы линейных алгебраических уравнений, из которых определяются неизвестные коэффициенты искомым функций  $U^{(k)}$  и  $F^{(k)}$ .

Чтобы задачу сделать одномерной, необходимо в искомым функциях  $U^{(k)}$  и  $F^{(k)}$  перейти от полярных координат к новой криволинейной ортогональной системе координат  $(\rho_k, \vartheta_k)$ , даваемой отображающей функцией  $\omega_k(\zeta_k)$  (VI.199).

Задача значительно упрощается в случае *круговых* отверстий, т. е. для бесконечной плоскости, ослабленной конечным числом произвольно расположенных, не соприкасающихся между собою, круговых отверстий\*.

В этом случае функции напряжений  $U$  и  $F$  для  $m$ -связной области ищем в виде:

$$U = \sum_{q=1}^m A_0^{(q)} \ln r_q + \sum_{q=1}^m \sum_{p=1}^{\infty} \left[ \frac{A_p^{(q)}}{B_p^{(q)}} r_q^{-p} + \frac{C_p^{(q)}}{D_p^{(q)}} r_q^{-p+2} \right] \begin{matrix} \cos p\theta_q; \\ \sin p\theta_q; \end{matrix} \quad (\text{VI.202})$$

$$F = \sum_{q=1}^m F_0^{(q)} K_0 \left( r_q \frac{r_0}{l} \right) + \sum_{q=1}^m \sum_{p=1}^{\infty} \frac{F_p^{(q)}}{E_p^{(q)}} K_p \left( r_q \frac{r_0}{l} \right) \begin{matrix} \cos p\theta_q; \\ \sin p\theta_q; \end{matrix}$$

$$+ 8(1-\nu) l^2 \sum_{q=1}^m \sum_{p=1}^{\infty} (p-1) \frac{D_p^{(q)}}{C_p^{(q)}} r_q^{-p} \begin{matrix} \cos p\theta_q; \\ \sin p\theta_q; \end{matrix}$$

т. е. искомое решение (VI.202) строится как сумма полных решений для соответствующих бесконечных областей с круговым (радиуса  $r_0 R_k$ ) отверстием.

Если главный вектор и главный момент усилий, приложенных к каждому контуру  $L_k$ , равен нулю, то условия однозначности перемещений и условия «на бесконечности» будут выполнены, когда

$$C_1^{(q)} \equiv D_1^{(q)} = 0 \quad (q = 1, 2, \dots, m). \quad (\text{VI.203})$$

При представлении решений (VI.202) в  $k$ -ой системе координат необходимо произвести пересчет всех функций, и в том числе цилиндрических функций. Для пересчета последних необходимо воспользоваться теоремой сложения этих функций.

\* См. А. Н. Гузь и Г. Н. Савин [1].

Удобно ввести в (VI.102) новые постоянные:

$$\begin{aligned} A_p^{(q)} &= x_{p,1}^{(q)}; & C_p^{(q)} &= x_{p,2}^{(q)}; & E_p^{(q)} &= I_p \left( R_q \frac{r_0}{l} \right) x_{p,3}^{(q)}; \\ B_p^{(q)} &= x_{p,4}^{(q)}; & D_p^{(q)} &= x_{p,5}^{(q)}; & F_p^{(q)} &= I_p \left( R_q \frac{r_0}{l} \right) x_{p,6}^{(q)}. \end{aligned} \quad (\text{VI.204})$$

Из граничных условий на  $k$ -ом контуре получим бесконечную систему уравнений в виде:

$$\begin{aligned} \ddot{B}_n^{(k)} X_n^{(k)} + \sum_{q=1}^m \sum_{p=0}^{\infty} B_{n,p}^{(k,q)} X_p^{(q)} &= \ddot{B}_n^{(k)} \\ \left( \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, m \\ n = 0, 1, 2, \dots, \infty \end{array} \right). \end{aligned} \quad (\text{VI.205})$$

Здесь и ниже «штрих» возле суммы обозначает, что в соответствующей сумме член при  $q = k$  опущен;  $X_n^{(k)}$ ;  $\ddot{B}_n^{(k)}$  — шестимерные вектор-столбцы;  $\dot{B}_n^{(k)}$  и  $B_{n,p}^{(k,q)}$  — шестимерные матрицы;

$$X_n^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}; \quad \ddot{B}_n^{(k)} = \{b_j^{**}(n, k)\};$$

$$\dot{B}_n^{(k)} = \|b_{ij}^*(n, k)\|; \quad B_{n,p}^{(k,q)} = \|b_{ij}(n, p, k, q)\|.$$

Эта система (VI.205) может быть преобразована к канонической форме:

$$X_n^{(k)} + \sum_{q=1}^m \sum_{p=0}^{\infty} A_{n,p}^{(k,q)} X_p^{(q)} = b_n^{(k)}, \quad (\text{VI.206})$$

где  $A_{n,p}^{(k,q)} = \|a_{ij}(n, p, k, q)\|$  — шестимерная матрица;  $b_n = \{b_j(n, k)\}$ ;  $X_n^{(k)} = \{x_{n,j}^{(k)}\}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, 6$ ) — шестимерные вектор-столбцы.

Асимптотические представления цилиндрических функций при больших значениях индексов и суммирование некоторых рядов дает возможность показать, что бесконечная система (VI.206) является квазирегулярной\* при любой близости несоприкасающихся контуров и при определенной гладкости\*\* правых частей граничных условий.

Оказывается, что выполнение условий применимости альтернативы Гильберта обеспечивает единственность решения поставленной краевой задачи.

\* Это значит, что решения, найденные из усеченных систем (VI.206) при увеличении числа членов в этих усеченных системах будут стремиться к точному решению бесконечной системы (VI.206), т. е. к искомому (точному) решению задачи.

\*\* В частности, система (VI.206) будет квазирегулярной при условии, если на  $L_k$ -ом контуре функции  $\sigma_{r_k}$  и  $\tau_{r_k \theta_k}$  являются непрерывными, первые производные которых удовлетворяют условию Дирихле, а  $\mu_{r_k}$  — непрерывными функциями на  $L_k$  с их первыми производными; вторая производная от  $\mu_{r_k}$  должна удовлетворять условию Дирихле.



## ЛИТЕРАТУРА

- Аэро Э. Л., Кувшинский Е. В. [1] Основные уравнения теории упругости с вращательным взаимодействием частиц.— Физика твердого тела, 1960, 2, 7.  
[2] Континуальная теория асимметрической упругости.— Равновесие изотропного тела, 1964, 6, 9.
- Ватсон Г. Н. [1] Теория Бесселевых функций, ч. 1. ИЛ., М., 1949.
- Вейтцман [1] Влияние моментного напряжения на концентрацию напряжений вокруг цилиндрического включения в одноосном поле кручения.— Trans. ASME — E, 1965, 2.
- Гузь О. М. [1] Про наближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках.— Прикл. мех., 1962, 8, 6.
- Гузь А. Н., Савин Г. Н. [1] Плоская задача моментной теории упругости для бесконечной плоскости, ослабленной конечным числом круговых отверстий.— ПММ, 1966, 30, 5.
- Гузь А. Н., Савин Г. Н., Цурпал И. А. [1] Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в физически нелинейной упругой пластинке.— Arch. Mech. Stosow, 1964, 4, 16.
- Канторович Л. В., Крылов В. И. [1] Приближенные методы высшего анализа. ГТТИ, М., 1949.
- Койтер В. Т. [1] Моментные напряжения в теории упругости (перевод В. А. Пальмова).— В кн.: Механика, 3, 91. «Мир», М., 1965.
- Кувшинский Е. В., Аэро Э. Д. [1] Континуальная теория асимметрической упругости. Учет «внутреннего» вращения.— Физика твердого тела, 1963, 5, 9.
- Миנדлин Р. Д. [1] Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений.— В кн.: Механика, 4, 86. «Мир», М., 1964.
- Миנדлин Р. Д., Тирстен Г. Ф. [1] Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости.— В кн.: Механика, 4, 86. «Мир», М., 1964.
- Морс Ф. М., Фешбах Г. [1] Методы теоретической физики, т. II. ИЛ, М., 1960.
- Мухелишвили Н. И. [1] Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
- Немиш Ю. Н. [1] Плоская задача моментной теории упругости для области с круговым отверстием.— Прикл. мех., 1965, 1, 5.  
[2] Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в несимметричной теории упругости.— Прикл. мех., 1966, 2, 4.  
[3] Подкрепленное круговое отверстие в упругом поле с несимметричным тензором напряжений.— Прикл. мех., 1966, 2, 7.  
[4] Плоская задача моментной теории упругости для областей с отверстием. Автореферат канд. диссерт., К., 1966.
- Новаяцкий В. [1] Моментные напряжения в термоупругости.— Прикл. мех., 1967, 3, 1.
- Пальмов В. А. [1] Основные уравнения теории несимметричной упругости.— ПММ, 1964, 28, 3.  
[2] Плоская задача несимметричной теории упругости.— ПММ, 1964, 28, 6.
- Савин Г. Н. [1] Концентрация напряжений около отверстий. ГТТИ, М., 1951.  
[2] Основы плоской задачи моментной теории упругости. Изд-во КГУ, К., 1965.
- Савин Г. Н., Гузь А. Н. [1] О напряженном состоянии около криволинейных отверстий в оболочках.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1964, 6.  
[2] Об одном способе решения плоских задач моментной теории упругости для многосвязных областей.— Прикл. мех., 1966, 2, 1.
- Фильчаков П. Ф. [1] Приближенные методы конформных отображений. «Наукова думка», К., 1964.
- Хартренфт, Си. [1] Влияние моментных напряжений на концентрацию напряжений около кругового включения.— Trans. ASME — E, 1965, 2.
- Хоппмен, Шоуэн. [1] Физическая модель изотропного упругого материала с тремя константами.— Trans. ASME — E, 1965, 4.
- Cosserat E. et Cosserat F. [1] Theorie des corps deformables. A. Hermann et Fils, Paris, 1909.

- Misicu M. [1] Theory of viscoelasticity with couple stresses and some reductions to two-dimensional problems. 1, *Revue de mecanique*, 8, 6, 1963.  
[2] Theory of viscoelasticity with couple stress and some reductions to two-dimensional problems. 2, *Serie de mecanique appliquee*, 9, 1, 1964.  
[3] On a theory of asymmetric plastic and viscoelastic-plastic solids. *Revue Roumaine des sciences techniques, Serie de mecanique appliquee*, 9, 3, 1964.
- Neuber H. [3] On the general solution of linear-elastic problems in isotropic and anisotropic Cosserat-continuum. Lecture at the 11-th International congress of Applied Mechanics Munchen, 1964.
- Schaefer H. [1] Versuch einer Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Cosserat — Kontinuums., *Miszellaneen der Angewandten Mechanik*, Berlin, Akad.—Verlag, 1962.
- Voigt W. [1] Theoretische Studien über die Elastizitätsverhältnisse der Kristalle, *Abh., Gess. Wiss. Göttingen* 34, 1887.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ СВОБОДНЫХ И ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОТВЕРСТИЙ

В предыдущих главах рассматривалось влияние различного рода отверстий на распределение напряжений, обусловленных действием силовой нагрузки при постоянной температуре тела. Если температура тела изменяется, то наряду с напряжениями, вызванными силовой нагрузкой, в теле могут возникнуть так называемые температурные напряжения. Определение этих напряжений составляет предмет температурной задачи теории упругости. Очевидно, величина и закон распределения температурных напряжений зависят от изменения температуры тела, которое определяется решением задачи теплопроводности. Вполне естественно поэтому температурную задачу теории упругости рассматривать в комплексе с соответствующей задачей теории теплопроводности.

В настоящей главе приводятся основные уравнения температурной плоской задачи теории упругости и задачи изгиба тонких плит, а также уравнения двумерной задачи теории теплопроводности. Рассмотренные здесь примеры не исчерпывают всех существующих решений температурной задачи теории упругости, а иллюстрируют лишь характерные особенности задачи о влиянии отверстий на распределение напряжений в упругих телах с постоянными термоупругими характеристиками. Более полное изложение вопроса, а также решение многих конкретных задач можно найти в монографиях Н. Н. Лебедева [1], Э. Мелана и Г. Паркуса [1], Г. Паркуса [1], В. Новацкого [1], Б. Боли и Дж. Уэйнера [1], А. Д. Коваленко [1], А. В. Лыкова [1], Г. Карслоу и Д. Егера [1], посвященных температурным задачам теории упругости и задачам теории теплопроводности.

### § 1. Основные уравнения плоской температурной задачи теории упругости и задачи теории изгиба тонких плит

**Исходные уравнения температурной задачи теории упругости.** Если температура деформируемого твердого тела изменяется на величину  $t$ , являющуюся, вообще говоря, функцией координат и времени, в нем могут возникнуть напряжения, обусловленные несовместностью чисто тепловой деформации. Чтобы убедиться в этом, разделим мысленно рассматриваемое тело на малые элементы так, чтобы внутри каждого из них температуру можно было считать равномерно распределенной. Тогда каждый из элементов, не встречая сопротивления со стороны соседних, получит чисто тепловое расширение, характеризую-

мое в случае изотропного тела компонентами тензора температурной деформации.

$$\varepsilon_x^{(t)} = \varepsilon_y^{(t)} = \varepsilon_z^{(t)} = \alpha_t t, \quad \gamma_{xy}^{(t)} = \gamma_{yz}^{(t)} = \gamma_{zx}^{(t)} = 0, \quad (\text{VII.1})$$

где  $\alpha_t$  — температурный коэффициент линейного расширения.

Если чисто тепловая деформация несовместна, т. е. продеформированные таким образом элементы не составляют сплошного тела, то в нем должны возникнуть восстанавливающие сплошность внутренние (температурные) напряжения.

Обусловленные в упругом изотропном теле этими напряжениями компоненты тензора силовой деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^{(s)} &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], & \gamma_{xy}^{(s)} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y^{(s)} &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)], & \gamma_{yz}^{(s)} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z^{(s)} &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], & \gamma_{zx}^{(s)} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx} \end{aligned} \quad (\text{VII.2})$$

должны быть такими, чтобы компоненты тензора полной деформации

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^{(s)} + \alpha_t t, & \varepsilon_y &= \varepsilon_y^{(s)} + \alpha_t t, & \varepsilon_z &= \varepsilon_z^{(s)} + \alpha_t t, \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}^{(s)}, & \gamma_{yz} &= \gamma_{yz}^{(s)}, & \gamma_{zx} &= \gamma_{zx}^{(s)} \end{aligned} \quad (\text{VII.3})$$

удовлетворяли условиям сплошности. При этом тензор полной деформации является потенциальным, и для него имеют место соотношения Коши.

Исключив из формул (VII.2) и (VII.3) компоненты тензора силовой деформации, получим соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha_t t, & \gamma_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha_t t, & \gamma_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha_t t, & \gamma_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} \tau_{zx}, \end{aligned} \quad (\text{VII.4})$$

обобщающие закон Гука на случай, когда температура тела изменяется на величину  $t$ .

**Плоская задача.** Если исходить из предположений, принимаемых при формулировке плоской задачи теории упругости, вместо соотношений (VII.4) можно записать

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) + \alpha_t t, \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) + \alpha_t t, \quad \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}, \quad (\text{VII.5})$$

где в случае плоской деформации  $t = t(x, y, \tau)$ , и вместо  $\alpha_t, \nu, E$  следует принять

$$\alpha_t^* = \alpha_t(1 + \nu), \quad \nu^* = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad E^* = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad (\text{VII.6})$$

а также

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) - \alpha_t E t. \quad (\text{VII.7})$$

В случае обобщенного плоского напряженного состояния (тонкие пластинки) в уравнениях (VII.5) под компонентами напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, t_{x,y}$  и температурой  $t$  следует понимать их средние по толщине значения:

$$\sigma_x^* = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dZ, \quad \sigma_y^* = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dZ, \quad \tau_{x,y}^* = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{x,y} dZ, \quad (\text{VII.8})$$

$$T_1 = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t dZ.$$

Для того чтобы не было изгиба пластинки из срединной ее плоскости, функция  $t(x, y, Z, \tau)$  должна быть симметричной относительно срединной плоскости.

Компоненты тензора напряжения должны, как обычно, удовлетворять уравнениям равновесия (I.1) и уравнению совместности

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

которое после подстановки в него (VII.5) принимает вид

$$\Delta(\sigma_x + \sigma_y) = -\alpha_t E \Delta t \quad (\text{VII.9})$$

и является, как видим, неоднородным. Поэтому, если ввести функцию напряжений с помощью соотношений (1.6), то для ее определения получим неоднородное бигармоническое уравнение

$$\Delta \Delta U = -\alpha_t E \Delta t, \quad (\text{VII.10})$$

общее решение которого может быть представлено в виде

$$U = \text{Re} [\bar{z} \varphi_1(z) + \chi_1(z)] - \frac{\alpha_t E}{4} \iint t dz d\bar{z}. \quad (\text{VII.11})$$

При этом для определения двух аналитических функций  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z) = \chi_1'(z)$  вместо (1.9) и (1.10) получим контурные условия

$$\varphi_1(z) + \overline{z \varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = f_1 + i f_2 + \frac{\alpha E}{2} \int t dz + C \quad \text{на } L, \quad (\text{VII.12})$$

$$\kappa \varphi_1(z) - \overline{z \varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} = 2\mu [g_1 + i g_2 - \frac{\alpha_t(1+\nu)}{2} \int t dz] \quad \text{на } L. \quad (\text{VII.13})$$

В случае первой основной задачи иногда удобнее вместо (VII.12) пользоваться контурным условием

$$\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)} - [z\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)] e^{2i\theta} = N - iT + \frac{\alpha_t E}{2} \left( t - e^{2i\theta} \int \frac{\partial t}{\partial z} dz \right) \text{ на } L, \quad (\text{VII.14})$$

где  $N$  и  $T$  — соответственно нормальная и касательная к  $L$  составляющие напряжения, а  $\Phi_1(z) = \varphi_1'(z)$ ,  $\Psi_1(z) = \psi_1'(z)$ .

Если функции  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  найдены, компоненты напряжения и перемещения определяются по формулам

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)} + \frac{\alpha_t E}{2} \int t dz; \quad (\text{VII.15})$$

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}] - \alpha_t E t, \quad (\text{VII.16})$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[z\overline{\varphi_1''(z)} + \overline{\psi_1'(z)}] - \alpha_t E \int \frac{\partial t}{\partial z} dz.$$

Соотношения (VII.12) — (VII.16) впервые, насколько нам известно, установлены Н. Н. Лебедевым [1]. В случае тонких пластин они справедливы, как уже отмечалось, при симметричном распределении температуры относительно срединной плоскости.

**Изгиб тонких плит.** Несимметричное относительно срединной плоскости пластины температурное поле может привести к ее изгибу. Если исходить из обычных в теории изгиба тонких плит предположений и воспользоваться \* соотношениями (VII.4) для определения напряжений в плите, обусловленных ее прогибом  $w$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{EZ}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - \frac{\alpha_t E t}{1-\nu}, \\ \sigma_y &= -\frac{EZ}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \frac{\alpha_t E t}{1-\nu}, \\ \tau_{xy} &= -\frac{EZ}{1+\nu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (\text{VII.17})$$

Аналогично для моментов и перерезывающих сил \*\* найдем

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{h} T^* \right], \\ M_y &= -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{h} T^* \right], \\ H_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \end{aligned} \quad (\text{VII.18})$$

\* См. Г. Н. Савин [1], формула (6.3).

\*\* Там же, формулы (6.7), (6.8).

$$N_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \Delta w + \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{h} T^* \right), \quad (VII.19)$$

$$N_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \Delta w + \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{h} T^* \right),$$

где

$$T^* = \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} tZdZ. \quad (VII.20)$$

Подставив значения  $N_x$  и  $N_y$  из (VII.19) в третье уравнение \* равновесия, для определения прогиба тонкой изотропной плиты получим неоднородное бигармоническое уравнение

$$\Delta \Delta w = - \frac{2\alpha_t(1+\nu)}{h} \Delta T^*, \quad (VII.21)$$

общее решение которого имеет вид

$$w = \operatorname{Re} [\bar{z}\varphi(z) + \bar{\chi}(z)] - \frac{\alpha_t(1+\nu)}{2h} \iint T^* dzd\bar{z}. \quad (VII.22)$$

При этом для определения аналитических функций\*\*  $\varphi(z)$  и  $\psi(z) = \chi'(z)$  будем иметь следующие контурные условия:

$$n\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = f_1 + if_2 + \frac{\alpha_t(1+\nu)}{h} \int T^* dz + iCz + C_1 \text{ на } L', \quad (VII.23)$$

$$\varphi(z) + \overline{z\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} = g_1 + ig_2 + \frac{\alpha_t(1+\nu)}{h} \int T^* dz \text{ на } L. \quad (VII.24)$$

Если функции  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  найдены, то моменты и перерезывающие силы, как показал Р. Н. Швец, определяются из формул

$$M_x + M_y = -2(1+\nu)D \left[ \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + \frac{\alpha_t(1-\nu)}{h} T^* \right],$$

$$M_y - M_x + 2iH_{xy} = 2(1-\nu)D \left[ \overline{z\varphi''(z)} + \psi'(z) - \frac{\alpha_t(1+\nu)}{h} \int \frac{\partial T^*}{\partial z} d\bar{z} \right], \quad (VII.25)$$

$$N_x - iN_y = -4D\varphi''(z).$$

В общем случае нагревания тонкой пластины в ней могут возникнуть как напряжения изгиба, так и напряжения, соответствующие обобщенному плоскому напряженному состоянию. Тогда общее на-

\* См. Г. Н. Савин [1].

\*\* Там же.

пряженное состояние в силу линейности задачи определяется формулами

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_x^* + 12M_x \frac{Z}{h^3} + \frac{\alpha_t E}{1-\nu} \left( T + \frac{2Z}{h} T^* - t \right), \\ \sigma_y &= \sigma_y^* + 12M_y \frac{Z}{h^3} + \frac{\alpha_t E}{1-\nu} \left( T + \frac{2Z}{h} T^* - t \right), \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy}^* + 12H_{xy} \frac{Z}{h^3}.\end{aligned}\quad (\text{VII.26})$$

Таким образом, для определения напряжений в случае плоской деформации необходимо знать плоское температурное поле  $t(x, y, \tau)$ . Для определения средних по толщине напряжений и изгибающих моментов тонких пластинок необходимо найти средние по толщине значения температуры  $T$  и  $T^*$ , а для определения напряжений — также и температуру  $t(x, y, Z, \tau)$ .

## § 2. Основные уравнения теории теплопроводности

**Трехмерная задача.** Для определения температурного поля в твердом теле пользуются уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial Z^2} = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (\text{VII.27})$$

где  $\tau$  — время;  $a = \lambda/c$  — температуропроводность ( $\lambda$  — теплопроводность,  $c$  — теплоемкость единицы объема).

В начальный момент времени  $\tau=0$  температура тела должна также удовлетворять начальному условию

$$t(x, y, Z, 0) = f(x, y, Z) \quad (\text{VII.28})$$

и условиям на границе тела  $S$ .

Обычно различают четыре вида граничных условий: граничное условие первого рода

$$t = f_1(M, \tau), \quad M \in S, \quad \tau > 0; \quad (\text{VII.29})$$

граничное условие второго рода

$$\frac{\partial t}{\partial n} = f_2(M, \tau), \quad M \in S, \quad \tau > 0; \quad (\text{VII.30})$$

граничное условие третьего рода

$$\frac{\partial t}{\partial n} + k(t - t_c) = 0 \text{ на } S \text{ при } \tau > 0. \quad (\text{VII.31})$$



При идеальном тепловом контакте двух тел граничные условия будут иметь вид:

$$t_1 = t_2, \quad \lambda_1 \frac{\partial t_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial t_2}{\partial n} \quad \text{на } S \text{ при } \tau > 0, \quad (\text{VII.32})$$

где  $n$  — внешняя нормаль к поверхности тела,  $k = \frac{\alpha_n}{\lambda}$  — относительный коэффициент ( $\alpha_n$  — абсолютный коэффициент теплоотдачи в среду с температурой  $t_c$ ).

**Плоское температурное поле.** Если температура тела не зависит от координаты  $Z$ , то имеет место плоское температурное поле. Последнее возможно в цилиндрических телах произвольной длины, в том числе и в тонких пластинах, торцовые поверхности которых теплоизолированы, а начальное условие (VII.28) и граничные условия на цилиндрических поверхностях одинаковы в любом поперечном сечении. При этом температура  $t(x, y, \tau)$  будет удовлетворять двумерному уравнению теплопроводности

$$\Delta t = \frac{1}{a} \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right), \quad (\text{VII.33})$$

начальному условию

$$t(x, y, \tau) = f_1(x, y) \quad \tau = 0 \quad (\text{VII.34})$$

и одному из граничных условий (VII.29) — (VII.32) на контуре  $L$ , ограничивающем поперечное сечение тела.

Таким образом, определение плоского поля сводится к двумерной краевой задаче теплопроводности.

**Уравнения теплопроводности тонких пластин.** В общем случае, когда температура в пластине изменяется также и по толщине, температурное поле необходимо определить из уравнения (VII.27) и соответствующих краевых условий. Однако, как отмечалось, обобщенное напряженное состояние пластинки, а также изгибающие моменты характеризуются величинами

$$T = \frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} t dZ, \quad T^* = \frac{6}{h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Z t dZ, \quad (\text{VII.35})$$

определение которых, как и в случае плоского поля, может быть сведено к решению некоторой двумерной краевой задачи теплопроводности.

Сформулируем эту задачу для случая, когда с торцовых поверхностей пластины  $Z = \pm h/2$  происходит теплоотдача в среду согласно граничному условию (VII.31).

Умножив уравнение (VII.27) на  $\frac{1}{h} dZ$  и  $\frac{6}{h^2} Z dZ$  и интегрируя в пределах от  $-h/2$  до  $+h/2$ , получим

$$\Delta T - \frac{1}{h} (k^+ t^+ + k^- t^-) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{1}{h} (k^+ t_c^+ + k^- t_c^-), \quad (\text{VII.36})$$

$$\Delta T^* - \frac{3}{h} (k^+ t^+ - k^- t^-) - \frac{6}{h^2} (t^+ - t^-) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial T^*}{\partial \tau} - \frac{3}{h} (k^+ t_c^+ - k^- t_c^-),$$

где  $t^+$ ,  $t^-$  — температура, а  $k^+$ ,  $k^-$  — относительные коэффициенты теплоотдачи на поверхностях  $Z = \pm h/2$  соответственно;  $t_c^+$ ,  $t_c^-$  — температура среды, омывающей каждую из этих плоскостей.

Чтобы исключить из (VII.36) неизвестные значения температуры  $t^+$  и  $t^-$  на плоскостях  $Z = \pm h/2$ , выразим эти значения через искомые величины  $T$  и  $T^*$  (VII.35). Представив для этого уравнения (VII.27) в виде

$$\frac{\partial^2 t}{\partial Z^2} + p^2 t = 0, \quad (\text{VII.37})$$

где  $p^2 = \Delta - \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau}$ , и воспользовавшись символическим методом, запишем

$$t = \cos pZ t_0 + \frac{\sin pZ}{p} t_0^*, \quad (\text{VII.38})$$

где  $t_0$  — значение температуры, а  $t_0^*$  — ее производной по  $Z$  на срединной плоскости.

Выражая с помощью (VII.35)  $t_0$  и  $t_0^*$  через  $T$  и  $T^*$ , получим соотношение

$$t = \frac{p \frac{h}{2} \cos pZ}{\sin p \frac{h}{2}} T + \frac{\left(p \frac{h}{2}\right)^2}{3} \frac{\sin pZ}{\sin p \frac{h}{2} - p \frac{h}{2} \cos p \frac{h}{2}} T^*, \quad (\text{VII.39})$$

с помощью которого путем простого дифференцирования можно определить температуру через ее усредненные характеристики  $T$  и  $T^*$ . Внося (VII.39) в (VII.36), для определения этих характеристик получим\* систему уравнений бесконечно высокого порядка

$$\left(p \frac{h}{2}\right)^2 T - kp \frac{h}{2} \operatorname{ctg} p \frac{h}{2} T - \frac{k^*}{3} \frac{\left(p \frac{h}{2}\right)^2}{1 - p \frac{h}{2} \operatorname{ctg} p \frac{h}{2}} T^* = -(kt_c + k^* t_c^*), \quad (\text{VII.40})$$

$$\left(p \frac{h}{2}\right)^2 T^* - (1+k) \frac{\left(p \frac{h}{2}\right)^2}{1 - p \frac{h}{2} \operatorname{ctg} p \frac{h}{2}} T^* - 3k^* p \frac{h}{2} \operatorname{ctg} p \frac{h}{2} T = -3(k t_c^* + k^* t_c),$$

\* См. Я. С. Подстригач [4].

где

$$k = \frac{h}{4}(k^+ + k^-), \quad k^* = \frac{h}{4}(k^+ - k^-), \quad t_c = \frac{1}{2}(t_c^+ + t_c^-), \\ t_c^* = \frac{1}{2}(t_c^+ - t_c^-).$$

Если для описания теплофизических свойств тонкой пластинки ввести приведенную теплопроводность  $\lambda^* = \lambda h$ , приведенную теплоемкость  $c^* = ch$  и термосопротивление  $r^* = h/\lambda$ , то, переходя в (VII.40) к пределу при  $h \rightarrow 0$ , сохраняя  $\lambda^*$ ,  $c^*$ ,  $r^*$  постоянными, для определения  $T$  и  $T^*$  получим \* следующую систему двух уравнений второго порядка:

$$\lambda^* \Delta T - (\varepsilon T + \varepsilon^* T^*) = c^* \frac{\partial T}{\partial \tau} - (\varepsilon t_c + \varepsilon^* t_c^*), \quad (\text{VII.41})$$

$$\lambda^* \Delta T^* - 3(\varepsilon^* T + \varepsilon_0 T^*) = c^* \frac{\partial T^*}{\partial \tau} - 3(\varepsilon t_c^* + \varepsilon^* t_c),$$

где  $\varepsilon = \frac{1}{r^+} + \frac{1}{r^-}$ ,  $\varepsilon^* = \frac{1}{r^+} - \frac{1}{r^-}$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{1}{r^+} + \frac{1}{r^-} + \frac{4}{r^*}$ ;  $r^+$ ,  $r^-$  — сопротивление теплообмену на поверхностях  $Z = \pm \frac{h}{2}$  соответственно.

Системы уравнений (VII.40) и (VII.41) получены Я. С. Подстригачем [4]. Система уравнений (VII.41) с учетом источников тепла получена также В. В. Болотиным [1] на основании вариационного принципа в предположении о линейном распределении температуры по толщине пластинки.

Система (VII.41) уравнений теплопроводности тонких пластин, как показали И. А. Мотовиловец [1] и В. М. Гембара [1], сводится к одному разрешающему уравнению

$$\lambda^* \Delta \theta_i - (\varepsilon + 3\mu_i \varepsilon^*) \theta_i = c^* \frac{\partial \theta_i}{\partial \tau} - [(\varepsilon + 3\mu_i \varepsilon^*) t_c + (\varepsilon^* + 3\mu_i \varepsilon) t_c^*], \quad (\text{VII.42})$$

где

$$\theta_i = T + \mu_i T^*, \quad i = 1, 2, \quad \mu_{1,2} = \frac{1}{6\varepsilon^*} [3\varepsilon_0 - \varepsilon \pm \sqrt{(3\varepsilon_0 - \varepsilon)^2 + 12\varepsilon^*}].$$

Переходя к пределу при  $h \rightarrow 0$  в соотношении (VII.39), сохранив при этом постоянным вместе с  $Z$  отношение  $Z/h$ , получим

$$t = T + \frac{2Z}{h} T^*. \quad (\text{VII.43})$$

Если задача теплопроводности симметрична относительно срединной поверхности пластинки, т. е.  $t_c^+ = t_c^- = t_c$ ,  $\alpha^+ = \alpha^- = \alpha$ ,  $T^* = 0$  то, учи-

\* См. Я. С. Подстригач [4]; В. В. Болотин [1].

Тывая, что при этом в силу (VII.43)  $t = T$ , вместо (VII.41) получим уравнение

$$\Delta t - \kappa^2 (t - t_c) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau}, \quad (\text{VII.44})$$

где

$$\kappa^2 = \frac{2\alpha}{\lambda h}.$$

Краевые условия, которым должны удовлетворять величины  $T$  и  $T^*$ , вытекают из (VII.28) — (VII.32):  
начальное условие

$$T = F_0(x, y, 0), \quad T^* = F_0^*(x, y, 0); \quad (\text{VII.45})$$

условия первого рода

$$T = F_1(M, \tau), \quad T^* = F_1^*(M, \tau), \quad M \in L, \quad \tau > 0; \quad (\text{VII.46})$$

условия второго рода

$$\frac{\partial T}{\partial n} = F_2(M, \tau), \quad \frac{\partial T^*}{\partial n} = F_2^*(M, \tau), \quad M \in L, \quad \tau > 0; \quad (\text{VII.47})$$

условия третьего рода

$$\frac{\partial T}{\partial n} + k(T - T_c) = 0, \quad \frac{\partial T^*}{\partial n} + k(T^* - T_c) = 0, \quad M \in L, \quad \tau > 0; \quad (\text{VII.48})$$

условия идеального теплового контакта

$$T_1 = T_2, \quad T_1^* = T_2^*, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial n}, \quad \lambda_1 \frac{\partial T_1^*}{\partial n} = \lambda_2 \frac{\partial T_2^*}{\partial n}, \quad M \in L, \quad \tau > 0, \quad (\text{VII.49})$$

где  $n$  — нормаль к контуру  $L$ , ограничивающему срединную плоскость пластинки.

**Условия теплообмена на подкрепленном крае пластинки с отверстием.** Предположим, что край отверстия в тонкой пластинке толщиной  $h$  подкреплен кольцом из другого материала такой же толщины и ширины  $h_k$  (рис. VII.1). Предполагая, что теплообмен системы с окружающей средой происходит по закону Ньютона, а между кольцом и пластинкой по поверхности  $S$  осуществляется идеальный тепловой контакт, для определения температурного поля согласно (VII.44) имеем следующие уравнения:

для пластинки

$$\Delta t - \kappa^2 (t - t_c) = \frac{c}{\lambda} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau}; \quad (\text{VII.50})$$

для кольца

$$\Delta t_k - \kappa_k^2 (t_k - t_c) = \frac{c_k}{\lambda_k} \cdot \frac{\partial t_k}{\partial \tau}; \quad (\text{VII.51})$$

граничные условия

$$\lambda_{\kappa} = \frac{\partial t_{\kappa}}{\partial n} = \lambda \frac{\partial t}{\partial n}, \quad t_{\kappa} = t \quad \text{на } S, \quad \lambda_{\kappa} \frac{\partial t_{\kappa}}{\partial n} = \alpha_S (t_{\kappa} - t_c) \quad \text{на } S_c; \quad (\text{VII.52})$$

$$\lambda \frac{\partial t}{\partial n} = -\alpha'_S (t - t_c) \quad \text{на } S'_c; \quad (\text{VII.53})$$

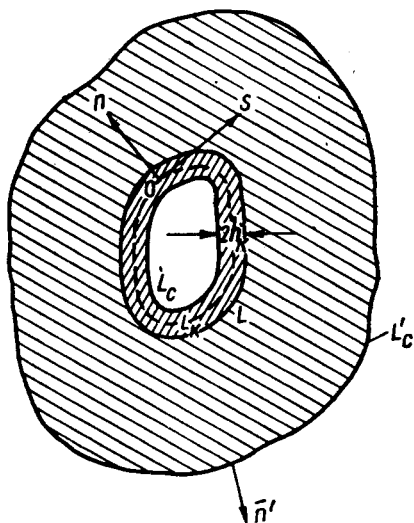


Рис. VII.1.

начальные условия

$$\bar{t}_c = t_c^{(0)}, \quad \bar{t}_{\kappa} = t_{\kappa}^{(0)} \quad \text{при } \tau = 0, \quad (\text{VII.54})$$

где  $t$ ,  $t_{\kappa}$ ,  $t_c$  — температура соответственно пластинки, кольца и среды, омывающей поверхности системы;  $\kappa_{\kappa}^2 = \frac{2\alpha_Z}{\lambda_{\kappa} h}$ ,  $\lambda_{\kappa}$  — теплопроводность материала кольца,  $c_{\kappa}$  — его теплоемкость,  $\alpha_Z$  — коэффициент теплоотдачи с боковых поверхностей  $Z = \pm h/2$  стержня,  $\alpha_S$  — коэффициент теплоотдачи с внутренней цилиндрической поверхности  $S_c$  стержня,  $\alpha'_S$  — коэффициент теплоотдачи с внешней цилиндрической поверхности  $S'_c$  пластинки.

Принимая, что ширина кольца  $h_{\kappa}$  одного порядка с толщиной  $h$ , будем рассматривать его как тонкий стержень. Сформулируем условие,

которому должна удовлетворять температура пластинки на подкрепленном крае, считая, что ось стержня совпадает с контуром пластинки. Для этого отнесем стержень к координатам  $(s, n)$  (рис. VII.1.) и, записав уравнение (VII.51) в этих координатах, пренебрежем величинами  $k$ ,  $n$  ( $k$  — кривизна оси стержня  $L_{\kappa}$ ) по сравнению с единицей. Для определения температуры кольца получим уравнение

$$\frac{\partial^2 t_{\kappa}}{\partial n^2} + p^2 t_{\kappa} = -\kappa_{\kappa}^2 t_c, \quad (\text{VII.55})$$

решение которого с учетом двух последних условий [(VII.52)] имеет следующий вид:

$$t_{\kappa} = \left\{ t^+ \left[ \lambda_{\kappa} p \cos p \left( \frac{h_{\kappa}}{2} + n \right) + \alpha_S \sin p \left( \frac{h_{\kappa}}{2} + n \right) \right] + t_c^- \alpha_S \sin p \left( \frac{h_{\kappa}}{2} - n \right) \right\} + \frac{\kappa_{\kappa}^2}{p} \sin p \left( \frac{h_{\kappa}}{2} - n \right) \int_{-\frac{h_{\kappa}}{2}}^{\frac{h_{\kappa}}{2}} t_c \left[ \lambda_{\kappa} p \cos p \left( \frac{h_{\kappa}}{2} + n \right) + \alpha_S \sin p \left( \frac{h_{\kappa}}{2} + n \right) \right] dn \times$$

$$\times (\lambda_{\kappa} \rho \cos ph_{\kappa} + \alpha_S \sin ph_{\kappa})^{-1} + \frac{\alpha_{\kappa}^2}{\rho} \int_{\frac{h_{\kappa}}{2}}^n \sin \rho (n_0 - n) t_c dn_0, \quad (\text{VII.56})$$

где индексы «плюс» и «минус» указывают на значение функций при  $n = \pm h_{\kappa}/2$  соответственно;  $\rho^2 = \frac{\partial^2}{\partial s^2} - \alpha_{\kappa}^2 - \frac{c_{\kappa}}{\lambda_{\kappa}} \frac{\partial}{\partial \tau}$  ( $ds$  — элемент дуги  $L_{\kappa}$ ).

Подставляя выражение для температуры стержня (VII.56) в первое граничное условие (VII.52), получаем, что на контуре температура пластинки должна удовлетворять уравнению бесконечно высокого порядка

$$\begin{aligned} & \left( \cos ph_{\kappa} \frac{\sin ph_{\kappa}}{\rho \lambda_{\kappa} r_S} \right) \lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)^+ - \left( \frac{\cos ph_{\kappa}}{r_S} - \lambda_{\kappa} \rho \sin ph_{\kappa} \right) t^+ + \\ & + \frac{t_c}{r_S} + \frac{\alpha_{\kappa}^2}{\rho} \int_{-\frac{h_{\kappa}}{2}}^{\frac{h_{\kappa}}{2}} \left[ \lambda_{\kappa} \rho \cos \rho \left( \frac{h_{\kappa}}{2} + n \right) + \frac{1}{r_S} \sin \rho \left( \frac{h_{\kappa}}{2} + n \right) \right] t_c dn = 0, \quad (\text{VII.57}) \end{aligned}$$

где  $r_S = 1/\alpha_S$  — сопротивление теплообмену на цилиндрической поверхности  $S_c$  стержня.

Как и при выводе условий неидеального теплового контакта твердых тел\*, введем следующие теплофизические параметры:  $\lambda_{\kappa}^* = \lambda_{\kappa} F$  — приведенная теплопроводность стержня;  $c_{\kappa}^* = c_{\kappa} F$  — его приведенная теплоемкость;  $r_{\kappa}^* = \frac{h_{\kappa}}{\lambda_{\kappa} h}$  — приведенное внутреннее термосопротивление;  $r_Z^* = \frac{1}{\alpha_Z h_{\kappa}}$  — приведенное сопротивление теплообмену на поверхностях  $Z = \pm h/2$  стержня;  $r_S^* = \frac{1}{\alpha_S h}$  — приведенное сопротивление теплообмену на цилиндрической поверхности  $S_c$  стержня;  $F = h h_{\kappa}$  — площадь поперечного сечения стержня.

Перейдем в уравнении (VII.57) к пределу при  $h_{\kappa} \rightarrow 0$ , используя теорему о среднем и сохраняя  $\lambda_{\kappa}^*$ ,  $c_{\kappa}^*$ ,  $r_{\kappa}^*$ ,  $r_Z^*$  постоянными, но пренебрегая произведениями  $\lambda_{\kappa}^* \cdot r_{\kappa}^*$ ,  $c_{\kappa}^* \cdot r_{\kappa}^*$ ,  $\alpha_Z^* \cdot r_{\kappa}^*$ . Получаем условие теплообмена на подкрепленном тонком стержне крае  $L$  пластинки\*\*

$$\left[ \lambda_{\kappa}^* \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \left( 1 + \frac{r_{\kappa}^*}{r_S^*} \right) \lambda_{\kappa}^* \frac{\partial}{\partial n} - c_{\kappa}^* \frac{\partial}{\partial \tau} \right] t = \left( \frac{1}{r_S^*} + \frac{2}{r_Z^*} \right) (t - t_c). \quad (\text{VII.58})$$

Полагая здесь приведенную теплопроводность  $\lambda_{\kappa}^*$  и теплоемкость  $c_{\kappa}^*$  стержня равными нулю, приходим к условию теплообмена на подкрепленном крае  $L$  пластинки

$$\frac{\partial t}{\partial n} = H_{\kappa}^* (t - t_c), \quad (\text{VII.59})$$

\* См. Я. С. Подстригач [2, 3].

\*\* См. Ю. М. Коляно [1, 2].

совпадающему по виду с условием Ньютона (VII.52) на цилиндрической поверхности  $S_c$  неподкрепленной пластинки, в котором роль относительного коэффициента теплоотдачи с поверхности играет величина

$$H_k^* = \frac{r_z^* + 2r_s^*}{\lambda^* r_z^* (r_k^* + r_s^*)}.$$

В случае  $r_k^* = 0$  величина  $H_k^*$  в (VII.59) примет вид

$$H_k^* = \frac{1}{\lambda^*} \left( \frac{1}{r_s^*} + \frac{2}{r_z^*} \right). \quad (\text{VII.60})$$

Для определения средней по ширине  $h_k$  температуры стержня

$$T_k = \frac{1}{h_k} \int_{-\frac{h_k}{2}}^{\frac{h_k}{2}} t_k dn \quad (\text{VII.61})$$

проинтегрируем (VII.56) в соответствии с (VII.61) и в полученном выражении перейдем к пределу при  $h_k \rightarrow 0$ , как и при выводе условия теплообмена (VII.58). Получим выражение для температуры в стержне

$$t_k = t^+ - \frac{t^+ - t_c^-}{2 \left( 1 + \frac{r_s^+}{r_k^*} \right)}, \quad (\text{VII.62})$$

которое при  $r_k^* = 0$  будет равно значению температуры  $t^+$  пластинки на ее подкрепленном крае.

### § 3. Температурные напряжения, обусловленные возмущением однородного теплового потока около отверстий \*

Пусть имеем бесконечную плоскость с произвольным отверстием, ограниченным гладким контуром  $L$ . Предположим, что на бесконечности задан однородный тепловой поток  $q$ , направленный под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ , которому соответствует линейное распределение температуры

$$t_\infty = q(x \cos \alpha + y \sin \alpha) + t_0. \quad (\text{VII.63})$$

Линейное температурное поле в сплошной пластинке, как известно, не вызывает напряжений, если пластинка свободна от заземления.

\* В этом параграфе рассматриваются задачи для плоского температурного поля.

Вследствие наличия отверстия температурное поле, оставаясь линейным на бесконечности, в окрестности отверстия получит некоторое возмущение, в результате чего возле отверстия возникнут температурные напряжения. Это возмущение будет определяться, очевидно, видом контура  $L$  и граничными условиями на нем. Температурное поле в плоскости с отверстием представим в виде

$$t = t_1 + t_\infty, \quad (\text{VII.64})$$

где  $t_1$  — возмущение температурного поля, вызванное отверстием.

В дальнейшем постоянную температуру  $t_0$  не будем учитывать, так как в незакрепленном теле она не вызывает напряжений.

Считая контур отверстия термозолированным, для определения возмущения стационарного плоского температурного поля отверстием на основании формул (VII.31) и (VII.33) получим уравнение теплопроводности

$$\Delta t_1 = 0 \quad (\text{VII.65})$$

и граничные условия

$$\frac{\partial t_1}{\partial n} = 0 \quad \text{на } L; \quad t_1 = 0 \quad \text{при } x = y = \infty. \quad (\text{VII.66})$$

Пусть область вне рассматриваемого контура отверстия  $L$  конформно отображается функцией  $Z = \omega(\zeta)$  на внешность единичного круга  $\gamma$ . Тогда из (VII.63) — (VII.66) для распределения температуры в области переменной  $\zeta = \rho e^{i\theta}$  получим

$$t(\zeta, \bar{\zeta}) = \frac{qR}{2} \left[ e^{i\alpha} \left( \bar{\zeta} + \frac{1}{\zeta} \right) + e^{-i\alpha} \left( \zeta + \frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \right], \quad (\text{VII.67})$$

где  $R$  — некоторая вещественная постоянная, зависящая от размеров и формы отверстия.

Задача об определении температурных напряжений в этом случае рассматривалась в работах А. L. Florence and J. N. Goodier [1—3], Н. Deresiewicz [1], Ацуми Акира [1], Мурамацу Масамицу, Ацуми Акира [1], И. В. Гайвася [1].

Заменой переменной  $z$  на  $\omega(\zeta)$  формулы (VII.15) и (VII.16) преобразуются к виду \*

$$\sigma_\phi + \sigma_\psi = 2 [\Phi(\zeta) + \overline{\Phi(\bar{\zeta})}] - \alpha_1 E t(\zeta, \bar{\zeta}), \quad (\text{VII.68})$$

$$\sigma_\phi - \sigma_\psi + 2i\tau_{\phi\psi} = \frac{2\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \left[ \overline{\omega(\zeta)} \Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta) \Psi(\zeta) - \frac{\alpha_1 E}{2} \int \overline{\omega'(\zeta)} \frac{\partial t}{\partial \zeta} d\bar{\zeta} \right];$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa \Phi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi'(\bar{\zeta})} - \overline{\Psi(\bar{\zeta})} + \frac{\alpha_1 E}{2} \int \omega'(\zeta) t(\zeta, \bar{\zeta}) d\zeta, \quad (\text{VII.69})$$

\* См. И. В. Гайвась [1].



а контурные условия (VII.14) в случае первой основной задачи при отсутствии внешней нагрузки примут вид

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \frac{\sigma^2}{\omega'(\sigma)} [\overline{\omega(\sigma)} \Phi'(\sigma) + \omega'(\sigma) \Psi(\sigma)] = \\ = \frac{\alpha_t E}{2} \left[ t(\zeta, \bar{\zeta}) - \frac{\zeta^2}{\omega'(\zeta)} \int \frac{\overline{\omega'(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \frac{\partial t}{\partial \zeta} d\bar{\zeta} \right]_{\zeta=\sigma}. \end{aligned} \quad (\text{VII.70})$$

Квадратное отверстие. Отображающую функцию возьмем в виде \*

$$\omega(\zeta) = R \left( \zeta - \frac{1}{6\zeta^3} \right).$$

Подставив (VII.67) в (VII.70), получим функциональное уравнение относительно функций  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$ :

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \frac{\sigma^2 \omega'(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \left[ \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \Phi'(\sigma) + \Psi(\sigma) \right] = \\ = \frac{\alpha_t E q R}{12(2 + \sigma^4)} \left[ \frac{e^{i\alpha}(18 + 5\sigma^4)}{\sigma} + e^{-i\alpha}(6 + 7\sigma^4) \right] \end{aligned} \quad (\text{VII.71})$$

или, если перейти к сопряженным значениям,

$$\begin{aligned} \Phi(\sigma) + \overline{\Phi(\sigma)} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \left[ \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\Phi'(\sigma)} + \overline{\Psi(\sigma)} \right] = \\ = \frac{\alpha_t E q R}{12(2\sigma^4 + 1)} \left[ e^{-i\alpha}(18\sigma^4 + 5) + e^{i\alpha} \frac{6\sigma^4 + 7}{\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (\text{VII.72})$$

Представим функции в виде

$$\Phi(\zeta) = a_1 \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \zeta^{-n}, \quad (\text{VII.73})$$

$$\Psi(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n} \zeta^{-n}.$$

Умножив равенство (VII.72) на  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1+2\sigma^4}{\sigma-\zeta} d\sigma$  и проинтегрировав по  $\gamma$ , считая  $|\zeta| > 1$ , получим

$$\begin{aligned} (1 + 2\zeta^4) [a_1 \zeta - \Phi(\zeta)] + 2a_{-1} \zeta^3 + 2a_{-2} \zeta^2 + 2a_{-3} \zeta + 2a_{-4} - \frac{4}{3} \cdot \frac{\overline{a_1}}{\zeta} = \\ = -\frac{7}{12} \alpha_t E q R e^{i\alpha} \frac{1}{\zeta}. \end{aligned} \quad (\text{VII.74})$$

\* См. формулу (1.43).

Аналогично из равенства (VII.72), умножив его на  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{1+2\sigma^4}{\sigma^6} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$  и проинтегрировав по  $\gamma$ , считая  $|\zeta| > 1$ , найдем

$$-\frac{1+2\zeta^4}{\zeta^6} \Phi(\zeta) + 2a_1 - \frac{4}{3} \frac{\bar{a}_1}{\zeta^6} - \frac{2}{3} \frac{\bar{a}_{-1}}{\zeta^4} - \frac{1}{3} \frac{\bar{a}_{-2}}{\zeta^3} + \frac{1}{3} \frac{\bar{a}_{-4}}{\zeta} + \\ + \frac{2\bar{b}_{-1}}{\zeta^2} + \frac{2\bar{b}_{-2}}{\zeta} = -\frac{\alpha_t E q R}{4} \left[ \frac{5}{3} e^{-i\alpha} \frac{1}{\zeta^4} + e^{i\alpha} \frac{1}{\zeta^2} \left( 2 + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\zeta^4} \right) \right]. \quad (\text{VII.75})$$

Сравнивая выражения для  $\Phi(\zeta)$  из (VII.74) и (VII.75), для определения коэффициентов получим следующую систему уравнений:

$$a_1 + 2a_{-3} = -\frac{2}{3} \bar{a}_{-1} + \frac{5}{12} \alpha_t E q R e^{-i\alpha}, \\ 2a_{-1} = 2\bar{b}_{-1} + \frac{\alpha_t E q R}{2} e^{i\alpha}, \\ a_{-2} = a_{-4} = 0. \quad (\text{VII.76})$$

Условие однозначности смещений требует, чтобы

$$\kappa a_{-1} + \bar{b}_{-1} = -\frac{1}{4} \alpha_t E q R e^{i\alpha}. \quad (\text{VII.77})$$

Напряжения на бесконечности будут равны нулю, если

$$a_1 = \frac{1}{4} \alpha_t E q R e^{-i\alpha}. \quad (\text{VII.78})$$

Решая совместно (VII.76) — (VII.78), находим

$$a_{-1} = 0; \quad a_{-3} = \frac{1}{12} \alpha_t E q R e^{-i\alpha}. \quad (\text{VII.79})$$

Внося найденные значения коэффициентов в (VII.74), будем иметь

$$\Phi(\zeta) = \frac{\alpha_t E q R}{4} \cdot \frac{1}{1+2\zeta^4} \left[ \frac{e^{i\alpha}}{\zeta} + e^{-i\alpha} \zeta \frac{(5+6\zeta^4)}{3} \right]. \quad (\text{VII.80})$$

Функцию  $\Psi(\zeta)$  найдем из равенства (VII.71), умножив его на  $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{2+\sigma^4}{\sigma^2} \times \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$  и проинтегрировав по  $\gamma$ , считая  $|\zeta| > 1$ . Приняв при этом во внимание (VII.80), получим

$$\Psi(\zeta) = \frac{\alpha_t E q R}{6} \frac{\zeta^3}{(1+2\zeta^4)^3} \left[ 13e^{i\alpha} \zeta^2 (1-2\zeta^4) + \frac{e^{-i\alpha}}{3} (-36\zeta^8 + 16\zeta^4 - 9) \right]. \quad (\text{VII.81})$$

Подставив (VII.67), (VII.80) в (VII.68) и положив  $\zeta = \varrho e^{i\vartheta}$  при  $\varrho = 1$ , получим формулу для напряжений по контуру квадратного отверстия:

$$\sigma_{\vartheta} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\alpha_t E q R}{5+4 \cos 4\vartheta} [5 \cos(\vartheta - \alpha) + \cos(3\vartheta + \alpha)]. \quad (\text{VII.82})$$

Значения напряжений  $\sigma_\theta$  в долях от  $\alpha_t E q R$  по контуру отверстия, соответствующие функциям (VII.80) и (VII.81) при  $\alpha = \pi/2$ , приведены ниже:

0	0,000	50	-1,789
15	-0,056	60	-0,962
30	-0,333	75	-0,527
40	-1,261	90	-0,444
45	-1,886		

**Треугольное отверстие.** Внешность треугольного отверстия отображается на внешность единичного круга  $\gamma$  функцией\*  $\omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{1}{3\zeta^2} \right)$ .

Функции  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$  для этого случая получим в виде

$$\Phi(\zeta) = \frac{\alpha_t E q R}{4(3\zeta^3 - 2)} [-2e^{i\alpha\zeta} + 3e^{-i\alpha\zeta}(\zeta^3 - 1)], \quad (\text{VII.83})$$

$$\Psi(\zeta) = -\frac{\alpha_t E q R}{4} \cdot \frac{\zeta^2}{(3\zeta^3 - 2)^3} [22e^{i\alpha\zeta}(1 + 3\zeta^3) + 3e^{-i\alpha}(9\zeta^6 - \zeta^3 + 4)].$$

Напряжения на контуре отверстия

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha_t E q R}{13 - 12\cos 3\theta} [-7\cos(\theta - \alpha) + 3\cos(2\theta + \alpha)]. \quad (\text{VII.84})$$

Ниже приведены значения  $\sigma_\theta$  в долях от  $\alpha_t E q R$  на контуре отверстия соответственно при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/2$ :

$\alpha = 0$		$\alpha = \pi/2$	
0	-4,000	0	0,000
10	-1,563	10	-0,860
15	-0,922	30	-0,469
30	-0,351	90	-0,539
90	-0,231	100	-0,838
115	0,731	115	-2,872
120	2,000	120	-3,464
125	2,122	125	-2,069
135	1,096	135	-0,432
180	0,400	180	-0,000

**Эллиптическое отверстие.** Функция, конформно отображающая внешность эллиптического отверстия с полуосями  $a$  и  $b$  на внешность единичного круга  $\gamma$ , имеет вид\*\*

$$\omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right).$$

\* См. формулу (I.44).

\*\* См. формулу (I.42).

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные выражения для функций

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= \frac{\alpha_t E q R}{4} \cdot \frac{1}{\zeta^2 - m} \left( e^{-i\alpha\zeta^3} - m e^{i\alpha} \frac{1}{\zeta} \right), \\ \Psi(\zeta) &= \frac{\alpha_t E q R}{4} \cdot \frac{\zeta}{(\zeta^2 - m)^3} \{ [m\zeta^4 - 2(1 + 2m^2)\zeta^2 + m^3] e^{i\alpha} + \\ &\quad + [-\zeta^4 + 2m(m^2 + 2)\zeta^2 - m^2] e^{-i\alpha} \}.\end{aligned}\tag{VII.85}$$

Компоненты напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_\varrho &= \frac{\alpha_t E q R}{2(\varrho^4 - 2m\varrho^2 \cos 2\vartheta + m^2)^2} [m\varrho(\varrho^4 - 1)(\varrho^2 - m^2) \cos(\vartheta + \alpha) + \\ &\quad + \varrho(1 - \varrho^2)(\varrho^4 - m^4) \cos(\vartheta - \alpha)], \\ \sigma_\vartheta &= \frac{\alpha_t E q R}{2(\varrho^4 - 2m\varrho^2 \cos 2\vartheta + m^2)^2} [m\varrho(\varrho^2 + m^2)(1 + 4\varrho^2 + \varrho^4) \cos(\vartheta + \alpha) - \\ &\quad - \varrho(1 + \varrho^2)(\varrho^4 + 4m^2\varrho^2 + m^4) \cos(\vartheta - \alpha) - 2m^2\varrho^3(1 + \varrho^2) \cos(3\vartheta + \alpha) + \\ &\quad + 2m\varrho^3(\varrho^2 + m^2) \cos(3\vartheta - \alpha)], \\ \tau_{\varrho\vartheta} &= \frac{\alpha_t E q R}{2(\varrho^4 - 2m\varrho^2 \cos 2\vartheta + m^2)^2} [m\varrho(\varrho^2 - m^2)(1 - \varrho^2)^2 \sin(\vartheta + \alpha) + \\ &\quad + \varrho(1 - \varrho^2)(\varrho^2 - m^2)^2 \sin(\vartheta - \alpha)].\end{aligned}\tag{VII.86}$$

Напряжения по контуру отверстия

$$\sigma_\vartheta = \frac{\alpha_t E q R}{1 - \cos 2\vartheta + k^2(1 + \cos 2\vartheta)} [(1 - k^2) \cos(\vartheta + \alpha) - (1 + k^2) \cos(\vartheta - \alpha)],\tag{VII.87}$$

где  $k = b/a$ .

Ниже приведены значения  $\sigma_\vartheta$  в долях от  $\alpha_t E q R$  на контуре отверстия при  $\alpha = 0$ :

$\vartheta^\circ$	$b/a=2/3$	$b/a=3/2$	$\vartheta^\circ$	$b/a=2/3$	$b/a=3/2$
0	-1,000	-1,000	50	-0,370	-0,954
10	-0,949	-1,002	60	-0,258	-0,857
20	-0,820	-1,005	70	-0,163	-0,671
30	-0,660	-1,006	80	-0,078	-0,377
40	-0,505	-0,994	90	0,000	0,000

**Круговое отверстие.** Полагая в формулах (VII.85)  $m=0$ ,  $\alpha=0$ , получаем функции напряжений  $\Phi(\zeta)$  и  $\Psi(\zeta)$  для области с круговым теплоизолированным отверстием радиуса  $R$ , подверженной действию однородного потока тепла.

Компоненты напряжений получим из (VII.86) при  $m=0$  и  $\alpha=0$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{\varrho} &= \frac{\alpha_t E q R}{2} \left( \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho} \right) \cos \vartheta, \\ \sigma_{\vartheta} &= -\frac{\alpha_t E q R}{2} \left( \frac{1}{\varrho^3} + \frac{1}{\varrho} \right) \cos \vartheta, \\ \tau_{\varrho\vartheta} &= \frac{\alpha_t E q R}{2} \left( \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{\varrho} \right) \sin \vartheta.\end{aligned}\quad (\text{VII.88})$$

Из (VII.88) следует, что максимальные по абсолютной величине значения  $\sigma_{\vartheta}$  на контуре кругового отверстия принимают при  $\vartheta=0$  и  $\vartheta=\pi$ .

Ниже даны значения  $\sigma_{\vartheta}$  в долях от  $\alpha_t E q R$  вдоль контура отверстия

0	— 1,000	105	0,258
15	— 0,965	120	0,500
30	— 0,866	135	0,707
45	— 0,707	150	0,866
60	— 0,500	165	0,965
75	— 0,258	180	1,000
90	0,000		

**Узкая щель.** Под действием однородного теплового потока в среде с узкой изолированной щелью напряженное состояние будет определяться функциями (VII.85) при  $m = \pm 1$ . При  $m=1$ ,  $\varrho=1$  из (VII.86) получим выражение для напряжения вдоль контура щели, расположенной по оси  $Ox$ :

$$\sigma_{\vartheta} = -\frac{\alpha_t E q R}{2} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \vartheta}. \quad (\text{VII.89})$$

Если поток тепла направлен параллельно щели, то все компоненты напряжений равны нулю. В случае, когда направление теплового потока перпендикулярно к расположению щели, напряжение на контуре

$$\sigma_{\vartheta} = -\frac{\alpha_t E q R}{2} \cdot \frac{1}{\sin \vartheta}. \quad (\text{VII.90})$$

Из (VII.90) следует, что в точках ( $\vartheta=0$  и  $\vartheta=\pi$ ) напряжения возрастают до бесконечности.

#### § 4. Осесимметричное температурное поле и температурные напряжения в бесконечной пластинке с круговым подкрепленным краем

Определим нестационарное температурное поле и температурные напряжения в свободной от внешней нагрузки бесконечной пластинке с круговым подкрепленным краем либо тонким стержнем, считая температуру внешней среды только функцией времени.

**Температурное поле.** Вследствие симметрии вместо (VII.50) и (VII.58) для определения нестационарного температурного поля в рассматриваемой пластинке будем иметь:

уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} - \text{Bi}^* (t - t_c) = \frac{\partial t}{\partial \text{Fo}^*}; \quad (\text{VII.91})$$

граничное условие

$$\frac{\partial t}{\partial r} - \text{Bi}_k^* (t - t_c) = \beta_k^* \frac{\partial t}{\partial \text{Fo}^*} \quad \text{при } r = 1, \quad (\text{VII.92})$$

где  $\text{Bi}^* = 2 \frac{\alpha R^2}{\lambda h}$ ;  $\text{Fo}^* = \frac{\alpha \tau}{R^2}$  — критерий Фурье;  $r$  — отнесенный к радиусу отверстия пластинки полярный радиус;

$$\text{Bi}_k^* = \frac{(r_z^* + 2r_s^*) R}{\lambda^* (r_k^* + r_s^*) r_z^*} = H_k^* R, \quad \beta_k^* = \frac{c_k m r_s^*}{c (r_s^* + r_k^*)}, \quad m = \frac{h_k}{R}.$$

Предположим, что температура системы в начальный момент времени равна нулю. Приняв, например, что температура среды — гармоническая функция времени, т. е.

$$t_c = t_0 e^{i\omega \text{Fo}^*}, \quad (\text{VII.93})$$

из (VII.91) — (VII.93), пользуясь преобразованием Лапласа, находим нестационарное температурное поле в пластинке \*

$$t = t_0 e^{-\text{Mi} Q_0(r, \text{Fo}^*, \eta)} + t_c \{i\omega [\varepsilon_0(r, \eta) - \varepsilon_0(r, \text{Fo}^*, \eta)]\}, \quad (\text{VII.94})$$

где

$$Q_n = \frac{2A^*}{\pi} \int_0^\infty e^{-\eta^2 \text{Fo}^*} f_n(r, \eta) d\eta, \quad \varepsilon_n = \frac{2A^*}{\pi} \int_0^\infty \frac{f_n(r, \eta)}{\text{Bi}^* + i\omega + \eta^2} e^{-(\text{Bi}^* + i\omega + \eta^2) \text{Fo}^*} d\eta,$$

$$f_n(r, \eta) = \frac{J_n(r, \eta) [\eta Y_1(\eta) + B(\eta) Y_0(\eta)] - Y_n(r, \eta) [\eta J_1(\eta) + B(\eta) J_0(\eta)]}{\eta^{n+1} \{[\eta J_1(\eta) + B(\eta) J_0(\eta)]^2 + [\eta Y_1(\eta) + B(\eta) Y_0(\eta)]^2\}},$$

$n = 0, 1$ ;  $A^* = \text{Bi}_k^* - \beta_k^* \text{Bi}^*$ ;  $B(\eta) = A^* - \beta_k^* \eta^2$ ;  $\text{Mi} = \text{Bi}^* \text{Fo}^*$  — критерий

Михеева;  $J_n(\eta)$ ,  $Y_n(\eta)$  — функции Бесселя I и II рода от действительного аргумента.

При асимптотическом режиме \*\* вместо (VII.94) имеем

$$t^{(ac)} = \frac{t_c}{\omega^*} [CK_0(r \sqrt{\omega^*}) + \text{Bi}^*], \quad (\text{VII.95})$$

где

$$C = \frac{A^* i \omega}{\sqrt{\omega^*} K_1(\sqrt{\omega^*}) + (\text{Bi}_k^* + i \omega \beta_k^*) K_0(\sqrt{\omega^*})},$$

$K_n(\eta)$  — функция Макдональда,  $\omega^* = \text{Bi}^* + i\omega$ .

\* См. Ю. М. Коляно [1, 2].

\*\* См. Я. С. Подстригач [1].

Положив в (VII.94)  $\omega = 0$ , находим решение задачи теплопроводности

$$t = t_0 [1 + e^{-MiQ_0(r, Fo^*, \eta)}], \quad (\text{VII.96})$$

соответствующее случаю, когда температура окружающей среды изменяется в начальный момент времени на некоторую величину, оставаясь в дальнейшем постоянной.

**Определение напряжений.** Для определения напряженно-деформированного состояния, вызванного в пластинке температурными полями (VII.94) — (VII.96), воспользуемся соотношениями (VII.15) и (VII.16) температурной задачи теории упругости для обобщенного плоского напряженного состояния, которые в случае радиальной симметрии примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}] - \alpha_t E t, \\ \sigma_\theta - \sigma_r &= \left\{ 2 [\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)] - \alpha_t E \int \frac{\partial t}{\partial z} d\bar{z} \right\} e^{2i\theta}, \\ 2\mu u &= \left\{ \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \psi(z) + \frac{\alpha_t E}{2} \int t dz \right\} e^{-i\theta}, \end{aligned} \quad (\text{VII.97})$$

условием совместности деформаций пластинки и стержня

$$u = \frac{\sigma_r}{mE_k} + \alpha_t^{(k)} t \quad \text{при } r = 1 \quad (\text{VII.98})$$

и условиями отсутствия напряжений на бесконечности

$$\sigma_r^{(\infty)} = \sigma_\theta^{(\infty)} = 0, \quad (\text{VII.99})$$

где  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  — функции комплексного переменного  $z = ze^{i\theta}$ . В данном случае

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \Gamma z + \Phi_0(z), \\ \psi(z) &= \Gamma' z + \Psi_0(z), \end{aligned} \quad (\text{VII.100})$$

где  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  — комплексные постоянные, определяющие распределение напряжений на бесконечности и вращение тела как жесткого целого;  $\Phi_0(z)$ ,  $\Psi_0(z)$  — голоморфные функции, имеющие при достаточно большом значении  $z$  разложение вида

$$\Phi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{-n} z^{-n}; \quad \Psi_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{-n} z^{-n}; \quad (\text{VII.101})$$

$a_n$ ,  $b_n$  — комплексные постоянные.

В случае, когда температурное поле имеет вид (VII.95), из (VII.97) — (VII.99) находим, что все коэффициенты функций  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  равны нулю, за исключением

$$\operatorname{Re} \Gamma = \frac{t_c}{4\omega^*} \operatorname{Bi}^* \alpha_t E, \quad a_0 = b_0, \quad (\text{VII.102})$$

$$\operatorname{Re} b_{-1} = D \left[ \alpha_t t_c \frac{\operatorname{Bi}^*}{\omega^*} - \alpha_t^{(k)} t_k \right] - \frac{\alpha_t t_c EC}{(\omega^*)^{3/2}} K_1(\sqrt{\omega^*}),$$

где

$$D = \frac{1}{\frac{1+\nu}{E} + \frac{1}{mE_k}}.$$

Подставляя (VII.100) — (VII.102) в формулы (VII.97), находим распределение температурных напряжений в пластинке

$$\sigma_r^{(ac)} = \left\{ D \left[ \alpha_t t_c \frac{\operatorname{Bi}^*}{\omega^*} - \alpha_t^{(k)} t_k \right] + \alpha_t t_c EC (\omega^*)^{-3/2} [r K_1(r_1) - K_1(\sqrt{\omega^*})] \right\} r^{-2}, \quad (\text{VII.103})$$

$$\sigma_\theta^{(ac)} = -\sigma_r^{(ac)} - \alpha_t E t_c \frac{C}{\omega^*} K_0(r_1),$$

где

$$r_1 = r \sqrt{\omega^*}.$$

В случае температурного поля (VII.96)

$$\sigma_r = \left\{ D \left[ \alpha_t t_0^* - \alpha_t^{(k)} t_k \right] + \alpha_t E t_0 e^{-M_1} \left[ Q_1 \operatorname{Fo}^*, \eta \right] - r Q_1(r, \operatorname{Fo}^*, \eta) + \frac{1-r^2}{2} \right\} r^{-2},$$

$$\sigma_\theta = -\sigma_r + \alpha_t E (t_0^* - t), \quad (\text{VII.104})$$

где

$$t_0^* = t (1 - e^{-M_1}).$$

На краю пластинки ( $r = 1$ ) из (VII.104) находим

$$\sigma_r = D \left[ \alpha_t t_0^* - \alpha_t^{(k)} t_k \right], \quad \sigma_\theta = -\sigma_r - \alpha_t E e^{-M_1} (1 - Q_0^+), \quad (\text{VII.105})$$

где

$$Q_0^+ = \frac{4A^*}{\pi^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\eta^2} \operatorname{Fo}^* d\eta}{\eta \{ [\eta J_1(\eta) + B(\eta) J_0(\eta)]^2 + [\eta Y_1(\eta) + B(\eta) Y_0(\eta)]^2 \}}.$$

Для неподкрепленной пластинки в (VII.105) следует принять

$$A^* = B = \operatorname{Bi}_S = \frac{\alpha_S R}{\lambda}, \quad D = 0.$$

Полагая приведенную теплоемкость  $c_k$  и внутреннее термосопротивление  $r_k^*$  стержня равными нулю, вместо (VII.105) будем иметь

$$\sigma_r^* = \frac{1}{m_E + 1 + \nu} \{ 1 - e^{-M_1} - \alpha_t^* [1 - e^{-M_1} Q_0^+] \}, \quad (\text{VII.106})$$



$$\sigma_{\theta}^* = -\sigma_r^* - e^{-Mi} [1 - Q_0^+] \quad \text{при} \quad A^* = B = Bi_{\kappa}^*,$$

где

$$\sigma_i^* = \frac{\sigma_i}{\alpha_i E t_0}; \quad m_E = \frac{E}{m E_{\kappa}}; \quad \alpha_i^* = \frac{\alpha_i^{(k)}}{\alpha_i}; \quad Bi_{\kappa}^* = \frac{h_{\kappa} H_{\kappa}}{m}.$$

Графики распределения напряжений (VII.106) при  $h_{\kappa} H_{\kappa}^* = 93,1$  Дж/м·сек·град в зависимости от  $Fo^*$ ,  $Bi^*$ ,  $m$  для стальной ( $E = 2061 \times 10^7$  н/м<sup>2</sup>,  $\alpha_i = 12 \cdot 10^{-6}$  1/град,  $\lambda = 46,556$  Дж/м·сек·град) пластинки

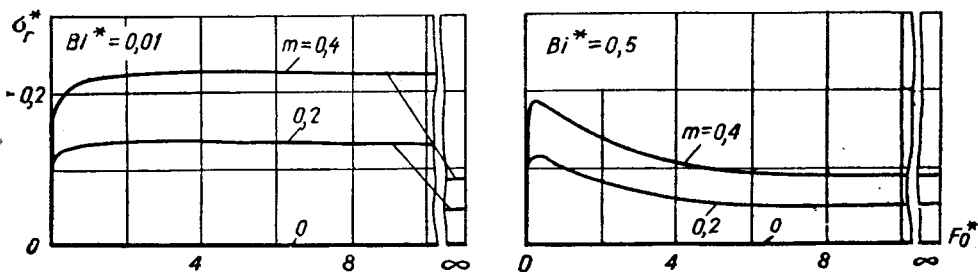


Рис. VII.2.

с круговым отверстием, край которой подкреплён тонким бронзовым ( $E_{\kappa} = 11772 \cdot 10^7$  н/м<sup>2</sup>,  $\alpha_i^{(k)} = 18 \cdot 10^{-6}$  1/град) стержнем, изображены на рис. VII.2 и VII.3. При построении графиков был использован график функции  $Q_0^+$ , приведенный в книге Г. Карслоу, Д. Егера [1].

Из графиков видно, что максимальные значения напряжений на подкреплённом тонким стержнем крае пластинки для рассматриваемого случая достигаются тем быстрее, чем больше теплоотдачи с ее боковых поверхностей.

Радиальные напряжения  $\sigma_r^*$  (рис. VII.2) всегда положительны. Они уменьшаются с уменьшением параметра тонкостенности подкрепляющего элемента  $m = h_{\kappa} R$ .

Кольцевые напряжения  $\sigma_{\theta}^*$  (рис. VII.3) с течением времени могут изменять знак, переходя от сжимающих к растягивающим. При этом с уменьшением параметра  $m$  в области сжатия они по абсолютной величине увеличиваются, а в области растяжения — уменьшаются.

При стационарном тепловом режиме, т. е. при  $Fo^* \rightarrow \infty$ , температурные напряжения (VII.106) имеют вид

$$\sigma_r^* = -\sigma_{\theta}^* = \frac{1}{m_E + 1 + \nu} \left( 1 - \frac{\alpha_i^{(k)}}{\alpha_i} \right).$$

Как видим, в этом случае они не зависят от теплофизических характеристик стержня и пластинки.

Если перейти в (VII.104) к декартовым координатам, перенести начало координат на контур отверстия и устремить  $R \rightarrow \infty$ , то получим напряжения

$$\sigma_y = -\alpha_t E t_0 \left\{ \frac{A}{\sqrt{1-4\beta_h A}} [F_2^-(x) - F_1^-(x) - f_2(x) + f_1(x)] + e^{-Mx} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{Fo}} \right) \right\}, \quad (\text{VII.107})$$

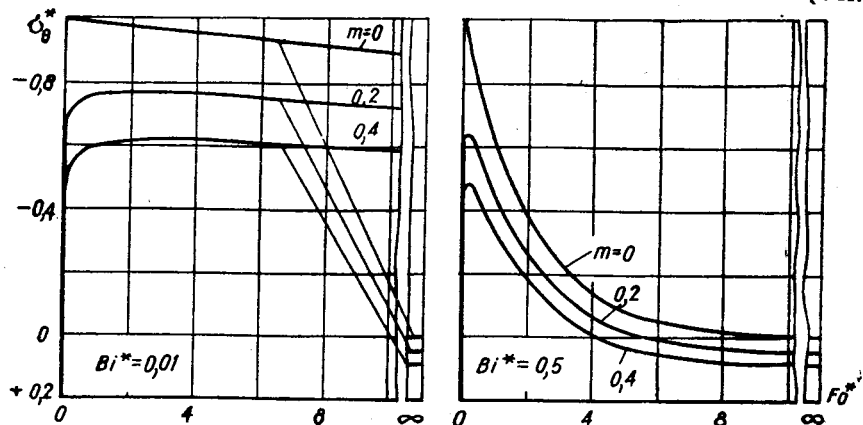


Рис. VII.3.

возникающие в полубесконечной пластинке, край которой подкреплён тонким упругим стержнем.

Здесь

$$F_i^\pm(x) = \frac{e^{\text{Pi}Fo}}{2\sqrt{\text{Bi} + \text{Pi}}} \left[ e^{-x\sqrt{\text{Bi} + \text{Pi}}} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{Fo}} - \sqrt{(\text{Bi} + \text{Pi})Fo} \right) \pm \right. \\ \left. \pm e^{x\sqrt{\text{Bi} + \text{Pi}}} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{Fo}} + \sqrt{(\text{Bi} + \text{Pi})Fo} \right) \right]; \quad f_i = \frac{(\text{Bi}_k + \beta_k \text{Pi}) F_i^+}{\sqrt{\text{Bi} + \text{Pi}}};$$

$$p_{1,2} = \frac{1 - 2\beta_k \text{Bi}_k \pm \sqrt{1 - 4\beta_h A}}{2\beta_k^2}; \quad \operatorname{erfc}(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi; \quad x = \frac{x_0}{h};$$

$$\text{Bi} = 2 \frac{\alpha h}{\lambda}; \quad \text{Bi}_k = H_k^* h; \quad A = \text{Bi}_k - \beta_k \text{Bi}; \quad \beta_k = \frac{\beta_k^*}{m^*}; \quad m^* = \frac{h}{R}; \quad \text{Fo} = \frac{\alpha \tau}{h^2}.$$

### § 5. Температурные напряжения при изгибе тонкой пластинки с круговым отверстием

Пусть кольцевая пластинка, нагреваемая путем конвективного теплообмена со средой, ограничена концентрическими окружностями радиусами  $r=R_1$  и  $r=R_2$  ( $R_2 > R_1$ ). Температура среды, омывающей поверхности пластинки  $Z = \pm h/2$ , постоянна и равна соответственно  $t_c^+$  и  $t_c^-$ . На контурах пластинки выполняются условия (VII.48). Определим установившееся температурное поле в пластинке и напряжения, вызванные этим полем, при соответствующих граничных условиях.

**Определение температурного поля.** Стационарное температурное поле в пластинке при одинаковых коэффициентах теплоотдачи с поверхностей  $Z = \pm h/2$  описывается уравнениями

$$\lambda^* \Delta T - \varepsilon T = -\varepsilon \frac{t_c^+ + t_c^-}{2}, \quad (VII.108)$$

$$\lambda^* \Delta T^* - 3\varepsilon_0 T^* = -3\varepsilon \frac{t_c^+ - t_c^-}{2}.$$

Решая уравнения (VII.108) при граничных условиях

$$\frac{\partial T}{\partial r} - k_1(T - T_c) = 0, \quad \frac{\partial T^*}{\partial r} - k_1(T^* - T_c^*) = 0 \quad \text{при } r = R_1, \quad (VII.109)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + k_2(T - \bar{T}_c) = 0, \quad \frac{\partial T^*}{\partial r} + k_2(T^* - \bar{T}_c^*) = 0 \quad \text{при } r = R_2,$$

находим

$$T = A_1 I_0(\beta_1 r) + B_1 K_0(\beta_1 r) + t_c, \quad (VII.110)$$

$$T^* = A_2 I_0(\beta_2 r) + B_2 K_0(\beta_2 r) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} t_c^*,$$

где

$$A_1 = -\frac{1}{\Delta_1} [k_1(T_c - t_c) K(\beta_1 R_2) + k_2(\bar{T}_c - t_c) K(\beta_1 R_1)],$$

$$B_1 = -\frac{1}{\Delta_1} [k_1(T_c - t_c) I(\beta_1 R_2) + k_2(\bar{T}_c - t_c) I(\beta_1 R_1)],$$

$$A_2 = -\frac{1}{\Delta_2} \left[ k_1 \left( T_c^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} t_c^* \right) K(\beta_2 R_2) + k_2 \left( \bar{T}_c^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} t_c^* \right) K(\beta_2 R_1) \right],$$

$$B_2 = -\frac{1}{\Delta_2} \left[ k_1 \left( T_c^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} t_c^* \right) I(\beta_2 R_2) + k_2 \left( \bar{T}_c^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} t_c^* \right) I(\beta_2 R_1) \right],$$

$$\Delta_i = I(\beta_i R_1) K(\beta_i R_2) - I(\beta_i R_2) K(\beta_i R_1) \quad (i = 1, 2),$$

$$I(\beta_i R_i) = \beta_i I_1(\beta_i R_i) + (-1)^i k_i I_0(\beta_i R_i),$$

$$K(\beta_1 R_1) = \beta_1 K_1(\beta_1 R_1) - (-1)^i k_i K_0(\beta_1 R_1),$$

$$I(\beta_2 R_1) = \beta_2 I_1(\beta_2 R_1) + (-1)^i k_i I_0(\beta_2 R_1), \quad \beta_1^2 = \frac{\varepsilon}{\lambda^*}, \quad (\text{VII.111})$$

$$K(\beta_2 R_1) = \beta_2 K_1(\beta_2 R_1) - (-1)^i k_i K_0(\beta_2 R_1), \quad \beta_2^2 = 3 \frac{\varepsilon_0}{\lambda^*},$$

$$t_c = \frac{t_c^+ + t_c^-}{2}, \quad t_c^* = \frac{t_c^+ - t_c^-}{2};$$

$T_c, \bar{T}_c, T_c^*, \bar{T}_c^*, t_c^+, t_c^-$  — заданные постоянные величины,  $I_0(q), I_1(q)$  — функции Бесселя первого рода нулевого и первого порядка от мнимого аргумента,  $K_0(q), K_1(q)$  — функции Макдональда нулевого и первого порядка.

Если края пластинки термоизолированы ( $k_1 = k_2 = 0$ ), то  $A_1 = A_2 = B_1 = B_2 = 0$  и температура в средней плоскости пластинки будет постоянной:

$$T = t_c, \quad T^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} t_c^*. \quad (\text{VII.112})$$

**Температурные напряжения и моменты.** Пусть края кольцевой пластинки свободны от напряжений. Подставляя значения температуры  $T$  и  $T^*$  из (VII.110) в граничные условия (VII.12) и (VII.23) и полагая  $f_1 = f_2 = 0$ , находим

$$\varphi_1(z) = \frac{\alpha_t E}{2} a_0 z, \quad \psi_1(z) = \alpha_t E b_0 \frac{1}{z},$$

$$\varphi(z) = \frac{\alpha_0}{2(1+\nu)} a z, \quad \psi(z) = \frac{\alpha_0}{1-\nu} b \frac{1}{z},$$

где

$$\alpha_0 = \frac{2\alpha_t(1-\nu^2)}{h\beta_2}, \quad \Delta_0 = R_2^2 - R_1^2,$$

$$a_0 = \frac{R_2}{\beta_1 \Delta_0} \left\{ A_1 I_1(\beta_1 R_2) - B_1 K_1(\beta_1 R_2) - \frac{R_1}{R_2} [A_1 I_1(\beta_1 R_1) - B_1 K_1(\beta_1 R_1)] \right\} + \frac{1}{2} t_c,$$

$$b_0 = \frac{R_1 R_2^2}{\beta_1 \Delta_0} \left\{ A_1 I_1(\beta_1 R_1) - B_1 K_1(\beta_1 R_1) - \frac{R_1}{R_2} [A_1 I_1(\beta_1 R_2) - B_1 K_1(\beta_1 R_2)] \right\},$$

(VII.113)

$$a = \frac{R_2}{\Delta} \left\{ \frac{R_1}{R_2} [A_2 I_1(\beta_2 R_1) - B_2 K_1(\beta_2 R_1)] - A_2 I_1(\beta_2 R_2) + B_2 K_1(\beta_2 R_2) \right\} - \frac{3\beta_1^2}{2\beta_2} t_c^*,$$

$$b = \frac{R_1 R_2^2}{\Delta_0} \left\{ A_2 I_1(\beta_2 R_1) - B_2 K_1(\beta_2 R_1) - \frac{R_1}{R_2} [A_2 I_1(\beta_2 R_2) - B_2 K_1(\beta_2 R_2)] \right\}.$$

Напряжение и момент

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \alpha_t E \left( a_0 + b_0 \frac{1}{r^2} \right) - \sigma_{\theta\theta}^0, \quad (\text{VII.114})$$

$$M_{\theta\theta} = -\alpha_0 D \left( a_0 + b \frac{1}{r^2} \right) - M_{\theta\theta}^0,$$

где

$$\sigma_{\theta\theta}^0 = \alpha_t E \left\{ A_1 \left[ I_0(\beta_1 r) - \frac{1}{\beta_1 r} I_1(\beta_1 r) \right] + B_1 \left[ K_0(\beta_1 r) + \frac{1}{\beta_1 r} K_1(\beta_1 r) \right] + \frac{1}{2} t_c \right\}, \quad (\text{VII.115})$$

$$M_{\theta\theta}^0 = \alpha_0 \beta_2 D \left\{ A_2 \left[ I_0(\beta_2 r) - \frac{1}{\beta_2 r} I_1(\beta_2 r) \right] + B_2 \left[ K_0(\beta_2 r) + \frac{1}{\beta_2 r} K_1(\beta_2 r) \right] + \frac{\varepsilon}{2\varepsilon_0} t_c^* \right\}.$$

Если края пластинки термоизолированы ( $k_1 = k_2 = 0$ ), то из (VII.114) и (VII.115) следует, что температурные напряжения и моменты равны нулю. Пластика под воздействием температурного поля (VII.112) изгибается без напряжений в сферическую поверхность.

Устремляя в формулах (VII.111) и (VII.113)  $R_2$  к бесконечности, находим напряженное состояние в бесконечной пластинке с круговым отверстием радиуса  $R_1$ . В этом случае  $A_1 = A_2 = 0$

$$B_1 = \frac{k_1 (T_c - t_c)}{K(\beta_1 R_1)}, \quad a_0 = \frac{1}{2} t_c, \quad b_0 = -\frac{R_1 B_1}{\beta_1} K_1(\beta_1 R_1); \quad (\text{VII.116})$$

$$B_2 = \frac{k_1 \left( T_c^* - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} t_c^* \right)}{K(\beta_2 R_1)}; \quad a = -\frac{3}{2} \frac{\beta_1^2}{\beta_2} t_c^*; \quad b = -R_1 B_2 K_1(\beta_2 R_1);$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\alpha_t E B_1}{\beta_1 r} \left[ \frac{R_1}{r} K_1(\beta_1 R_1) - K_1(\beta_1 r) - \beta_1 r K_0(\beta_1 r) \right], \quad (\text{VII.117})$$

$$M_{\theta\theta} = \frac{\alpha_0}{r} D B_2 \left[ \frac{R_1}{r} K_1(\beta_2 R_1) - K_1(\beta_2 r) - \beta_2 r K_0(\beta_2 r) \right].$$

В сплошной пластинке напряжения отсутствуют.

Пусть внешний край пластинки заземлен, а внутренний — свободен от напряжений. Тогда из граничных условий (VII.12), (VII.13), (VII.23) и (VII.24) при учете (VII.3) находим

$$\varphi_1(z) = \frac{\alpha_t E (1 + \nu)}{2(1 - \nu)} a_0 z, \quad \psi_1(z) = \alpha_t E b_0 \frac{1}{z}, \quad (\text{VII.118})$$

$$\varphi(z) = \frac{\alpha_0}{1 - \nu} a_1 z, \quad \psi(z) = \frac{\alpha_0}{1 - \nu} b_1 \frac{1}{z},$$

где

$$a_0 = \frac{R_2}{\beta_1 \Delta_R} \left\{ \frac{R_1}{R_2} [A_1 I_1 (\beta_1 R_2) - B_1 K_1 (\beta_1 R_1)] - A_1 I_1 (\beta_1 R_2) + B_2 K_1 (\beta_1 R_2) \right\} - \frac{1}{2} t_c,$$

$$b_0 = \frac{R_1 R_2^2}{\beta_1 \Delta_R} \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{R_1}{R_2} [A_1 I_1 (\beta_1 R_2) - B_1 K_1 (\beta_1 R_2)] + A_1 I_1 (\beta_1 R_1) - \right. \\ \left. - B_1 K_1 (\beta_1 R_1) + \frac{\beta_1 R_1}{1-\nu} t_c \right\},$$

$$a_1 = \frac{R_2}{2\Delta_R} \left\{ A_2 I_1 (\beta_2 R_2) - B_2 K_1 (\beta_2 R_2) - \frac{R_1}{R_2} [A_2 I_1 (\beta_2 R_1) - B_2 K_1 (\beta_2 R_1)] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} \cdot \frac{\beta_1^2 \Delta_0}{\beta_2} t_c^* \right\}, \quad (\text{VII.119})$$

$$b_1 = \frac{R_1 R_2^2}{\Delta_R} \left\{ \frac{1+\nu}{1-\nu} \cdot \frac{R_1}{R_2} [A_2 I_1 (\beta_2 R_2) - B_2 K_1 (\beta_2 R_2)] + A_2 I_1 (\beta_2 R_1) - \right. \\ \left. - B_2 K_1 (\beta_2 R_1) + \frac{3R_1 \beta_1^2}{\beta_2 (1-\nu)} t_c^* \right\},$$

$$\Delta_R = R_2^2 + \frac{1+\nu}{1-\nu} R_1^2.$$

Напряжение и изгибающий момент

$$\sigma_{\theta\theta}^* = \alpha_t E \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} a_0 - \frac{b_0}{r^2} \right) - \sigma_{\theta\theta}^0, \quad (\text{VII.120})$$

$$M_{\theta\theta} = -\alpha_0 D \left( 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} a_1 + \frac{b_1}{r^2} \right) - M_{\theta\theta}^0,$$

где  $\sigma_{\theta\theta}^0$ ,  $M_{\theta\theta}^0$  определяются формулами (VII.115).

Напряженное состояние в пластинке, заземленной на бесконечности и ослабленной круговым отверстием,

$$\sigma_{\theta\theta} = \alpha_t E \left\{ B_1 \left[ K_0 (\beta_1 r) + \frac{R_1}{\beta_1 r^2} K_1 (\beta_1 R_1) - \frac{1}{\beta_1 r} K_1 (\beta_1 r) \right] - \frac{t_c}{1-\nu} \left( 1 + \frac{R_1^2}{r^2} \right) \right\}, \quad (\text{VII.121})$$

$$M_{\theta\theta} = \alpha_0 D \left\{ B_2 \left[ \frac{R_1}{\beta_2 r^2} K_1 (\beta_2 R_1) - K_0 (\beta_2 r) - \frac{1}{\beta_2 r} K_1 (\beta_2 r) \right] - \frac{3\beta_1^2 t_c^*}{\beta_2 (1-\nu)} \left( 1 + \frac{R_1^2}{r^2} \right) \right\},$$

где  $B_1$  и  $B_2$  определяются формулами (VII.116).

Если контур кругового отверстия термоизолирован ( $k_1 = 0$ ), то  $B_1 = B_2 = 0$  и из (VII.121) находим

$$\sigma_{\theta\theta}^* = -\alpha_t E \frac{t_c}{1-\nu} \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right),$$

$$M_{\theta\theta} = -\frac{\alpha_t \varepsilon (1+\nu)}{h \varepsilon_0} D t_c^* \left(1 + \frac{R_1^2}{r^2}\right). \quad (\text{VII.122})$$

Из (VII.122) видно, что на контуре пластинки  $r = R_1$ , заземленной на бесконечности, значения  $\sigma_{\theta\theta}^*$  и  $M_{\theta\theta}$  в два раза больше, чем в сплошной пластинке.

### § 6. Температурные напряжения в тонкой пластинке, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий

Эта задача рассматривалась Л. А. Фильштинским [1] при таких условиях:

- 1) на контурах круговых отверстий, свободных от внешних усилий, задана постоянная (одинаковая для всех отверстий) температура  $T_0$ ;
- 2) центры круговых отверстий радиуса  $R$  образуют двоякопериодическую систему с основными периодами  $\omega_1 = 2$ ;  $\omega_2 = 2le^{i\alpha}$ ;  $l > 0$ ;  $Im \omega_2 > 0$ ,

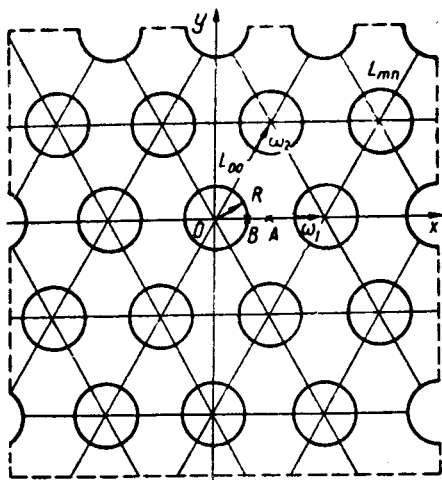


Рис. VII.4.

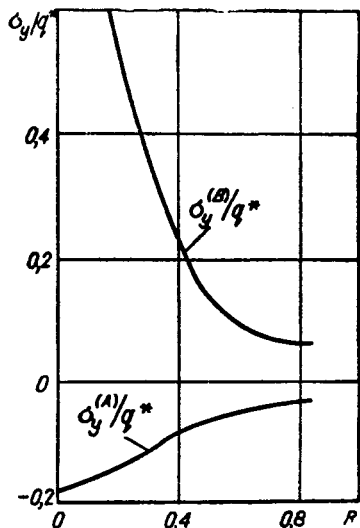


Рис. VII.5.

а конгруэнтная система точек (центров круговых отверстий)  $D = m\omega_1 + n\omega_2$  ( $m, n = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$ ) симметрична относительно осей координат  $Oxy$ , начало которых помещено в одном из центров отверстий  $L_{00}$  (рис. VII.4);

3) поверхность пластинки омывается постоянным тепловым потоком интенсивности  $q$ .

Рассматриваемая область, в которой ищется распределение температурных напряжений, представляет собой внешность равных окружностей  $L_{mn}$ , центры которых находятся в точках  $\vec{P} = m\vec{\omega}_1 + n\vec{\omega}_2$  (см. рис. VII.4) ( $m, n = 0; \pm 1, \pm 2; \dots$ ).

При помощи эллиптических функций Вейерштрасса и ее производных, а также некоторых специальных функций удается построить решение для широкого класса двоякопериодических задач плоской теории упругости, термоупругости, теплопроводности и изгиба.

На рис. VII.5 приведены кривые  $\sigma_y/q^*$  в точках  $A$  и  $B$  (см. рис. VII.4)

для правильной треугольной решетки ( $\omega_1 = 2; \omega_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ ), где  $q^* = E\alpha q/h\lambda^*$ ;  $\lambda^*$  — коэффициент теплопроводности материала пластинки;  $h$  — толщина пластинки;  $q$  — интенсивность теплового потока;  $\alpha = \pi/3$ ;  $E$  — модуль Юнга материала пластинки.

## ЛИТЕРАТУРА

- Ацуми Акира [1] Температурные напряжения около кругового отверстия в полосе при однородном тепловом потоке.— Trans. Japan. Soc. Mech., Engrs., 1963, 29, 197 (РЖМех., 1963, 12, 48).
- Боли Б., Уэйнер Дж. [1] Теория температурных напряжений. «Мир», М., 1964.
- Болотин В. В. [1] Динамические задачи термоупругости для пластин и оболочек при наличии излучения.— В кн.: Тр. конф. по теории пластин и оболочек, Казань, 1961.
- Гайвасъ И. В. [1] Анализ температурных напряжений, обусловленных возмущением однородного теплового потока около отверстий.— Прикл. мех., 1965, 12.
- Гембара В. М. [1] Автореферат канд. диссерт. Львов, 1964.
- Карслоу Г., Егер Д. [1] Теплопроводность твердых тел. «Наука», М., 1964.
- Коваленко А. Д. [1] Введение в термоупругость. «Наукова думка», К., 1965.
- Коляно Ю. М. [1] Температурні поля і напруження в тонких пластинках, край яких підкріплені тонким стержнем.— ДАН УРСР, 1964, 12.
- [2] Температурные напряжения в тонких пластинках с подкрепленным краем.— В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.
- Космодаміанський О. С. [1] Термопружна задача для циліндра з порожнинами.— Прикл. мех., 1962, 8, 6.
- Лебедев Н. Н. [1] Температурные напряжения в теории упругости. ОНТИ, М.— Л., 1937.
- Лыков А. В. [1] Теория теплопроводности. ГИТТЛ, М., 1952.
- Майзель В. М. [1] Температурная задача теории упругости. Изд-во АН УССР, К., 1951.
- Мелан Э., Паркус Г. [1] Температурные напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. Физматгиз, М., 1958.

\* См. Л. А. Фильштинский [1].



- Мотовиловец И. А. [1] Температурное поле и тепловые напряжения в обогреваемой цилиндрической оболочке при переменном уровне жидкости.— В кн.: Тепл. напряж. в элементах конструкций, 3. Изд-во АН УССР, К., 1963.
- Мурамацу Масамицу, Ацуми Акира. [1] Температурные напряжения в окрестности бесконечного ряда отверстий в пластинке при однородном тепловом потоке.— Trans. Japan. Soc. Mech. Engrs., 1962, 28, 191 (РЖМех., 1963, 6, 48).
- Мусхелишвили Н. И. [1] Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
- Новацкий В. [1] Вопросы термоупругости. Изд-во АН СССР, М., 1962.
- Паркус Г. [1] Неустановившиеся температурные напряжения. Физматгиз, М., 1965.
- Подстригач Я. С. [1] Температурное поле в стенках постоянной толщины при асимптотическому тепловому режиму.— В кн.: Температурні напруження в тонкостінних конструкціях. Вид-во АН УРСР, К., 1959.
- [2] Умови теплового контакту твердих тіл.— ДАН УРСР, 1963, 1.
- [3] Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя.— ИФЖ, 1963, 6, 10.
- [4] Температурное поле в тонких оболочках.— ДАН УРСР, 1958, 5.
- Подстригач Я. С., Ярема С. Я. [1] Температурні напруження в оболонках. Вид-во АН УРСР, К., 1961.
- Савин Г. Н. [1] Концентрация напряжений около отверстий. ГТТИ, М., 1951.
- Уздалев А. И. [1] Некоторые задачи термоупругости анизотропного тела. Автореферат докт. диссерт., Казань, 1966.
- Фильштинский Л. А. [1] Задачи теплопроводности для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий.— В кн.: Тепл. напряж. в элементах конструкций, 4. «Наукова думка», К., 1964.
- Deresiewicz H. [1] Thermal stress in a plate due to disturbance of uniform heat flow by hole of general shape.— J. Appl. Mech., Trans. ASME, e. 1961, 28, 1.
- Florence A. L., and Goodier J. N. [1] Thermal stress at spherical cavities and circular holes in uniform heat flow.— J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1959, 26, 2.
- [2] Thermal stress due to disturbance of uniform heat flow by an insulated ovaloid hole.— J. Appl. Mech., Trans. ASME, 1960, 27, 4.
- [3] Thermal stresses at an insulated circular hole near the edge of an insulated plate under uniform heat flow.— Quart. J. Mech. and Math., 1963, 16, 3.

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ТРЕЩИН. ПРЕДЕЛЬНЫЕ НАГРУЗКИ ПРИ ХРУПКОМ РАЗРУШЕНИИ МАТЕРИАЛА

## § 1. Вводные замечания

Результаты исследований концентрации напряжений возле эллиптического отверстия, приведенные в § 2 гл. II, показывают, что наибольшие значения напряжений  $\sigma_\phi$  по контуру отверстия существенным образом зависят от кривизны контура в этой точке. В случае одноосного растяжения вдоль оси  $Ox$  эти напряжения достигают максимального значения в точках пересечения контура отверстия с осью  $2b$  эллипса, т. е. при  $\phi = \pm\pi/2$ , определяются по формуле

$$\sigma_\phi = kp, \quad (\text{VIII.1})$$

где коэффициент концентрации напряжений

$$k = 1 + 2\frac{b}{a} = 1 + 2\sqrt{\frac{b}{q}}; \quad (\text{VIII.2})$$

$p$  — интенсивность растягивающих напряжений на бесконечности, направленных перпендикулярно к оси  $2b$  эллиптического отверстия;  $q$  — радиус кривизны контура отверстия в точках  $\phi = \pm\pi/2$ .

Если радиус кривизны отверстия в этой точке не слишком мал, а материал упругой плоскости достаточно хрупкий, то предельное значение нагрузки  $p = p_*$ , т. е. значение внешних растягивающих усилий\*, при которых наступает разрушение тела, определяется из следующих условий:

$$\sigma^{(\max)} = \sigma_{\text{отр}} \quad \text{или} \quad p_* = \frac{\sigma_{\text{отр}}}{k}, \quad (\text{VIII.3})$$

где  $\sigma_{\text{отр}}$  — сопротивление материала отрыву.

Если радиус закругления  $q$  неограниченно уменьшать ( $q \rightarrow 0$ ), то в пределе получим пластину, ослабленную отверстием в виде прямолинейной щели с острыми концами. Такой остроконечный вырез в упругом хрупком теле, когда максимальное расстояние  $2a$  между его противоположными берегами (стенками) мало по сравнению с расстояниями между его (отверстия) концами, будет представлять собой реальную трещину.

Из формулы (VIII.2) следует, что коэффициент концентрации  $k$ , полученный из решения соответствующей задачи классической теории упругости, возрастает, когда радиус кривизны  $q$  уменьшается, причем  $k \rightarrow \infty$ , когда  $q \rightarrow 0$ . Отсюда и из (VIII.3) приходим к выводу, что пластинка (рис. VIII.1), ослабленная трещиной с острым надрезом, должна немедленно разрушиться, если она будет подвергнута растяжению сколь угодно малыми усилиями  $p > 0$ . Однако в действительности этого

\* В этой главе главные напряжения  $N_1$  и  $N_2$ , приложенные в бесконечно удаленных точках упругой плоскости, обозначены через  $p$  и  $q$ , так что  $N_1 \equiv p$ ,  $N_2 \equiv q$ .

не наблюдается. Простой опыт (см. ниже § 9) показывает, что разрушение пластинки с остроконечной толщиной происходит при конечном (и, вообще говоря, не малом) значении растягивающих усилий  $p$  (рис. VIII.1). Другими словами: пластинка из хрупкого материала, ослабленная прямолинейной изолированной трещиной, способна выдерживать вполне определенную конечную растягивающую нагрузку, величина которой зависит от размера (длины) трещины и физико-механических характеристик материала.

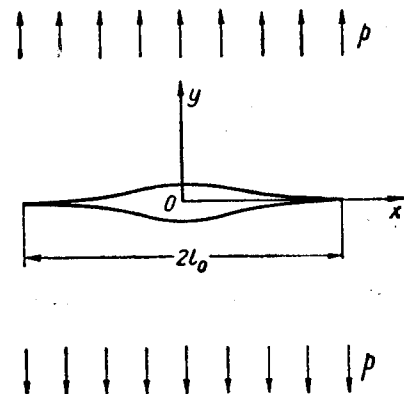


Рис. VIII.1.

Решение же (VIII.1) и (VIII.2), полученное в классической теории упругости и приводящее к бесконечно большим значениям растягивающих напряжений в окрестности острых концентраторов напряжений, очевидно, физически не оправдано. Вероятно, это несоответствие теории и опыта, к которому приводит классическая теория упругости, может быть объяснено тем, что для данного класса задач оказываются неприменимыми допущения, на которых базируются основные соотношения и уравнения классической теории упругости. Это несоответствие теории и опыта, по-видимому, можно объяснить двумя причинами: во-первых, тем, что для данного класса задач о концентрации напряжений возле трещин и вообще возле острых углов отверстий неприменимы уравнения классической \* теории упругости, которые выведены в предположении пренебрежимой малости (в сравнении с единицей) удлинений, сдвигов и углов поворота, а также, что произведениями углов поворотов можно пренебречь по сравнению с удлинениями и сдвигами, и, во-вторых, тем, что при любых деформациях предполагается справедливым закон Гука. Как показано в § 8 гл. V, при сравнительно небольших значениях растягивающих усилий  $p$  возле острых концентраторов напряжений возникают полосы скольжения, из которых при соответствующих условиях могут образоваться микро- и макротрещины.

Возле этих трещин картина деформаций материала будет иной, чем картина напряженно-деформированного состояния, которая определяется классической теорией упругости, основанной на сплошной модели идеально упругого тела. Поэтому для определения величины предельной нагрузки хрупкого тела с остроконечными концентраторами напряжений (трещинами), необходимо как первый шаг \*\*

Возле этих трещин картина деформаций материала будет иной, чем картина напряженно-деформированного состояния, которая определяется классической теорией упругости, основанной на сплошной модели идеально упругого тела. Поэтому для определения величины предельной нагрузки хрупкого тела с остроконечными концентраторами напряжений (трещинами), необходимо как первый шаг \*\*

\* См. В. В. Новожилов [1], стр. 179.

\*\* Вообще говоря, при исследовании напряженного состояния в зоне концентрации напряжений возле острых углов у отверстий или в конце трещин необходимо пользоваться основными уравнениями нелинейной теории упругости. Это значительно усложняет задачу, так как приводит к решению системы нелинейных уравнений при довольно сложных условиях на границах.

сохранить метод классической теории упругости, но дополнить модель классической теории некоторыми новыми свойствами, которые позволили бы более полно (с физической стороны) описать напряженно-деформированное состояние в окрестности таких концентраторов напряжений и установить более совершенный критерий оценки прочности твердого тела.

Исследование равновесия деформируемого твердого тела, ослабленного дефектами типа остроконечных полостей — трещин, и представляет предмет математической теории равновесных трещин. Эта теория (после известных работ А. А. Griffith) получила существенное развитие лишь в последние годы в работах советских исследователей А. С. Христиановича, Г. И. Баренблатта, М. Я. Леонова, В. В. Панасюка и др., а также в работах зарубежных исследователей (G. R. Irwin, E. O. Gdwan и др.).

Очерк развития исследований по математической теории равновесных трещин, библиография работ в этой области и формулировка некоторых общих положений теории содержатся в статьях \* Г. И. Баренблатта [1, 2], G. R. Irwin [1], J. I. Bluhm [1]; здесь приведены решения лишь некоторых двумерных задач этой теории.

## § 2. Задача Гриффитса

Рассмотрим бесконечную упругую пластинку единичной толщины, ослабленную прямолинейной изолированной трещиной длины  $2l$  (см. рис. VIII.1). Будем предполагать, что материал пластины идеально хрупкий, т. е. сохраняет свойство линейной упругости вплоть до разрушения и способен выдерживать конечные напряжения растяжения. Пусть такая пластина подвергнута растяжению монотонно возрастающими напряжениями  $\sigma_y = p$ , приложенными в бесконечно удаленных точках пластины и направленными перпендикулярно к плоскости трещины. Определим величину нагрузки  $p = p_*$ , по достижении которой трещина начинает увеличивать свою длину и пластинка разрушается\*\*.

Как уже отмечалось, решение этой задачи в рамках классической теории упругости невозможно. Для ее решения необходимо ввести в рассмотрение силы ослабленного межчастичного сцепления в той части деформируемого тела, где величина деформаций превосходит предел упругости. В данном случае такими областями являются окрестности

\* См. также Н. И. Мусхелишвили [2], § 166.

\*\* Решение этой задачи впервые дано А. А. Griffith [1, 2] с помощью так называемого энергетического метода, который основан на балансе работы, совершаемой внешними силами при увеличении длины трещины, и работы, затрачиваемой при этом на образование новых поверхностей тела. Приводимое в настоящем параграфе решение дано в работах В. В. Панасюка [1, 2], М. Я. Леонова и В. В. Панасюка [1], П. М. Витвицкого и М. Я. Леонова [1].

концов реальной трещины (остроконечного концентратора напряжений).

Прослойки твердого тела, где материал деформирован за предел упругости, можно мысленно удалить из тела, образовав некоторые микроскопические щели (трещины), к поверхностям которых приложены силы, соответствующие действию удаленного материала. Следовательно, задача о напряженно-деформированном состоянии твердого тела, когда в теле имеются начальные трещины, а также прослойки материала, деформированного за предел упругости, сводится к задаче о напряженно-деформированном состоянии в упругом теле, ослабленном исходными трещинами (разрезами) и микроскопическими трещинами, поверхности которых притягиваются между собой некоторыми силами. Если силы взаимодействия между берегами микротрещин определены, задача сводится к некоторой смешанной задаче теории упругости.

Определение сил взаимодействия между берегами микротрещины в общем случае представляет собой очень трудную задачу. Однако для хрупких материалов силы притяжения  $q(\lambda)$  между берегами микротрещины приближенно можно \* представить в следующем \*\* виде (рис. VIII.2):

$$q(\lambda) = \begin{cases} \sigma_0 & \text{при } \lambda_m < \lambda < \delta_k, \\ 0 & \text{при } \lambda > \delta_k, \end{cases} \quad (\text{VIII.4})$$

где  $\lambda$  — расстояние между берегами микротрещины;  $\sigma_0$  — предел хрупкой прочности (сопротивление отрыву);  $\lambda_m$  — предельное значение параметра  $\lambda$ , при котором силы взаимодействия еще подчиняются закону Гука;  $\delta_k$  — предельное значение параметра  $\lambda$ , при котором еще существует взаимодействие между берегами микротрещин. Величина  $\delta_k$  определяется таким образом, чтобы значение эффективной поверхности энергии хрупкого тела и упругой модели совпадало, т. е. из равенства (см. рис. VIII.2)

$$\sigma_0 \delta_k = 2\gamma. \quad (\text{VIII.5})$$

Здесь  $\gamma$  — плотность эффективной поверхности энергии хрупкого или квазихрупкого материала.

Если силы взаимодействия  $q(\lambda)$  между берегами микротрещин в хрупком материале определяются равенством (VIII.4), то легко ввести следующую расчетную модель для определения равновесия хрупкого тела с трещинами. Хрупкое тело представляется как упругий континуум, для которого удовлетворяются такие условия:

а) действующие в нем нормальные растягивающие напряжения не превосходят величины  $\sigma_0$ , т. е.

$$\sigma^{(\max)} \leq \sigma_0; \quad (\text{VIII.6})$$

\* В дальнейшем будет показано, что такое приближенное представление функции  $q(\lambda)$  достаточно для решения задач о трещинах.

\*\* См. М. Я. Леонов и В. В. Панасюк [2], В. В. Панасюк [1], П. М. Витвицкий, М. Я. Леонов [1].

б) зависимость между напряжениями и деформациями подчиняется закону Гука, если выполняется условие (VIII.6);

в) если в упругом теле имеются области, где невозможно напряженно-деформированное состояние, удовлетворяющее условиям линейной теории упругости и условию (VIII.6) (т. е. имеются прослойки

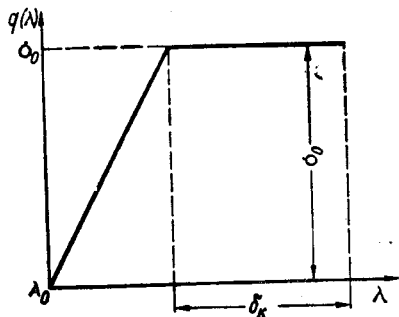


Рис. VIII.2.

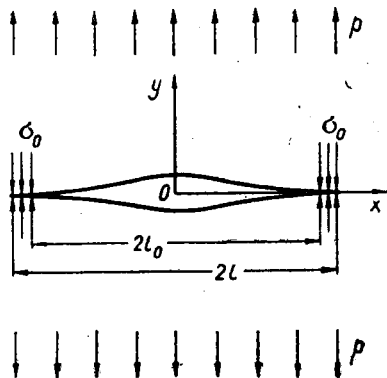


Рис. VIII.3.

тела, где материал деформирован за предел упругости), то такие области тела рассматриваются как микротрещины (разрезы в упругом теле);

г) противоположные берега микротрещин притягиваются между собой с напряжениями  $\sigma_0$ , если расстояние между ними не превосходит величины  $\delta_k$ , и не взаимодействуют между собой в противном случае; расстояние между берегами трещины в процессе деформации тела определяется как сумма упругих смещений противоположных точек берегов разреза в упругой модели.

Для рассматриваемой задачи прослойки тела, где материал деформирован за предел упругости при сколь угодно малом значении напряжения  $p > 0$ , расположены в окрестности концов трещины. Поэтому в рамках сформулированной модели задача о распространении начальной трещины длиной  $2l_0$  в хрупкой пластине (рис. VIII.3), когда пластина растягивается монотонно возрастающими напряжениями  $\sigma_y^\infty = p$ , сводится к следующей плоской задаче математической теории упругости. В бесконечной упругой плоскости имеется разрез длины  $2l(-l \leq x \leq l)$ . На поверхностях этого разреза действуют напряжения

$$\sigma_y(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{при } -l_0 < x < l_0, \\ \sigma_0 & \text{при } l_0 \leq |x| \leq l; \end{cases} \quad (\text{VIII.7})$$

$$\tau_{xy}(x,0) = 0 \quad \text{при } -\infty < x < \infty,$$

а в бесконечно удаленных точках пластины

$$\sigma_y^\infty = p \text{ и } \tau_{xy}^\infty = 0, \quad (\text{VIII.8})$$

где  $l$  — величина абсцисс точек, разграничивающих область микротрещины и область упруго-деформированного материала пластинки. Величина  $l$  заранее неизвестна; она должна быть определена в процессе решения задачи. Вне разреза  $(-l, l)$  материал пластины деформируется упруго, и в этой области тела применима классическая теория упругости.

Если из напряженного состояния в упругой плоскости с разрезом  $2l$  (рис. VIII.3), определяемом граничными условиями (VIII.7) и (VIII.8), вычесть однородное напряженное состояние  $\sigma_y = p$ , получим некоторое дополняющее (вспомогательное) напряженное состояние в этой плоскости, которое исчезает на бесконечности, а на поверхности разреза задается такими граничными условиями:

$$p_n(x) = \begin{cases} p & \text{при } -l_0 < x < l_0, \\ p - \sigma_0 & \text{при } l_0 \leq |x| \leq l; \end{cases} \quad (\text{VIII.9})$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \text{ при } -\infty \leq x \leq \infty,$$

где  $p_n(x) = -\sigma_y(x, 0)$  — нормальное давление на поверхностях разреза для вспомогательной задачи.

Определим для вспомогательной задачи значение вертикальных смещений берегов разреза, т. е. найдем \*  $v(x, 0)$  при  $-l < x < l$  и  $\sigma_y^{(1)}(x, 0)$  при  $|x| \geq l$ :

$$v(x, 0) = c \int_{-l}^l p_n(\xi) \Gamma(l, x, \xi) d\xi \quad (-l < x < l); \quad (\text{VIII.10})$$

$$\sigma_y^{(1)}(x, 0) = \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{p_n(\xi) \sqrt{l^2 - \xi^2}}{x - \xi} d\xi \quad (x \geq l). \quad (\text{VIII.11})$$

Здесь  $c$  — постоянная, которая для случая плоской деформации равна  $\frac{1 - \nu^3}{\pi E}$ , а для случая обобщенного плоского напряженного состояния  $\frac{1}{\pi E}$  ( $E$  — модуль Юнга,  $\nu$  — коэффициент Пуассона) функция

$$\Gamma(l, x, \xi) = \ln \frac{l^2 - x\xi + \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}{l^2 - x\xi - \sqrt{(l^2 - x^2)(l^2 - \xi^2)}}. \quad (\text{VIII.12})$$

Нетрудно убедиться, что смещения берегов разреза для исходной (см. рис. VIII.3) и вспомогательной задачи совпадают, а напряжения  $\sigma_y(x, 0)$  при  $|x| > l$  для исходной задачи отличаются от напряжений  $\sigma_y^{(1)}(x, 0)$  при  $|x| > l$  на величину  $p$ , т. е.

$$\sigma_y(x, 0) = \sigma_y^{(1)}(x, 0) + p \text{ при } x \geq l. \quad (\text{VIII.13})$$

\* См. М. Я. Леонов и В. В. Панасюк [2].

Напряжения  $\sigma_y(x, 0)$  при  $x \geq l$  (в области, где материал деформируется упруго) не могут превосходить предела хрупкой прочности  $\sigma_0$ , т.е. они должны быть при всех  $x \geq l$  ограниченными, как это требует условие (VIII.6). Из формул (VIII.12) и (VIII.13), однако, следует, что условие (VIII.6) нарушается, когда  $x \rightarrow l$ . Следовательно, параметр  $l$  должен быть определен таким образом, чтобы условие (VIII.6) выполнялось и при  $x = l$ . В соответствии с формулами (VIII.12) и (VIII.13) необходимым (и достаточным) условием этого является равенство

$$\lim_{x \rightarrow l+0} \int_{-l}^l \frac{p_n(\xi) \sqrt{l^2 - \xi^2}}{x - \xi} d\xi = 0, \quad (\text{VIII.14})$$

которое и служит условием для определения (неизвестного ранее) параметра  $l$ .

Подставив в равенство (VIII.14) значение  $p_n(\xi)$  по формуле (VIII.9) и выполнив необходимые вычисления, найдем

$$l = l_0 \sec \frac{\pi p}{2\sigma_0}. \quad (\text{VIII.15})$$

При таком значении  $l$  на основе формул (VIII.9), (VIII.11) и (VIII.13) напряжения  $\sigma_y(x, 0)$  удовлетворяют условию (VIII.6) при всех  $x \geq l$ , причем на границе микротрещины и упругой области ( $x = l$ ) наблюдается непрерывность напряжений  $\sigma_y(l, 0)$ , т.е.

$$\sigma_y(l + 0, 0) = \sigma_y(l - 0, 0) = \sigma_0.$$

Пользуясь далее формулами (VIII.9), (VIII.10) и (VIII.15), найдем

$$v(x, 0) = c\sigma_0 \{(x - l_0)\Gamma(l, x, l_0) - (x + l_0)\Gamma(l, x, -l_0)\}, \quad (\text{VIII.16})$$

где  $l$  выражается формулой (VIII.15), а  $\Gamma(l, x, \pm l_0)$  определяется по формуле (VIII.12) при  $\xi = \pm l_0$ .

Дифференцируя (VIII.16) по  $x$  и устремляя  $x \rightarrow l$ , получаем

$$\lim_{x \rightarrow l-0} v'(x, 0) = 0. \quad (\text{VIII.17})$$

Равенство (VIII.17) показывает, что в процессе раскрытия трещины (под действием внешних усилий) противоположные стенки трещины в окрестности ее концов плавно смыкаются (с нулевым углом раскрытия). Этот результат получается также и в общем случае нагрузки  $p_n(x)$ , если продифференцировать выражение (VIII.10) по  $x$  и найти значение  $v'(x, 0)$  при  $x \rightarrow l$  и выполнении условия (VIII.14).

Полагая в (VIII.16)  $x = \pm l_0$ , легко найдем расстояние

$$2v(\pm l_0, 0) = -8cl_0\sigma_0 \ln \cos \frac{\pi p}{2\sigma_0}, \quad (\text{VIII.18})$$

на которое разойдутся в процессе деформации пластины противоположные берега трещины в окрестности ее концов, т.е. в окрестности точек  $(\pm l_0, +0)$  и  $(\pm l_0, -0)$ .



Если напряжения  $p = p_*$  таковы, что расстояние

$$2v(\pm l_0, 0) = \delta_k, \quad (\text{VIII.19})$$

то согласно свойствам принятой модели в окрестности точек  $(\pm l_0, +0)$  и  $(\pm l_0, -0)$  противоположные берега микротрещины перестают взаимодействовать между собой и, следовательно, наступает возможность увеличения длины исходной трещины  $2l_0$  (см. рис. VIII.3). Таким образом, равенство (VIII.19) является условием развития процесса разрушения трещины длиной  $2l_0$ , т. е. условием развития процесса разрушения пластины с трещиной при растяжении пластины напряжениями  $p$ .

Напряжения  $p = p_*$ , по достижении которых наступает распространение начальной трещины, т. е. когда выполняется условие (VIII.19), называются предельными или критическими.

Таким образом, величина предельных напряжений для рассматриваемой задачи, как это следует из (VIII.18) и (VIII.19),

$$p_* = \frac{2}{\pi} \sigma_0 \operatorname{arccos} \exp\left(-\frac{\delta_k}{8cl_0\sigma_0}\right). \quad (\text{VIII.20})$$

Из (VIII.20) вытекает, что при  $l_0 \rightarrow 0$  разрушающие напряжения  $p_* \rightarrow \sigma_0$ , т. е. прочность пластины с «трещиной нулевой длины» равна прочности бездефектного материала.

Если длина исходной трещины  $2l_0$  велика, так что можно считать  $\frac{\delta_k}{l_0} \ll 1$ , то, сохраняя в формуле (VIII.20) малые величины  $(\delta_k/l_0)$  лишь первого порядка малости, получаем

$$p_* = \frac{2}{\pi} \sigma_0 \sqrt{\frac{2\delta_k}{8cl_0\sigma_0}} = \sqrt{\frac{\sigma_0\delta_k}{\pi^2 cl_0}}.$$

Отсюда и на основании равенства (VIII.5) получаем известные формулы А. А. Griffith [1, 2] соответственно для плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния:

$$p_* = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)l_0}} \quad \text{и} \quad p_* = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi l_0}}. \quad (\text{VIII.21})$$

### § 3. Условие предельного состояния для макроскопических трещин

Макроскопическими будем называть такие трещины, для которых выполняется следующее условие\*: ширина концевой области трещины, т. е. там, где действуют силы сцепления между противоположными ее берегами, мала по сравнению с размерами всей трещины\*\*.

\* См. Ю. П. Желтков и С. А. Христианович [1], Г. И. Баренблатт [1].

\*\* Можно показать, что если, например, характерный линейный размер  $l_0$  начальной трещины больше 10 мк, то такие трещины можно рассматривать как макроскопические, т. е. удовлетворяющие сформулированному условию.

Для макроскопических трещин можно получить некоторые простые соотношения, позволяющие определить значение предельной нагрузки для тела (ослабленного такими трещинами) при хрупком его разрушении, зная при этом только главную часть упругих растягивающих напряжений в окрестности контура рассматриваемой трещины.

Пусть в упругой плоскости, состоящей из хрупкого материала (рис. VIII.4), имеется прямолинейная изолированная макротрещина длины  $2l_0$ . Введем прямолинейную систему декартовых координат  $xOy$  так, как это показано на рис. VIII.4, и предположим, что к берегам трещины приложено некоторое нормальное давление  $q_n(x)$  при  $|x| \leq a$ , где  $a \leq l_0$ , а в бесконечно удаленных точках пластины напряжения отсутствуют. В рамках модели идеально

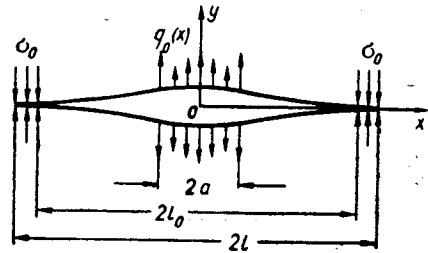


Рис. VIII.4.

хрупкого тела и аналогично тому, как это сделано в предыдущем параграфе, вертикальные смещения берегов трещины представим в виде

$$v(x, 0) = c \int_{-l}^l q_n(\xi) \Gamma(l, x, \xi) d\xi \quad (|x| < L), \quad (\text{VIII.22})$$

где  $l$  — абсцисса границы между микротрещиной и упруго-деформирующимся материалом;

$$q_n(\xi) = \begin{cases} q_0(\xi) & \text{при } |\xi| < a, \\ 0 & \text{при } a < |\xi| < l_0, \\ -\sigma_0 & \text{при } l_0 \ll |x| < l. \end{cases} \quad (\text{VIII.23})$$

Для рассматриваемого случая

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 - l^2}} \int_{-l}^l \frac{q_n(\xi) \sqrt{l^2 - \xi^2}}{x - \xi} d\xi \quad (x \geq l). \quad (\text{VIII.24})$$

Из условия ограниченности напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  при  $x \rightarrow l + 0$ , следует

$$\lim_{x \rightarrow l+0} \int_{-l}^l \frac{q_n(\xi) \sqrt{l^2 - \xi^2}}{x - \xi} d\xi = 0. \quad (\text{VIII.25})$$

\* Аналогично тому, как это сделано в § 2, можно показать (см. Н. Ф. Виецкнер [1]), что в общем случае растяжения пластинки на бесконечности системой внешних усилий  $p = \text{const}$ ;  $q_0 = \text{const}$  задачу можно свести к задаче о нормальном давлении  $q_0(x)$ , приложенном к берегам трещины.

Подставив соответствующие значения  $q_n(\xi)$  из (VIII.23) в (VIII.25), получим

$$\lim_{x \rightarrow l+0} \sigma_0 \left\{ \int_{-l}^{-l_0} \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}}{x - \xi} d\xi + \int_{l_0}^l \frac{\sqrt{l^2 - \xi^2}}{x - \xi} d\xi \right\} = \lim_{x \rightarrow l+0} \int_{-a}^a \frac{q_0(\xi) \sqrt{l^2 - \xi^2}}{x - \xi} d\xi. \quad (\text{VIII.26})$$

Введем для удобства рассуждений параметр

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}.$$

Поскольку рассматриваемая трещина считается макроскопической, должно выполняться неравенство  $l - l_0 \ll l_0$  и, следовательно,  $\varepsilon \ll 1$ . Учитывая это, равенство (VIII.26) с точностью до малых величин первого порядка малости по параметру  $\varepsilon$  можно представить так:

$$2l_0\sigma_0\sqrt{2\varepsilon} = \int_{-a}^a \frac{q_0(\xi) \sqrt{l^2 - \xi^2}}{l - \xi} d\xi. \quad (\text{VIII.27})$$

Аналогично предыдущему из (VIII.22) с такой же точностью по  $\varepsilon$  получим

$$v(l_0, 0) = -4cl_0\sigma_0\varepsilon + 2c\sqrt{2\varepsilon} \int_{-a}^a \frac{q_0(\xi) \sqrt{l^2 - \xi^2}}{l - \xi} d\xi. \quad (\text{VIII.28})$$

При этом необходимо иметь в виду, что согласно определению макротрещин ( $\varepsilon \ll 1$ ) для таких трещин можно считать  $l_0 + l \approx 2l_0 \approx 2l$ .

Если параметры, определяющие нагрузку  $q_0(x)$ , таковы, что выполняется условие (VIII.19), то параметр  $\varepsilon$  достигает некоторого предельного значения  $\varepsilon_*$ . На основании (VIII.19), а также равенств (VIII.27) и (VIII.28) найдем

$$\varepsilon_* = \frac{\delta_k}{8cl_0\sigma_0}. \quad (\text{VIII.29})$$

Отсюда

$$l_* - l_0 = \frac{\delta_k}{8c\sigma_0}, \quad (\text{VIII.30})$$

где  $l_*$  — максимальное значение параметра  $l$ , которое достигается тогда, когда внешняя нагрузка достигает предельного значения.

Поскольку в правой части равенства (VIII.30) содержатся величины, не зависящие от характера нагрузки и начального размера трещины, из этого равенства следует, что для данного материала при заданных условиях концевая часть макротрещины в случае ее предельного равновесия — постоянная величина.

Для макроскопических трещин предельная нагрузка  $q_0^{\max}(x) = q_*$  должна удовлетворять уравнению, впервые найденному Г. И. Баренблаттом [2]:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{\sqrt{s} \sigma_y(s, q_*)\} = \frac{K}{\pi}, \quad (\text{VIII.31})$$

где  $\sigma_y(s, q_*)$  — разрывающие упругие напряжения, вычисленные на основе классической теории упругости при нагрузке  $q_*$ ;  $s$  — малое расстояние точек тела, расположенных в плоскости трещины, от контура трещины;  $K$  — модуль сцепления, равный соответственно для плоской деформации и обобщенного плоского напряженного состояния

$$K_1 = \sqrt{\frac{\pi E \gamma}{1 - \nu^2}} \text{ и } K_2 = \sqrt{\pi E \gamma}.$$

Рассмотрим равенство (VIII.26), которое с точностью до малых величин порядка  $\epsilon$  (включительно) можно представить в виде

$$\frac{2l_0 \sigma_0 \sqrt{2\epsilon}}{\pi} = \lim_{x \rightarrow l_0 + 0} \{ \sigma_y(x, q) \sqrt{x^2 - l_0^2} \}, \quad (\text{VIII.32})$$

где  $q$  — параметр, характеризующий внешнюю нагрузку.

Функция

$$\sigma_y(x, q) = \frac{1}{\pi \sqrt{x^2 - l_0^2}} \int_{-a}^a \frac{q_0(\xi) \sqrt{l_0^2 - \xi^2}}{x - \xi} d\xi \quad (x \geq l_0). \quad (\text{VIII.33})$$

Формула (VIII.33) представляет собой ничто иное, как упругие разрывающие напряжения, вычисленные для макроскопической трещины длины  $2l_0$  (рис. VIII.4), когда к берегам трещины приложены внешние усилия  $q_0(x)$  при  $|x| \leq a$ .

Легко видеть, что выражение

$$\sqrt{x^2 - l_0^2} = \sqrt{s} \sqrt{2l_0 + s}, \quad (\text{VIII.34})$$

где  $s = x - l_0$  представляет собой расстояние от вершины контура трещины точек тела, лежащих на оси  $Ox$  (рис. VIII.4) при  $x \geq l_0$ .

Кроме того, заметим, что соотношение (VIII.32) справедливо для любой нагрузки  $q(x)$ , не превосходящей ее предельного значения. Если же параметры, характеризующие внешнюю нагрузку, таковы, что внешняя нагрузка достигает величины предельного значения (в рассматриваемом случае  $q = q_*$ ), то параметр  $\epsilon$  определяется формулой (VIII.29). Учитывая это и (VIII.32), для определения величины предельной нагрузки получим формулу

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{ \sqrt{s} \sigma_y(s, q_*) \} = \frac{2\sigma_0}{\pi} \sqrt{l_0 \epsilon_*}. \quad (\text{VIII.35})$$

Правую часть формулы (VIII.35) преобразуем, пользуясь формулами (VIII.5) и (VIII.29), к виду

$$\frac{2\sigma_0}{\pi} \sqrt{l_0 \epsilon_*} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_0 \delta_k}{2c}} = \frac{K}{\pi}. \quad (\text{VIII.36})$$

Из (VIII.36) видим, что соотношения (VIII.35) и (VIII.31) совпадают, что и требовалось доказать.

В дальнейшем для определения величины предельной нагрузки для хрупкого тела, ослабленного макроскопическими трещинами, будем пользоваться соотношением (VIII.31), которое впервые было установлено Г. И. Баренблаттом [2], исходя из других соображений.

#### § 4. Растяжение упругой плоскости, ослабленной двумя коллинеарными трещинами \*

**Две неравные трещины.** Рассмотрим бесконечную упругую плоскость с двумя микроскопическими трещинами неравной длины, расположенными вдоль одной прямой, которую возьмем за ось  $x$  (рис. VIII.5). Пусть в бесконечно удаленных точках пластины приложены монотонно возрастающие напряжения  $\sigma_y^\infty = p$ , направленные перпендикулярно к линии расположения трещин. Определим величину напряжений

$$p_* = \min p, \quad (\text{VIII.37})$$

по достижении которых происходит распространение трещин.

Обозначим через  $a, b, -c, -d$  абсциссы точек концов трещины, как это показано на рис. VIII.5, а через  $p_*^{(a)}, p_*^{(b)}, p_*^{(c)}, p_*^{(d)}$  — значения напряжений  $p$ , при которых распространение трещин будет происходить в направлении абсцисс  $a, b, -c, -d$  соответственно.

Напряжения в рассматриваемой пластине \*\*

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{p(x^2 + c_1x + c_2)}{\sqrt{(x-a)(x-b)(x+c)(x+d)}}, \quad (\text{VIII.38})$$

где  $x$  принимает значения, соответствующие точкам вне трещин; коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  определяются из условий однозначности смещений:

$$c_1 = \frac{(d-b)F(k) - 2d\Pi(n, k) + 2b\Pi(m, k) + (d+b)[J_2(n, k) - J_2(m, k)]}{F(k) - \Pi(n, k) - \Pi(m, k)},$$

$$c_2 = c_1 \left[ d - (b+d) \frac{\Pi(n, k)}{F(k)} \right] + \left[ -d^2 + 2d(d+b) \frac{\Pi(n, k)}{F(k)} - (b+d)^2 \frac{J_2(n, k)}{F(k)} \right], \quad (\text{VIII.39})$$

\* Решение задачи о предельной нагрузке для пластины с двумя коллинеарными трещинами неравной длины с доведением ее до расчетных формул дано в работе В. В. Панасюка, Б. Л. Лозового [5]. Общий же подход к решению такой задачи для случая произвольного числа трещин дан в работе Г. И. Баренблатта, Г. П. Черепанова [1].

\*\* См. Н. И. Мухелишвили [1].

где  $F_k$ ,  $\Pi(n, k)$ ,  $\Pi(m, k)$  — полные эллиптические интегралы I и III рода с модулем  $k$  и параметрами  $n$  и  $m$ ; интегралы

$$J_2(n, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi)^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$J_2(m, k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi_1}{(1 + m \sin^2 \varphi_1)^2 \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi_1}}.$$
(VIII.40)

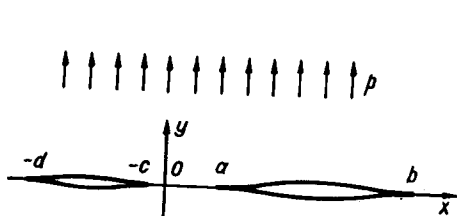


Рис. VIII.5.

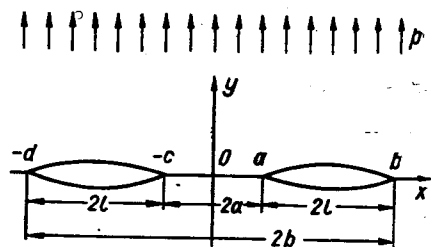


Рис. VIII.6.

Модуль  $k$ , параметры  $n$  и  $m$  выражаются через значения абсцисс концов трещины равенствами

$$k^2 = \frac{(b-a)(d-c)}{(b+c)(d+a)}; \quad n = \frac{b-a}{d+a}; \quad m = \frac{d-c}{b+c}.$$
(VIII.41)

Подставляя (VIII.38) в уравнение (VIII.31) и осуществляя предельный переход при  $s \rightarrow 0$  для каждого из концов трещины, получаем формулы для  $p_*^{(a)}$ ,  $p_*^{(b)}$ ,  $p_*^{(c)}$  и  $p_*^{(d)}$ . Так, например, для концов трещины  $(a, 0)$  и  $(b, 0)$  соответственно  $s = a - x$  при  $x \rightarrow a - 0$  и  $s = x - b$  при  $x \rightarrow b + 0$ . На основании этих равенств и формулы (VIII.38), а также уравнения (VIII.31) получим

$$p_*^{(a)} = \frac{-K}{\pi} \frac{\sqrt{(b-a)(a+c)(a+d)}}{a^2 + c_1 a + c_2},$$

$$p_*^{(b)} = \frac{K}{\pi} \frac{\sqrt{(b-a)(b+c)(b+d)}}{b^2 + c_1 b + c_2},$$
(VIII.42)

где коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$  определяются по формулам (VIII.39) — (VIII.41). Аналогичные формулы можно получить и для  $p_*^{(c)}$  и  $p_*^{(d)}$ .

Две равные трещины (рис. VIII.6). Если в формулах (VIII.42) положить  $c = a$  и  $d = b$ , получим формулы для определения предельной нагрузки в случае пластины, ослабленной двумя коллинеарными трещи-

нами равной длины. В таком случае ( $c=a$  и  $d=b$ ) из формул (VIII.42) найдем

$$\rho_*^{(a)} = \frac{F(k) \sqrt{a(b^2 - a^2)}}{(b^2 - a^2) F(k) - 4b^2 [\Pi(k, k) - J_2(k, k)]} \cdot \frac{\sqrt{2K}}{\pi},$$

$$\rho_*^{(b)} = \frac{F(k) \sqrt{b(b^2 - a^2)}}{4b^2 [\Pi(k, k) - J_2(k, k)]} \cdot \frac{\sqrt{2K}}{\pi}. \quad (\text{VIII.43})$$

Если далее в формулах (VIII.43) представить интегралы  $J_2(k, k)$  через комбинацию интегралов  $\Pi(k, k)$ ,  $E(k)$ ,  $F(k)$  и преобразовать затем эллиптические интегралы к новому модулю

$$e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}; \quad k = \frac{e^2}{(1 + \sqrt{1 - e^2})^2} = \frac{1 - e_1}{1 - e_1} \quad (e_1^2 = 1 - e^2), \quad (\text{VIII.44})$$

как это показано в работе В. В. Панасюка, Б. Л. Лозового [1], то получим \*

$$\rho_*^{(a)} = \frac{be \sqrt{a} F(e)}{b^2 E(e) - a^2 F(e)} \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1 - v^2)}},$$

$$\rho_*^{(b)} = \frac{eF(e)}{[F(e) - E(e)] \sqrt{b}} \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1 - v^2)}}, \quad (\text{VIII.45})$$

где  $F(e)$ ,  $E(e)$  — полные эллиптические интегралы I и II рода с модулем  $e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}}$ .

Рассмотрим некоторые предельные случаи, вытекающие из формул (VIII.45). Так полагая, что  $a \rightarrow 0$ , найдем  $e \rightarrow 1$  и

$$\lim_{e \rightarrow 1} \frac{eF(e)}{F(e) - E(e)} = 1, \quad \lim_{e \rightarrow 1} \frac{be \sqrt{a} F(e)}{b^2 E(e) - a^2 F(e)} = 0.$$

На основе последнего при  $a = 0$  ( $e = 1$ ), т. е. для случая пластины с одной трещиной длины  $2b$ , из формул (VIII.45) получим

$$\rho_*^{(a)} = 0, \quad \rho_*^{(b)} = \rho_*^{(\Gamma)} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1 - v^2)b}}. \quad (\text{VIII.46})$$

Формула (VIII.46) совпадает, как и следовало ожидать, с известной формулой (VIII.21) Гриффитса для одной изолированной трещины длиной  $2b$ .

Рассмотрим другой предельный случай, когда коллинеарные трещины равной длины расположены на достаточном расстоянии друг от друга, т. е. когда можно считать, что  $a \rightarrow \infty$  и  $b \rightarrow \infty$ , но так, что  $b - a = 2l = \text{const}$ , где  $2l$  — длина каждой из упомянутых трещин. В этом случае  $e \rightarrow 0$ , и коэффициенты перед радикалами в формулах

$$(\text{VIII.45}) \text{ быстро стремятся к выражению } \sqrt{\frac{2}{b-a}} \text{ при } e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} \rightarrow 0.$$

\* Формулы (VIII.45) получены в работах Т. J. Willmore [1], В. В. Панасюка и Б. Л. Лозового [2] на основе энергетического метода.

В пределе будем иметь

$$\rho_*^{(a)} = \rho_*^{(b)} = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)l}}, \quad (\text{VIII.47})$$

т. е. формулу (VIII.46). Отсюда следует, что каждая такая трещина будет вести себя как самостоятельная изолированная (единичная) трещина длины  $2l$ .

На рис. VIII.7 построены графики изменения усилий  $\rho_*^{(a)}$  — кривая 1 и  $\rho_*^{(b)}$  — кривая 2, подсчитанные по формулам (VIII.45), в зависимости от  $a/l$ . Как видим, значения предельной нагрузки  $\rho_*^{(a)}$  всегда меньше  $\rho_*^{(b)}$ , т. е. развитие двух коллинеарных трещин (равной длины) сначала происходит навстречу друг с другом путем разрушения перемычки; после их слияния в действие вступает уже одна (объединенная) трещина длины  $2b$ . При этом необходимо отметить, что если перемычка  $2a$  между трещинами достаточно мала по сравнению с длиной  $2l$  каждой трещины, так что  $\frac{a}{l} \leq 0,1$ , то разрушение перемычки (достижение внешней нагрузкой  $p$  величины  $\rho_*^{(a)}$ ) еще не влечет за собой разрушения всей пластины. В этом случае разрушающая нагрузка для пластины определяется формулой (VIII.46). Если же  $\frac{a}{l} > 0,1$ , то разрушение перемычки влечет за собой разрушение всей пластины.

Таким образом, разрушающая нагрузка ( $p = p_{\text{раз}}$ ) для пластины с двумя коллинеарными трещинами равной длины ( $2l$ ), когда пластина растягивается монотонно возрастающими усилиями  $\sigma_y^\infty = p$ ,

$$p_{\text{раз}} = \begin{cases} \rho_*^{(a)} & \text{при } \rho_*^{(a)} > \rho_*^{(\Gamma)}, \\ \rho_*^{(\Gamma)} & \text{при } \rho_*^{(a)} \leq \rho_*^{(\Gamma)}, \end{cases} \quad (\text{VIII.48})$$

где  $\rho_*^{(a)}$  и  $\rho_*^{(\Gamma)}$  вычисляются по формулам (VIII.45) и (VIII.46) соответственно.

Из графиков, приведенных на рис. VIII.7, можно сделать также вывод о том, что если перемычка между трещинами такова, что  $\frac{a}{l} > 3$ , то практически трещины можно считать изолированными (не влияющими друг на друга) и разрушающую нагрузку определять по формуле (VIII.47).

**О взаимном влиянии малой и большой трещин.** Рассмотрим случай, когда длина одной из трещин (рис. VIII.5) мала по сравнению с длиной другой трещины. Исследуем в этом случае влияние малой трещины

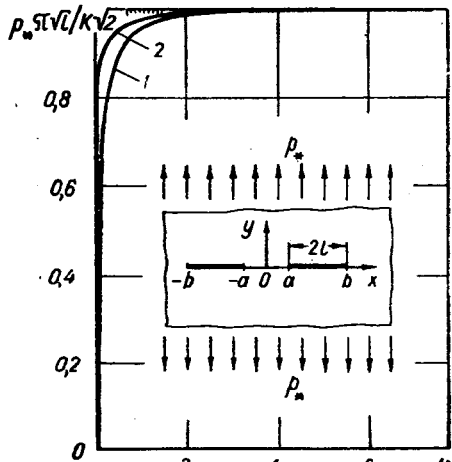


Рис. VIII.7.



на величину предельной нагрузки для большой трещины. Для этого воспользуемся формулами (VIII.42) и предположим, что  $d-c \ll b-a$ . При этом для упрощения выкладок будем в дальнейшем считать, что  $c=a$  и  $\frac{d-a}{d} \ll 1$ . В таком случае параметр

$$m = \frac{d-a}{b+a} = \varepsilon \quad (\varepsilon \ll 1)$$

есть малая величина по сравнению с единицей. Отсюда и (VIII.41) находим

$$k^2 = n\varepsilon.$$

Полные эллиптические интегралы I и III рода, а также интегралы  $J_2(n, k)$ ,  $J(m, k)$ , входящие в формулы (VIII.43), можно разложить в ряд по степеням малого параметра  $\varepsilon$ . Сохранив в этих разложениях только члены с  $\varepsilon$  в первой степени, получим

$$F(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{n\varepsilon}{4} \right) + 0(\varepsilon^2),$$

$$\Pi(n, k) = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1+n}} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{2} (\sqrt{1+n} - 1) \right] + 0(\varepsilon^2),$$

$$J_2(n, k) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2(1+n)^{3/2}} \left[ n + 2 + \frac{n\varepsilon}{2} \right] + 0(\varepsilon^2),$$

$$\Pi(m, k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{4} (n-2) \right] + 0(\varepsilon^2), \quad (\text{VIII.49})$$

$$J_2(m, k) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \frac{\varepsilon}{4} (n-4) \right] + 0(\varepsilon^2).$$

Принимая во внимание разложения (VIII.49), формулы (VIII.43) можно представить с точностью до величин порядка  $0(\varepsilon^2)$  в следующем виде:

$$p_*^{(a)} \approx \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{b+d}{a+d} \right) \sqrt{\frac{2a}{d+a}} \sqrt{\frac{4E\gamma}{\pi(1-\nu^2)(b-a)}}; \quad (\text{VIII.50})$$

$$p_*^{(b)} \approx \left( 1 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \sqrt{\frac{b+a}{b+d}} \sqrt{\frac{4E\gamma}{\pi(1-\nu^2)(b-a)}}, \quad (\text{VIII.51})$$

где

$$\varepsilon = \frac{d-a}{b+a}.$$

Формулы (VIII.50) и (VIII.51) дают в каждом конкретном случае возможность оценить влияние малой трещины на величину предельной нагрузки  $p_*$  для большой трещины, расположенной на одной прямой с малой трещиной.

### § 5. О величине предельной нагрузки для упругой плоскости, ослабленной круговым отверстием с радиальными трещинами

Задача о разрушении упругой плоскости, ослабленной круговым отверстием с радиальными трещинами равной длины, впервые рассматривались О. Л. Бови [1]. В этой работе построена рациональная функция  $z = \omega(\zeta)$ , которая приближенно осуществляет конформное отображение внешности круга  $|\zeta| \geq 1$  в плоскости  $\zeta$  на внешность круга с радиальными трещинами в плоскости  $Z$ . С помощью функции  $\omega(\zeta)$  методом Н. И. Мухелишвили в указанной работе дан приближенный метод определения напряжений в рассматриваемой плоскости, а затем на основе метода Гриффитса построены, в зависимости от длины  $l$  радиальных трещин, графики для определения величины предельных усилий. Расчеты О. Л. Бови очень громоздки. Другой путь решения аналогичных задач изложен в работах А. А. Каминского [1, 2] (см. также § 9 гл. V). Здесь приводим приближенный метод решения задачи о предельной нагрузке для упругой плоскости, ослабленной круговым отверстием с радиальными трещинами. Этот метод приведен в работе В. В. Панасюка [3].

**Круговые отверстия с двумя радиальными трещинами.** Пусть в неограниченной упругой плоскости  $xOy$  (рис. VIII.8) имеется круговое отверстие радиуса  $R$  с двумя радиальными макротрещинами длины  $l_1$  и  $l_2$  ( $l_2 \leq l_1$ ), которые расположены на продолжении одного из диаметров отверстия. Предположим, что трещины расположены на отрезках  $-a \leq x \leq -R$  и  $R \leq x \leq b$ , где  $a = R + l_2$ ,  $b = R + l_1$ , и в бесконечно удаленных точках плоскости приложены внешние усилия, симметричные относительно плоскости расположения трещин (например, в бесконечно удаленных точках пластины приложены монотонно возрастающие напряжения  $\sigma_y^\infty = p$ ). Требуется определить предельное значение внешней нагрузки для рассматриваемой задачи.

Как было показано в § 3, для определения предельной нагрузки  $p = p_*$  в случае макроскопических трещин необходимо определить интенсивность разрывающих упругих напряжений в окрестности концов трещины. Для рассматриваемой задачи точное определение упругих разрывающих напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  в окрестности концов трещины затруднительно. В связи с этим представим упругие напряжения  $\sigma_y(x, 0)$  при  $x \leq -a$  и  $x \geq b$  приближенно в виде суммы

$$\sigma_y(x, 0) \approx \sigma_y^0(x, 0) + \sigma_y^{(1)}(x, 0), \quad (\text{VIII.52})$$

где  $x \leq -a$  или  $x \geq b$ ;  $\sigma_y^0(x, 0)$  — упругие растягивающие напряжения,

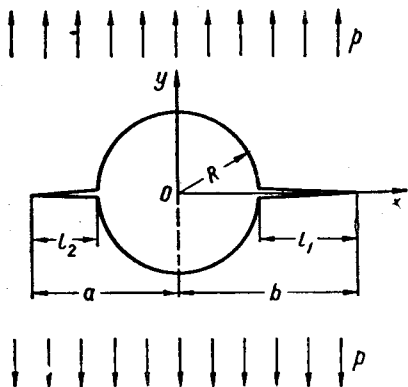


Рис. VIII.8.

возникающие в упругой плоскости с круговым отверстием, когда к пластине приложена заданная система внешних усилий, например напряжения  $\sigma_y^\infty = p$ ;  $\sigma_y^{(i)}(x, 0)$  — упругие растягивающие напряжения, которые возникают в упругой плоскости с прямолинейным разрезом вдоль оси  $Ox$  при  $-a \leq x \leq b$ , когда к берегам этого разреза на участках  $-a \leq x \leq -R$  и  $R \leq x \leq b$  приложено нормальное усилие

$$p_n(x) = \sigma_y^0(x, 0). \quad (\text{VIII.53})$$

Представление напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  в виде суммы (VIII.52) оправдано, если  $R \ll l_2 \leq l_1$ . В случае, когда радиус отверстия  $R$  соизмерим с длиной трещин, сумма (VIII.52) дает лишь некоторое приближенное значение напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  для рассматриваемой задачи\*.

Напряжения  $\sigma_y^0(x, 0)$ , входящие в (VIII.52), легко вычисляются\*\* для произвольной нагрузки и в дальнейшем считаются известными. Напряжения  $\sigma_y^{(i)}(x, 0)$  можно определить\*\*\* по формуле

$$\sigma_y^{(i)}(x, 0) = \frac{1}{\pi \sqrt{(x-b)(x+a)}} \int_{-a}^b \frac{p_n(\xi) \sqrt{(b-\xi)(a+\xi)}}{|x-\xi|} d\xi, \quad (\text{VIII.54})$$

где  $x < -a$ ,  $x > b$ ,  $a < b$ ;

$$p_n(\xi) = \begin{cases} \sigma_y^0(\xi, 0) & \text{при } -a < \xi < -R, \\ 0 & \text{при } -R < \xi < R, \\ \sigma_y^0(\xi, 0) & \text{при } R < \xi < b. \end{cases} \quad (\text{VIII.55})$$

Следовательно, на основании соотношения (VIII.31) и формул (VIII.52) — (VIII.55) получим приближенное значение предельной нагрузки  $p = p_*$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \left\{ \sqrt{|x - x_i|} \left[ \sigma_y^0(x, 0) + \frac{1}{\pi \sqrt{(x-b)(x+a)}} \int_{-a}^b \frac{p_n^*(\xi) \sqrt{(b-\xi)(a+\xi)}}{|x-\xi|} d\xi \right] \right\} = \frac{K}{\pi}, \quad (\text{VIII.56})$$

где  $p_n^*(\xi)$  определяется формулой (VIII.55) при предельном значении параметров, характеризующих внешнюю нагрузку ( $p = p_*$ );  $x_i$  — абсцисса одного из концов трещин ( $a$ ;  $b$ ).

Поскольку напряжения  $\sigma_y^0(x, 0)$  не зависят от параметров, харак-

\* Такой подход к определению напряжений  $\sigma_y(x, y)$  можно рассматривать как некоторый аналог метода последовательных приближений, предложенный в работах Д. И. Шермана [1], С. Г. Михляна [1].

\*\* См. § 1 гл. II.

\*\*\* См. М. Я. Леонов и В. В. Панасюк [2].

теризующих размеры трещин, т. е. от абсцисс  $a$  и  $b$ , то уравнение (VIII.56) легко преобразовать к виду

$$\lim_{x \rightarrow x_i} \left\{ \frac{\sqrt{|x - x_i|}}{\sqrt{(x-b)(x+a)}} \int_{-a}^b \frac{p_n^*(\xi) \sqrt{(b-\xi)(a+\xi)}}{|x-\xi|} d\xi \right\} = K. \quad (\text{VIII.57})$$

Отсюда для определения предельной величины ( $p = p^{(b)}$ ) внешних усилий, приложенных к пластине (рис. VIII.8), по достижении которых наступает распространение трещины в направлении абсциссы  $b$ , имеем

$$\frac{1}{\sqrt{b+a}} \int_{-a}^b \frac{p_n^*(\xi) \sqrt{(b-\xi)(a+\xi)}}{b-\xi} d\xi = K, \quad (\text{VIII.58})$$

где  $p_n^*(\xi)$  определяется по формуле (VIII.55) при  $p = p^{(b)}$ .

Аналогичным путем из уравнения (VIII.57) можно получить уравнение для определения величины внешних усилий  $p = p^{(a)}$ , по достижении которых наступает распространение трещины в направлении абсциссы  $a$ . Но поскольку для рассматриваемой задачи  $a \leq b$  ( $l_2 \leq l_1$ ), то, очевидно,  $p^{(b)} \leq p^{(a)}$ . Следовательно, предельными усилиями для упругой плоскости, ослабленной круговым отверстием с радиальными трещинами  $l_1$  и  $l_2$ , где  $l_2 \leq l_1$ , будут усилия  $p_* = p^{(b)}$ .

**Две радиальные трещины равной длины.** Рассмотрим более подробно два случая: а) когда в бесконечно удаленных точках упругой плоскости, ослабленной круговым отверстием с радиальными трещинами  $l_1$  и  $l_2$ , действуют растягивающие напряжения  $\sigma_y^\infty = p$  и  $\sigma_x^\infty = 0$  (см. рис. VIII.8); б) когда в бесконечно удаленных точках такой плоскости действуют напряжения  $\sigma_y^\infty = q$  и  $\sigma_x^\infty = q$  (всестороннее растяжение), а контур кругового отверстия в первой и второй задаче свободен от внешних усилий.

Для указанных примеров напряжения

$$\sigma_y^0(x, 0) = p \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{x^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{R^4}{x^4} \right); \quad (\text{VIII.59})$$

$$\sigma_y^0(x, 0) = q \left( 1 + \frac{R^2}{x^2} \right). \quad (\text{VIII.60})$$

Из (VIII.55) и (VIII.58)—(VIII.60) найдем предельные значения усилий  $p = p_*$  и  $q = q_*$ :

$$p_* = \frac{K \sqrt{b+a}}{f_1(a, b)} \quad \text{и} \quad q_* = \frac{K \sqrt{b+a}}{f_2(a, b)}, \quad (\text{VIII.61})$$

где

$$f_1(a, b) = \int_{-a}^{-R} \left( 1 + \frac{R^2}{2\xi^2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{R^4}{\xi^4} \right) \sqrt{\frac{a+\xi}{b-\xi}} d\xi +$$

$$+ \int_R^b \left( 1 + \frac{R^2}{2\xi^2} + \frac{3}{2} \frac{R^4}{\xi^4} \right) \sqrt{\frac{a+\xi}{b-\xi}} d\xi; \quad (\text{VIII.62})$$

$$f_2(a, b) = \int_{-a}^{-R} \left( 1 + \frac{R^2}{\xi^2} \right) \sqrt{\frac{a+\xi}{b-\xi}} d\xi + \int_R^b \left( 1 + \frac{R^2}{\xi^2} \right) \sqrt{\frac{a+\xi}{b-\xi}} d\xi. \quad (\text{VIII.63})$$

Вычислив интегралы (VIII.62) и (VIII.63), получим выражения для функций

$$f_1(a, b) = A(a, b, R) \sqrt{(a+R)(b-R)} - A(a, b, -R) \sqrt{(a-R)(b+R)} - \\ - B(a, b, R) \ln \frac{(\sqrt{ab} + \sqrt{(a-R)(b+R)})^2 + R^2}{(\sqrt{ab} + \sqrt{(a+R)(b-R)})^2 + R^2} + \\ + \frac{a+b}{2} \left( \pi + \arcsin \frac{a-b-2R}{a+b} - \arcsin \frac{a-b+2R}{a+b} \right), \quad (\text{VIII.64})$$

где

$$A(a, b \pm R) = 1 \pm \frac{R}{b} + \frac{R^2}{b^2} \left( \frac{5}{8} + \frac{1}{8} \cdot \frac{b}{a} \right) \pm \frac{R^3}{b^3} \left( \frac{15}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{b}{a} - \frac{3}{16} \cdot \frac{b^2}{a^2} \right);$$

$$B(a, b, R) = \frac{R^2 \sqrt{ab}}{32a^3b^4} \{ 8a^2b^2(a+b) + 3R^2(7a^3 - 3a^2b^2 + 5ab^2 - b^3) \};$$

$$f_2(a, b) = \left( 1 + \frac{R}{b} \right) \sqrt{(a+R)(b-R)} - \left( 1 - \frac{R}{b} \right) \sqrt{(a-R)(b+R)} - \\ - \frac{R^2 \sqrt{ab}}{2ab^2} (a+b) \ln \frac{(\sqrt{ab} + \sqrt{(a-R)(b+R)})^2 + R^2}{(\sqrt{ab} + \sqrt{(a+R)(b-R)})^2 + R^2} + \quad (\text{VIII.65})$$

$$+ \frac{a+b}{2} \left( \pi + \arcsin \frac{a-b-2R}{a+b} - \arcsin \frac{a-b+2R}{a+b} \right); \quad a = R + l_2, \quad b = R + l_1.$$

Пользуясь формулами (VIII.61), (VIII.64) и (VIII.65), легко получить решение задач, рассмотренных в работе О. Л. Bowie [1]. Так, в случае, когда радиальные трещины имеют одинаковую длину, т. е.  $l_2 = l_1 = l$  и, следовательно,  $a = b$ , из указанных формул получим

$$p_* = \frac{K}{\sqrt{2R(1+\varepsilon)}} \cdot \frac{1}{f_1(\varepsilon)}; \quad q_* = \frac{K}{\sqrt{2R(1+\varepsilon)}} \cdot \frac{1}{f_2(\varepsilon)}, \quad (\text{VIII.66})$$

где

$$f_1(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}} + \frac{\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}}{(1+\varepsilon)^4} (2 + 2\varepsilon + \varepsilon^2), \quad (\text{VIII.67})$$

$$f_2(\varepsilon) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}} + \frac{\sqrt{2\varepsilon + \varepsilon^2}}{(1+\varepsilon)^2}, \quad \varepsilon = \frac{l}{R}. \quad (\text{VIII.68})$$

В случае, когда упругая плоскость, ослабленная круговым отверстием с одной радиальной трещиной (рис. VIII.9), растягивается в бесконечно удаленных ее точках напряжениями  $\sigma_y^\infty = p$  и  $\sigma_x^\infty = 0$  при  $\sigma_y^\infty = q$  и  $\sigma_x^\infty = q$ , то

предельные значения этих напряжений легко вычисляются по формулам (VIII.61), (VIII.64) и (VIII.65), если в них положить  $l_2 = 0$  и  $l_1 \neq 0$ . В таком случае имеем ( $a = R$ )

$$p_* = \frac{K\sqrt{1+\eta}}{\sqrt{R}(1+\varepsilon_1)} \cdot \frac{1}{f_1(\eta)}; \quad q_* = \frac{K\sqrt{1+\eta}}{\sqrt{R}(1+\varepsilon_1)} \cdot \frac{1}{f_2(\eta)}, \quad (\text{VIII.69})$$

где

$$f_1(\eta) = A(\eta) \sqrt{2\eta(1-\eta)} - B(\eta) \ln \frac{1+\eta}{(1+\sqrt{2(1-\eta)})^2 + \eta} +$$

$$+ \frac{1+\eta}{2} \left( \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1-3\eta}{1+\eta} \right),$$

$$A(\eta) = -\frac{1}{16} (16 + 15\eta + 14\eta^2 + 15\eta^3),$$

$$B(\eta) = \frac{\eta\sqrt{\eta}}{32} (5 + 23\eta - 9\eta^2 + 21\eta^3), \quad (\text{VIII.70})$$

$$f_2(\eta) = \frac{1+\eta}{2} (2\sqrt{2\eta(1-\eta)} -$$

$$- \eta\sqrt{\eta} \ln \frac{1+\eta}{(1+\sqrt{2(1-\eta)})^2 + \eta} +$$

$$+ \frac{\pi}{2} + \arcsin \frac{1-3\eta}{1+\eta});$$

$$\eta = \frac{R}{b} = \frac{1}{1+\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_1 = \frac{l_1}{R}. \quad (\text{VIII.71})$$

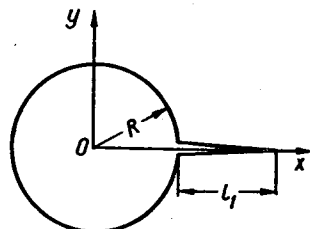


Рис. VIII.9.

На рис. VIII.10 и VIII.11 построены по формулам (VIII.66) — (VIII.71) графики (сплошные линии) изменения предельных нагрузок  $p_*\sqrt{R}/K$  и  $q_*\sqrt{R}/K$  в зависимости от соотношений  $\varepsilon = l/R$  и  $\varepsilon_1 = l_1/R$ , где кривые 1 соответствуют случаю одной радиальной трещины ( $l_1$ ), а кривые 2 — случаю двух радиальных трещин одинаковой длины ( $l$ ). Для сравнения на этих рисунках штриховыми линиями представлены зависимости указанных предельных нагрузок, установленные в работе О. Л. Bowie [1]. Сравнение графиков показывает, что построенное приближенное решение, данное формулами (VIII.66) — (VIII.71), при  $l/R > 0,5$  хорошо согласуется с расчетами О. Л. Bowie. При этом, однако, необходимо отметить, что решение О. Л. Bowie получено путем громоздких вычислений, в то время как здесь это решение получено достаточно легко.

Если длина радиальных трещин мала по сравнению с радиусом кругового отверстия, то распределение таких трещин, очевидно, определяется величиной разрывающих напряжений, действующих непосредственно на контуре отверстия. Легко видеть из формул (VIII.59) и (VIII.60), что в случае одноосного растяжения наибольшие разрывающие напряжения на контуре отверстия равны  $3p$ , а в случае всесторон-

него растяжения  $2q$ . Отсюда вытекает, что для рассмотренных задач отношение предельно равновесных нагрузок  $p_*/q_*$  должно стремиться к  $2/3$  при  $l \rightarrow 0$ .

Из (VIII.66) — (VIII.68) получаем

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{p_*}{q_*} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f_2(\varepsilon)}{f_1(\varepsilon)} = \frac{2}{3},$$

т. е. формулы (VIII.66) — (VIII.71) в пределе при  $l \rightarrow 0$  ( $\varepsilon \rightarrow 0$ ) дают ожидаемый результат. К такому же выводу приходим и на основании формул (VIII.69) — (VIII.71), когда  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ . Если же длина радиальных

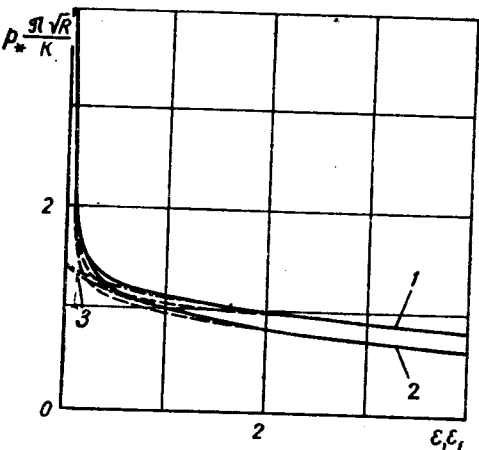


Рис. VIII.10.

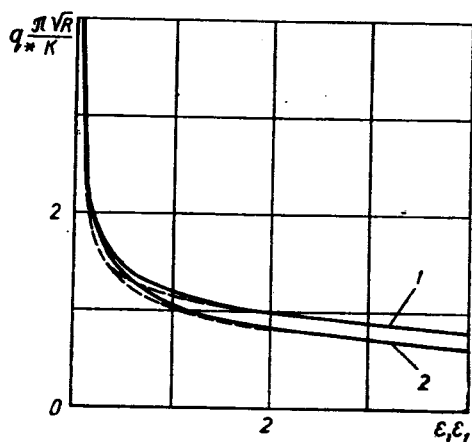


Рис. VIII.11.

трещин достаточно велика, например  $l \gg R$  (рис. VIII.8), так что можно считать, что  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ,  $R \rightarrow 0$  ( $\varepsilon R = l = \text{const}$ ), то из формул (VIII.66) — (VIII.68) или (VIII.69) — (VIII.71) получаем известные формулы Гриффитса для изолированной трещины.

Для сравнения на рис. VIII.10 построены также графики (кривые 3) изменения критической нагрузки  $\pi p_* \sqrt{R}/K$  для случая, когда в пластине имеется изолированная прямолинейная трещина длины  $2(R+l)$  или  $2(R+1/2l)$ , а в бесконечно удаленных точках плоскости действуют растягивающие напряжения  $\sigma_y^\infty = p$ . Сравнение кривых на рис. VIII.10 показывает, что при  $\frac{l}{R} > 1$  предельные значения напряжений ( $p = p_*$ ) для плоскости, ослабленной круговым отверстием с радиальными трещинами, и для плоскости, ослабленной прямолинейной трещиной длины  $2(R+l)$ , очень близки, так что влияние отверстия уже почти не сказывается.

В недавно опубликованных работах О. Л. Bowie [2, 3] рассмотрен случай предельного равновесия полосы с внешними поверхностными трещинами.

### § 6. Растяжение упругой плоскости с дугообразной или произвольно ориентированной прямолинейной трещиной \*

**Дугообразная трещина.** В предыдущих параграфах рассмотрены задачи о предельном равновесии пластины с прямолинейной трещиной, ориентированной перпендикулярно к линии растяжения пластины. Теперь определим предельно-равновесное состояние пластины с дугообразной трещиной. Итак, рассмотрим бесконечную упругую плоскость с дугообразной макроскопической трещиной, представляющей собой разрез вдоль дуги окружности радиуса  $R$ . Введем систему прямоугольных декартовых координат  $xOy$  (рис. VIII.12). Предположим, что края трещины свободны от внешних напряжений, а в бесконечно удаленных точках плоскости приложены во взаимно перпендикулярных направлениях равномерно распределенные монотонно возрастающие растягивающие напряжения  $p$  и  $q$ , причем  $p$  направлены под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$  (рис. VIII.12). Определим предельные (критические) значения напряжений  $p=p_*$  и  $q=q_*$ , по достижении которых трещина приходит в состояние подвижного равновесия (начинает распространяться хотя бы у одного из ее концов).

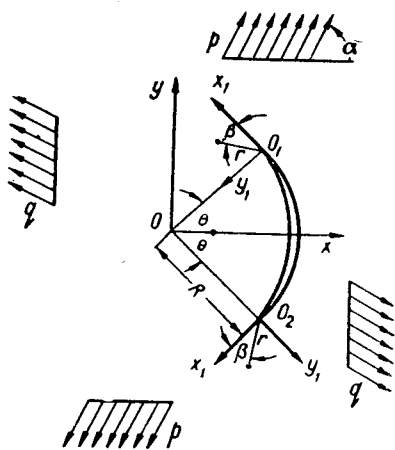


Рис. VIII.12.

Определение величины предельной нагрузки для рассматриваемой задачи только на основании уравнения (VIII.31), вообще говоря, невозможно, поскольку для указанной задачи направление начального распространения трещины заранее неизвестно. Однако естественно предположить \*\*, что начальное направление распространения криволинейной (или прямолинейной произвольно ориентированной) макротрещины совпадает с плоскостью, нормальные растягивающие напряжения в которой достигают максимально возможной интенсивности. В силу этого предположения и на основании уравнения (VIII.31) для определения предельных значений внешних усилий для рассматриваемой задачи получим

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{r} \sigma_{\beta}^*(r, \beta_*) = \frac{K}{\pi}, \quad (\text{VIII.72})$$

где  $r, \beta$  — полярные координаты с началом в вершине трещины и полярной осью, направленной вдоль касательной к контуру трещины (см.

\* Решение этих задач дано В. В. Панасюком, Л. Т. Бережничким [1].

\*\* См. В. В. Панасюк, Л. Т. Бережничкий [1], Эрдоган, Си [1].



рис. VIII.12);  $\sigma_\beta(r, \beta)$  — нормальные растягивающие напряжения, перпендикулярные к линиям  $\beta = \text{const}$ ;  $\sigma_\beta^*(r, \beta)$  — напряжения  $\sigma_\beta(r, \beta)$  при  $p = p_*$  и  $q = q_*$ .

Угол  $\beta = \beta_*$ , определяющий начальное направление распространения трещины, удовлетворяет соотношению

$$\lim_{r \rightarrow 0} \left\{ \sqrt{r} \frac{\partial \sigma_\beta(r, \beta)}{\partial \beta} \right\}_{\beta = \beta_*} = 0. \quad (\text{VIII.73})$$

Таким образом, если значение упругих напряжений в окрестности вершин криволинейной трещины определено, то, пользуясь соотношениями (VIII.72) и (VIII.73), легко определить и величину предельной нагрузки.

Для рассматриваемой задачи (рис. VIII.12) компоненты тензора напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\beta$  и  $\tau_{r\beta}$  в полярной системе координат  $(r, \beta)$  в окрестности концов трещины  $O_1$  и  $O_2$  можно представить в виде\*

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, \beta) &= \frac{1}{4\sqrt{2r}} \left\{ k_{1,i} \left( 5 \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{3\beta}{2} \right) + k_{2,i} \left( -5 \sin \frac{\beta}{2} + 3 \sin \frac{3\beta}{2} \right) \right\} + \\ &\quad + 4A_i \cos^2 \beta + O(r^{\frac{1}{2}}), \\ \sigma_\beta(r, \beta) &= \frac{1}{4\sqrt{2r}} \left\{ k_{1,i} \left( 3 \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{3\beta}{2} \right) - 3k_{2,i} \left( \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{3\beta}{2} \right) \right\} + \\ &\quad + 4A_i \sin^2 \beta + O(r^{\frac{1}{2}}), \\ \tau_{r\beta}(r, \beta) &= \frac{1}{4\sqrt{2r}} \left\{ k_{1,i} \left( \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{3\beta}{2} \right) + k_{2,i} \left( \cos \frac{\beta}{2} + 3 \cos \frac{3\beta}{2} \right) \right\} - \\ &\quad - 2A_i \sin 2\beta + O(r^{\frac{1}{2}}) \quad (i = 1, 2), \end{aligned} \quad (\text{VIII.74})$$

где коэффициенты интенсивности напряжений  $k_{1,i}$  и  $k_{2,i}$  ( $i = 1, 2$ ) у вершины трещины  $O_i$  ( $i = 1, 2$ ) определяются по формулам

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= \sqrt{R \sin \theta} \varphi_1(\alpha, \theta), & k_{2,1} &= \sqrt{R \sin \theta} \varphi_2(\alpha, \theta), \\ k_{1,2} &= \sqrt{R \sin \theta} \varphi_1(\alpha, -\theta), & k_{2,2} &= \sqrt{R \sin \theta} \varphi_2(\alpha, -\theta), \end{aligned}$$

$$A_1(\alpha, \theta) = \frac{1}{4} (p + q) \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}} + \frac{p - q}{4} \left[ \frac{\cos 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}} - \cos 2(\alpha - \theta) \right], \quad (\text{VIII.75})$$

$$A_2(\alpha, \theta) = A_1(\alpha, -\theta);$$

\* См. Си, Парис, Эрдоган [1], В. В. Панасюк, Л. Т. Бережницкий [1].

здесь

$$\varphi_1(\alpha, \theta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{p+q - (p-q) \cos 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + (p-q) \sin 2\alpha \sin^3 \frac{\theta}{2} + (p-q) \cos \left( 2\alpha - \frac{3\theta}{2} \right) \right]; \quad (\text{VIII.76})$$

$$\varphi_2(\alpha, \theta) = \frac{1}{2} \left[ \frac{p+q - (p-q) \cos 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} - \right. \\ \left. - (p-q) \sin 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - (p-q) \sin \left( 2\alpha - \frac{3\theta}{2} \right) \right].$$

Из (VIII.75) и (VIII.76) для случая  $q=0$  будем иметь\* выражения

$$k_{1,1} = \frac{p\sqrt{R} \sin \theta}{2} \left[ \frac{1 - \cos 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2} + \right. \\ \left. + \sin 2\alpha \sin^3 \frac{\theta}{2} + \cos \left( 2\alpha - \frac{3\theta}{2} \right) \right], \\ k_{2,1} = \frac{p\sqrt{R} \sin \theta}{2} \left[ \frac{1 - \cos 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \sin^2 \frac{\theta}{2}} \sin \frac{\theta}{2} - \right. \\ \left. - \sin 2\alpha \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \sin \left( 2\alpha - \frac{3\theta}{2} \right) \right]. \quad (\text{VIII.77})$$

Пользуясь формулами (VIII.74), соотношения (VIII.72) и (VIII.73) можно представить в виде

$$k_{1,i}^* \left( 3 \cos \frac{\beta_*}{2} + \cos \frac{3\beta_*}{2} \right) - 3k_{2,i}^* \left( \sin \frac{\beta_*}{2} + \sin \frac{3\beta_*}{2} \right) = \frac{4\sqrt{2}K}{\pi}, \quad (\text{VIII.78})$$

$$k_{1,i}^* \left( \sin \frac{\beta_*}{2} + \sin \frac{3\beta_*}{2} \right) + k_{2,i}^* \left( \cos \frac{\beta_*}{2} + 3 \cos \frac{3\beta_*}{2} \right) = 0, \quad (\text{VIII.79})$$

где коэффициенты интенсивности  $k_{1,i}^*$  и  $k_{2,i}^*$  определяются по формулам (VIII.75) и (VIII.76) при  $p=p_*$  и  $q=q_*$ .

\* Коэффициенты  $k_{1,i}$  и  $k_{2,i}$  для дугообразной трещины, содержащейся в бесконечной упругой плоскости, вычисляли другим путем также Си, Парис, Эрдоган [1]. Однако в приведенных ими выражениях для коэффициентов  $k_{1,1}$  и  $k_{2,1}$  (только у вершины  $O_1$  дугообразной трещины), когда упругая плоскость растягивается «на бесконечности» усилиями  $p$  под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$ , т. е. при  $q=0$  (рис. VIII.12), имеются неточности.

Из уравнения (VIII.79) найдем значения угла  $\beta_*$ , при которых напряжение  $\sigma_\beta(r, \beta)$  достигает максимальной интенсивности:

$$\beta_* = \pm 2 \arcsin \sqrt{\frac{6n_i^2 + 1 - \sqrt{8n_i^2 + 1}}{2(9n_i^2 + 1)}} \quad \text{при } k_{1,i} > 0, \quad (\text{VIII.80})$$

$$\beta_* = \pm 2 \arcsin \sqrt{\frac{6n_i^2 + 1 + \sqrt{8n_i^2 + 1}}{2(9n_i^2 + 1)}} \quad \text{при } k_{1,i} < 0, \quad (\text{VIII.81})$$

где «плюс» соответствует значениям  $k_{2,i} < 0$ , а «минус» — значениям  $k_{2,i} > 0$ ;  $n_i = k_{2i}/k_{1,i}$  ( $i = 1, 2$ ).

Таким образом, по формулам (VIII.78) — (VIII.81) можно подсчитать значение предельной нагрузки для пластинки с криволинейной изолрированной трещиной, если определены коэффициенты интенсивности напряжений  $k_{1,i}$  и  $k_{2,i}$  ( $i = 1, 2$ ).

Рассмотрим более подробно случай, когда упругая плоскость, ослабленная дугообразной трещиной в виде полукруглости, растягивается в бесконечно удаленных ее точках равномерно распределенными напряжениями  $p$ , направленными под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$  (рис. VIII.13).

Полагая в формулах (VIII.75) и (VIII.76)  $q=0$ ,  $p=p_*$  и  $\theta=\pi/2$ , найдем для коэффициентов  $k_{1,i}^*$  и  $k_{2,i}^*$  выражения

$$k_{1,1}^* = Af_+(\alpha), \quad k_{2,1}^* = Ag_+(\alpha), \quad k_{1,2}^* = Af_-(\alpha), \quad k_{2,2}^* = -Ag_-(\alpha), \quad (\text{VIII.82})$$

где

$$A = \frac{p_* \sqrt{R}}{12\sqrt{2}}; \quad f_{\pm} = 4 - 7 \cos 2\alpha \pm 9 \sin 2\alpha; \quad g_{\pm}(\alpha) = 4 + 5 \cos 2\alpha \pm 3 \sin 2\alpha.$$

Отсюда и на основании уравнения (VIII.78) легко получим

$$p_{1*} = \frac{24K}{\pi\sqrt{R}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta_*}{2} \left[ f_+(\alpha) \cos \frac{\beta_*}{2} - 3g_+(\alpha) \sin \frac{\beta_*}{2} \right]}, \quad (\text{VIII.83})$$

$$p_{2*} = \frac{24K}{\pi\sqrt{R}} \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta_*}{2} \left[ f_-(\alpha) \cos \frac{\beta_*}{2} + 3g_-(\alpha) \sin \frac{\beta_*}{2} \right]}, \quad (\text{VIII.84})$$

где  $\beta_*$  определяется по формулам (VIII.80) — (VIII.82).

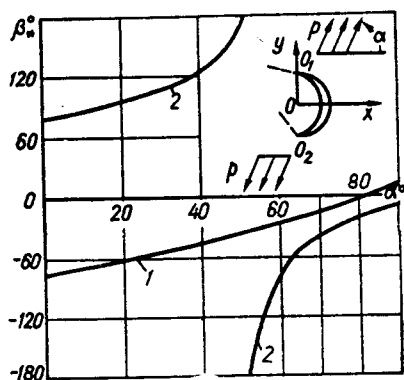


Рис. VIII.13.

Пользуясь формулами (VIII.80), (VIII.81) и (VIII.82)—(VIII.84), легко подсчитать изменение угла  $\beta_*$  и предельных напряжений  $p_{1*}$  и  $p_{2*}$  в зависимости от угла  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ). Результаты таких под-

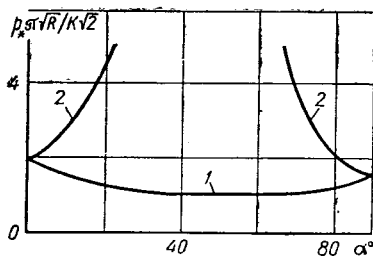


Рис. VIII.14.

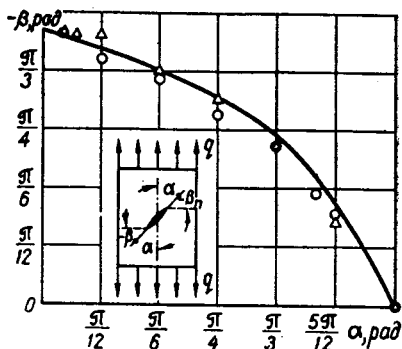


Рис. VIII.15.

счетов приведены на рис. VIII.13 и VIII.14, где кривые 1 относятся к точке  $O_1$ , а кривые 2 — к точке  $O_2$ . Из приведенных графиков видно, что при  $0 < \alpha < \pi/2$  предельная нагрузка  $p_{1*} < p_{2*}$ , т. е. трещина в виде полуокружности начинает распространяться у вершины, для которой угол  $\beta_*$  меньше.

**Произвольно ориентированная прямолинейная трещина.** Пользуясь полученными выше результатами, легко определить величину предельной нагрузки для случая, когда бесконечная пластина с прямолинейной трещиной растягивается монотонно возрастающими напряжениями интенсивности  $q$ , приложенными в бесконечно удаленных точках пластины и направленными под углом  $\alpha$  к плоскости расположения трещины (рис. VIII.15).

Полагая в формулах (VIII.75) и (VIII.76)  $\theta \rightarrow 0$ ,  $R \rightarrow \infty$ , но так, что  $R\theta = l = \text{const}$ , и считая  $p = 0$ , а  $q = q_*$ , найдем

$$k_{1,i} = q_* \sqrt{l} \sin^2 \alpha, \quad k_{2,i} = q_* \sqrt{l} \sin \alpha \cos \alpha \quad (i = 1, 2),$$

где  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ,  $l$  — полудлина трещины.

Отсюда и согласно формул (VIII.80) и (VIII.81) имеем

$$\beta_* = -2 \arcsin \sqrt{\frac{6 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 - \sqrt{8 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1}}{2(9 \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1)}}. \quad (\text{VIII.85})$$

Пользуясь далее равенством (VIII.78) и коэффициентами  $k_{1,i}^*$  и  $k_{2,i}^*$  для рассматриваемой задачи получим

$$q_* = \frac{K\sqrt{2}}{\pi\sqrt{l}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta_1}{2} \left[ \sin^2 \alpha \cos \frac{\beta_*}{2} - 3 \sin \alpha \cos \alpha \sin \frac{\beta_*}{2} \right]}, \quad (\text{VIII.86})$$

где угол  $\beta_*$  определяется по формуле (VIII.85).

Полагая в формулах (VIII.85) и (VIII.86)  $\alpha = \pi/2$  (см. рис. VIII.15), легко найдем как частный случай известные соотношения Гриффитса [2]:

$$\beta_* = 0, \quad q_* = \frac{KV\sqrt{2}}{\pi V l}$$

Экспериментальная проверка \* зависимостей (VIII.85) и (VIII.86). Зависимость угла  $\beta_*$ , а также предельной нагрузки  $q_*$  от угла  $\alpha$  при одноосном растяжении пластины представлена в соответствии с формулами (VIII.85) и (VIII.86) на рис. VIII.15 и VIII.16 в виде сплошных линий. Эти зависимости проверялись экспериментально на пластинах из органического и силикатного стекла.

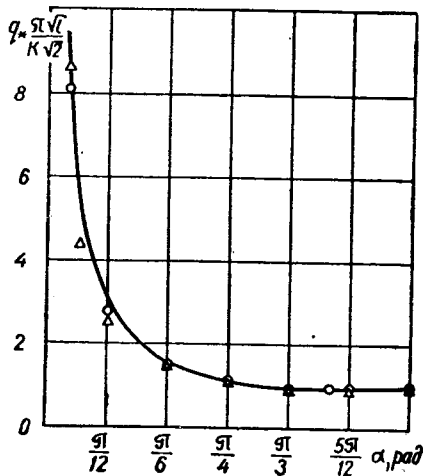


Рис. VIII.16.

С этой целью были вырезаны из листового материала пластины (см. рис. VIII.15) соответствующих размеров\*\*. В центре каждой пластины высверливалось отверстие диаметром около 6 мм и с помощью стеклореза образовывалась трещина (надрез) под некоторым углом  $\alpha$  к продольной оси пластины. Затем с помощью специального устройства путем приложения растягивающих сил к берегам отверстия в направлении, перпендикулярном к линии надреза, начальная трещина раскрывалась по всей толщине пластины и распространялась до заданной длины  $2l$ . После этого измерялась длина ( $2l$ ) исходной трещины и угла  $\alpha$ . Таким образом были изготовлены группы пластин из силикатного и органического стекла с различным направлением расположения трещин (различным значением угла  $\alpha$  при  $0 < \alpha \leq \pi/2$ ) и различной длиной  $2l$ . Образцы-пластины подвергались затем растяжению в направлении продольной оси пластины на разрывной машине МР-0,5 (со скоростью нагружения  $6,6 \cdot 10^{-5}$  м/сек) до разрушения. При этом определялась величина предельной (разрушающей) силы  $p = p_*$ , по достижении которой трещина начинала распространяться и наступало разрушение пластины. По данным эксперимента вычислялось разрушающее напряжение

$$q_{*\alpha} = \frac{P_* \alpha}{bh} \quad [\text{н/м}^2],$$

где  $b$  — ширина, а  $h$  — толщина пластины; индекс  $\alpha$  означает, что указанные величины относятся к трещине, направленной под углом  $\alpha$  к продольной оси пластины.

Определив величину  $q_{*\alpha}$ , легко вычислить отношение

$$\eta(\alpha, l_\alpha) = \frac{q_{*\alpha} \sqrt{l_\alpha}}{q_*(\pi/2) \sqrt{l(\pi/2)}} = \frac{\pi q_{*\alpha} \sqrt{l_\alpha}}{K\sqrt{2}}$$

Результаты экспериментальных данных приведены на рис. VIII.16. Среднее значение величины  $\eta(\alpha, l_\alpha)$  для каждой группы пластин, которые имеют одинаковый угол  $\alpha$ , изображены кружками и треугольниками на рис. VIII.16, где треугольники от-

\* Подробное описание эксперимента дано в работе В. В. Панасюка, Л. Т. Бережницкого и С. Е. Ковчика [1].

\*\* См. В. В. Панасюк, Л. Т. Бережницкий и С. Е. Ковчик [1], где приведены подробные таблицы.

носятся к пластинам из органического стекла, а кружки — к пластинам из силикатного стекла. Сплошная кривая на этом рисунке представляет собой значения функции

$$\eta(\alpha, l_\alpha) = \frac{\pi q_* \sqrt{l_\alpha}}{K\sqrt{2}},$$

вытекающие из формулы (VIII.86).

Кроме того, для каждой пластины были измерены углы ( $\beta_*$ ) начального направления распространения трещины для обоих концов трещины, т. е.  $\beta_*^{(l)}$  (для левого конца трещины) и  $\beta_*^{(n)}$  (для правого конца трещины). Усредненные значения углов  $\beta_*^{(c)} = 1/2(\beta_*^{(l)} + \beta_*^{(n)})$  для каждой группы пластин в зависимости от угла  $\alpha$  изображены на рис. VIII.15 в виде треугольников (для органического стекла) и кружков (для силикатного стекла). Сплошная кривая на этом рисунке, изображающая зависимость угла  $\beta_*$  от  $\alpha$ , построена по уравнению (VIII.85).

Таким образом, как видно из приведенных графиков, экспериментальные данные хорошо согласуются с теоретическими.

## § 7. Изгиб полос (балок), ослабленных прямолинейными трещинами \*

Исследуем предельно-равновесное состояние полос (балок), ослабленных прямолинейными трещинами и изгибаемых внешними монотонно возрастающими усилиями, действующими в срединной плоскости полосы. Вначале найдем распределение упругих напряжений в полосе (балке) в окрестности трещины, когда в срединной плоскости полосы вдали от трещины действуют заданные внешние нагрузки.

**Изгиб полосы с центральной прямолинейной трещиной.** Рассмотрим упругую изотропную полосу (балку) с прямолинейной трещиной, расположенной в центре полосы перпендикулярно к продольной ее оси (рис. VIII.17). Обозначим через  $2h$  и  $2\delta$  соответственно ширину и толщину полосы, а через  $2l$  — длину трещины. Введем прямоугольную систему декартовых координат  $xOy$ , как это показано на рис. VIII.17, и будем считать, что срединная плоскость полосы совпадает с плоскостью  $xOy$ , а трещина расположена на отрезке  $-l \leq x \leq l$ .

Пусть на такую полосу действуют внешние нагрузки (изгибающие моменты или равномерно распределенное давление), расположенные в срединной плоскости полосы, т. е. в плоскости  $xOy$ . Под действием внешних усилий (в зоне сжимающих напряжений) кромки трещины на некотором участке  $\lambda_1 \leq x \leq \lambda_2$  придут в соприкосновение, что приведет к появлению контактных напряжений на этом участке берегов трещины. Вне этого участка берега трещины будут свободны от контактных напряжений. Параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , определяющие границу области контакта между берегами трещины, подлежат определению в процессе решения задачи. Определим напряженно-деформированное состояние в окрестности трещины.

\* См. Б. Л. Лозовой, В. В. Панасюк [1, 2], В. В. Панасюк, Б. Л. Лозовой [3, 4], где, по-видимому, впервые встречается решение этой задачи.

Для рассматриваемой задачи на контуре трещины имеем следующие граничные условия:

на участке контакта, т. е. при  $y=0$ ,  $\lambda_1 \leq x \leq \lambda_2$ ,

$$\sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0), \quad v^+(x, 0) = v^-(x, 0) = 0; \quad (\text{VIII.87})$$

на краях трещин, свободных от контактных напряжений,

$$\sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0) = 0, \quad (\text{VIII.88})$$

где

$$\sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y(x, +0), \quad \sigma_y^-(x, 0) = \sigma_y(x, -0).$$

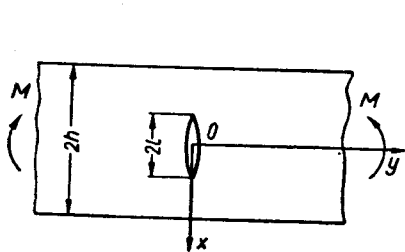


Рис. VIII.17.

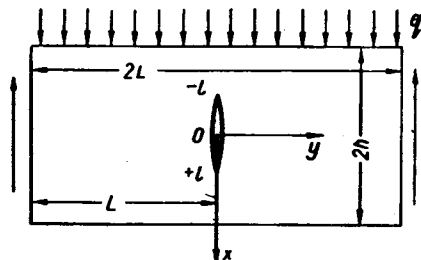


Рис. VIII.18.

Кроме того, будем считать, что касательные напряжения на контуре трещины отсутствуют, т. е.

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad \text{при} \quad -l \leq x \leq l. \quad (\text{VIII.89})$$

Компоненты тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  и вектора смещений  $u$ ,  $v$  в плоской задаче определяются через две аналитические функции  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  (см. § 1 гл. I) следующими соотношениями:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}], \quad z = x + iy, \quad (\text{VIII.90})$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}, \quad (\text{VIII.91})$$

$$2G(u' + iv') = \kappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'(z)}$$

$$\left( u' \equiv \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v' \equiv \frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (\text{VIII.92})$$

Допустим, что

$$\Phi_0(z) = A_0 z^3 + A_1 z^2 + A_2 z + A_3, \quad (\text{VIII.93})$$

$$\Omega_0(z) = B_0 z^3 + B_1 z^2 + B_2 z + B_3, \quad (\text{VIII.94})$$

где коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) — постоянные, определяющие напряженное состояние в полосе без трещины при

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{M}{4J}, \quad A_3 = 0; \quad (\text{VIII.95})$$

$$B_0 = 0, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{3M}{4J}, \quad B_3 = 0,$$

где  $J = \frac{4\delta h^3}{3}$  — момент инерции полосы; функции (VIII.93) и (VIII.94) дают решение задачи о чистом изгибе моментами  $M$  бесконечной полосы (балки) без трещины (см. рис. VIII.17). При

$$A_0 = \frac{q}{24J}, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{q}{8J} \left( L^2 + \frac{3h^2}{5} \right), \quad A_3 = \frac{-qh^3}{12J};$$

$$B_0 = \frac{7q}{24J}, \quad B_1 = 0, \quad B_2 = \frac{q}{8J} \left( 3L^2 - \frac{11h^2}{5} \right), \quad B_3 = \frac{qh^3}{12J}. \quad (\text{VIII.96})$$

(обозначения указаны на рис. VIII.18) функции (VIII.93) и (VIII.94) дают решение задачи об изгибе балки (полосы) длиной  $2L$  без трещины, когда балка нагружена равномерным давлением интенсивности  $q$ . При этом предполагается, что балка свободно опирается на две опоры, а опорные реакции определяются как касательные усилия, приложенные к торцам балки.

Пусть в полосе (балке), находящейся под действием внешней нагрузки — изгибающих моментов (рис. VIII.17) или равномерно распределенного давления (рис. VIII.18), — имеется трещина длины  $2l$ , расположенная вдоль оси  $Ox$ . Наличие трещины в полосе приведет к перераспределению напряжений в окрестности этой трещины. Вдали от трещины напряженно-деформированное состояние в полосе для указанных видов нагрузки будет \* характеризоваться функциями  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  при соответствующих значениях коэффициентов  $A_n$  и  $B_n$  из (VIII.95) и (VIII.96). На контуре трещины должны выполняться граничные условия (VIII.87) — (VIII.89).

Если в формулах (VIII.90) и (VIII.91) перейти к граничным значениям на контуре трещины, т. е. положить  $y \rightarrow \pm 0$ , и принять во внимание граничные условия (VIII.87) и (VIII.89), придем к задаче линейного сопряжения для искомого функций  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$ . Метод решения этих задач известен \*\*. Функции, удовлетворяющие условию (VIII.90), будут иметь вид

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - l^2}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sqrt{t^2 - l^2} p(t)}{t - z} dt + \frac{p_n(z)}{\sqrt{z^2 - l^2}} + \frac{1}{2} [\Phi_0(z) - \Omega_0(z)], \quad (\text{VIII.97})$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i \sqrt{z^2 - l^2}} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sqrt{t^2 - l^2} p(t)}{t - z} dt + \frac{p_n(z)}{\sqrt{z^2 - l^2}} - \frac{1}{2} [\Phi_0(z) - \Omega_0(z)], \quad (\text{VIII.98})$$

где  $\Phi_0(z)$  и  $\Omega_0(z)$  — известные функции (VIII.93) и (VIII.94);

$$p(t) = \sigma_y(t, 0) \quad (\lambda_1 < t \leq \lambda_2);$$

$$p_n(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \dots + c_n. \quad (\text{VIII.99})$$

\* Это допущение, как увидим ниже, будет соблюдаться с очень высокой степенью точности.

\*\* См. Н. И. Мусхелишвили [1].



Степень полинома  $p_n(z)$  и его коэффициенты ( $c_0, c_1, \dots, c_n$ ) определяются из условий поведения функций  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  в окрестности бесконечно удаленных точек, т. е. при  $|z| \rightarrow \infty$ . Эти функции при  $|z| \rightarrow \infty$  должны удовлетворять условиям

$$\Phi(z) \rightarrow \Phi_0(z), \quad \Omega(z) \rightarrow \Omega_0(z). \quad (\text{VIII.100})$$

Для определения величины контактных напряжений  $\sigma_y^+(x, 0)$  воспользуемся формулой (VIII.92). Переходя в этой формуле, а также в формуле, ей сопряженной, к значениям на контуре трещины и пользуясь для функций  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  их выражениями (VIII.97) и (VIII.98), найдем

$$2Gi(v^{1+} - v^{1-}) = \frac{\kappa + 1}{1 - i\varrho} \cdot \frac{1}{\sqrt{t_0^2 - l^2}} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sqrt{t^2 - l^2} p(t)}{t - t_0} dt + R_0 t_0^4 + R_1 t_0^3 + R_2 t_0^2 + R_3 t_0 + R_4 \right\}, \quad (\text{VIII.101})$$

где  $\lambda_1 \leq t_0 \leq \lambda_2$ ;  $R_0, R_1, R_2, R_3, R_4$  — постоянные, которые выражаются через коэффициенты  $A_n, B_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) функций (VIII.93) и (VIII.94);  $t_0$  — произвольная точка на контуре трещины.

Для определения функции  $\sigma_y^+(t)$  из граничных условий (VIII.87) и формулы (VIII.101) получаем сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sqrt{t^2 - l^2} \sigma_y^+(t)}{t - t_0} dt + R_0 t_0^4 + R_1 t_0^3 + R_2 t_0^2 + R_3 t_0 + R_4 = 0, \quad (\text{VIII.102})$$

где  $\lambda_1 \leq t_0 \leq \lambda_2$ .

Решение уравнения (VIII.102), удовлетворяющее условию ограниченности контактных напряжений при  $t_0 = \lambda_1$  и  $t_0 = \lambda_2$ , будет иметь вид

$$\sigma_y^+(t_0) = \frac{\sqrt{(t_0 - \lambda_1)(t_0 - \lambda_2)}}{\sqrt{t_0^2 - l^2}} (m_0 t_0^3 + m_1 t_0^2 + m_2 t_0 + m_3), \quad (\text{VIII.103})$$

где  $\lambda_1 \leq t_0 \leq \lambda_2$ .

Входящие в решение (VIII.103) параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  определяются из условий ограниченности решения уравнения (VIII.102) при  $t_0 = \lambda_1$  и  $t_0 = \lambda_2$ ; коэффициенты  $m_0, m_1, m_2, m_3$  выражаются через коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ) функций (VIII.93) и (VIII.94). Для рассматриваемых видов внешней нагрузки, действующей на полосу, коэффициенты  $m_0, m_1, m_2, m_3$ , а также параметры  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут иметь следующий вид:

а) при чистом изгибе полосы с трещиной (рис. VIII.17)

$$m_0 = 0, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = \frac{M}{J}; \quad m_3 = \frac{-2Ml}{3J}, \quad (\text{VIII.104})$$

$$\lambda_1 = -l, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{3}l;$$

б) при изгибе балки (полосы) с трещиной равномерно распределенной нагрузкой (рис. VIII.18)

$$m_0 = \frac{q}{3J}, \quad m_1 = \frac{q}{6J}(\lambda_1 + \lambda_2),$$

$$m_2 = \frac{q}{24J}(3\lambda_1^2 + 2\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_2^2) + \frac{q}{2J}\left(L^2 - \frac{2h^2}{5} - \frac{l^2}{3}\right), \quad (\text{VIII.105})$$

$$m_3 = \frac{q}{48J}(\lambda_1 + \lambda_2)(5\lambda_1^2 - 2\lambda_1\lambda_2 + 5\lambda_2^2) + \frac{q}{4J}(\lambda_1 + \lambda_2)\left(L^2 - \frac{2h^2}{5} - \frac{l^2}{3}\right),$$

где  $\lambda_1 = -l$ , а  $\lambda_2$  определяется из уравнения

$$35\lambda_2^4 - 20l\lambda_2^3 - 6l^2\lambda_2^2 - 4l^3\lambda_2 - 5l^4 + 24\left(L^2 - \frac{2h^2}{5}\right)(3\lambda_2^2 - 2l\lambda_2 - l^2) = 0. \quad (\text{VIII.106})$$

Подставив соотношения (VIII.103) и (VIII.106) в формулы (VIII.97) и (VIII.98), получим для рассматриваемых видов нагружения полосы (балки) с трещиной следующие функции:

а) при чистом изгибе полосы с трещиной (см. рис. VIII.17)

$$\Phi(z) = \frac{M}{6J}(3z - 2l)\sqrt{\frac{z - \lambda_2}{z - l}} - \frac{M}{4J}z, \quad (\text{VIII.107})$$

$$\Omega(z) = \frac{M}{6J}(3z - 2l)\sqrt{\frac{z - \lambda_2}{z - l}} + \frac{M}{4J}z,$$

где  $\lambda_2 = -\frac{1}{3}l$ ;

б) при изгибе балки (полосы) с трещиной равномерно распределенной нагрузкой (рис. VIII.18)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z - \lambda_2}{z - l}}(m_0z^3 + m_1z^2 + m_2z + m_3) - \frac{q}{8J}\left[z^3 + \left(L^2 - \frac{7}{5}h^2\right)z + \frac{2}{3}h^3\right], \quad (\text{VIII.108})$$

$$\Omega(z) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{z - \lambda_2}{z - l}}(m_0z^3 + m_1z^2 + m_2z + m_3) + \frac{q}{8J}\left[z^3 + \left(L^2 - \frac{7}{5}h^2\right)z + \frac{2}{3}h^3\right].$$

где коэффициенты  $m_0, m_1, m_2, m_3$  определяются формулами (VIII.105), а параметр  $\lambda_2$  находится из уравнения (VIII.106).

Зная функции  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  и пользуясь формулами (VIII.90) и (VIII.91) легко найдем компоненты тензора напряжений в окрестности рассматриваемой трещины. В частности, компоненты напряжений  $\sigma_x(x, 0), \tau_{xy}(x, 0), \sigma_y(x, 0)$  по оси  $Ox$  (см. рис. VIII.17 и VIII.18), т. е. при  $y=0$  ( $l \leq |x| \leq h$ ), будут иметь такой вид:

а) при чистом изгибе полосы с трещиной (рис. VIII.17)

$$\sigma_y(x, 0) = B \left( \frac{x}{l} - \frac{2}{3} \right) \sqrt{\frac{x - \lambda_2}{x - l}}, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad (\text{VIII.109})$$

$$\sigma_x(x, 0) = B \left( \frac{x}{l} - \frac{2}{3} \right) \sqrt{\frac{x - \lambda_2}{x - l}} - \frac{x}{l} B,$$

где  $l \leq |x| \leq h$ ,  $\lambda_2 = -\frac{1}{3}l$ ,  $B = \frac{Ml}{J}$ ;

б) при изгибе полосы (балки) с трещиной равномерно распределенной нагрузкой (рис. VIII.18)

$$\sigma_x(x, 0) = \sigma_y(x, 0) - \frac{q}{2J} \left[ x^3 + \left( L^2 - \frac{7h^2}{5} \right) x + \frac{2h^3}{3} \right], \quad (\text{VIII.110})$$

$$\sigma_y(x, 0) = (m_0 x^3 + m_1 x^2 + m_2 x + m_3) \sqrt{\frac{x - \lambda_2}{x - l}},$$

$$\tau_{xy}(x, 0) = 0,$$

где  $l \leq |x| \leq h$ ,  $\lambda_2$  — находится из уравнения (VIII.106), а  $m_0, m_1, m_2, m_3$  определены формулами (VIII.105).

Контактные напряжения  $\sigma_y^+$  для рассматриваемых задач определяются по формуле (VIII.103).

Чтобы получить наглядное представление о быстроте затухания поля напряжений, обусловленных наличием трещины в изгибаемой полосе, на рис. VIII.19 построены по формулам (VIII.109) графики (сплошные линии) изменения компонент тензора напряжений  $\sigma_x(x, 0)$ ,  $\sigma_y(x, 0)$ ,  $\tau_{xy}(x, 0)$  в зависимости от расстояния  $x$  при  $|x| \geq l$ . Для сравнения штриховой линией представлено изменение напряжений

$$\sigma_y^0(x, 0) = Bx/l, \quad \sigma_x^0(x, 0) = 0, \quad \tau_{xy}^0(x, 0) = 0$$

при чистом изгибе такой полосы, но без трещины. Как видим, при  $|x| > 2l$  возмущенное напряженное состояние можно считать (практически) совпадающим с невозмущенным напряженным состоянием, определяемым функциями (VIII.93) и (VIII.94).

Если подставить значения напряжений  $\sigma_y(x, 0)$  из (VIII.109) и (VIII.110) в уравнение (VIII.31), а затем осуществить в полученных равенствах предельный переход при  $x \rightarrow \pm l$ , получим формулы для определения величины предельных (критических) значений внешних нагрузок для задач, указанных на рис. VIII.17 и рис. VIII.18:

$$M_* = 2 \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\delta h^3}{l} \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)l}}, \quad (\text{VIII.111})$$

$$q_* = \sqrt{\frac{l}{2(l-\lambda_2)}} \frac{64\delta h^3}{(\lambda_2 + l) \left[ 5\lambda_2^2 - 2l\lambda_2 + 5l^2 + 12 \left( L^2 - \frac{2h^2}{5} \right) \right]} \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)l}}, \quad (\text{VIII.112})$$

где параметр  $\lambda_2$  определяется из уравнения (VIII.106).

Изгиб полосы с прямолинейной трещиной, расположенной в зоне растягивающих напряжений\*. Когда прямолинейные изолированные трещины расположены в области растягивающих напряжений и направлены перпендикулярно к боковым поверхностям изгибаемой полосы (рис. VIII.20 и VIII.21), кромки трещины будут всегда свободными от контактных напряжений. Если отнести рассматриваемую полосу с центральной трещиной к системе координат  $xOy$  и совместить ось  $Oy$  с продольной осью полосы, а ось  $Ox$  — с плоскостью трещины, граничные условия на контуре трещины, расположенной в зоне растягивающих напряжений, будут иметь вид

$$\sigma_y^+(x, 0) = \sigma_y^-(x, 0) = 0, \quad (VIII.113)$$

$$\tau_{xy}^+(x, 0) = \tau_{xy}^-(x, 0) = 0,$$

где  $a \leq |x| \leq b$  ( $a, b$  — абсциссы концов трещины).

Вдали от трещины будем считать, что напряженное состояние в полосе характеризуется функциями (VIII.93) и (VIII.94), где коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  ( $n=0, 1, 2, 3$ ) определяются формулами (VIII.95) и (VIII.96), а искомые функции  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  удовлетворяют условиям (VIII.100).

Из (VIII.90), (VIII.91) и граничных условий (VIII.113) можно определить функции напряжений  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$  для рассматриваемых задач. Действительно, осуществив предельный переход в уравнениях (VIII.90) и (VIII.91) на контур трещины и используя граничные условия (VIII.113), придем к задаче линейного сопряжения для граничных значений функций  $\Phi(z)$  и  $\Omega(z)$ :

$$[\Phi(t) + \Omega(t)]^+ + [\Phi(t) + \Omega(t)]^- = 0, \quad (VIII.114)$$

$$[\Phi(t) - \Omega(t)]^+ - [\Phi(t) - \Omega(t)]^- = 0,$$

где  $t$  — абсцисса точек контура трещины ( $a \leq |t| \leq b$ ).

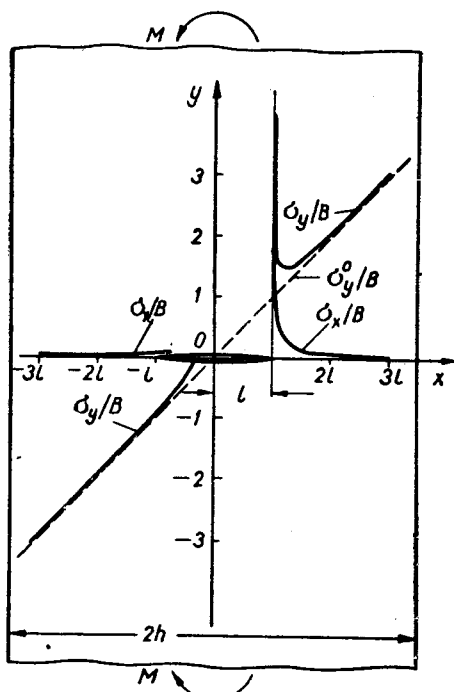


Рис. VIII.19.

\* См. В. В. Панасюк, Б. Л. Лозовой [4], а также Б. Л. Лозовой, В. В. Панасюк [2].

Решив \* уравнения (VIII.114) с учетом поведения функций  $\Phi(z) + \Omega(z)$  и  $\Phi(z) - \Omega(z)$  при  $|z| \rightarrow \infty$ , получим

$$\Phi(z) = \frac{c_0 z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + c_4}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{1}{2} [\Phi_0(z) - \Omega_0(z)], \quad (\text{VIII.115})$$

$$\Omega(z) = \frac{c_0 z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + c_4}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - \frac{1}{2} [\Phi_0(z) - \Omega_0(z)],$$

где  $c_0, c_1, c_2, c_3, c_4$  — постоянные, определяемые из условия (VIII.100).

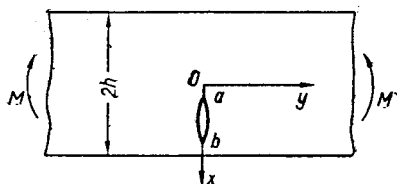


Рис. VIII.20.

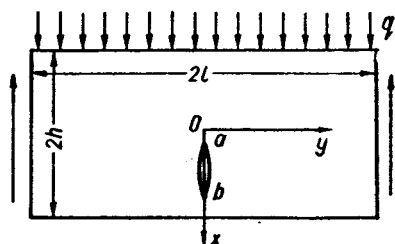


Рис. VIII.21.

Принимая во внимание соотношения (VIII.93) — (VIII.96) из формул (VIII.115), удовлетворив условиям (VIII.114), найдем коэффициенты  $c_n$  ( $n=0, 1, 2, 3, 4$ ).

Итак, функции напряжений для каждой из рассматриваемых задач будут иметь следующий вид:

а) при чистом изгибе полосы с нецентральной трещиной (рис. VIII.20)

$$\Phi(z) = \frac{M}{16J} \cdot \frac{8z^2 - 4(a+b)z - (b-a)^2}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} - \frac{M}{4J} z, \quad (\text{VIII.116})$$

$$\Omega(z) = \frac{M}{16J} \frac{8z^2 - 4(a+b)z - (b-a)^2}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} + \frac{M}{4J} z,$$

где  $J = \frac{4bh^3}{3}$  — момент инерции полосы;

б) при изгибе полосы с нецентральной трещиной равномерно распределенной нагрузкой (рис. VIII.21)

$$\Phi(z) = f_2(z) - \frac{q}{8J} \left[ z^3 + \left( L^2 - \frac{7h^2}{5} \right) z + \frac{2h^3}{3} \right], \quad (\text{VIII.117})$$

$$\Omega(z) = f_2(z) + \frac{q}{8J} \left[ z^3 + \left( L^2 - \frac{7h^2}{5} \right) z + \frac{2h^3}{3} \right],$$

где

$$f_2(z) = \frac{q}{96J \sqrt{(z-a)(z-b)}} \left\{ 16z^4 + 8(a+b)z^3 + 2 \left[ 12 \left( L^2 - \frac{2h^2}{5} \right) - \right. \right.$$

\* См. Н. И. Мусхелишвили [1].

$$- (5a^2 + 6ab + 5b^2) z^2 - 3(a+b) \left[ (b-a)^2 + 4 \left( L^2 - \frac{2h^2}{5} \right) \right] z - \frac{(b-a)^2}{8} \left[ 24 \left( L^2 - \frac{2h^2}{5} \right) + 13a^2 + 22ab + 13b^2 \right].$$

Компоненты напряжений для точек, расположенных по оси  $Ox$ , т. е. при  $y = 0$ , будут иметь такой вид:

а) при чистом изгибе полосы (рис. VIII.20)

$$\sigma_x(x, 0) = \frac{M}{8J} \cdot \frac{8x^2 - 4(a+b)x - (b-a)^2}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} - \frac{M}{J} x,$$

$$\sigma_y(x, 0) = \frac{M}{8J} \cdot \frac{8x^2 - 4(a+b)x - (b-a)^2}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}, \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0 \quad (\text{VIII.118})$$

$(x \geq b \text{ или } x \leq a);$

б) при изгибе полосы (балки) равномерно распределенной нагрузкой (рис. VIII.21)

$$\sigma_x(x, 0) = 2f_2(x) - \frac{q}{2J} \left[ x^3 + \left( L^2 - \frac{7h^2}{5} \right) x + \frac{2h^3}{3} \right],$$

$$\sigma_y(x, 0) = 2f_2(x), \quad \tau_{xy}(x, 0) = 0, \quad (\text{VIII.119})$$

где  $f_2(x)$  определяется формулами (VIII.117) при  $z = x + iy$  и  $y = 0$ .

Принимая во внимание  $\sigma_y(x, 0)$ , данное формулами (VIII.118) и (VIII.119), из условия предельного состояния (VIII.31), которое удобно представить в виде

$$\lim_{x \rightarrow \pm b} [V|x-b| \sigma_y^*(x, 0)] = \frac{K}{\pi},$$

получим величины предельных усилий  $M = M^*$  и  $q = q_*$  для задач, изображенных на рис. VIII.20 и VIII.21:

$$M_* = \frac{4J}{3b+a} \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)l}} \quad \left( J = \frac{4\delta h^3}{3} \right), \quad (\text{VIII.120})$$

$$q_* = \frac{192J}{35b^3 + 15ab^2 + 9a^2b + 5a^3 + 24 \left( L - \frac{2h^2}{5} \right) (a+3b)} \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)l}}, \quad (\text{VIII.121})$$

где  $2l = b - a$  — длина трещины; другие обозначения указаны соответственно на рис. VIII.20 и VIII.21.

## § 8. О предельном состоянии упругого тела, ослабленного концентратором напряжений с малым радиусом кривизны

В работах М. Я. Леонова [2], М. Я. Леонова и К. Н. Русинко [1, 2] предложена интересная и своеобразная теория макронапряжений, позволяющая наглядно и сравнительно просто сформулировать критерии

предельного состояния упругого тела, ослабленного концентраторами напряжений с малым радиусом кривизны. В этом параграфе излагаются основные положения указанного выше подхода.

**Макродеформации и макронапряжения.** Рассмотрим упругое твердое тело и будем считать его макрооднородным в том смысле, что механические свойства любого элементарного объема, ограниченного сферой радиуса  $R$ , мысленно вырезанного из указанного тела и не выходящего на его поверхность, являются одинаковыми, если радиус  $R \geq \rho$ , где  $2\rho$  — некоторая константа материала, имеющая размерность длины\*, связанная с его структурой. Кроме того, будем считать, что разрушение или пластическая деформация в объеме тела, заключенного внутри сферы радиуса  $\rho$ , не зависит от характера распределения напряжений внутри этого объема, а определяется деформацией поверхности, ограничивающей указанный элементарный объем. Предположим также, что если в теле не образуются трещины, то относительные перемещения двух точек твердого тела, отстоящего на расстоянии

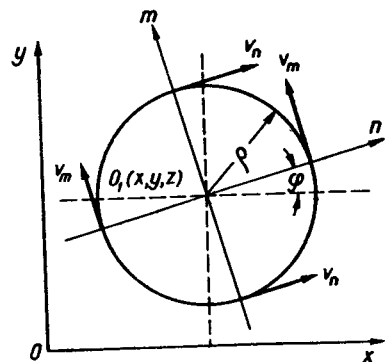


Рис. VIII.22.

большем, чем  $2\rho$ , определяются соответствующими решениями линейной теории упругости.

Для такого тела вводятся некоторые относительные удлинения диаметра сферы радиуса  $\rho$  (макроудлинения) и связанные с ними по линейному закону напряжения (макронапряжения).

Макроудлинением  $\epsilon_n(x, y, z, \rho)$  называется относительное удлинение соответствующего диаметра ( $n$ ) (рис. VIII.22) сферы радиуса  $\rho$  с центром в точке  $(x, y, z)$ . В силу принятого определения макроудлинение в направлении оси  $Ox$  (рис. VIII.22) можно представить в виде

$$\epsilon_x(x, y, z, \rho) = \frac{1}{2\rho} [u(x + \rho, y, z) - u(x - \rho, y, z)], \quad (\text{VIII.122})$$

где  $u(x \pm \rho, y, z)$  — упругое смещение в направлении оси  $Ox$ . Аналогичным путем определяются макроудлинения и в направлении осей  $Oy$  и  $Oz$ .

Макрорасширением  $\theta$  называется отношение приращения (при деформации)  $\Delta V$  объема материала, заключенного внутри сферы радиуса  $\rho$ , к его первоначальному значению  $\left( V = \frac{4}{3} \pi \rho^3 \right)$ , т. е.

$$\theta = \frac{3}{4\pi\rho^3} \iint_{(F)} \epsilon_n dF_n, \quad (\text{VIII.123})$$

\* Моментная теория упругости (см. гл. VI) также приводит, кроме других постоянных материала, к постоянной, имеющей размерность длины. Эта постоянная там отображает «зернистость» строения реального твердого тела.

где  $F$  — поверхность сферы радиуса  $\rho$  с центром в точке  $(x, y, z)$ ;  $dF_n$  — элемент поверхности  $F$  с нормалью  $n$ .

В силу принятых выше определений формула (VIII.123) выражает усредненное внутри сферы радиуса  $\rho$  упругое расширение, т. е.

$$\theta = \frac{1}{V} \iiint_{(V)} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV, \quad (\text{VIII.124})$$

где  $u, v, w$  — компоненты вектора упругих смещений;  $V$  — объем, ограниченный сферой ( $F$ ).

При действии как поверхностных, так и постоянных массовых сил упругое расширение представляет собой гармоническую функцию. Поэтому применяя теорему о среднем гармонической функции, из (VIII.124) получаем

$$\theta(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (\text{VIII.125})$$

т. е. макрорасширение не зависит от радиуса  $\rho$  рассматриваемой сферы, а определяется упругим расширением в центре этой сферы.

Макросдвигом  $\Gamma_{mn}$  называется изменение прямого угла между лучами (линиями), соединяющими точки тела, находящиеся до деформации на концах диаметров сферы радиуса  $\rho$ , параллельных направлениям  $m, n$  (рис. VIII.22).

Для плоскости ( $m, n$ ), параллельной, например, координатной плоскости  $xOy$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \Gamma_{mn} = & \frac{1}{2\rho} [v_m(x + \rho \cos \varphi, y + \rho \sin \varphi, z) - v_m(x - \rho \cos \varphi, y - \rho \sin \varphi, z)] + \\ & + \frac{1}{2\rho} [v_n(x - \rho \sin \varphi, y + \rho \cos \varphi, z) - v_n(x + \rho \sin \varphi, y - \rho \cos \varphi, z)], \end{aligned} \quad (\text{VIII.126})$$

где проекции упругих смещений соответственно в направлении осей  $m$  и  $n$

$$v_m = u \cos \varphi + v \sin \varphi, \quad v_n = -u \sin \varphi + v \cos \varphi.$$

Здесь  $u$  и  $v$  — проекции вектора смещения соответственно на координатные оси  $Ox$  и  $Oy$ .

Компонента нормального макронапряжения на площадке, нормалью к которой является направление ( $n$ ), определяется по формуле

$$s_n = 2G\varepsilon_n + \lambda\theta, \quad (\text{VIII.127})$$

где модуль сдвига и постоянная Ляме

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

Здесь  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона.



Ввиду того что макрорасширение не зависит от направления ( $n$ ), направление максимального макроудлинения совпадает с направлением максимального нормального макронапряжения.

Макронапряжением сдвига (касательным) называется величина

$$\Gamma_{mn} = G\Gamma_{mn}, \quad (\text{VIII.128})$$

где  $\Gamma_{mn}$  — макродвиг, определяемый формулой (VIII.126).

**Коэффициент концентрации макронапряжений. Условие хрупкого разрыва.** Пусть неограниченное тело с концентраторами напряжений в виде полостей или трещин подвергается в бесконечно удаленных его точках растяжению полем однородных напряжений интенсивности  $s$ . Тогда коэффициентом концентрации нормальных макронапряжений называется отношение

$$k = \frac{s_n^{(\max)}}{s}, \quad (\text{VIII.129})$$

где  $s_n^{(\max)}$  — максимальное значение макронапряжений для точек  $(x, y, z)$  рассматриваемого тела.

Координаты  $(x, y, z)$  центра элементарной сферы радиуса  $\rho$ , для которой макронапряжения  $s_n$  достигают максимального значения, а также направление ( $n$ ), в котором они действуют (рис. VIII.22), вообще говоря, заранее неизвестны. Для определения этих величин необходимо исследовать на максимум выражение (VIII.127).

Обозначим, как и ранее, через  $\sigma_0$  величину сопротивления отрыву для данного материала и найдем интенсивность внешней нагрузки ( $s$ ), при которой наибольшее макронапряжение достигает величины  $\sigma_0$ . Такая нагрузка определяется формулой

$$s_* = \frac{\sigma_0}{k}, \quad (\text{VIII.130})$$

где  $k$  — выражается соотношением (VIII.129).

Внешняя нагрузка  $s = s_*$  называется предельной или критической. По достижении внешней нагрузкой величины  $s_*$  в теле возможно образование новых трещин или распространение существующих. Это условие образования трещин называется макроскопической гипотезой хрупкого разрыва.

**Растяжение упругой плоскости, ослабленной эллиптическим отверстием.** Определим коэффициент концентрации нормальных макронапряжений для неограниченного тела (в случае плоской деформации) с цилиндрической полостью, основанием которой является эллипс с полуосями  $a, b$ . Предположим, что поверхность полости свободна от внешних напряжений, а в бесконечно удаленных точках тела приложены растягивающие напряжения интенсивности  $s$ , направленные перпендикулярно к большей оси  $2a$  эллиптического отверстия.

Смещения в упругой плоскости определяются формулами (см. § 1 гл. I).

$$2G(u + iv) = \kappa\phi(z) - z\overline{\phi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (\text{VIII.131})$$

При плоской деформации  $\kappa = 3 - 4\nu$ . Аналитические функции в области, занятой телом,

$$\varphi(z) = \frac{s}{4(a-b)} [2a \sqrt{z^2 - a^2 + b^2} - (a+b)z], \quad (\text{VIII.132})$$

$$\psi(z) = \frac{s}{2(a-b)} \left[ \frac{a^2 + b^2}{a-b} z - \frac{2ab}{a-b} \sqrt{z^2 - a^2 + b^2} - \frac{a(a^2 + b^2)}{\sqrt{z^2 - a^2 + b^2}} \right],$$

где  $\lim z^{-1} \sqrt{z^2 - a^2 + b^2} = 1$  при  $z \rightarrow \infty$ .

Максимальное макронапряжение возникает в элементарных объемах, ограниченных сферами радиуса  $\varrho$ , с центром в точках  $(a+\varrho, 0)$  и  $(-a-\varrho, 0)$ . Для указанных сфер в соответствии с формулами (VIII.125), (VIII.131) и (VIII.132) получим для определения макрорасширения формулу

$$2G\theta(a+\varrho, 0) = \frac{1-2\nu}{1-\eta} \left[ \frac{2(1+\alpha)}{\sqrt{\eta^2 + 2\alpha + \alpha^2}} - (1+\eta) \right] s, \quad (\text{VIII.133})$$

где

$$\alpha = \frac{\varrho}{a}, \quad \eta = \frac{b}{a}.$$

Макрорудлинение для этих сфер будет максимальным:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{\varrho} \nu(a+\varrho, \varrho).$$

Отсюда и на основании соотношений (VIII.131) и (VIII.132) найдем

$$2G\varepsilon_m = \frac{s}{2(1-\eta)} \left[ - (1-2\nu)(1+\eta) + \frac{1+\eta^2}{1-\eta} + \frac{(1+\alpha)\sqrt{2}}{\sqrt{\eta^2 + 2\alpha + 2\alpha_1}} \left( 3 - 4\nu - \frac{2\eta}{1-\eta} + \frac{\eta^2 - 2\alpha - 2\alpha^2}{2\alpha_1} \right) \right], \quad (\text{VIII.134})$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\left(\frac{\eta^2}{2} + \alpha\right)^2 + \alpha^2(1+\alpha)^2}.$$

Таким образом из (VIII.127), (VIII.133) и (VIII.134) максимальные растягивающие макронапряжения

$$s_m^{(\max)} = ks, \quad (\text{VIII.135})$$

где коэффициент концентрации

$$k = \frac{\eta^2}{(1-\eta)^2} + \frac{2(1+\alpha)\nu}{(1-\eta)\sqrt{\eta^2 + 2\alpha + \alpha^2}} + \frac{1+\alpha}{(1-\eta)\sqrt{2(\eta^2 + 2\alpha + 2\alpha_1)}} \left( 3 - 4\nu - \frac{2\eta}{1-\eta} + \frac{\eta^2 - 2\alpha - 2\alpha^2}{2\alpha_1} \right). \quad (\text{VIII.136})$$

Полагая в (VIII.136)  $b = \eta = 0$ , получаем коэффициент концентрации макронапряжений при растяжении упругой плоскости с щелью длины  $2a$ :

$$k = (1 + \alpha) \left[ \frac{2\nu}{\sqrt{2\alpha + \alpha^2}} + \frac{(3 - 4\nu)\alpha_2 - (1 + \alpha)}{2\alpha_2 \sqrt{\alpha(1 + \alpha_2)}} \right], \quad (\text{VIII.137})$$

где

$$\alpha_2 = \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha + 2}.$$

Если в правой части равенства (VIII.136) перейти к пределу при  $\eta \rightarrow 1$ , получим коэффициент  $k$  для неограниченной плоскости с круговым отверстием при одноосном растяжении

$$k = \frac{2\nu\alpha^2}{(1 + \alpha)^2(1 + 2\alpha + 2\alpha^2)} + \frac{3 + 11\alpha + 25\alpha^2 + 40\alpha^3 + 42\alpha^4 + 24\alpha^5 + 8\alpha^6}{(1 + 2\alpha + 2\alpha^2)^3}. \quad (\text{VIII.138})$$

Если полуось  $a$  эллиптического отверстия мала по сравнению со структурным параметром  $\varrho$  (т. е.  $\alpha \rightarrow \infty$ ), то из VIII.136 получаем  $k=1$ .

Таким образом, отверстия и щели, размеры которых малы по сравнению со структурным параметром  $\varrho$ , не вызывают концентрации макронапряжений. Это, конечно, и следовало ожидать.

Рассмотрим макроскопическое эллиптическое отверстие, когда полуоси ( $a, b$ ) намного больше структурного параметра  $\varrho$  (т. е.  $\alpha \rightarrow 0$ ). Пренебрегая в формуле (VIII.136) значениями  $\alpha$ , малыми по сравнению с единицей и  $\eta$ , получим формулу\* (VIII.2):

$$k = 1 + \frac{2a}{b} \quad (a \gg \varrho; b \gg \varrho). \quad (\text{VIII.139})$$

Итак, в случае макроскопического отверстия коэффициент концентрации макронапряжений совпадает с коэффициентом концентрации упругих напряжений, даваемым классической теорией упругости.

При фиксированном отношении  $a/b$  коэффициент концентрации идеализированных (упругих) напряжений не зависит от абсолютных размеров полуосей эллипса. В частности, для круговой полости  $k=3$  независимо от величины радиуса кругового отверстия. В то же время коэффициент концентрации макронапряжений  $k$  при неограниченном уменьшении размеров полости стремится к значению для сплошного тела  $k=1$ .

Рассмотрим случай макроскопической щели ( $a \gg \varrho; \eta=0$ ). Формулу (VIII.137) (после пренебрежения малыми  $\varrho/a$  высшего порядка) можно привести к виду

$$k = \frac{\beta_v}{2} \sqrt{\frac{a}{\varrho}}, \quad (\text{VIII.140})$$

где

$$\beta_v = \left[ 2 \left( 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + \sqrt{2}}} \right) \nu + \frac{3\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{1 + \sqrt{2}}} \right] \sqrt{2}. \quad (\text{VIII.141})$$

\* В рассматриваемом случае упругая плоскость растягивается усилиями  $s = \text{const}$ , перпендикулярными к оси  $2a$  эллиптического отверстия.

Некоторые значения коэффициента  $k$  (VIII.136) для щели ( $\eta=0$ ), кругового отверстия ( $\eta=1,0$ ) и трех промежуточных значений  $\eta$  равных 0,25; 0,50 и 0,75 для эллиптического отверстия приведены в таблице. Коэффициент  $k$  подсчитан при значениях коэффициента Пуассона  $\nu$ , равных 0,15; 0,20; 0,25; 0,30.

На рис. VIII.23 показаны графики зависимости  $k$  от отношения  $a/b$  при некоторых значениях  $\eta$ . Для сравнения штриховыми линиями представлены также коэффициенты концентрации идеализированных (упругих) напряжений, даваемых классической теорией упругости, к которым асимптотически приближаются значения коэффициентов концентрации макронапряжений при неограниченном увеличении полуосей  $a$  и  $b$ . В случае растяжения тела, ослабленного щелью ( $\eta=0$ ), коэффициент концентрации макронапряжений асимптоты, очевидно, не имеет.

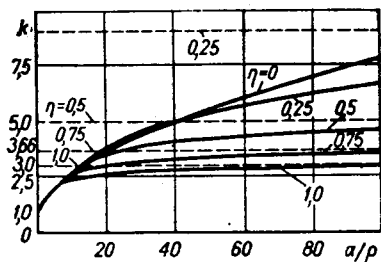


Рис. VIII.23.

**Определение предельной нагрузки.** Связь параметра  $\varrho$  с другими константами материала. Для упругой плоскости, ослабленной эллиптическим отверстием и находящейся в однородном напряженном состоя-

$\nu$	$a/b$								Отверстие
	0	1	2	3	5	10	15	25	
0,15	1	1,183	1,396	1,585	1,911	2,551	3,061	3,885	Щель ( $\eta=0$ )
0,20	1	1,188	1,403	1,595	1,924	2,571	3,084	3,917	
0,25	1	1,192	1,411	1,604	1,937	2,590	3,108	3,948	
0,30	1	1,197	1,418	1,614	1,950	2,610	3,133	3,979	
0,15	1	1,200	1,424	1,623	1,967	2,651	3,199	4,049	Эллиптическое ( $\eta=0,25$ )
0,20	1	1,205	1,433	1,633	1,979	2,665	3,213	4,061	
0,25	1	1,210	1,441	1,644	1,992	2,680	3,227	4,073	
0,30	1	1,216	1,450	1,654	2,005	2,695	3,241	4,084	
0,15	1	1,215	1,450	1,661	2,029	2,707	3,153	3,682	Эллиптическое ( $\eta=0,5$ )
0,20	1	1,220	1,458	1,670	2,037	2,712	3,157	3,684	
0,25	1	1,226	1,466	1,678	2,045	2,717	3,160	3,686	
0,30	1	1,232	1,474	1,686	2,052	2,722	3,164	3,688	
0,15	1	1,226	1,476	1,702	2,064	2,600	2,875	3,149	Эллиптическое ( $\eta=0,75$ )
0,20	1	1,232	1,483	1,708	2,068	2,602	2,876	3,149	
0,25	1	1,237	1,490	1,713	2,072	2,603	2,877	3,150	
0,30	1	1,244	1,494	1,723	2,077	2,606	2,878	3,150	
0,15	1	1,240	1,500	1,725	2,041	2,422	2,610	2,741	Круговое ( $\eta=1,0$ )
0,20	1	1,244	1,505	1,728	2,043	2,423	2,610	2,741	
0,25	1	1,249	1,510	1,731	2,044	2,423	2,610	2,741	
0,30	1	1,254	1,514	1,735	2,046	2,424	2,610	2,741	

нии на бесконечности, коэффициенты концентрации напряжений  $k$  при различных отношениях  $\eta = b/a$  определяются формулами (VIII.136) — (VIII.141). Пользуясь этими формулами и соотношением (VIII.130), можно легко определить величину предельной нагрузки  $s = s_*$  для рассматриваемой задачи. Например, в случае упругой плоскости с макроскопической щелью на основании формул (VIII.130) и (VIII.140) имеем

$$s_* = \frac{2\sigma_0}{\beta_v} \sqrt{\frac{\varrho}{a}}, \quad (\text{VIII.142})$$

где  $\beta_v$  определяется формулой (VIII.141).

Полученная зависимость предельного напряжения от размера  $a$  трещины с точностью до постоянного множителя совпадает с формулой Гриффитса

$$s_* = \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi(1-\nu^2)a}}. \quad (\text{VIII.143})$$

Потребуем, чтобы предельная нагрузка (VIII.142) совпадала тождественно с предельной нагрузкой (VIII.143). Получим связь структурного параметра  $\varrho$  с другими константами материала:

$$\varrho = \frac{\beta_v^2}{2\pi(1-\nu^2)} \cdot \frac{E\gamma}{\sigma_0^2} \quad (\text{VIII.144})$$

или

$$\varrho = \mu^* \frac{E\gamma}{\sigma_0^2}, \quad (\text{VIII.145})$$

где  $\mu^* = \frac{\beta_v^2}{2\pi(1-\nu^2)}$  — числовой множитель, равный 0,386; 0,386; 0,402; 0,421 соответственно для значений  $\nu$ , равных 0,15; 0,20; 0,25; 0,30;  $\gamma$  — эффективная поверхностная энергия материала.

## § 9. О хрупком разрушении материала \*

На основе анализа предельно-равновесного состояния плоскости (хрупкой пластины) с дефектами типа произвольно ориентированных остроконечных полостей-трещин или гипоциклоидальных отверстий построена диаграмма предельных нагрузок для случая, когда тело подвергнуто плоскому двухосному растяжению — сжатию. Эта диаграмма может служить критерием определения начала хрупкого или квазихрупкого разрушения твердых тел, ослабленных разноориентированными дефектами указанного типа (концентраторов напряжений с малым радиусом кривизны).

\* См. В. В. Панасюк [4].

Двухосное растяжение — сжатие упругой плоскости с отверстием в виде гипоциклоиды. Рассмотрим упругую плоскость  $xOy$  (пластину единичной толщины), ослабленную отверстием в виде гипоциклоиды, т. е. отверстием контур  $L$  которого описывается в параметрической форме уравнениями

$$x = A \left( \cos \vartheta + \frac{1}{n} \cos n\vartheta \right), \quad y = A \left( \sin \vartheta - \frac{1}{n} \sin n\vartheta \right), \quad (\text{VIII.146})$$

где  $0 \leq \vartheta \leq 2\pi$ ;  $A > 0$ ;  $n$  — целое положительное число ( $n=1, 2, 3, \dots$ ).

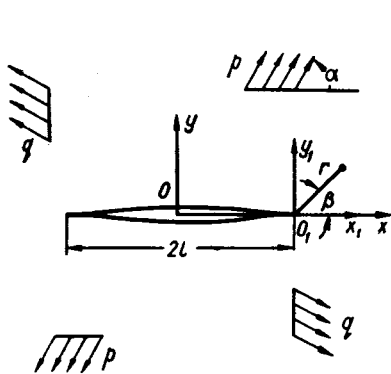


Рис. VIII.24.

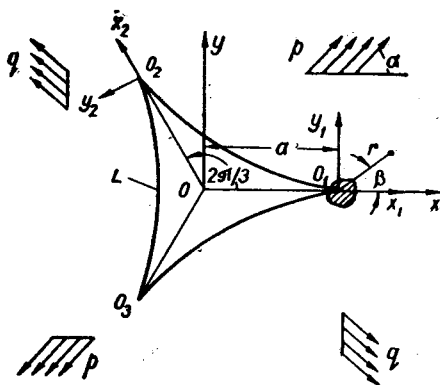


Рис. VIII.25.

По формулам (VIII.146) на рис. VIII.24 и VIII.25 изображены контуры соответственно при  $n=1$  и  $n=2$ . Вершины контура гипоциклоидального отверстия, как следует из формул (VIII.146), являются угловыми точками возврата и при фиксированном  $n$  контур  $L$  имеет  $n+1$  точку возврата.

Пусть упругая плоскость с отверстием в виде гипоциклоиды подвергнута растяжению-сжатию монотонно возрастающими напряжениями  $p$  и  $q$  ( $\frac{q}{p} = \eta_0$ ), действующими во взаимно перпендикулярных направлениях и приложенными в бесконечно удаленных ее точках, причем напряжения  $p$  направлены под углом  $\alpha$  к оси  $Ox$  (см. рис. VIII.24 и VIII.25). Контур отверстия считается свободным от внешних усилий. Требуется определить значения предельных напряжений  $p=p_*$  и  $q=q_*$ , по достижении которых хотя бы одна из вершин рассматриваемого отверстия приходит в состояние предельного равновесия, а в окрестности этой вершины наступает возможность распространения трещины разрушения.

Вначале необходимо определить при заданном внешнем воздействии поле упругих напряжений в окрестности угловых точек рассматриваемой плоскости (рис. VIII.24 и VIII.25), а затем, используя уравнения предельного состояния (VIII.31), определить величину предельной нагрузки. При этом, однако, в общем случае угловых точек на контуре, ограничивающем рассматриваемую область, определение поля упругих напряжений, т. е. решение соответствующей задачи теории упругости,

наталкивается на существенные трудности. В случае, когда на контуре рассматриваемой бесконечной области с отверстием имеются угловые точки возврата, как это имеет место для данной задачи (рис. VIII.24 и VIII.25), решение необходимой задачи теории упругости для такой области можно получить, например, из решения соответствующей задачи теории упругости для области, ограниченной контуром с непрерывно изменяющейся касательной и зависящим от некоторых параметров, если в таком решении параметры (характеризующие рассматриваемый гладкий контур) устремить к заданным предельным значениям так, чтобы в пределе получить контур с угловыми точками указанного типа; например, таким путем, как этот, получается решение задачи теории упругости для упругой плоскости с прямолинейным разрезом (трещиной) из решения соответствующей задачи для плоскости с эллиптическим отверстием\*.

Построим решение задачи теории упругости для случая, когда упругая плоскость ослаблена отверстием в виде гипотрохи, а в бесконечно удаленных ее точках действует двухосное поле растяжений  $(p, q)$ . С этой целью рассмотрим функцию

$$z = \omega(\zeta) = A \left( \zeta + \frac{m}{\zeta^n} \right); \quad (\text{VIII.147})$$

здесь  $z = x + iy$  — комплексная переменная в плоскости  $z(xOy)$ , а  $\zeta = \xi + i\eta = \rho e^{i\theta}$  — комплексная переменная в плоскости  $\zeta(\xi O\eta)$ ;  $A > 0$ ;  $0 \leq m \leq 1/n$ ;  $n$  — целое положительное число.

Функция (VIII.147) конформно отображает область, расположенную в плоскости  $z$  вне гипотрохи, на внешность единичной окружности в плоскости  $\zeta$ . Легко убедиться также, что при  $m = 1/n$  функция (VIII.147) конформно отображает внешность гипоциклоиды в плоскости  $z$  на внешность единичной окружности в плоскости  $\zeta$ , причем контур  $L$  гипоциклоиды в плоскости  $z$  получим из уравнения (VIII.147) при  $m = 1/n$ ,  $A = \frac{na}{n+1}$ ,  $a > 0$  и  $|\zeta| = 1$ .

Таким образом, если при заданном поле напряжений в бесконечно удаленных точках упругой плоскости с отверстием в виде гипотрохи  $0 \leq m < 1/n$  будет решена задача теории упругости, то, полагая в этом решении  $m \rightarrow 1/n$ ,  $A = \frac{na}{n+1}$ , получим решение соответствующей задачи теории упругости для плоскости с отверстием в виде гипоциклоиды.

Поскольку контур  $L$  гипоциклоиды (а также гипотрохи) считается свободным от внешних усилий, для определения функций напряжений имеем условие\*\*

$$\varphi_1(z) + \overline{z\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = 0 \text{ на } L. \quad (\text{VIII.148})$$

По комплексным потенциалам  $\varphi_1(z)$  и  $\psi_1(z)$  определим\*\*\* компоненты напряжений

$$\sigma_x + \sigma_y = 2[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'(z)}], \quad \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2[\overline{z\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1'(z)}]. \quad (\text{VIII.149})$$

\* См. § 2, гл. II.

\*\* См. § 1, гл. I.

\*\*\* См. § 1, гл. I.

В преобразованной области  $\zeta$  контурное условие (VIII.148) можно представить в виде

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0,$$

где  $\sigma = e^{i\theta}$ ,  $0 < \theta < 2\pi$ ;

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)], \quad \psi(z) = \psi_1[\omega(z)],$$

$$\varphi_1'(z) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \psi_1'(z) = \frac{\psi'(z)}{\omega'(z)}.$$

(VIII.150)

Для упругой плоскости с отверстием, когда в бесконечно удаленных ее точках действуют главные напряжения  $p$  и  $q$ , а контур отверстия свободен от внешних усилий, функции\*

$$\varphi(\zeta) = A\Gamma\zeta + \varphi_0(\zeta), \quad \psi(\zeta) = A\Gamma'\zeta + \psi_0(\zeta); \quad (\text{VIII.151})$$

здесь  $\varphi_0(\zeta)$  и  $\psi_0(\zeta)$  — голоморфные функции в области  $|\zeta| \geq 1$ ;  $\varphi_0(\infty) = 0$ ; постоянные

$$\Gamma = \bar{\Gamma} = \frac{1}{4}(p+q), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(p-q)e^{-2i\alpha}, \quad (\text{VIII.152})$$

где  $\alpha$  — угол между осью  $Ox$  и направлением главного напряжения  $p$ .

Предположим, что в формуле (VIII.147)  $0 < m < 1/n$ . В этом случае контур отверстия представляет собою гипотрохиду, т. е. на контуре отверстия нет угловых точек. Следовательно, для определения функций  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  из контурного условия (VIII.150) можно применить известный метод Н. И. Мусхелишвили, изложенный в § 1 гл. I. В результате без затруднений найдем функции напряжений  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  для упругой плоскости с отверстием в виде гипотрохиды  $0 < mn < 1$ . Осуществляя в этих функциях предельный переход при  $mn \rightarrow 1$  ( $m = 1/n$ ), получим искомые функции для бесконечной упругой плоскости с отверстием в виде гипоциклоиды, когда в бесконечно удаленных точках этой плоскости приложены усилия  $p$  и  $q$ :

$$\varphi(\zeta) = A\Gamma\zeta - G_0^*(\zeta) - A\left(\frac{\Gamma}{n\zeta^n} + \frac{\bar{\Gamma}}{\zeta}\right),$$

$$\psi(\zeta) = A\Gamma'\zeta + G_\infty^*(\zeta) - \frac{\zeta^n\left(1 + \frac{1}{n}\zeta^{n+1}\right)}{\zeta^{n+1} - 1} \varphi_0'(\zeta) -$$

$$- A\Gamma\left[\frac{1}{\zeta} + \frac{(n+1)\zeta^n}{n(\zeta^{n+1} - 1)}\right]; \quad (\text{VIII.153})$$

здесь

$$\varphi_0(\zeta) = -G_0^*(\zeta) - A\left(\frac{\Gamma}{n\zeta^n} + \frac{\bar{\Gamma}}{\zeta}\right);$$

\* См. § 1, гл. II.



$$G_0^*(\zeta) = \begin{cases} -\frac{1}{n} \left[ \frac{\bar{a}_1}{\zeta^{n-2}} + 2 \frac{\bar{a}_2}{\zeta^{n-3}} + \dots + \frac{(n-2)\bar{a}_{n-2}}{\zeta} \right] & \text{при } n > 2, \\ 0 & \text{при } n < 2; \end{cases} \quad (\text{VIII.154})$$

$$G_\infty^*(\zeta) = \begin{cases} -\frac{1}{n} [a_1 \zeta^{n-2} + 2a_2 \zeta^{n-3} + \dots + (n-1)a_{n-1}] & \text{при } n \geq 2, \\ 0 & \text{при } n < 2; \end{cases}$$

$$\varphi_0(\zeta) = \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \frac{a_3}{\zeta^3} + \dots \quad \text{при } |\zeta| \geq 1, \quad (\text{VIII.155})$$

где коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, \dots$  определяются путем сопоставления выражений правой и левой части в формулах (VIII.154) и (VIII.155).

**Напряжения в окрестности угловых точек.** При определении главной части компонент тензора напряжений в окрестности угловых точек контура рассматриваемой области (рис. VIII.25) с гипоциклоидальным отверстием следует иметь в виду следующее. Угловые точки  $O_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) на границе области являются точками возврата. В малой окрестности таких точек, компоненты тензора напряжений в полярной системе координат с началом в угловой точке  $O_j$  определяются при плоском напряженном состоянии следующими соотношениями:

$$\sigma_r = \frac{1}{4\sqrt{2}r} \left\{ k_{1,j} \left( 5 \cos \frac{\beta}{2} - \cos \frac{3}{2} \beta \right) + k_{2,j} \left( -5 \sin \frac{\beta}{2} + 3 \sin \frac{3}{2} \beta \right) \right\} + 0(1),$$

$$\sigma_\beta = \frac{1}{4\sqrt{2}r} \left\{ k_{1,j} \left( 3 \cos \frac{\beta}{2} + \cos \frac{3}{2} \beta \right) - 3k_{2,j} \left( \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{3}{2} \beta \right) \right\} + 0(1),$$

$$\tau_{r\beta} = \frac{1}{4\sqrt{2}r} \left\{ k_{1,j} \left( \sin \frac{\beta}{2} + \sin \frac{3}{2} \beta \right) + k_{2,j} \left( \cos \frac{\beta}{2} + 3 \cos \frac{3}{2} \beta \right) \right\} + 0(1), \quad (\text{VIII.156})$$

где  $j = 1, 2, 3$  — номер угловой точки;  $0(1)$  — регулярная часть компоненты напряжения при  $r \rightarrow 0$ ;  $k_{1,j}$  и  $k_{2,j}$  — коэффициенты интенсивности (концентрации) напряжений в окрестности угловой точки, которые находим\* из уравнения

$$k_{1,j} \sqrt{\frac{2}{r}} \cos \frac{\beta}{2} - k_{2,j} \sqrt{\frac{2}{r}} \sin \frac{\beta}{2} + 0(1) = 4 \operatorname{Re} \Phi_j(z_j), \quad (\text{VIII.157})$$

где  $\Phi_j(z_j)$  — функция, равная

$$\Phi_j(z_j) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)},$$

отнесенная к локальной системе полярных координат  $(r, \beta)$  с началом в угловой точке  $O_j$ ;  $z_j = r e^{i\beta}$ . Эту функцию можно представить в виде

$$\Phi_j(z_j) = \Phi(z_{0j} + z_j e^{i\theta_j}) = \frac{\varphi'(\sigma_j + \zeta_j e^{i\theta})}{\omega'(\sigma_j + \zeta_j e^{i\theta})}, \quad (\text{VIII.158})$$

\* См. В. В. Панасюк, Л. Т. Бережницкий [1], Си, Парис, Эрдоган [1].

где  $j = 1, 2, 3, \dots$ ;  $z_j = re^{i\theta_j}$ ;  $\zeta_j = \varrho_1 e^{i\lambda}$ ;  $r \ll a$ ;  $\varrho_1 \ll 1$ ;  $z_{0j}$  — абсцисса начала системы полярных координат в плоскости  $z$ , а  $\theta_j$  — угол поворота полярной оси этой системы относительно оси  $Ox$ .

Таким образом, пользуясь формулами (VIII.153), (VIII.157) и (VIII.158), можно найти значения коэффициентов  $k_{1,j}$  и  $k_{2,j}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) для упругой плоскости (пластины) с гипоциклоидальным отверстием (в частности, с прямолинейной трещиной) при двухосном ее растяжении (рис. VIII.24 и VIII.25).

В качестве примеров рассмотрим следующие задачи: 1) случай прямолинейной полости (трещины) и 2) случай отверстия в виде гипоциклоиды с тремя вершинами.

Для первой задачи (рис. VIII.24) в формулах (VIII.153) необходимо положить  $n=1$ . В этом случае формулы (VIII.153) принимают простой вид и в соответствии с выражениями (VIII.157) и (VIII.158) находим

$$\begin{aligned} k_{1,1} &= p \sqrt{l} (\sin^2 \alpha + \eta_0 \cos^2 \alpha) \quad (l = a), \\ k_{2,1} &= p (1 - \eta_0) \sqrt{l} \sin \alpha \cos \alpha \quad (\eta_0 = q/p), \end{aligned} \quad (\text{VIII.159})$$

где  $l$  — полудлина трещины (разреза).

Для второй задачи (рис. VIII.25) в формулах (VIII.147) и (VIII.153) необходимо положить  $n=2$ :

$$\begin{aligned} \Psi(\zeta) &= \frac{2}{3} a \left[ \Gamma \left( \zeta - \frac{1}{2\zeta^2} \right) - \frac{\bar{\Gamma}'}{\zeta} \right]; \\ \Phi(z) &= \frac{\Psi'(z)}{\omega'(z)} = \frac{1}{\zeta^3 - 1} [(\zeta^3 + 1) \Gamma + \zeta \bar{\Gamma}']; \\ z = \omega(\zeta) &= \frac{2}{3} a \left( \zeta + \frac{1}{2\zeta^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{VIII.160})$$

Отсюда и на основании формулы (VIII.158) находим

$$\Phi_j(r, \beta) = \frac{1}{3} (2\Gamma + e^{i\theta_j} \bar{\Gamma}') \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-i\frac{\beta}{2}} + 0(1), \quad (\text{VIII.161})$$

где  $j = 1, 2, 3$ .

Пользуясь формулой (VIII.161) и выражением (VIII.152), получим

$$\Phi_j(r, \beta) = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{a}{r}} [p + q - (p - q) e^{i(2\alpha + \theta_j)}] e^{-i\frac{\beta}{2}} + 0(1). \quad (\text{VIII.162})$$

Подставляя функцию (VIII.162) в уравнение (VIII.157) и сравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, найдем

$$\begin{aligned} k_{1,j} &= \frac{\sqrt{2a}}{3} [p + q - (p - q) \cos(2\alpha + \theta_j)], \\ k_{2,j} &= \frac{\sqrt{2a}}{3} (p - q) \sin(2\alpha + \theta_j), \end{aligned} \quad (\text{VIII.163})$$

где углы  $\theta_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) имеют соответственно, для вершин  $O_1, O_2$  и  $O_3$  следующие значения:  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \frac{2}{3}\pi$  и  $\theta_3 = -\frac{2}{3}\pi$ .

**Определение предельной нагрузки.** Пусть внешние усилия  $p$  и  $q$ , приложенные в бесконечно удаленных точках пластины с гипоцикло-

идальным отверстием (рис. VIII.25), монотонно увеличиваются пропорционально некоторому параметру. Определим значения предельных нагрузок  $p=p_*$  и  $q=q_*$  ( $\frac{q}{p} = \eta_0, \eta_0 = \text{const}$ ), т. е. внешних напряжений  $p_*$  и  $q_*$ , по достижении которых возможно развитие (распространение) трещины разрушения из угловых точек указанного отверстия.

Для определения величины напряжений  $p_*$  и  $q_*$  для упругой плоскости, ослабленной отверстием с угловыми точками возврата, имеем следующие уравнения:

$$p_* = \min \{ p_{*j} \}, \quad q_* = \eta_0 p_* \quad (\eta_0 = \frac{q}{p}),$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \{ \sqrt{r} \sigma_\beta(r, \beta_*, p_{*j}, \eta_0) \} = \frac{K}{\pi}. \quad (\text{VIII.164})$$

Здесь  $j = 1, 2, 3$  — номер угловой точки;  $K$  — модуль сцепления\*, который выражается через модуль Юнга  $E$ , коэффициент Пуассона  $\nu$  и эффективную поверхностную энергию  $\gamma$  материала пластины так:  $K = \sqrt{\frac{\pi E \gamma}{1 + \nu^2}}$  для плоской деформации и  $K = \sqrt{\pi E \gamma}$  для обобщенного плоского напряженного состояния;

$$\beta_* = \pm 2 \arcsin \sqrt{\frac{6n_j^2 + 1 - \sqrt{8n_j^2 + 1}}{2(9n_j^2 + 1)}} \quad \text{при } k_{1,j} > 0,$$

$$\beta_* = \pm 2 \arcsin \sqrt{\frac{6n_j^2 + 1 + \sqrt{8n_j^2 + 1}}{2(9n_j^2 + 1)}} \quad \text{при } k_{2,j} < 0, \quad (\text{VIII.165})$$

где знак «плюс» соответствует значениям  $k_{2,j} < 0$ , а «минус» — значениям  $k_{2,j} > 0$ ; параметр  $n_j = k_{2,j}/k_{1,j}$ .

Пользуясь уравнениями (VIII.164), (VIII.165) и выражениями (VIII.159), (VIII.163), можно определить величину предельных напряжений для пластины с остrokонечным разрезом (рис. VIII.24):

$$p_* = Rf(\alpha, \eta_0), \quad q_* = \eta_0 Rf(\alpha, \eta_0);$$

здесь

$$f(\alpha, \eta_0) = \left\{ \cos^2 \frac{\beta_*}{2} \left[ \cos \frac{\beta_*}{2} (\sin^2 \alpha + \eta_0 \cos^2 \alpha) - 3(1 - \eta_0) \sin \alpha \cos \alpha \sin \frac{\beta_*}{2} \right] \right\}^{-1},$$

$$R = \frac{K\sqrt{2}}{\pi\sqrt{l}}: \quad l = a; \quad \eta_0 = \frac{q}{p}, \quad (\text{VIII.166})$$

где значения углов  $\beta_*$  определяются формулами (VIII.165), если в них подставить

$$n_j = \frac{k_{2,1}}{k_{1,1}} = \frac{(1 - \eta_0) \sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \eta_0 \cos^2 \alpha};$$

коэффициенты  $k_{1,1}$  и  $k_{2,1}$  даны формулами (VIII.159).

\* См. Г. И. Баренблатт [1].

Для пластины с отверстием в виде гипоциклоиды с тремя вершинами (рис. VIII.25) на основании уравнений (VIII.164), (VIII.165) и равенств (VIII.163) найдем

$$p_{.j} = \min \{ p_{.j} \}, \quad q_{.j} = \eta_0 p_{.j} \quad (j = 1, 2, 3),$$

$$p_{.j} = R_1 f_j(\alpha, \eta_0, \beta_*, \vartheta_j), \quad \eta_0 = \frac{q}{p}, \quad R_1 = \frac{\sqrt{2K}}{\pi \sqrt{a}}, \quad (\text{VIII.167})$$

где

$$f_j(\alpha, \eta_0, \beta_*, \vartheta_j) = 6 \sqrt{2} \left\{ [1 + \eta_0 - (1 - \eta_0) \cos(2\alpha + \vartheta_j)] \left( 3 \cos \frac{\beta_*}{2} + \cos \frac{3}{2} \beta_* \right) - 3(1 - \eta_0) \sin(2\alpha + \vartheta_j) \left( \sin \frac{\beta_*}{2} + \sin \frac{3}{2} \beta_* \right) \right\}^{-1}, \quad (\text{VIII.167})$$

а параметр  $\beta_*$  определен формулами (VIII.165) и (VIII.163).

**Диаграмма предельных напряжений.** Если параметры  $\eta_0$ ,  $\alpha$  и  $a$  заданы, то по формулам (VIII.166) или (VIII.167) можно подсчитать величину предельных напряжений  $p = p_*$  и  $q = q_*$  в каждом конкретном случае. Однако более существенное значение имеет построение на основе этих формул диаграмм предельных (в смысле прочности) напряжений для тела, подвергнутого плоскому двухосному напряженному состоянию.

Перед построением таких диаграмм заметим следующее. Разрушение хрупких тел, как известно, связано с возникновением в процессе их деформации условий, при которых дефекты типа остrokонечных полостей-трещин приходят в состояние предельного равновесия и, следовательно, при малых возмущениях поля внешних напряжений возможно их распространение по сечению тела. Для определения условий такого состояния можно использовать формулы типа (VIII.166) или (VIII.167).

Действительно, пусть в хрупком теле имеются внутренние дефекты типа остrokонечных полостей-трещин, характерный линейный размер которых равен  $a$ , и такие дефекты разноориентированы и рассеяны по всему объему тела так, что их можно считать изолированными друг от друга. Если такое тело подвергнуто плоскому напряженному состоянию в результате воздействия на него монотонно возрастающих (главных) напряжений  $p$  и  $q$  ( $q/p = \eta_0$ ), то в числе разноориентированных изолированных дефектов — трещин, содержащихся в деформируемом теле, — должна существовать такая (наиболее опасная при заданном  $\eta_0$ ) их ориентация, для которой предельные напряжения  $p = p_*^{(\min)}$  и  $q = q_*^{(\min)}$  имеют минимальные значения по сравнению с предельными значениями  $p_*$  и  $q_*$  при другой ориентации таких дефектов.

По достижении внешними напряжениями  $p$  и  $q$  значений  $p_*^{(\min)}$  и  $q_*^{(\min)}$  в рассматриваемом хрупком теле с остrokонечными полостями-трещинами наступает возможность развития (распространения) указанного дефекта наиболее опасной ориентации. Это значит, что при небольшом превышении внешними напряжениями значений  $p_*^{(\min)}$  и  $q_*^{(\min)}$  может произойти разрушение тела. Поэтому с точки зрения прочности

хрупкого тела, ослабленного дефектами типа остrokонечных полостей-трещин (или остrokонечных отверстий), напряжения  $p_*^{(\min)}$  и  $q_*^{(\min)}$  являются предельно-допустимыми в условиях плоского напряженного состояния тела. Следовательно, кривая, определяющая изменение напряжений  $p_*^{(\min)}$  и  $q_*^{(\min)}$  в зависимости от параметра  $\eta_0$ , т. е. в зависимости от вида плоского напряженного состояния, будет представлять собой диаграмму предельных (допустимых с точки зрения прочности тела) напряжений.

Ориентация дефекта, для которой в соответствии с формулами (VIII.167) или (VIII.166) получаем минимальные значения напряжений  $p_*$  и  $q_*$ , определяется некоторым углом  $\alpha = \alpha_*$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ). При таком значении угла  $\alpha = \alpha_*$  функция  $f(\alpha, \eta, \beta_*, \vartheta_j)$  принимает (для заданного  $\eta_0$ ) минимальное значение по сравнению с другими значениями угла  $\alpha$  ( $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ ). Построив график изменения, например, функции  $f_1(\alpha, \eta_0, \beta_*, 0)$  при заданном  $\eta_0$ , когда  $\alpha$  принимает значения в интервале  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , можно определить угол  $\alpha = \alpha_*$ . После этого, пользуясь формулами (VIII.167), можно найти напряжения

$$q_*^{(\min)} = \eta_0 R_1 f_1(\alpha_*, \eta_0, \beta_*, 0), \quad p_*^{(\min)} = R_1 f_1(\alpha_*, \eta_0, \beta_*, 0), \quad (\text{VIII.168})$$

где функция  $f(\alpha, \eta_0, \beta_*, 0)$  представлена формулой (VIII.167) при  $\vartheta_j = 0$ .

В частном случае, когда тело подвергнуто одноосному растяжению напряжениями  $p$  ( $q=0, \eta_0=0$ ), на основании формул (VIII.167) находим

$$p_*^{(\min)} = R_1 f_1(\alpha_*, 0) = 1,03R_1; \quad q_* = 0. \quad (\text{VIII.169})$$

Величина  $R_1$ , в формулах (VIII.167) — (VIII.169)

$$R_1 = \frac{\sqrt{2}K}{\pi\sqrt{a}},$$

где  $a$  — характерный линейный размер остrokонечной полости-трещины гипоциклоидального отверстия в структуре рассматриваемого тела. Поскольку величина  $K$  для данного материала при заданных условиях (температура, окружающая среда, характер неоднородности структуры и т. п.) есть величина постоянная, то при тех же условиях величину  $R_1$  можно также считать постоянной. При одноосном растяжении хрупкого тела с указанным типом дефектности напряжение  $p_*^{(\min)}$  представляет собой среднее значение технической прочности  $\sigma_B$  данного материала при одноосном его растяжении. Таким образом,

$$\sigma_B = 1,03R_1. \quad (\text{VIII.170})$$

На основе изложенного выше приема с помощью формул (VIII.167), (VIII.168) и (VIII.170) можно подсчитать величины  $p_*^{(\min)}/\sigma_B$  и  $q_*^{(\min)}/\sigma_B$  для ряда значений параметра  $\eta_0$  ( $-\infty \leq \eta_0 \leq \infty$ ), а затем по этим данным построить диаграмму предельных (разрушающих) напряжений при

плоском напряженном состоянии тела — пластины с дефектами типа остроконечных полостей-трещин.

Подсчитывая по формулам (VIII.167) безразмерные напряжения  $\rho_*^{(\min)}/\sigma_B$  и  $q_*^{(\min)}/\sigma_B$  для значений параметра  $\eta_0$  ( $-\infty \leq \eta_0 \leq \infty$ ), можно построить диаграмму предельных (разрушающих) напряжений для хрупкого разрушения тела с дефектами типа гипоциклоидальных отверстий, когда последнее подвергнуто двухосному плоскому напряженному состоянию. В частности, для случая, когда тело ослаблено остроконечными отверстиями в виде гипоциклоид с тремя вершинами\*, диаграмма предельных по прочности напряжений, построенная по формулам (VIII.167), представлена кривой 1 на рис. VIII.26. При этом отметим, что для тела, ослабленного дефектами типа гипоциклоидальных отверстий с тремя вершинами, величины  $R_1$  и  $\sigma_B$ , входящие в формулу (VIII.167), отличаются, вообще говоря, от аналогичных величин для тела с дефектами типа узких полостей-трещин.

**Сопоставление результатов теории и эксперимента.** Вопрос о выборе критерия прочности при хрупком разрушении твердых тел, находящихся в двухосном напряженном состоянии, до сих пор окончательно не решен. В качестве наиболее распространенных критериев прочности следует считать гипотезу наибольших нормальных напряжений\*\* и теорию Гриффитса\*\*\*.

Гриффитсовская теория разрушения хрупкого тела при двухосном его растяжении-сжатии главными напряжениями  $p$  и  $q$  основана, как известно, на анализе упругих напряжений около вытянутой эллиптической полости в пластине, подвергнутой плоскому напряженному состоянию. При этом считается, что радиус кривизны такой полости в ее вершине мал, но конечный. Кроме того, считается, что в реальном хрупком теле содержатся такие полости всех направлений, и разрушение тела наступает тогда, когда наибольшее растягивающее напряжение на контуре наиболее опасно ориентированной полости достигает величины  $\sigma_B$  — значения хрупкой прочности материала. В работах А. А. Griffith [1, 2] сформулированы следующие критерии хрупкого разрушения при плоском напряженном состоянии тела: 1) если  $3p+q > 0$ , разрушение происходит при  $p = \sigma_B$ ; 2) если  $3p+q < 0$ , разрушение наступает при  $(p-q)^2 + 8\sigma_B(p+q) = 0$ . Графическая интерпретация этих уравнений дана на рис. VIII.26 в виде кривой 2. Условия хрупкого разрушения согласно гипотезе наибольших нормальных напряжений выражаются равенствами  $p = \sigma_B$  или  $q = \sigma_B$  (линия 3).

Сопоставим приведенные на рис. VIII.26 диаграммы хрупкого разрушения с опытными данными, полученными при испытании хрупких тел. Рассмотрим вначале некоторые экспериментальные результаты, полученные\*\*\*\* при разрушении трубчатых чугуновых образцов, подвергну-

\* См. В. В. Панасюк [4], где приведены соответствующие значения напряжений  $\rho_*^{(\min)}$  и  $q_*^{(\min)}$ .

\*\* См. Н. Н. Давиденков и А. Н. Ставрогин [1].

\*\*\* См. А. А. Griffith [2].

\*\*\*\* См. J. Cornet and R. C. Grassi [1].

тых плоскому напряженному состоянию, которое создавалось наложением осевого растяжения-сжатия  $q$  и внутреннего давления  $p$  в различных соотношениях  $q/p = \eta_0$ .

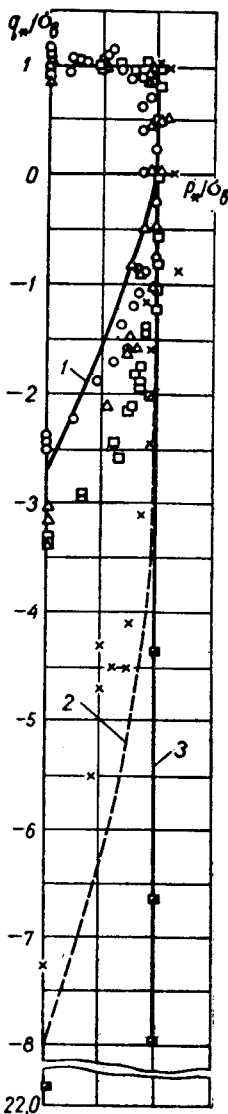


Рис. VIII.26.

Как известно, чугун представляет собой материал с достаточно ограниченной пластичностью, и при определенной термической обработке в его структуре имеются многочисленные (произвольно ориентированные в объеме тела) графитовые включения в виде тонких пластинок. Последние обладают ничтожно малой прочностью на разрыв по сравнению с аналогичной прочностью ферритной основы чугуна и, следовательно, их можно рассматривать (в первом приближении) как дефекты типа остроконечных полостей-трещин в основной структуре материала. Таким образом, чугуны с пластинчатыми графитовыми включениями представляют собой (в первом приближении) подходящий реальный объект, удовлетворяющий условиям сформулированной выше модели идеально хрупкого тела с остроконечными полостями-трещинами. Поэтому результаты испытания таких чугунных образцов при плоском напряженном состоянии представляют значительный интерес с точки зрения сопоставления результатов теории и эксперимента.

На рис. VIII.26 показаны результаты опытов, проведенных J. Cornet and R. C. Grassi [1] по разрушению чугунных трубчатых образцов при плоском напряженном состоянии, где кружки относятся к образцам из модифицированного чугуна, для которого  $\sigma_B = 345,3 \cdot 10^6 \text{ н/м}^2$ , а треугольники и квадраты — к образцам из серых чугунов, технический предел прочности которых соответственно равен  $228,6 \cdot 10^6$  и  $185,4 \cdot 10^6 \text{ н/м}^2$ . Как видим, результаты экспериментов довольно хорошо согласуются с результатами теории, т. е. с диаграммой 1 на этом рисунке. Для таких материалов отношение величины технической прочности при одноосном сжатии к величине технической прочности при одноосном растяжении ( $k = \sigma_{ж}/\sigma_B$ ), установленное опытами J. Cornet and R. C. Grassi [1], колеблется в пределах 2,5—3,3. Теоретическое значение коэффициента  $k$ , вытекающее из диаграммы 1, равно 2,7, а значение  $k$ , вычисленное на основе теории Гриффитса, равно 8.

На рис. VIII.26 в виде крестиков и полужагранных квадратиков представлены экспериментальные данные, полученные Н. Н. Давиденковым и А. Н. Ставрогиным [1] при испытании на разрушение гипсовых и стеклянных трубчатых образцов при плоском напряженном состоянии. Как видим, эти данные довольно хорошо согласуются с

теоретическими диаграммами разрушения в первом квадранте, т. е. при  $q \geq 0$  и  $p \geq 0$ , и отклоняются от них во втором квадранте, т. е. при  $q < 0$  и  $p \geq 0$ . При этом разрушение стеклянных образцов во втором квадранте лучше описывается диаграммой наибольших нормальных напряжений (хотя в этом случае не ясен механизм разрушения в условиях, близких к чистому сжатию), а разрушение гипсовых образцов во втором квадранте попадает в область между диаграммами 1 и 2 на рис. VIII.26. По данным Н. Н. Давиденкова и А. Н. Ставрогина [1], для гипсовых образцов  $\sigma_b = 4,1 \cdot 10^6$  н/м<sup>2</sup> и  $k = 7,1$ ; для стеклянных образцов  $\sigma_b = 39,2 \cdot 10^6$  н/м<sup>2</sup> и  $k = 22$ .

Сопоставление результатов теории и эксперимента показывает, что теоретически установленные на основе модели идеально хрупкого тела с остrokонечными полостями-трещинами общие закономерности разрушения хрупких материалов при плоском напряженном состоянии довольно хорошо подтверждаются экспериментально. Более того, для хрупких материалов с явно выраженной дефектностью структуры в виде щелей-трещин, как это, например, имеет место (в первом приближении) для чугунов с пластинчатыми графитовыми включениями, теоретическая диаграмма разрушения 1 (рис. VIII.26) согласуется с экспериментальными данными и в количественном отношении, если учесть, что эта диаграмма характеризует состояние начального разрушения тела с наиболее опасными дефектами типа остrokонечных полостей-трещин. Поэтому диаграмму 1 можно рассматривать как нижнюю границу прочности хрупкого тела при плоском напряженном состоянии.

Расхождения между теоретическими (диаграмма 1 рис. VIII.26) и экспериментальными значениями прочности хрупких тел типа стеклов и гипса, когда такие тела подвергнуты плоскому напряженному состоянию при  $q \ll 0$  и  $p \geq 0$ , обусловлены, вероятно, определенным влиянием сил трения между контактирующими берегами распространяющегося дефекта, а в некоторых случаях и формой вершины такого дефекта. Учет этих факторов позволит, по-видимому, построить более универсальные диаграммы предельного состояния хрупких тел при плоском растяжении-сжатии и более полно описать механизм разрушения хрупких тел различной физико-химической природы. Вместе с тем уже на основе проведенных сопоставлений результатов теории и эксперимента можно заключить, что развитая в этом параграфе теоретическая схема дает согласующееся с экспериментом описание поведения хрупких тел различной природы в условиях плоского напряженного состояния, если главные напряжения  $p > 0$  и  $q > 0$ . В таком случае получаем хорошее подтверждение того, что разрушение хрупких тел управляется развитием дефектов типа остrokонечных полостей-трещин в структуре деформируемого материала. Характерно, что в указанной области плоского напряженного состояния ( $p \geq 0$ ;  $q \geq 0$ ) установленные диаграммы разрушения хрупких тел практически совпадают с широко известной в инженерной практике гипотезой наибольших нормальных (растягивающих) напряжений\*.

\* См. также В. И. Моссаковский, М. Т. Рыбка [1].



## ЛИТЕРАТУРА

- Баренблатт Г. И. [1] О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении.— ПММ, 1959, 13, 3—5.  
 [2] Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении.— Прикл. мех. и техн. физ., 1961, 4.  
 [3] О некоторых общих представлениях математической теории хрупкого разрушения.— ПММ, 1964, 28, 4.
- Баренблатт Г. И., Черепанов Г. П. [1] О влиянии границ тела на развитие трещин хрупкого разрушения.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1960, 3.
- Бержницкий Л. Т. [1] О распространении трещин, выходящих на контур криволинейного отверстия в пластине.— Физико-химическая механика материалов, 1966, 2, 1.
- Буйна Е. В. [1] О предельном равновесии пластины с остроконечным отверстием.— Физико-химическая механика материалов, 1966, 2, 3.
- Вітвицький П. М., Леонов М. Я. [1] Про руйнування пластинки з щілиною.— Прикл. мех., 1961, 7, 5.
- Давиденков Н. Н., Ставрогин А. Н. [1] О критериях прочности при хрупком разрушении и плоском напряженном состоянии.— Изв. АН СССР, ОТН, 1954, 8.
- Желтов Ю. П., Христьянович С. А. [1] О механизме гидравлического разрыва нефтяного пласта.— Изв. АН СССР, ОТН, 1955, 5.
- Каминский А. А. [1] Определение критических нагрузок для областей, ослабленных криволинейными отверстиями с трещинами. Автореферат канд. диссерт., К., 1964.  
 [2] О критических нагрузках для областей, ослабленных отверстиями с трещинами.— В кн.: Концентрация напряжений 1. «Наукова думка», К., 1965.  
 [3] О критических нагрузках, вызывающих развитие трещин возле отверстия.— МТТ, 1966, 4.  
 [4] Определение критических нагрузок, вызывающих развитие расширенных трещин.— Прикл. мех., 1966, 2, 11.
- Леонов М. Я. [1] Элементы теории хрупкого разрушения.— Прикл. мех. и техн. физ., 1961, 3.  
 [2] Основы механики упругого тела. Изд-во АН КиргССР, Фрунзе, 1963.
- Леонов М. Я., Панасюк В. В. [1]. Развитие трещины, яка в плані має форму круга.— ДАН УРСР, 1961, 2.  
 [2] Развитие найдрибніших трещин в твердом теле.— Прикл. мех., 1959, 5.
- Леонов М. Я., Русинко К. М. [1] До макроскопічної теорії крихкого руйнування.— ДАН УРСР, 1961, 12.  
 [2] Макронапряжения упругого тела.— Прикл. мех. и техн. физ., 1963, 1.
- Лозовой Б. Л., Панасюк В. В. [1] Некоторые задачи изгиба полосы с прямолинейной трещиной.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1962, 1.  
 [2] Определение предельной нагрузки при изгибе полосы с центрально расположенной трещиной.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1963, 2.
- Михлин С. Г. [1] Плоская задача теории упругости.— В кн.: Тр. Сейсм. ин-та АН СССР, № 65. Изд-во АН СССР, М., 1935.
- Моссаковский В. И., Рыбка М. Т. [1] Попытка построения теории прочности для хрупких материалов, основанной на энергетических соображениях Гриффитса.— ПММ, 1965, 29, 2.
- Мухелишвили Н. И. [1] Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 4. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1954.  
 [2] Некоторые основные задачи математической теории упругости, изд. 5. «Наука», М., 1966.
- Новожилов В. В. [1] Теория упругости. Судпромгиз, 1, 1958.
- Панасюк В. В. [1] До теорії поширення тріщин при деформації крихкого тіла.— ДАН УРСР, 1960, 9.  
 [2] Некоторые пространственные задачи теории равновесных трещин в деформируемом хрупком теле.— Прикл. мех. и техн. физ., 1962, 6.  
 [3] Про руйнуючі навантаження для пластини, ослабленої круговим отвором з радіальними тріщинами.— ДАН УРСР, 1965, 7.

- [4] О разрушении хрупких тел при плоском напряженном состоянии.— Прикл. мех., 1965, 2, 7.
- Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т. [1] Определение предельных усилий при растяжении пластины с дугообразной трещиной.— В кн.: Вопросы механики реального твердого тела, 3. «Наукова думка», К., 1965.
- Панасюк В. В., Бережницкий Л. Т., Ковчик С. Е. [1] О развитии произвольно-ориентированной прямолинейной трещины при растяжении пластины.— Прикл. мех., 1965, 1, 2.
- Панасюк В. В., Буйна Е. В. [1] Определение величин предельных усилий для пластины с острым концентратором напряжений.— Физико-химическая механика материалов, 1966, 2, 4.
- Панасюк В. В., Лозовой Б. Л. [1] Определение предельных напряжений для пластины с двумя неравными трещинами.— В кн.: «Вопросы механики реального твердого тела», 2. Изд-во АН УССР, К., 1962.
- [2] Визначення величини руйнуючих напружень для пластинки з двома тріщинами рівної довжини.— ДАН УРСР, 1961, 7.
- [3] Згин полоси з прямолінійною щілиною.— Прикл. мех., 1961, 7, 6.
- [4] Розв'язок задачі про визначення критичних зусиль для штаби з нецентральною тріщиною.— ДАН УРСР, 1962, 8.
- [5] Про поширення двох тріщин нерівної довжини.— ДАН УРСР, 1962, 12.
- Си, Парис, Эрдоган [1] Коэффициенты концентрации напряжений у вершины трещины при плоском растяжении и изгибе пластин.— В кн.: Труды амер. об-ва инженеров-мех., сер. E, т. 29, № 2, 1962.
- Шерман Д. И. [1] Об одном методе решения статической плоской задачи теории упругости для многосвязных областей.— В кн.: Тр. Сеймс. ин-та АН СССР, № 51. Изд-во АН СССР, М., 1935.
- Эрдоган, Си [1] О развитии трещин в пластинах под действием продольной и поперечной нагрузки. Тр. амер. об-ва инженеров-мех., сер. D, т. 85, № 4, 1963.
- Bowie O. L. [1] Analysis of an infinite plate containing radial cracks originating at the boundary of an internal circular hole.— J. Math. and Phys., 1956, 25, 60—71.
- [2] Rectangular Tensile sheet with Edge Cracks.— J. Appl. Mech. vol. 31; Trans. ASME, vol. 86, ser. E, 1964.
- [3] Symmetric edge cracks in tensile sheet with constrained ends.— Trans. ASME, ser. E, N 4, 1964.
- Blumh J. I. [1] Fracture Mechanics. «SAE Preprints», s. a. N 655 c.
- Bueckner H. F. [1] Some stress singularities and their computation by means of integral equations, in «Boundary Problems in Differential Equations» (Langer R. S., ed), Univ Wisconsin Press, 1960, 215—230.
- Cornet J. and Grassi R. C. [1] Fracture of Inoculated Iron Under Biaxial Stresses.— J. App. J. Mechanics, 1955, 22, 2.
- Griffith A. A. [1] The phenomenon of rupture and flow in solids.— Phil. Trans. Rou. Soc., 1920, A 221.
- [2] The theory of rupture. Proc. First. Intern. Congr. Appl. Mech. Delft., 1924.
- Irwin G. R. [1] Fracture in «Handbuch der Physik», B. VI. Springer Berlin, 1958, 551—590.
- Willmore T. J. [1] The distribution of stress in the neighbourhood of a crack.— Quart. Mech. Appl. Math., 1949, 2.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЙ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ ПЛОСКОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Плоской нелинейной задаче теории упругости в общей постановке, т. е. нелинейной как физически, так и геометрически, в последние двенадцать лет было уделено большое внимание.

К числу первых работ, посвященных этой проблеме, следует отнести зарубежные исследования J. E. Adkins, A. E. Green, R. T. Shield [1], J. E. Adkins, A. E. Green, G. G. Nicholas [1], A. E. Green and W. Zerna [1], J. E. Adkins, A. E. Green [1]. Позже это направление нашло отражение и в отечественной литературе в работах Г. Н. Савина и Ю. И. Койфмана [1], Ю. И. Койфмана [1—5].

Основой постановки задач A. E. Green, J. E. Adkins, G. F. Smith, R. S. Rivlin [1] и их последователи считают возможность представления потенциала напряжений в изотропном теле функцией алгебраических инвариантов тензора деформаций. При переходе к решению частных задач потенциал считается многочленом той или иной степени относительно алгебраических инвариантов. Таким образом, экспериментальная задача по определению механических свойств материала сводится к выяснению значений некоторых констант.

Эта общая постановка задач привела к настолько сложной системе разрешающих уравнений, что единственным методом их решения оказался приближенный метод малого параметра — метод возмущений, — позволивший на основе классических решений однопорядковых задач как приближений первого порядка теоретически построить приближения для любого порядка.

Известна и несколько иная общая постановка задач нелинейной теории упругости (плоская деформация), предложенная в работах Л. А. Толоконникова [1—5] и развиваемая В. Г. Громовым [1—4], Г. С. Тарасевым и Л. А. Толоконниковым [2] и др. В этой постановке выделяются инварианты деформации, достаточно удобные для обработки экспериментальных данных, позволяющих определить свойства изменения объема и свойства изменения формы элемента тела. Далее предполагается, что механические свойства тела задаются кривыми, представляющими законы изменения объема. Единственно приемлемым способом решения разрешающего уравнения остается, как и в первой постановке, метод последовательных приближений.

Решения ряда задач о концентрации напряжений около кругового или иной формы отверстия показывают, что вторым приближением, следующим за классическим решением, учитывается влияние, главным образом, геометрической нелинейности, т. е. изменение положения и

формы элементов тела. Физическая нелинейность \* отражается приближениями более высокого порядка.

Ниже приведены некоторые результаты исследований задач о концентрации напряжений в указанных постановках.

## § 1. Основные уравнения нелинейной плоской теории упругости

**Некоторые соотношения теории упругости в криволинейных координатах.** Положение точек пространственного тела в начальном недеформированном и ненапряженном состоянии в момент времени  $t=0$  определяется их координатами \*\*  $x^i$  ( $i=1, 2, 3$ ) в прямоугольной декартовой системе координат или произвольными криволинейными координатами  $\theta^i$ , связанными с  $x^i$  соотношениями

$$x^i = x^i(\theta^1, \theta^2, \theta^3). \quad (\text{IX.1})$$

Положение точек деформированного тела определяется декартовыми координатами  $y^i$ , которые являются функциями начальных координат  $x^i$  и времени  $t$ :

$$y^i = y^i(x^1, x^2, x^3, t). \quad (\text{IX.2})$$

Предположим, что система криволинейных координат  $\theta^i$  «вморожена» в рассматриваемое тело и деформируется вместе с ним. В результате деформации тела система криволинейных координат  $\theta^i$  начального состояния перейдет в систему криволинейных координат  $\theta^i$  деформированного состояния в момент времени  $t$ . Ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора в системе координат  $\theta^i$  начального состояния обозначим соответственно через  $g_{ik}$ ,  $g^{ik}$  ( $i, k=1, 2, 3$ ), аналогичные величины в системе координат деформированного состояния в момент времени  $t$  обозначим через  $G_{ik}$ ,  $G^{ik}$ , причем

$$\det(g_{ij}) = g, \quad \det(G_{ij}) = G.$$

Для однородного и изотропного в недеформированном состоянии упругого материала функция удельной энергии деформации является функцией трех алгебраических инвариантов деформации  $I_1, I_2, I_3$ , т. е.

$$W = W(I_1, I_2, I_3), \quad (\text{IX.3})$$

\* Исследованию влияния физической нелинейности материала на распределение напряжений возле отверстий посвящена специальная (IV) глава этой монографии.

\*\* Индекс  $i$  ( $i=1, 2, 3$ ) у координат  $x$ ,  $\theta$  и  $y$  можно, как известно, помещать как вверх, так и вниз. Однако вследствие того что дифференциалы этих координат преобразовываются как контравариантные составляющие соответствующего вектора, индексы у этих координат предпочитают помещать вверх. Это правило мы будем соблюдать в дальнейшем изложении.

где

$$I_1 = g^{ij}G_{ij}; \quad I_2 = I_3 g_{ij}G^{ij}; \quad I_3 = \frac{G}{g}. \quad (\text{IX.4})$$

В этом случае физический закон деформирования идеально-упругого материала может быть записан в такой форме:

$$\tau^{ij} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_1} g^{ij} + \frac{2}{\sqrt{I_3}} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_2} B^{ij} + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3} G^{ij}. \quad (\text{IX.5})$$

Здесь

$$B^{ij} = g^{ij}I_1 - g^{ir}g^{js}G_{rs}; \quad (\text{IX.6})$$

$\tau^{ij}$  — контравариантные компоненты тензора напряжений, рассчитанные на единичную площадку деформированного тела и отнесенные к системе криволинейных координат деформированного состояния.

Уравнения равновесия при отсутствии объемных сил могут быть представлены в одной из следующих \* форм:

$$\vec{T}_{i,i} = \frac{\partial \vec{T}_i}{\partial \theta^i} = 0 \quad \text{или} \quad \nabla_i \tau^{ij} = 0, \quad (\text{IX.7})$$

где

$$\vec{T}_i = \sqrt{G} \cdot \tau^{ij} \cdot \vec{G}_j;$$

$\vec{G}_j$  — векторы ковариантного базиса деформированного состояния;  $\nabla_i$  — ковариантная производная по координатам  $\theta^i$  деформированного состояния.

В плоской нелинейной теории упругости, как и в ее линейном варианте, изучаются в основном два вида равновесия упругого тела — плоская деформация и плоское напряженное состояние.

**Плоское напряженное состояние.** Предположим, что рассматриваемое тело в недеформированном состоянии представляет собой тонкую пластинку из однородного изотропного материала, ограниченную плоскостями  $x^3 = \pm h_0$ . Эта пластинка подвергается большим деформациям, симметричным относительно срединной плоскости  $x^3 = 0$ , которая становится срединной плоскостью  $y^3 = 0$  деформированного тела. При этом в результате деформации плоские основания пластинки  $x^3 = \pm h_0$  перейдут в поверхности

$$y^3 = \pm h(y^1, y^2). \quad (\text{IX.8})$$

Считая деформацию однородной по толщине, такой вид деформации тонкой пластинки можно приближенно описать следующими соотношениями:

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, t), \quad y^3 = \lambda x^3 \quad (\alpha = 1, 2), \quad (\text{IX.9})$$

где  $\lambda$  — функция координат  $y^\alpha$  (или  $x^\alpha$ ).

\* Частные производные по координатам для сокращения записи будем обозначать запятой.

Введем подвижную систему координат  $\theta^i$  таким образом, чтобы в деформированном состоянии

$$y^\alpha = y^\alpha(\theta^1, \theta^2, t), \quad y^3 = \theta^3 \quad (\alpha = 1, 2). \quad (\text{IX.10})$$

При таком выборе координат  $\theta^i$  компоненты метрического тензора деформированного состояния будут иметь вид

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= A_{\alpha\beta}, & G_{33} &= 1, & G_{\alpha 3} &= 0, \\ G^{\alpha\beta} &= A^{\alpha\beta}, & G^{33} &= 1, & G^{\alpha 3} &= 0, \\ G &= A, & A &= |A_{\alpha\beta}| \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \end{aligned} \quad (\text{IX.11})$$

где  $A_{\alpha\beta}$ ,  $A^{\alpha\beta}$  — соответственно ко- и контравариантные компоненты метрического тензора, зависящие от координат  $\theta^\alpha$  в срединной плоскости  $y^3 = 0$  деформированного тела.

Запишем формулу для вектора  $\vec{t}_h$  напряжений, действующих на основания пластинки:

$$y^3 = \pm h(\theta^1, \theta^2).$$

Вектор напряжений, действующих на поверхность с ортом нормали  $\vec{n} = n_i \vec{G}^i$ , выражается через компоненты тензора напряжений формулой

$$\vec{t} = n_i \tau^{ij} \vec{G}_j. \quad (\text{IX.12})$$

Компоненты  $n_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) орта нормали  $\vec{n}$  к поверхности

$$y^3 = \pm h(\theta^1, \theta^2)$$

будут иметь вид

$$(n_1, n_2, n_3) = k_1(-h_{,1}, -h_{,2}, 1), \quad (\text{IX.13})$$

где

$$h_{,a} = \frac{\partial h(\theta^1, \theta^2)}{\partial \theta^a}; \quad k_1 = (A^{\alpha\beta} h_{,a} h_{,\beta} + 1)^{-\frac{1}{2}} \quad (\alpha, \beta = 1, 2).$$

Вследствие этого из формулы (IX.12) получим

$$\vec{t}_h = e^\alpha \vec{G}_\alpha + e^3 \vec{G}_3 \quad (\alpha = 1, 2); \quad (\text{IX.14})$$

здесь

$$e^\alpha = k_1(\tau^{\alpha 3} - \tau^{\alpha\beta} h_{,\beta}); \quad e^3 = k_1(\tau^{33} - \tau^{3\beta} h_{,\beta}). \quad (\text{IX.15})$$

Если основания пластинки свободны от внешних усилий, то  $\vec{t}_h = 0$ . Следовательно,

$$\tau^{\alpha 3} - \tau^{\alpha\beta} h_{,\beta} = 0; \quad \tau^{33} - \tau^{3\alpha} h_{,\alpha} = 0. \quad (\text{IX.16})$$

Исключая из соотношений (IX.16)  $\tau^{\alpha\beta}$ , получаем

$$\tau^{33} - \tau^{\alpha\beta} h_{,\alpha} h_{,\beta} = 0 \quad (\text{IX.17})$$

при

$$y^3 = \pm h(\theta^1, \theta^2).$$

Для тонкой пластинки можно принять, что величина  $h_{,\alpha}$  мала; отсюда, как следует из формулы (IX.17), на основаниях пластинки компонента  $\tau^{33}$  является величиной второго порядка малости по сравнению с компонентами  $\tau^{\alpha\beta}$ . Учитывая это обстоятельство, а также симметричный характер деформации, можно с достаточной степенью точности положить во всей пластинке

$$\tau^{33} = 0. \quad (\text{IX.18})$$

Случай упругого равновесия тонкой пластинки, подверженной деформациям, симметричным относительно срединной плоскости, при котором основания пластин свободны от внешней нагрузки, а компонента тензора напряжений  $\tau^{33}$  равна нулю во всей пластине, будем называть *плоским напряженным состоянием*.

Уравнения равновесия плоского напряженного состояния при отсутствии объемных сил имеют вид

$$\nabla_{\alpha} n^{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (\text{IX.19})$$

где интегральные значения компонент тензора напряжений

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{+h} \tau^{\alpha\beta} dy^3. \quad (\text{IX.20})$$

Из уравнений равновесия (IX.19) следует существование функции напряжений Эри  $U(\theta^1, \theta^2)$ , связанной с компонентами напряжений  $n^{\alpha\beta}$  следующим образом:

$$n^{\alpha\beta} = \epsilon^{\alpha\gamma} \epsilon^{\beta\varrho} \nabla_{\gamma\varrho} U \quad (\alpha, \beta, \gamma, \varrho = 1, 2), \quad (\text{IX.21})$$

или

$$\nabla_{\alpha\beta} U = \epsilon_{\alpha\gamma} \epsilon_{\beta\varrho} n^{\gamma\varrho}, \quad (\text{IX.22})$$

где

$$\epsilon^{\alpha\gamma} \nabla_{\bar{A}} = \frac{\epsilon_{\alpha\gamma}}{\sqrt{\bar{A}}} \begin{cases} 1, & \alpha = 1, \quad \gamma = 2; \\ -1, & \alpha = 2, \quad \gamma = 1; \\ 0, & \alpha = \gamma; \end{cases} \quad (\text{IX.23})$$

$$\epsilon_{\alpha\gamma} \epsilon^{\alpha\gamma} = \delta_{\gamma}^{\beta}.$$

Главный вектор  $\vec{P}$  и главный момент  $\vec{M}$  усилий, действующих на элемент произвольного профиля в плоскости  $y^3=0$ , также можно выразить через функцию напряжений  $U$ :

$$\vec{P} = -\epsilon^{\alpha\beta}\bar{U}_{,\alpha}\vec{G}_\beta + \vec{P}_0, \quad (IX.24)$$

$$\vec{M} = (U - R^\beta U_{,\beta})\vec{G}^3 + \vec{M}_0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

где  $\vec{P}_0$  и  $\vec{M}_0$  — произвольные постоянные векторы;  $R^\beta$  — компоненты радиуса-вектора точек профиля.

Если какая-либо кривая  $AB$  является граничной кривой тела и свободна от внешней нагрузки, из формулы для  $\vec{P}$  следует, что во всех точках кривой будут выполняться условия

$$U_{,1} = U_{,2} = 0. \quad (IX.25)$$

Перейдем к получению разрешающей системы уравнений плоского напряженного состояния. Из формул (IX.9) и (IX.10) следует, что декартовы координаты  $x^i$  связаны с криволинейными координатами  $\theta^i$  недеформированного состояния:

$$x^\alpha = x^\alpha(\theta^1, \theta^2), \quad x^3 = \frac{\theta^3}{\lambda(\theta^1, \theta^2)} \quad (\alpha = 1, 2). \quad (IX.26)$$

Тогда компоненты метрического тензора недеформированного состояния

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta}, & g_{33} &= \frac{1}{\lambda^2}, & g_{\alpha 3} &= 0, & y^3 &= 0, \\ g^{\alpha\beta} &= a^{\alpha\beta}, & g^{33} &= \lambda^2, & g^{\alpha 3} &= 0, \\ g &= \frac{a}{\lambda^2}, & a &= |a_{\alpha\beta}| \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \end{aligned} \quad (IX.27)$$

где  $a_{\alpha\beta}$ ,  $a^{\alpha\beta}$  — компоненты метрического тензора криволинейной системы координат  $\theta^i$  в плоскости  $x^3 = 0$  недеформированного тела.

Подставляя в формулы (IX.4) выражения для компонент метрических тензоров начального и конечного состояний (IX.27) и (IX.11), получаем, что инварианты деформации

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda^2 + a^{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}, & I_2 &= (\lambda^2 a_{\alpha\beta}A^{\alpha\beta} + 1)\frac{A}{a}, \\ I_3 &= \lambda^2 \frac{A}{a}; & y^3 &= 0, \end{aligned} \quad (IX.28)$$

причем

$$I_3 - \lambda^2 I_2 + \lambda^4 I_1 - \lambda^6 = 0.$$

Компоненты  $B^{ij}$  (IX.6) будут иметь вид

$$B^{\alpha\beta} = \lambda^2 a^{\alpha\beta} + A^{\alpha\beta} \frac{A}{a}, \quad B^{33} = \lambda^2 (I_1 - \lambda^2), \quad y^3 = 0. \quad (IX.29)$$



Из нелинейного закона упругости (IX.5) приняв во внимание соотношения (IX.11), (IX.27) и (IX.29), получим

$$\tau^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) a^{\alpha\beta} + \left( \frac{2}{\sqrt{I_3}} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_3} \cdot \frac{A}{a} + P \right) A^{\alpha\beta}, \quad (\text{IX.30})$$

$$y^3 = 0,$$

$$\tau^{33} = \lambda^2 \frac{2}{\sqrt{I_3}} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 (I_1 - \lambda^2) \frac{2}{\sqrt{I_3}} \cdot \frac{\partial W}{\partial I_2} + P = 0, \quad (\text{IX.31})$$

где

$$P = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3}. \quad (\text{IX.32})$$

Величину  $P$  можно исключить из соотношения (IX.30), если воспользоваться равенством (IX.31):

$$\tau^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) a^{\alpha\beta} + \left[ \left( \frac{A}{a} + \lambda^4 - \lambda^2 I_1 \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} - \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} \right] \frac{2}{\sqrt{I_3}} A^{\alpha\beta}. \quad (\text{IX.33})$$

Из (IX.20) получим

$$n^{\alpha\beta} = \int_{-h}^{+h} \tau^{\alpha\beta} dy^3 = 2h\tau^{\alpha\beta} = 2\lambda h_0 \tau^{\alpha\beta} \quad (y^3 = 0). \quad (\text{IX.34})$$

Заменяя компоненты  $n^{\alpha\beta}$  через функцию напряжений  $U$  по формулам (IX.21), а компоненты  $\tau^{\alpha\beta}$  — по формулам (IX.33), приведем соотношения (IX.34) к виду

$$\nabla_{\alpha\beta} U = \mathcal{E} a_{\alpha\beta} + K A_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (\text{IX.35})$$

где

$$\mathcal{E} = 4h_0 \frac{\sqrt{I_3}}{\lambda} \left( \frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right), \quad (\text{IX.36})$$

$$K = -4h_0 \frac{\lambda}{\sqrt{I_3}} \left[ \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + \left( \lambda^2 I_1 - \lambda^4 - \frac{I_3}{\lambda^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right]. \quad (\text{IX.37})$$

Уравнения (IX.35) совместно с уравнением (IX.31) образуют разрешающую систему уравнений плоского напряженного состояния, из которой определяется функция напряжений  $U$ , две компоненты  $u$  и  $v$  смещения в срединной плоскости и функция  $\lambda$ .

При выводе разрешающей системы вместо инвариантов  $I_k$  можно пользоваться инвариантами тензора деформаций  $J_k$ , которые связаны с  $I_k$  соотношениями

$$J_1 = I_1 - 3, \quad J_2 = I_2 - 2I_1 + 3, \quad J_3 = I_3 - I_2 + I_1 - 1. \quad (\text{IX.38})$$

Тогда разрешающая система уравнений может быть представлена в следующем виде:

$$\nabla_{\alpha\beta} U = \mathcal{E} a_{\alpha\beta} + K A_{\alpha\beta}, \quad (\text{IX.39})$$

$$\lambda^2 \frac{\partial W}{\partial J_1} + \lambda^2 (J_1 + 1 - \lambda^2) \frac{\partial W}{\partial J_2} + [(1 - \lambda^2)(J_1 + 1 - \lambda^2) + J_2 + J_3] \frac{\partial W}{\partial J_3} = 0,$$

где

$$\mathcal{E} = 4h_0 \frac{\sqrt{I_3}}{\lambda} \left[ \frac{\partial W}{\partial J_1} + (\lambda^2 - 2) \frac{\partial W}{\partial J_2} - (\lambda^2 - 1) \frac{\partial W}{\partial J_3} \right], \quad (\text{IX.40})$$

$$K = 4h_0 \frac{\sqrt{I_3}}{\lambda} \left[ \frac{\partial W}{\partial J_2} + (\lambda^2 - 1) \frac{\partial W}{\partial J_3} \right]. \quad (\text{IX.41})$$

При получении этих выражений величина  $P$  не исключалась из формул (IX.30) и (IX.31).

Введем комплексные координаты недеформированного и деформированного состояния:

$$\eta = x^1 + ix^2, \quad \bar{\eta} = x^1 - ix^2; \quad (\text{IX.42})$$

$$z = y^1 + iy^2, \quad \bar{z} = y^1 - iy^2.$$

Если обозначить компоненты перемещения вдоль осей  $x^\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ) через  $u$  и  $v$ , связь между координатами  $(z, \bar{z})$  и  $(\eta, \bar{\eta})$  можно представить в виде

$$z = \eta + D, \quad \bar{z} = \bar{\eta} + \bar{D}, \quad (\text{IX.43})$$

где  $D = u + iv$  — комплексная функция перемещений.

Пусть координаты  $\theta^a$  в деформированном теле совпадают с координатами  $(z, \bar{z})$ :

$$\theta^1 = z^1 = z, \quad \theta^2 = z^2 = \bar{z}. \quad (\text{IX.44})$$

В этом случае компоненты метрических тензоров  $A_{\alpha\beta}$ ,  $A^{\alpha\beta}$ ,  $a_{\alpha\beta}$ ,  $a^{\alpha\beta}$  будут иметь вид

$$A_{11} = \bar{A}_{22} = 0, \quad A_{12} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{A} = \frac{i}{2}, \quad (\text{IX.45})$$

$$A^{11} = \bar{A}^{22} = 0, \quad A^{12} = 2;$$

$$a_{11} = \bar{a}_{22} = \frac{\partial \bar{D}}{\partial z} \left( \frac{\partial D}{\partial z} - 1 \right), \quad a^{11} = \bar{a}^{22} = \frac{a_{11}}{a}, \quad a^{12} = -\frac{a_{12}}{a},$$

$$a_{12} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\partial D}{\partial z} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial D}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial z} \right) = \frac{\lambda}{2\sqrt{I_3}} + \frac{\partial D}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial z}, \quad (\text{IX.46})$$

$$\sqrt{a} = \frac{i}{2} \left( 1 - \frac{\partial D}{\partial z} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial D}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial z} \right) = \frac{i}{2} \cdot \frac{\lambda}{\sqrt{I_3}}.$$

Выражения для инвариантов  $I_k$  и  $J_k$  будут иметь такой вид:

$$I_1 = \lambda^2 + a^{12}, \quad I_2 = -\frac{\lambda^2 a_{12}}{a} - \frac{1}{4a}, \quad I_3 = -\frac{\lambda^2}{4a};$$

$$J_1 = \lambda^2 - 3 - \frac{a_{12}}{a} = \lambda^2 + \frac{2\sqrt{I_3}}{\lambda} + 4\frac{I_3}{\lambda^2} \frac{\partial D}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} - 3, \quad (\text{IX.47})$$

$$J_2 = 3 - 2\lambda^2 - (\lambda^2 - 2) \frac{a_{12}}{a} - \frac{1}{4a} = 3 - 2\lambda^2 + \frac{I_3}{\lambda^2} +$$

$$+ 2(\lambda^2 - 2) \left[ \frac{\sqrt{I_3}}{\lambda} + 2\frac{I_3}{\lambda^2} \frac{\partial D}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} \right],$$

$$J_3 = (\lambda^2 - 1) \left( 1 + \frac{a_{12}}{a} - \frac{1}{4a} \right) = (\lambda^2 - 1) \left[ \left( 1 - \frac{\sqrt{I_3}}{\lambda} \right)^2 - 4\frac{I_3}{\lambda^2} \frac{\partial D}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} \right].$$

(IX.48)

Поскольку компоненты  $A_{\alpha\beta}$ ,  $A^{\alpha\beta}$  постоянны, то символы Кристоффеля равны нулю и ковариантные производные в деформированном теле обращаются в частные производные. Вследствие этого, учитывая соотношения (IX.45)–(IX.48), разрешающую систему уравнений (IX.39) в комплексных координатах  $(z, \bar{z})$  можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \mathcal{H} \frac{\partial \bar{D}}{\partial z} \left( \frac{\partial D}{\partial z} - 1 \right),$$

$$2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \mathcal{H} \left( 1 - \frac{\partial D}{\partial z} - \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial D}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial z} \right) + K, \quad (\text{IX.49})$$

$$\frac{\partial W}{\partial J_1} + 2 \left( \frac{\sqrt{I_3}}{\lambda} - 1 \right) \frac{\partial W}{\partial J_2} + \left( \frac{\sqrt{I_3}}{\lambda} - 1 \right)^2 \frac{\partial W}{\partial J_3} +$$

$$+ 4 \frac{I_3}{\lambda^2} \left( \frac{\partial W}{\partial J_2} - \frac{\partial W}{\partial J_3} \right) \frac{\partial D}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial \bar{z}} = 0,$$

где  $\mathcal{H}$  и  $K$  определяются формулами (IX.40) и (IX.41). Эта система служит для определения функций  $U$ ,  $D$  и  $\lambda$ .

Как следует из формул (IX.21), компоненты напряжений, отнесенные к системе комплексных координат  $(z, \bar{z})$ :

$$n^{11} = \bar{n}^{22} = -4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \quad n^{12} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (\text{IX.50})$$

В свою очередь компоненты напряжений, отнесенные к декартовой системе координат  $y^\alpha$ , связаны с компонентами  $n^{\alpha\beta}$  следующим образом:

$$n^{\alpha\beta} = \frac{\partial z^\alpha}{\partial y^\gamma} \cdot \frac{\partial z^\beta}{\partial y^\mu} \sigma^{\gamma\mu}. \quad (\text{IX.51})$$

Следовательно,

$$n^{11} = \bar{n}^{22} = \sigma^{11} - \sigma^{22} + i2\sigma^{12}, \quad n^{12} = \sigma^{11} + \sigma^{22}. \quad (\text{IX.52})$$

Вводя обозначения  $\sigma^{11} = \sigma_x$ ,  $\sigma^{22} = \sigma_y$ ,  $\sigma^{12} = \tau_{xy}$ , из формул (IX.50) и (IX.52) получим

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad \sigma_x + \sigma_y = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}}. \quad (\text{IX.53})$$

Запишем в комплексных координатах выражения (IX.24) для главного вектора и главного момента усилий. Если обозначить компоненты главного вектора  $\vec{P}$  по осям  $y^\alpha$  через  $(X, Y)$ , то в системе координат  $(z, \bar{z})$

$$\vec{P} = (X + iY)\vec{G}_1 + (X - iY)\vec{G}_2 = P\vec{G}_1 + \bar{P}\vec{G}_2. \quad (\text{IX.54})$$

Сравнивая соотношения (IX.24) и (IX.54) и учитывая, что  $\sqrt{A} = i/2$ , находим

$$P = X + iY = -2i \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) + C_0. \quad (\text{IX.55})$$

Аналогично для величины момента из формулы (IX.24) получим

$$M = \left( U - z \frac{\partial U}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right) + C^*, \quad (\text{IX.56})$$

где  $C_0$  и  $C^*$  — произвольные постоянные.

**Плоская деформация.** Если тело деформируется таким образом, что все точки его получают перемещения, параллельные плоскости  $x^3 = 0$  и не зависящие от  $x^3$ , такая деформация называется плоской. Выберем оси системы координат  $y^\alpha$  так, чтобы оси  $x^3$  и  $y^3$  были параллельны, а плоскости  $x^3 = 0$  и  $y^3 = 0$  совпадали. Тогда плоская деформация будет описываться соотношениями

$$y^\alpha = y^\alpha(x^1, x^2, t), \quad y^3 = x^3. \quad (\text{IX.57})$$

Введем систему координат  $\theta^i$ :

$$\begin{aligned} y^\alpha &= y^\alpha(\theta^1, \theta^2, t), & y^3 &= \theta^3; \\ x^\alpha &= x^\alpha(\theta^1, \theta^2), & x^3 &= \theta^3. \end{aligned} \quad (\text{IX.58})$$

Вследствие этого для компонент тензора напряжений  $\tau^{ij}$  из закона деформирования (IX.5) получим следующие выражения\*:

$$\tau^{\alpha\beta} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left( \frac{\partial W}{\partial J_1} - \frac{\partial W}{\partial J_2} \right) a^{\alpha\beta} + 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial J_2} A^{\alpha\beta}; \quad (\text{IX.59})$$

$$\tau^{33} = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \left( \frac{\partial W}{\partial J_1} + J_1 \frac{\partial W}{\partial J_2} \right); \quad \tau^{\alpha 3} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2). \quad (\text{IX.60})$$

\* Эти выражения можно получить из соответствующих выражений для случая плоского напряженного состояния при  $\lambda = 1$ .

Поскольку из формул (IX.59) и (IX.60) следует, что компоненты  $\tau^{\alpha\beta}$ ,  $\tau^{33}$  зависят только от координат  $\theta^\alpha$  в плоскости  $y^3=0$ , то уравнения равновесия при отсутствии объемных сил приводятся к виду

$$\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{IX.61})$$

Как и в случае плоского напряженного состояния, вводится функция напряжений  $U(\theta^1, \theta^2)$ , которая удовлетворяет этим уравнениям, причем

$$\nabla_{\alpha\beta} U = \epsilon_{\alpha\gamma} \epsilon_{\beta\delta} \tau^{\gamma\delta}. \quad (\text{IX.62})$$

Выражения для главного вектора и главного момента усилий, действующих на произвольную дугу в плоскости  $y^3=0$ , даются формулами (IX.55) и (IX.56)

Заменяя в левых частях соотношений (IX.59) компоненты  $\tau^{\alpha\beta}$  через функцию напряжений, получаем разрешающую систему уравнений плоской деформации, из которой определяются функция напряжений  $U(\theta^1, \theta^2)$  и компоненты смещений в плоскости.

В комплексных координатах деформированного состояния разрешающая система уравнений в случае плоской деформации имеет такой вид:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\sqrt{I_3} \left( \frac{\partial W}{\partial J_1} - \frac{\partial W}{\partial J_2} \right) \frac{\partial \bar{D}}{\partial z} \left( \frac{\partial D}{\partial z} - 1 \right); \quad (\text{IX.63})$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{\partial W}{\partial J_1} + (\sqrt{I_3} - 1) \frac{\partial W}{\partial J_2} + 2\sqrt{I_3} \left( \frac{\partial W}{\partial J_1} - \frac{\partial W}{\partial J_2} \right) \frac{\partial D}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{D}}{\partial z}.$$

**Интегрирование разрешающих систем (IX.49) и (IX.63).** Остановимся на интегрировании разрешающей системы уравнений (IX.49) для плоского напряженного состояния. Метод интегрирования целесообразно выбрать таким образом, чтобы в наибольшей степени использовать результаты классической (линейной) теории. Для этого воспользуемся методом теории возмущений (методом малого параметра) и представим функции  $U(z, \bar{z})$ ,  $D(z, \bar{z})$ ,  $\lambda(z, \bar{z})$  в следующем виде\*:

$$U = {}^0H\epsilon(U^{(1)} + \epsilon U^{(2)} + \epsilon^2 U^{(3)} + \dots), \quad (\text{IX.64})$$

$$D = \epsilon D^{(1)} + \epsilon^2 D^{(2)} + \epsilon^3 D^{(3)} + \dots, \quad (\text{IX.65})$$

$$\lambda = 1 + \epsilon \lambda^{(1)} + \epsilon^2 \lambda^{(2)} + \dots, \quad (\text{IX.66})$$

где  $\epsilon$  — характеристический малый параметр;  ${}^0H$  — постоянная, численное значение которой будет указано ниже.

Поскольку функции  $D(z, \bar{z})$  и  $\lambda(z, \bar{z})$  представляют в виде рядов по параметру  $\epsilon$ , то из формул (IX.48) для инвариантов  $J_k$  получим

$$J_1 = \epsilon J_1^{(1)} + \epsilon^2 J_1^{(2)} + \dots, \quad J_2 = \epsilon^2 J_2^{(1)} + \dots, \quad J_3 = \epsilon^3 J_3^{(1)} + \dots \quad (\text{IX.67})$$

\* Применимость этого метода к уравнениям нелинейной теории упругости рассматривалась F. Stoppeli [1, 2].

Здесь

$$\begin{aligned}
 J_1^{(1)} &= 2 \left( \frac{\partial D^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial \bar{z}} + \lambda^{(1)} \right), \\
 J_1^{(2)} &= 2 \left( \frac{\partial D^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(2)}}{\partial \bar{z}} + \lambda^{(2)} \right) + 2 \left[ \left( \frac{\partial D^{(1)}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial D^{(1)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial \bar{z}} + 3 \frac{\partial D^{(1)}}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial z} \right] + \lambda^{(1)2}, \\
 J_2^{(1)} &= \left( \frac{\partial D^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right)^2 - 4 \frac{\partial D^{(1)}}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial z} + 4\lambda^{(1)} \left( \frac{\partial D^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right)
 \end{aligned} \tag{IX.68}$$

и

$$\begin{aligned}
 \frac{VI_s}{\lambda} &= 1 + \varepsilon \left( \frac{\partial D^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right) + \varepsilon^2 \left[ \frac{\partial D^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(2)}}{\partial \bar{z}} + \left( \frac{\partial D^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right)^2 - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial D^{(1)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial z} \cdot \frac{\partial D^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right] \dots
 \end{aligned} \tag{IX.69}$$

В разрешающую систему уравнений (IX.49) и (IX.63) входят функции  $\partial W / \partial J_k$ , которые характеризуют механические свойства материала. При приближенном интегрировании системы уравнений будем пользоваться разложением этих функций в ряд Тейлора в окрестности начального (недеформированного) состояния, т. е. при  $J_h = 0$ . Учитывая формулы (IX.67), это разложение можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial J_k} &= \left[ \frac{\partial W}{\partial J_k} \right]_0 + \varepsilon J_1^{(1)} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial J_2 \partial J_k} \right]_0 + \varepsilon^2 \left\{ J_1^{(2)} \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial J_1 \partial J_k} \right]_0 + \right. \\
 &\quad \left. + J_2^{(1)} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial J_2 \partial J_k} \right]_0 + \frac{1}{2} (J_1^{(1)})^2 \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial J_1^2 \partial J_k} \right]_0 \right\} + 0(\varepsilon^3),
 \end{aligned} \tag{IX.70}$$

где символом  $[ ]_0$  обозначено значение функции при нулевом значении ее аргументов.

Поскольку в недеформированном состоянии напряжения отсутствуют, то

$$\left[ \frac{\partial W}{\partial J_1} \right]_0 = 0. \tag{IX.71}$$

В линейной теории упругие постоянные Ляме даются следующими формулами:

$$\lambda = 4 \left\{ \left[ \frac{\partial W}{\partial J_2} \right]_0 + \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial J_1^2} \right]_0 \right\}, \quad \mu = -2 \left[ \frac{\partial W}{\partial J_2} \right]_0. \tag{IX.72}$$

Постоянную в (IX.64) определим так:

$${}^0H = \mathcal{E}|_{\varepsilon=0} = -4h_0 \left[ \frac{\partial W}{\partial J_2} \right]_0 = 2h_0 \mu. \tag{IX.73}$$

Подставляя разложения (IX.64) — (IX.70) в систему уравнений (IX.49) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем

$$\frac{\partial^2 U^{(i)}(z, \bar{z})}{\partial z^2} + \frac{\partial \bar{D}^{(i)}(z, \bar{z})}{\partial z} = S_1^{(i)}(z, \bar{z}),$$

$$2 \frac{\partial^2 U^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} + (2c_1 + 1) \left( \frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) + 2(c_1 + 1) \lambda^{(1)}(z, \bar{z}) = S_2^{(1)}(z, \bar{z}), \quad (\text{IX.74})$$

$$(c_1 + 1) \left( \frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) + c_1 \lambda^{(1)}(z, \bar{z}) = S_3^{(1)}(z, \bar{z}),$$

где

$$S_i^{(1)} = 0 \quad (i = 1, 2, 3); \quad (\text{IX.75})$$

$$S_1^{(2)}(z, \bar{z}) = \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} \left[ 2(c_1 - c_2) \frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} + (2c_1 - 2c_2 - 1) \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} + 2(c_1 - c_2 - c_3 + 1) \lambda^{(1)}(z, \bar{z}) \right]; \quad (\text{IX.76})$$

$$S_2^{(2)}(z, \bar{z}) = (2c_1 + 1) \frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} - (2c_1 + 3c_2 + 2c_4 + 1) \left( \frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)^2 - (c_1 + 4c_2 + 2c_4 + 1) \lambda^{(1)2} - (6c_1 - 4c_2 - 1) \frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} - 2(5c_2 + c_3 + 2c_4) \left( \frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) \lambda^{(1)}; \quad (\text{IX.77})$$

$$S_3^{(2)}(z, \bar{z}) = (c_1 + 1) \frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} - \frac{1}{2} (2c_1 + 5c_2 + c_3 + 2c_4 + 2) \left( \frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right)^2 - \frac{1}{2} (c_1 + 2c_4) \lambda^{(1)2} - (3c_1 - 2c_2 - 2c_3 + 3) \frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} \cdot \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} - 2(2c_2 + c_4) \lambda^{(1)} \left( \frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right); \quad (\text{IX.78})$$

$$c_1 = -\frac{2}{\mu} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial J_1^2} \right]_0, \quad c_2 = -\frac{2}{\mu} \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial J_1 \partial J_2} \right]_0, \quad (\text{IX.79})$$

$$c_3 = -\frac{2}{\mu} \left[ \frac{\partial W}{\partial J_3} \right]_0, \quad c_4 = -\frac{2}{\mu} \left[ \frac{\partial^3 W}{\partial J_1^3} \right]_0.$$

Таким образом, в выражения (IX.76) — (IX.78) для членов второго порядка входят три новые упругие постоянные материала.

Интегрируя системы (IX.74), получим, что общее решение  $U_0^{(j)}$ ,  $D_0^{(j)}$ ,  $\lambda_0^{(j)}$  однородных систем, соответствующих системам (IX.74), имеет такой вид\*:

$$U_0^{(j)}(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi^{(j)}(z) + z\overline{\varphi^{(j)}(z)} + \chi^{(j)}(z) + \overline{\chi^{(j)}(z)}, \quad (\text{IX.80})$$

$$D_0^{(j)}(z, \bar{z}) = k\varphi^{(j)}(z) - z\overline{\varphi^{(j)'}(z)} - \overline{\psi^{(j)}(z)}, \quad (\text{IX.81})$$

$$\lambda_0^{(j)}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}(k-3)[\varphi^{(j)'}(z) + \overline{\varphi^{(j)'}(z)}], \quad (\text{IX.82})$$

где  $\varphi^{(j)}(z)$ ,  $\chi^{(j)}(z)$  ( $\psi^{(j)}(z) = \chi^{(j)'}(z) \equiv \frac{d\chi^{(j)}}{dz}$ ) — комплексные потенциальные функции  $j$ -го порядка;

$$k = \frac{5c_1 + 2}{3c_1 + 2} = \frac{3 - \nu}{1 + \nu}; \quad (\text{IX.83})$$

$\nu$  — коэффициент Пуассона.

Общее решение неоднородных систем (IX.74) можно записать в виде\*\*

$$\frac{\partial U^{(j)}(z, \bar{z})}{\partial z} = \varphi^{(j)}(z) + z\overline{\varphi^{(j)'}(z)} + \overline{\psi^{(j)}(z)} - F_1^{(j)}(z, \bar{z}), \quad (\text{IX.84})$$

$$D^{(j)}(z, \bar{z}) = k\varphi^{(j)}(z) - z\overline{\varphi^{(j)'}(z)} - \overline{\psi^{(j)}(z)} - F_2^{(j)}(z, \bar{z}), \quad (\text{IX.85})$$

$$\lambda^{(j)}(z, \bar{z}) = \frac{1}{2}(k-3)[\varphi^{(j)'}(z) + \overline{\varphi^{(j)'}(z)}] - F_3^{(j)}(z, \bar{z}), \quad (\text{IX.86})$$

где функции  $F_i^{(j)}$  связаны с частным решением неоднородных систем (IX.74), причем  $F_i^{(j)} = 0$  ( $i=1, 2$ ), а значения  $F_1^{(2)}$  и  $F_2^{(2)}$  будут приведены ниже.

Для членов нулевого порядка ( $j=1$ ) выражения (IX.84) — (IX.86) являются известными функциями Колосова—Мусхелишвили плоской задачи линейной теории упругости.

Решение разрешающей системы уравнений (IX.63) для плоской деформации также будем искать в виде (IX.64) и (IX.65), где положим

$${}^0H = -2 \left[ \frac{\partial W}{\partial J_2} \right]_0 = \mu. \quad (\text{IX.87})$$

\* Исключая из второго и третьего уравнения (IX.74)  $\lambda_0^{(j)}$ , дифференцируя первое уравнение по  $\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , а полученное второе — по  $\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$  и исключая производные от  $D_0^{(j)}$ , можно убедиться в том, что

$$\frac{\partial^4 U_0^{(j)}}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = 0.$$

\*\* Мы записываем выражения для  $\frac{\partial U^{(j)}}{\partial z}$ , поскольку через эту функцию выражается вектор усилий (IX.55) и она удобнее для приложений, чем функция  $U^{(j)}$ .



Поступая аналогично случаю плоского напряженного состояния, из системы (IX.63) для каждого приближения получаем

$$\frac{\partial^2 U^{(j)}(z, \bar{z})}{\partial z^2} + \frac{\partial \bar{D}^{(j)}(z, \bar{z})}{\partial z} = S_1^{*(j)}(z, \bar{z}), \quad (\text{IX.88})$$

$$2 \frac{\partial^2 U^{(j)}(z, \bar{z})}{\partial z \partial \bar{z}} + (2c_1 + 1) \left( \frac{\partial D^{(j)}(z, \bar{z})}{\partial z} + \frac{\partial \bar{D}^{(j)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) = S_2^{*j}(z, \bar{z}),$$

где  $S_{i*}^{*(1)} = 0$ ;  $S_i^{*(2)}$  можно получить из формул (IX.76) и (IX.77), если положить\*  $\lambda^{(j)} = 0$  и  $c_3 = 0$ .

Интегрируя уравнения (IX.88), находим

$$\frac{\partial U^{(j)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \varphi^{(j)}(z) + \overline{z\varphi^{(j)'}}(z) + \overline{\psi^{(j)}}(z) - F_1^{*(j)}(z, \bar{z}), \quad (\text{IX.89})$$

$$D^{(j)}(z, \bar{z}) = k\varphi^{(j)}(z) - \overline{z\varphi^{(j)'}}(z) - \overline{\psi^{(j)}}(z) - F_2^{*(j)}(z, \bar{z}), \quad (\text{IX.90})$$

где

$$k = \frac{2c_1 - 1}{2c_1 + 1} = 3 - 4\nu. \quad (\text{IX.91})$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением нелинейных эффектов второго порядка.

**Основные соотношения плоской нелинейной теории упругости для членов второго порядка.** Из формул (IX.84), (IX.85) и (IX.89) видим, что структура соотношений для членов второго порядка для случая как плоского напряженного состояния, так и плоской деформации одинакова, поэтому их можно объединить, и эти соотношения для членов второго порядка плоской нелинейной теории упругости представим в виде\*\*

$$\frac{\partial U^{(2)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \varphi^2(z) + \overline{z\varphi^{(2)'}}(z) + \overline{\psi^{(2)}}(z) - F_1(z, \bar{z}), \quad (\text{IX.92})$$

$$D^{(2)}(z, \bar{z}) = k\varphi^{(2)}(z) - \overline{z\varphi^{(2)'}}(z) - \overline{\psi^{(2)}}(z) - F_2(z, \bar{z}), \quad (\text{IX.93})$$

где

$$F_1(z, \bar{z}) = \gamma \Gamma(z, \bar{z}) - \frac{B_3}{k} \overline{\varphi^{(1)'}}(z) D^{(1)}(z, \bar{z}) - k_3 z \overline{[\varphi^{(1)'}}(z)]^2 - \\ - k_1 \int \overline{\varphi^{(1)'}}(z) \overline{\psi^{(1)'}}(z) d\bar{z} - k_2 \int [\varphi^{(1)'}(z)]^2 dz; \quad (\text{IX.94})$$

$$F_2(z, \bar{z}) = \gamma \Lambda(z, \bar{z}) + \frac{B_3}{k} \overline{\varphi^{(1)'}}(z) D^{(1)}(z, \bar{z}) - k_3' z \overline{[\varphi^{(1)'}}(z)]^2 - \\ - k_1' \int \overline{\varphi^{(1)'}}(z) \overline{\psi^{(1)'}}(z) d\bar{z} - k_2' \int [\varphi^{(1)'}(z)]^2 dz; \quad (\text{IX.95})$$

$$\Gamma(z, \bar{z}) = \left( D^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} + \bar{D}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar{z}}; \quad \Lambda(z, \bar{z}) = \left( D^{(1)} \frac{\partial}{\partial z} + \bar{D}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) D^{(1)}. \quad (\text{IX.96})$$

\* В случае плоской деформации  $J_3 = 0$ .

\*\*  $\varphi(z) \equiv \varphi(z)$ ,  $\overline{\psi(z)} \equiv \overline{\psi(z)}$  и т. д.

Постоянные, входящие в функции  $F_1(z, \bar{z})$ ,  $F_2(z, \bar{z})$ , выражаются через упругие постоянные материала:

$$k = \frac{2m + 3q}{2m + q}; \quad \gamma = \frac{B_1}{k + 1}; \quad m = c_1 + 1;$$

$$B_1 = \frac{1}{2m + q} [6m + 7q - 4c_2 - 4(q + 1)c_3]; \quad (\text{IX.97})$$

$$B_2 = \frac{1}{(2m + q)^2} \{ [4(m + q)^2 - 3q^2] (2m + q) + 12q(3q + 4)c_2 - \\ - 12q^2(q + 1)c_3 - 8c_4 \};$$

$$B_3 = B_1 - \frac{2B_2}{k + 1},$$

где

$$q = \begin{cases} -1 & \text{при плоской деформации,} \\ c_1 & \text{при плоском напряженном состоянии.} \end{cases}$$

Постоянные  $k_r$ ,  $k'_r$  ( $r=1, 2, 3$ ) могут быть выбраны наиболее удобным образом, но так, чтобы удовлетворились следующие равенства\*:

$$k_1 + k'_1 = B'_1; \quad kk_2 - k'_2 = B_4; \quad (\text{IX.98})$$

$$k_3 - k_2 = \frac{B_3}{k} - B_1; \quad kk'_3 + k'_2 = kB'_1 - B_3 - B_4,$$

где

$$B'_1 = B_1 - (k + 1); \quad B'_2 = B_2 - \frac{1}{2}(k + 1)^2; \quad (\text{IX.99})$$

$$B'_3 = B_1 + \frac{1}{2}B'_1; \quad B_4 = \frac{1}{2}B'_1 - B'_2.$$

В частности, можно исключить интегральные члены из формулы (IX.94), если положить

$$k_1 = k_2 = 0 \quad (\text{IX.100})$$

и внести соответствующие значения постоянных  $k'_r$  ( $r=1, 2, 3$ ) в формулы (IX.95).

Полагая

$$k'_1 = k'_2 = 0 \quad (\text{IX.101})$$

\* Подробнее см. A. E. Green, J. E. Adkins [1], J. E. Adkins, A. E. Green, G. G. Nicholas [1].

и внося соответствующие значения постоянных  $k_r$  ( $r=1, 2, 3$ ) в выражение (IX.94) для функции  $F_1(z, \bar{z})$ , можно исключить интегральные члены из функции  $F_2(z, \bar{z})$  (IX.95).

Для получения членов второго порядка в случае несжимаемого материала с функцией энергии в форме Муни

$$W = A_1(I_1 - 3) + A_2(I_2 - 3) \quad (\text{IX.102})$$

необходимо в формулах (IX.97) воспользоваться предельным переходом:  $c_1 \rightarrow \infty$ ;  $c_2 \rightarrow \infty$ ;  $\frac{c_1}{c_2} = 1$ ;  $\frac{c_4}{c_1^3} \rightarrow 0$ ;

$$\left[ \frac{\partial W}{\partial J_2} \right]_0 = -(A_1 + A_2); \quad \left[ \frac{\partial W}{\partial J_3} \right] = -(A_1 + 2A_2); \quad c_3 = \frac{A_1 + 2A_2}{A_1 + A_2}. \quad (\text{IX.103})$$

При этом постоянные в (IX.97) — (IX.99) будут иметь такой вид:

1) в случае плоской деформации

$$k = B_1 = B_2 = -B'_1 = -B'_2 = 1; \quad B_1^* = B_4 = \gamma = \frac{1}{2}; \quad B_3 = 0; \quad (\text{IX.104})$$

2) в случае плоского напряженного состояния

$$k = \frac{5}{3}; \quad B_1 = \frac{5 + \varrho_*}{3(1 + \varrho_*)}; \quad B_2 = \frac{21 + 17\varrho_*}{9(1 + \varrho_*)};$$

$$B_3 = -\frac{1 + 13\varrho_*}{12(1 + \varrho_*)}; \quad B_4 = \frac{13 + 9\varrho_*}{18(1 + \varrho_*)}; \quad (\text{IX.105})$$

$$\gamma = \frac{5 + \varrho_*}{8(1 + \varrho_*)}; \quad B'_1 = -\frac{3 + 7\varrho_*}{3(1 + \varrho_*)}; \quad B_1^* = \frac{7 - 5\varrho_*}{6(1 + \varrho_*)}; \quad B'_2 = -\frac{11 + 15\varrho_*}{9(1 + \varrho_*)},$$

где  $\varrho_* = \frac{A_2}{A_1}$  — постоянная, характеризующая отношение постоянных Муни в (IX.102).

Формулы для компонент напряжений, модуля (величины) главного вектора  $P$  (с точностью до членов второго порядка) примут вид

$$n^{11} = -4 \, {}^0H\varepsilon \left[ \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial z^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial z^2} \right]; \quad n^{12} = 4 \, {}^0H\varepsilon \left[ \frac{\partial^2 U^{(1)}}{\partial z \partial \bar{z}} + \varepsilon \frac{\partial^2 U^{(2)}}{\partial z \partial \bar{z}} \right]; \quad (\text{IX.106})$$

$$P = -2i \, {}^0H\varepsilon \left[ \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar{z}} + \varepsilon \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \bar{z}} \right] + C. \quad (\text{IX.107})$$

При решении задач в случае, когда граница области задается в недеформированном состоянии, следует применять формулы, выражающие величины, которые характеризуют напряженное и деформированное состояние тела, в виде функций от координат  $(\eta, \bar{\eta})$ . Для вывода этих формул необходимо иметь в виду, что перемещения  $u + iv$  могут

быть представлены как функции координат  $(z, \bar{z})$  или  $(\eta, \bar{\eta})$ . В связи с этим можно записать

$$u + iv = D(z, \bar{z}) = D_1(\eta, \bar{\eta}) \quad (\text{IX.108})$$

или

$$\varepsilon D^{(1)}(z, \bar{z}) + \varepsilon^2 D^{(2)}(z, \bar{z}) + \dots = \varepsilon D_1^{(1)}(\eta, \bar{\eta}) + \varepsilon^2 D_1^{(2)}(\eta, \bar{\eta}) + \dots \quad (\text{IX.109})$$

Если разложить функции  $D^{(k)}(z, \bar{z})$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $(\eta, \bar{\eta})$  и учесть, что

$$z - \eta = D_1(\eta, \bar{\eta}) = \varepsilon D_1^{(1)}(\eta, \bar{\eta}) + \varepsilon^2 D_1^{(2)}(\eta, \bar{\eta}) + \dots, \quad (\text{IX.110})$$

получим

$$D^{(k)}(z, \bar{z}) = D^{(k)}(\eta, \bar{\eta}) + \varepsilon \left\{ \left[ D_1^{(1)}(\eta, \bar{\eta}) \frac{\partial}{\partial \eta} + \bar{D}_1^{(1)}(\eta, \bar{\eta}) \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \right] D^{(k)}(\eta, \bar{\eta}) \right\} + \dots \quad (\text{IX.111})$$

Если подставить (IX.111) в левую часть соотношения (IX.109) и приравнять члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим

$$D_1^{(1)}(\eta, \bar{\eta}) = D^{(1)}(\eta, \bar{\eta}), \quad (\text{IX.112})$$

$$D_1^{(2)}(\eta, \bar{\eta}) = D^{(2)}(\eta, \bar{\eta}) + \Lambda(\eta, \bar{\eta}), \quad (\text{IX.113})$$

где функция  $\Lambda$  дана формулой (IX.96).

Применив разложение Тейлора к функциям  $U^{(k)}(z, \bar{z})$ ,  $\frac{\partial U^{(k)}}{\partial \bar{z}}$ , найдем

$$U^{(1)}(z, \bar{z}) = U^{(1)}(\eta, \bar{\eta}); \quad \frac{\partial U^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial U^{(1)}(\eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}}, \quad (\text{IX.114})$$

$$U^{(2)}(z, \bar{z}) = U^{(2)}(\eta, \bar{\eta}) + \left( D^{(1)} \frac{\partial}{\partial \eta} + \bar{D}^{(1)} \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \right) U^{(1)}(\eta, \bar{\eta}); \quad (\text{IX.115})$$

$$\frac{\partial U^{(2)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial U^{(2)}(\eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}} + \Gamma(\eta, \bar{\eta}),$$

где функция  $\Gamma$  дана формулой (IX.96).

Таким образом, из (IX.114) следует, что вид членов первого порядка, соответствующих линейной теории, не зависит от выбора системы координат, что, конечно, и должно быть.

Сравнивая формулы (IX.113), (IX.114) с соотношениями (IX.92), (IX.93), можно убедиться в том, что при переходе к координатам недеформированного состояния  $(\eta, \bar{\eta})$  достаточно в формулах для членов второго порядка заменить в правых частях соотношений (IX.92) и (IX.93) координаты  $(z, \bar{z})$  координатами  $(\eta, \bar{\eta})$  и постоянную  $\gamma$  постоянной  $\gamma'$ , равной  $\gamma - 1$ .

Представим функции  $F_1(z, \bar{z})$  и  $F_2(z, \bar{z})$  в виде

$$F_1(z, \bar{z}) = \gamma [(z\Phi^{(1)'}) + \overline{\Psi^{(1)}(z)}] \bar{D}^{(1)} + (\delta\Phi^{(1)}(z) + \Phi^{(1)}(z)) D^{(1)} - \\ - k_3 z [\overline{\Phi^{(1)}(z)}]^2 - k_1 \int \overline{\Phi^{(1)}(z)} \overline{\Psi^{(1)}(z)} d\bar{z} - k_2 \int [\Phi^{(1)}(z)]^2 dz, \quad (\text{IX.116})$$

$$F_2(z, \bar{z}) = -\gamma [(z\Phi^{(1)}(z) + \overline{\Psi^{(1)}(z)}) \bar{D}^{(1)} + (\delta\Phi^{(1)}(z) - k\Phi^{(1)}(z)) D^{(1)}] - \\ - k'_3 z [\overline{\Phi^{(1)}(z)}]^2 - k'_1 \int \overline{\Phi^{(1)}(z)} \overline{\Psi^{(1)}(z)} d\bar{z} - k'_2 \int [\Phi^{(1)}(z)]^2 dz, \quad (\text{IX.117})$$

где

$$\frac{d\Phi^{(1)}}{dz} = \Phi^{(1)'}(z) = \Phi^{(1)}(z); \quad \Psi^{(1)'}(z) = \Psi^{(1)}(z); \\ \delta = 1 - \frac{B_3}{k\gamma}. \quad (\text{IX.118})$$

Обозначив

$$F_1(z, \bar{z}) = F_1(z, \bar{z}, \gamma, \delta), \quad F_2(z, \bar{z}) = F_2(z, \bar{z}, \gamma, \delta),$$

представим формулы для членов второго порядка в координатах  $(\eta, \bar{\eta})$  в виде

$$\frac{\partial U^{(2)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = \Phi^{(2)}(\eta) + \eta \overline{\Phi^{(2)'}}(\eta) + \overline{\Psi^{(2)}(\eta)} - F_1(\eta, \bar{\eta}, \gamma', \delta'); \quad (\text{IX.119})$$

$$D_1^{(2)}(\eta, \bar{\eta}) = k\Phi^{(2)}(\eta) - \eta \overline{\Phi^{(2)'}}(\eta) - \overline{\Psi^{(2)}(\eta)} - F_2(\eta, \bar{\eta}, \gamma', \delta'). \quad (\text{IX.120})$$

Здесь

$$\gamma' = \gamma - 1; \quad \delta' = 1 - \frac{B_3}{k\gamma'} = \frac{\gamma\delta - 1}{\gamma - 1}. \quad (\text{IX.121})$$

Выразим компоненты напряжений  $n^{\alpha\beta}$  через координаты  $(\eta, \bar{\eta})$ . Пользуясь формулами преобразований

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\Delta_1} \left( \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\Delta_1} \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\eta}} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \right), \quad (\text{IX.122})$$

где

$$\Delta_1 = \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\eta}} - \frac{\partial z}{\partial \bar{\eta}} \cdot \frac{\partial \bar{z}}{\partial \eta},$$

и учитывая разложение для  $D$  (IX.111), из соотношений (IX.106) находим

$$n^{11} = -4^0 H \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial U^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) + \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left( \frac{\partial U^{(2)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial D^{(1)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left( \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right) \right] \right\}, \quad (\text{IX.123})$$

$$n^{12} = 4^0 H \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial U^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) + \varepsilon \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial U^{(2)}(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{\partial D^{(1)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial \bar{D}^{(1)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\eta}} \left( \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar{z}} \right) \right] \right\}.$$

Представим компоненты напряженного состояния, величины главного вектора и главного момента усилий через комплексные потенциалы первого и второго порядков. Подставляя в формулы (IX.106) выражение (IX.92), а в формулы (IX.123) — выражение (IX.119) и выбирая безразмерный малый параметр  $\varepsilon$  таким образом, чтобы

$$2^0 H \varepsilon = \begin{cases} 1 \text{ н/м}^2 \text{ при плоской деформации,} \\ 1 \text{ н/м при плоском напряженном состоянии,} \end{cases}$$

получим следующие выражения для компонент напряженного состояния:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 \left\{ 2 \operatorname{Re} \Phi^{(1)}(z) + \frac{1}{2^0 H} [2 \operatorname{Re} \Phi^{(2)}(z) + f(z, \bar{z})] \right\}, \quad (\text{IX.124})$$

$$\begin{aligned} \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 \left\{ \bar{z} \Phi^{(1)'}(z) + \Psi^{(1)}(z) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2^0 H} [\bar{z} \Phi^{(2)'}(z) + \Psi^{(2)}(z) + f_1(z, \bar{z})] \right\}, \end{aligned} \quad (\text{IX.125})$$

где

$$\begin{aligned} f(z, \bar{z}) = \gamma \left\{ [\bar{z} \Phi^{(1)'}(z) + \Psi^{(1)}(z)] [\bar{z} \overline{\Phi^{(1)'}}(z) + \overline{\Psi^{(1)}}(z)] + \right. \\ \left. + (1 - k\delta) \Phi^{(1)}(z) \overline{\Phi^{(1)}}(z) + \left( \frac{k_2}{\gamma} - k \right) [(\Phi^{(1)}(z))^2 + \right. \\ \left. + (\overline{\Phi^{(1)}}(z))^2] - 2\delta_1 \operatorname{Re} [\Phi^{(1)'}(z) D^{(1)}(z, \bar{z})] \right\}; \end{aligned} \quad (\text{IX.126})$$

$$\begin{aligned} f_1(z, \bar{z}) = \gamma \{ \bar{z} \Phi^{(1)'}(z) + \Psi^{(1)}(z) [2 \overline{\Phi^{(1)}}(z) + \\ + (\delta - k) \Phi^{(1)}(z)] - \delta_1 \bar{z} \overline{\Phi^{(1)'}}(z) + \overline{\Psi^{(1)'}}(z) D^{(1)}(z, \bar{z}) - \\ - \delta_2 \overline{\Phi^{(1)'}}(z) \overline{D^{(1)}}(z, \bar{z}) \} + [k_1 \Psi^{(1)}(z) + 2k_2 \bar{z} \Phi^{(1)'}(z)] \Phi^{(1)}(z). \end{aligned} \quad (\text{IX.127})$$

В случае решения задач в координатах  $(z, \bar{z})$  в функциях  $f(z, \bar{z})$  и  $f_1(z, \bar{z})$  следует положить

$$\delta_1 = 1; \quad \delta_2 = \delta. \quad (\text{IX.128})$$

Если же задачи решаются в координатах  $(\eta, \bar{\eta})$ , то в формулах (IX.124) — (IX.127) нужно заменить  $(z, \bar{z})$  на  $(\eta, \bar{\eta})$ ,  $\Phi^{(2)}(z)$  и  $\Psi^{(2)}(z)$  на  $\Phi_1^{(2)}(\eta)$  и  $\Psi_1^{(2)}(\eta)$  и положить

$$\delta_1 = 1 - \frac{1}{\gamma}; \quad \delta_2 = \delta - \frac{1}{\gamma}. \quad (\text{IX.129})$$

Представим величину главного вектора (IX.55)

$$P = X + iY = \int_A^B (X_n + iY_n) ds = -2i \left[ \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} \right]_A^B \quad (\text{IX.130})$$

и величину\* главного момента (IX.56)

$$M = \left[ U - 2\text{Re} \left( z \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right]_A^B \quad (\text{IX.131})$$

в виде следующих рядов:

$$\begin{aligned} P &= {}^0H\varepsilon(P^{(1)} + \varepsilon P^{(2)} + \dots), \\ M &= {}^0H\varepsilon(M^{(1)} + \varepsilon M^{(2)} + \dots). \end{aligned} \quad (\text{IX.132})$$

Подставляя разложение

$$U = {}^0H\varepsilon(U^{(1)} + \varepsilon U^{(2)} + \dots)$$

в правые части формул (IX.130) и (IX.131) и сравнивая их с формулами (IX.132), получаем

$$P^{(k)} = -i \left[ \frac{\partial U^{(k)}}{\partial z} \right]_A^B; \quad 2M^{(k)} = \left[ U^{(k)} - 2\text{Re} \left( z \frac{\partial U^{(k)}}{\partial z} \right) \right]_A^B. \quad (\text{IX.133})$$

Выразим члены второго порядка  $P^{(2)}$  и  $M^{(2)}$  через комплексные потенциальные функции. Для этого предварительно определим функцию  $U^{(2)}(z, \bar{z})$ . Интегрируя выражение для  $\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z}$ , найдем

$$\begin{aligned} U^{(2)} &= 2\text{Re} \left\{ z\overline{\varphi^{(2)}}(z) + \chi^{(2)}(z) - \frac{B_3 - kB_1}{k} \int \Phi^{(1)}(z) \Psi^{(1)}(z) dz + \right. \\ &\quad \left. + k_1 \int z \Phi^{(1)}(z) \Psi^{(1)}(z) dz - \int z \Phi^{(1)}(z) \Psi^{(1)}(z) dz \right\} + \\ &\quad + k_2 \bar{z} \int [\Phi^{(1)}(z)]^2 dz \left. \right\} + \gamma D^{(1)}(z, \bar{z}) \bar{D}^{(1)}(\bar{z}, z) + (B_3 - kB_1) \varphi^{(1)}(z) \overline{\varphi^{(1)}(z)}, \end{aligned} \quad (\text{IX.134})$$

где

$$\chi^{(2)}(z) = \int \psi^{(2)}(z) dz.$$

Если внести в формулы (IX.133) выражения (IX.92) и (IX.134) для  $\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z}$  и  $U^{(2)}$ , получим

$$P^{(2)} = -i [\varphi^{(2)}(z) + z\overline{\varphi^{(2)'}}(z) + \overline{\psi^{(2)}}(z)]_A^B + i [F_1(z, \bar{z}, \gamma, \delta)]_A^B; \quad (\text{IX.135})$$

$$\begin{aligned} M^{(2)} &= \text{Re} [\chi^{(2)}(z) - z\bar{z}\overline{\varphi^{(2)'}}(z) - z\psi^{(2)}(z)]_A^B - \text{Re} \left[ \frac{B_3 - kB_1}{k} \int \Phi^{(1)}(z) \Psi^{(1)}(z) dz + \right. \\ &\quad \left. + k_1 \int z \Phi^{(1)}(z) \Psi^{(1)}(z) dz + z(k_3 \bar{z} \{ \Phi^{(1)}(z) \}^2 + F_4(z, \bar{z})) \right]_A^B + \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ \gamma D^{(1)}(z, \bar{z}) \bar{D}^{(1)}(\bar{z}, z) + (B_3 - kB_1) \varphi^{(1)}(z) \overline{\varphi^{(1)}(z)} \right]_A^B, \end{aligned} \quad (\text{IX.136})$$

\* Функция  $U(z, \bar{z})$  — действительная функция комплексных аргументов ( $z$  и  $\bar{z}$ ) или ( $\eta$  и  $\bar{\eta}$ ).

где

$$F_4(z, \bar{z}) = \gamma \Gamma(z, \bar{z}) + \frac{B_3}{k} \overline{\Phi^{(1)}(z)} D^{(1)}(z, \bar{z}).$$

Предположим, что область  $S$  является конечной односвязной областью. В этом случае голоморфные функции  $\varphi^{(j)}(z)$ ,  $\psi^{(j)}(z)$ ,  $\chi^{(j)}(z)$ ,  $\Phi^{(j)}(z)$ ,  $\Psi^{(j)}(z)$  однозначны в  $S$ . Кроме того, поскольку функции

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \Phi^{(1)}(z) \Psi^{(1)}(z), & F_2(z) &= [\Phi^{(1)}(z)]^2, \\ F_3(z) &= \Phi^{(1)}(z) \psi^{(1)}(z), & F_4(z) &= z F_1(z) \end{aligned} \quad (\text{IX.137})$$

также голоморфны (как произведения голоморфных функций), то интегралы

$$T_k(z) = \int_{z_0}^z F_k(z') dz' \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (\text{IX.138})$$

в области  $S$  являются однозначными функциями своего верхнего предела. Поэтому в случае замкнутого контура, когда точки  $A$  и  $B$  совпадают, из формул (IX.135), (IX.136) и (IX.116) следует

$$P^{(j)} = M^{(j)} = 0 \quad (j = 1, 2).$$

Следовательно, если замкнутый контур ограничивает конечную односвязную область, то

$$X = Y = M = 0. \quad (\text{IX.139})$$

Если область  $S$  многосвязна, но компоненты смещения и напряжений однозначны в ней, то для замкнутого контура  $L_m$ , принадлежащего области, формулы (IX.135) и (IX.136) примут такой вид\*:

$$P_m^{(2)} = P_{L_m}^{(2)} = -i [\varphi^{(2)}(z) + \overline{\psi^{(2)}(z)}]_{L_m} - i [k_1 \overline{T_1(z)} + k_2 T_2(z)]_{L_m}; \quad (\text{IX.140})$$

$$\begin{aligned} M_m^{(2)} = M_{L_m}^{(2)} &= \text{Re} [\chi^{(2)}(z) - z \psi^{(2)}(z)]_{L_m} - \text{Re} \left[ \frac{B_3 - kB_1}{k} T_3(z) + k_1 T_4(z) \right]_{L_m} + \\ &+ \frac{1}{2} (B_3 - kB_1) [\varphi^{(1)}(z) \overline{\varphi^{(1)}(z)}]_{L_m}. \end{aligned} \quad (\text{IX.141})$$

Поскольку в соотношения для  $P^{(2)}$  не входит постоянная  $\gamma$ , для получения соответствующего выражения в координатах  $(\eta, \bar{\eta})$  достаточно в формуле (IX.140) заменить  $(z, \bar{z})$  на  $(\eta, \bar{\eta})$ ; аналогичный результат можно получить для величины  $M^{(2)}$ , если воспользоваться функциями  $U^{(2)}(z, \bar{z})$  и  $\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z}$ , выраженными через координаты  $(\eta, \bar{\eta})$ .

\* В этом случае функции  $\varphi^{(j)'}(z)$ ,  $\psi^{(j)'}(z)$  — однозначны, как следует из формул для напряжений (IX.124) и (IX.125).



**Исследование комплексных потенциалов второго порядка** \*. Рассмотрим вопрос о степени определенности потенциалов первого и второго порядков. В линейном приближении при заданном напряженном состоянии функции  $\Phi^{(1)}(z)$  и  $\Psi^{(1)}(z)$  определяются соответственно с точностью до слагаемых

$$C^{(1)} iz + a_1^{(1)}; \quad a_2^{(1)}. \quad (\text{IX.142})$$

При этом смещения  $D^{(1)}(z, \bar{z})$  определяются с точностью до выражения

$$(k+1)C^{(1)} iz + k\alpha_1^{(1)} - \bar{\alpha}_2^{(1)},$$

характеризующего жесткое смещение тела как целого.

Если потенциалы  $\Phi^{(1)}(z)$  и  $\Psi^{(1)}(z)$  определяются с точностью до слагаемых (IX.142), то функции  $f(z, \bar{z})$  и  $f_1(z, \bar{z})$ , входящие в формулы для компонент напряженного состояния, определяются соответственно с точностью до слагаемых

$$\begin{aligned} & \gamma \{ \alpha_3 C^{(1)2} + i\alpha_4 C^{(1)} [\overline{\Phi^{(1)}(z)} - \Phi^{(1)}(z)] - \\ & - 2\delta_1 \operatorname{Re}(\Phi^{(1)'}(z) [(k+1)C^{(1)} iz + k\alpha_1^{(1)} - \bar{\alpha}_2^{(1)}]) \}; \\ & \gamma \{ (z\Phi^{(1)'}(z) + \Psi^{(1)}(z)) (\delta - k - 2) C^{(1)} i - \delta_1 (z\Phi^{(1)''}(z) + \\ & + \Psi^{(1)'}(z)) [(k+1)C^{(1)} iz + k\alpha_1^{(1)} - \bar{\alpha}_2^{(1)}] + \delta_2 \Phi^{(1)'}(z) [(k+1)C^{(1)} i\bar{z} - \\ & - k\bar{\alpha}_1^{(1)} + \alpha_2^{(1)}] \} + [k_1 \Psi^{(1)}(z) + 2k_3 z \Phi^{(1)'}(z)] C^{(1)} i, \end{aligned} \quad (\text{IX.143})$$

где  $\alpha_3, \alpha_4$  — комплексные постоянные. Вследствие этого функции  $f(z, \bar{z})$ ,  $f_1(z, \bar{z})$  будут определены при условии

$$C^{(1)} = 0; \quad k\alpha_1^{(1)} - \bar{\alpha}_2^{(1)} = 0, \quad (\text{IX.144})$$

т. е. при вполне определенных смещениях первого порядка.

Таким образом, при заданном напряженном состоянии в отличие от линейной теории произвол в выборе комплексных потенциалов первого порядка уменьшается. При заданных как напряжениях, так и смещениях можно произвольно задать только одну из постоянных  $\alpha_1^{(1)}$  или  $\alpha_2^{(1)}$ . Например, если начало координат находится в области, занятой телом, то подходящим выбором  $\alpha_1^{(1)}$  или  $\alpha_2^{(1)}$  можно добиться того, чтобы

$$\Phi^{(1)}(0) = 0 \quad \text{или} \quad \Psi^{(1)}(0) = 0. \quad (\text{IX.145})$$

При этом вполне фиксируются обе функции  $\Phi^{(1)}(z)$  и  $\Psi^{(1)}(z)$ .

\* См. Г. Н. Савин и Ю. И. Койфман [1], а также Ю. И. Койфман [5].

Если условия (IX.144) выполняются, из формул (IX.124) и (IX.125) получим, что при заданном напряженном состоянии потенциалы второго порядка  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi^{(2)}(z)$  определяются соответственно с точностью до слагаемых

$$C^{(2)} iz + \alpha_1^{(2)}; \quad \alpha_2^{(2)}, \quad (\text{IX.146})$$

где  $C^{(2)}$  — действительная, а  $\alpha_1^{(2)}$ ,  $\alpha_2^{(2)}$  — комплексные постоянные.

Поскольку функция  $D^{(1)}(z, \bar{z})$  определена, естественно потребовать, чтобы функция  $D^{(2)}(z, \bar{z})$  также была вполне определенной и применять такие потенциалы  $\varphi^{(j)}(z)$  и  $\psi^{(j)}(z)$  ( $j=1,2$ ), которые при заданном напряженном состоянии вполне определяют смещения  $D^{(j)}(z, \bar{z})$ . Интегралы

$$T_1(z) = \int^z \Phi^{(1)}(z) \Psi^{(1)}(z) dz; \quad T_2(z) = \int^z [\Phi^{(1)}(z)]^2 dz,$$

входящие в функции  $F_j(z, \bar{z}, \gamma, \delta)$  определены с точностью до постоянных  $g_1, g_2$ . Соответственно, если потенциалы  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi^{(2)}(z)$  определены с точностью до слагаемых (IX.146), то функция  $D^{(2)}(z, \bar{z})$  определена с точностью до выражения

$$(k+1)C^{(2)} iz + k\alpha_1^{(2)} - \bar{\alpha}_2^{(2)} + (k_1' \bar{g}_1 + k_2' g_2). \quad (\text{IX.147})$$

Для полной определенности функции  $D^{(2)}(z, \bar{z})$ , очевидно, необходимо выполнение условий

$$C^{(2)} = 0; \quad k\alpha_1^{(2)} - \bar{\alpha}_2^{(2)} = -(k_1' \bar{g}_1 + k_2' g_2). \quad (\text{IX.148})$$

Поскольку четыре постоянные  $\alpha_1^{(2)}$ ,  $\alpha_2^{(2)}$ ,  $g_1, g_2$  связаны одним условием, можно произвольно фиксировать три из них. Например, можно положить (при  $k_1' \neq 0$ ;  $k_2' \neq 0$ ):

$$\varphi^{(2)}(0) = 0; \quad \psi^{(2)}(0) = 0; \quad g_1 = 0 \quad (\text{IX.149})$$

$$\varphi^{(2)}(0) = 0; \quad g_j = 0 \quad (j=1,2), \text{ и т. д.}$$

Если же

$$k_1' = k_2' = 0,$$

то можно фиксировать только одну из постоянных —  $\alpha_1^{(2)}$  или  $\alpha_2^{(2)}$ . Такой же произвол в выборе функций  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi^{(2)}(z)$  сохранится и в случае, когда заданы смещения.

Пусть область  $S$ , занятая телом (после деформации), ограничена несколькими простыми замкнутыми контурами  $L_1, L_2, \dots, L_{m+1}$ , причем контур  $L_{m+1}$  охватывает все остальные. Определим общий вид потенциалов второго порядка для такой области, используя координаты  $(z, \bar{z})$ .

Предположим, что компоненты смещения и напряжений однозначны в области  $S$ . Вследствие этого функции  $\Phi^{(1)}(z)$ ,  $\Psi^{(1)}(z)$ ,  $D^{(1)}(z, \bar{z})$  и, следовательно,  $f(z, \bar{z})$ ,  $f_1(z, \bar{z})$  также являются однозначными, причем

$$\operatorname{Im} f(z, \bar{z}) = 0.$$

Поскольку функции  $f(z, \bar{z})$  и  $f_1(z, \bar{z})$  — однозначны, то исследование возможной многозначности потенциалов второго порядка можно провести, исходя из формул (IX.124) и (IX.125), аналогично тому, как это делается в линейной теории. Поэтому можно записать общий вид потенциалов второго порядка в области  $S$  (пока без учета однозначности функции  $D^{(2)}(z, \bar{z})$ ):

$$\varphi^{(2)}(z) = z \sum_{j=1}^m A_j^{(2)} \ln(z - z_j) + \sum_{j=1}^m B_j^{(2)} \ln(z - z_j) + \varphi_*^{(2)}(z), \quad (\text{IX.150})$$

$$\psi^{(2)}(z) = \sum_{j=1}^m B_j^{*(2)} \ln(z - z_j) + \psi_*^{(2)}(z), \quad (\text{IX.151})$$

где  $z_j$  — произвольные точки внутри контуров  $L_j$ ;  $A_j^{(2)}$  — действительные, а  $B_j^{(2)}$ ,  $B_j^{*(2)}$  — комплексные постоянные;  $\varphi_*^{(2)}(z)$  и  $\psi_*^{(2)}(z)$  — функции, голоморфные в области  $S$ .

Найдем условия, которым должны удовлетворять функции  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi^{(2)}(z)$  для того, чтобы функция  $D^{(2)}(z, \bar{z})$  была однозначной. Подставляя функции (IX.150) и (IX.151) в соотношение (IX.93), находим

$$[D^{(2)}(z, \bar{z})]_{L'_j} = -2\pi i \{ (k+1) A_j^{(2)} z + k B_j^{(2)} + \bar{B}_j^{*(2)} \} + [k_1' \bar{T}_1(z) + k_2' T_2(z)]_{L'_j}, \quad (\text{IX.152})$$

где  $L'_j$  — некоторый контур, охватывающий контур  $L_j$ ; обход контура  $L'_j$  совершается по часовой стрелке.

Из условия однозначности смещений  $[D^{(2)}(z, \bar{z})]_{L'_j} = 0$  получим

$$A_j^{(2)} = 0; \\ k B_j^{(2)} + \bar{B}_j^{*(2)} = -\frac{i}{2\pi} [k_1' \bar{T}_1(z) + k_2' T_2(z)]_{L'_j}. \quad (\text{IX.153})$$

Выразим коэффициенты  $B_j^{(2)}$  и  $B_j^{*(2)}$  через компоненты главного вектора усилий, действующих на контур. Предположим, что рассматриваемое нами решение является регулярным (функции  $\varphi^{(k)}(z)$ ,  $\varphi^{(k)'}(z)$ ,  $\psi^{(k)}(z)$  непрерывно продолжимы\* на все точки границы  $L$  области  $S$ ). В этом случае для вычисления главного вектора  $P_j^{(2)}$  можно воспользоваться

\* См. Н. И. Мухелишвили [1].

формулой (IX.140), где контур  $L_j$  является граничным. Подставляя формулы (IX.150) и (IX.151) в соотношение (IX.140) и учитывая, что  $A_j^{(2)}=0$ , находим\*

$$P_j^{(2)} = -2\pi(B_j^{(2)} - \bar{B}_j^{*(2)}) - i[k_1 \overline{T_1(z)} + k_2 T_2(z)]_{L_j}. \quad (\text{IX.154})$$

Из уравнений (IX.153) и (IX.154)

$$B_j^{(2)} = -\frac{X_j^{(2)} + iY_j^{(2)} - E_{1,j}}{2\pi(k+1)}; \quad \bar{B}_j^{*(2)} = \frac{k(X_j^{(2)} - iY_j^{(2)}) + E_{2,j}}{2\pi(k+1)}, \quad (\text{IX.155})$$

где

$$\begin{aligned} E_{1,j} &= -i[(k_1 + k'_1) T_1(z) + (k_2 + k'_2) \overline{T_2(z)}]_{L_j}; \\ E_{2,j} &= -i[(kk_1 - k'_1) \overline{T_1(z)} + (kk_2 - k'_2) T_2(z)]_{L_j}. \end{aligned} \quad (\text{IX.156})$$

Если в формулах (IX.156) положить

$$k_1 = k_2 = 0 \quad (\text{или } k'_1 = k'_2 = 0),$$

то получим

$$E_{1,j} = \bar{E}_{2,j}; \quad kE_{1,j} = -\bar{E}_{2,j}. \quad (\text{IX.157})$$

Учитывая соотношения (IX.153) и (IX.155), функции (IX.150) и (IX.151) можно представить в виде

$$\varphi^{(2)}(z) = -\frac{1}{2\pi(k+1)} \sum_{j=1}^m (X_j^{(2)} + iY_j^{(2)} - E_{1,j}) \ln(z - z_j) + \varphi_0^{(2)}(z), \quad (\text{IX.158})$$

$$\psi^{(2)}(z) = \frac{1}{2\pi(k+1)} \sum_{j=1}^m [k(X_j^{(2)} - iY_j^{(2)}) + E_{2,j}] \ln(z - z_j) + \psi_0^{(2)}(z). \quad (\text{IX.159})$$

Очевидно, что такой же вид имеют функции  $\varphi_1^{(2)}(\eta)$  и  $\psi_1^{(2)}(\eta)$ .

Определим общий вид комплексных потенциалов  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi^{(2)}(z)$  для случая бесконечной области с граничными контурами  $L_1, L_2, \dots, L_m$ . Опишем окружность радиуса  $L_R$  с центром в начале координат (начало координат лежит вне области  $S$ ) таким образом, чтобы контуры  $L_j$  находились внутри  $L_R$ . Тогда для любых  $z$ , лежащих вне  $L_R$ , будем иметь

$$|z| > |z_j|$$

и

$$\ln(z - z_j) = \ln z + \varphi_0^{(2)}(z), \quad (\text{IX.160})$$

где  $\varphi_0^{(2)}(z)$  — функция, голоморфная вне окружности  $L_R$ .

\* В формуле (IX.153) можно тогда считать, что контур  $L_j'$  совпадает с контуром  $L_j$ .

Вследствие этого формулы (IX.158) и (IX.159) принимают вид

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)}(z) &= -\frac{X^{(2)} + iY^{(2)} - E_1}{2\pi(k+1)} \ln z + \varphi_{01}^{(2)}(z), \\ \psi^{(2)}(z) &= \frac{k(X^{(2)} - iY^{(2)}) + E_2}{2\pi(k+1)} \ln z + \psi_{01}^{(2)}(z).\end{aligned}\quad (\text{IX.161})$$

Здесь

$$X^{(2)} = \sum_{j=1}^m X_j^{(2)}; \quad Y^{(2)} = \sum_{j=1}^m Y_j^{(2)}; \quad E_i = \sum_{j=1}^m E_{i,j} \quad (i = 1, 2); \quad (\text{IX.162})$$

$\varphi_{01}^{(2)}$ ,  $\psi_{01}^{(2)}$  — функции, голоморфные вне  $L_R$ , за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки.

Определим вид функций  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi^{(2)}(z)$ , удовлетворяющих условию ограниченности напряжений во всей области  $S$ . Поскольку в этом случае потенциалы первого порядка имеют вид \*

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(z) &= -\frac{X^{(1)} + iY^{(1)}}{2\pi(k+1)} \ln z + \Gamma^{(1)}z + \varphi_0^{(1)}(z), \\ \psi^{(1)}(z) &= \frac{k(X^{(1)} - iY^{(1)})}{2\pi(k+1)} \ln z + \Gamma'^{(1)}z + \psi_0^{(1)}(z),\end{aligned}\quad (\text{IX.163})$$

из выражений (IX.126) и (IX.127) следует

$$\begin{aligned}f(z, \bar{z}) &= V_1 + 0\left(\frac{1}{z}\right), \\ f_1(z, \bar{z}) &= V + 0\left(\frac{1}{z}\right)\end{aligned}\quad (\text{IX.164})$$

( $z$  вне  $L_R$ ),

где

$$\begin{aligned}V_1 &= \gamma \left[ \Gamma'^{(1)}\bar{\Gamma}^{(1)} + (1 - k\delta) \Gamma^{(1)}\bar{\Gamma}^{(1)} + \left(\frac{k_2}{\gamma} - k\right) (\Gamma^{(1)2} + \bar{\Gamma}^{(1)2}) \right], \\ V_2 &= \gamma \Gamma'^{(1)} [2\bar{\Gamma}^{(1)} + (\delta - k) \Gamma^{(1)}] + k_1 \Gamma'^{(1)} \Gamma^{(1)}.\end{aligned}\quad (\text{IX.165})$$

В связи с этим, исходя из формул (IX.124), (IX.125) и (IX.164), нетрудно убедиться в том, что при условии ограниченности напряжений в области  $S$

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)}(z) &= -\frac{X^{(2)} + iY^{(2)} - E_1}{2\pi(k+1)} \ln z + \Gamma^{(2)}z + \varphi_0^{(2)}(z), \\ \psi^{(2)}(z) &= \frac{k(X^{(2)} - iY^{(2)}) + E_2}{2\pi(k+1)} \ln z + \Gamma'^{(2)}z + \psi_0^{(2)}(z),\end{aligned}\quad (\text{IX.166})$$

где  $\varphi_0^{(2)}(z)$  и  $\psi_0^{(2)}(z)$  — функции, голоморфные вне  $L_R$ , включая и бесконечно удаленную точку.

\* См. Н. И. Мусхелишвили [1].

Для нахождения постоянных  $\Gamma^{(2)}$  и  $\Gamma'^{(2)}$  подставим функции (IX.166) в формулы (IX.124) и (IX.125) для компонент напряженного состояния. Приняв во внимание соотношения (IX.164) при  $|z| \rightarrow \infty$ , получим

$$\sigma_x + \sigma_y = 2 [2\operatorname{Re} \Gamma^{(1)} + \varepsilon (2\operatorname{Re} \Gamma^{(2)} + V_1)], \quad (\text{IX.167})$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2 [\Gamma'^{(1)} + \varepsilon (\Gamma'^{(2)} + V_2)].$$

Если  $N_1$  и  $N_2$  — значения главных напряжений на бесконечности, а  $\alpha$  — угол, который главная ось, соответствующая  $N_1$ , составляет с осью  $Oy^t$ , то, сравнивая равенства

$$\sigma_x + \sigma_y = N_1 + N_2, \quad (\text{IX.168})$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = -(N_1 - N_2) e^{-2i\alpha}$$

с формулами (IX.167), находим

$$\operatorname{Re} \Gamma^{(1)} = \frac{1}{4} (N_1 + N_2); \quad \Gamma'^{(1)} = -\frac{1}{2} (N_1 - N_2) e^{-2i\alpha}, \quad (\text{IX.169})$$

$$\operatorname{Re} \Gamma^{(2)} = -\frac{1}{2} V_1; \quad \Gamma'^{(2)} = -V_2. \quad (\text{IX.170})$$

Предположим, что вращение на бесконечности отсутствует, т. е. при больших по модулю  $x^\alpha$  и  $y^\alpha$  деформация сплошной среды описывается соотношениями

$$x^\alpha = c_{\alpha\beta} y^\beta \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (\text{IX.171})$$

где

$$c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}.$$

Вследствие этого, можно записать

$$\frac{\partial x^2}{\partial y^1} = \frac{\partial x^1}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial y^2}{\partial x^1} = \frac{\partial y^1}{\partial x^2} \quad (\text{IX.172})$$

или

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{z}}; \quad \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\eta}}.$$

Так как  $z = D + \eta$ , из соотношений (IX.172) находим

$$\frac{\partial D^{(k)}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{D}^{(k)}}{\partial \bar{z}}, \quad \frac{\partial D^{(k)}}{\partial \eta} = \frac{\partial \bar{D}^{(k)}}{\partial \bar{\eta}}. \quad (\text{IX.173})$$

Поскольку при больших  $(z)$

$$\frac{\partial D^{(1)}(z, \bar{z})}{\partial z} = -\frac{k(X^{(1)} + iY^{(1)})}{2\pi(1+k)} \cdot \frac{1}{z} + (k\Gamma^{(1)} - \bar{\Gamma}^{(1)}) + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

из равенств (IX.173) при  $z \rightarrow \infty$  следует

$$k\bar{\Gamma}^{(1)} - \bar{\Gamma}^{(1)} = k\bar{\Gamma}^{(1)} - \Gamma^{(1)},$$

т. е.

$$\text{Im } \Gamma^{(1)} = 0.$$

Аналогично производная

$$\frac{\partial D^{(2)}}{\partial z} = -\frac{k[X^{(2)} + iY^{(2)} - E_1]}{2\pi(1+k)} \cdot \frac{1}{z} + (k\Gamma^{(2)} - \bar{\Gamma}^{(2)}) + V_3 + 0\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (\text{IX.174})$$

где  $V_3$  — действительная постоянная.

Устремляя  $|z| \rightarrow \infty$ , из соотношений (IX.173) и (IX.174) получаем

$$\text{Im } \Gamma^{(2)} = 0. \quad (\text{IX.175})$$

Поскольку  $\Gamma^{(1)}$  — действительная постоянная, выражения (IX.165) можно представить в виде

$$V_1 = \gamma \left\{ \Gamma^{(1)} \bar{\Gamma}^{(1)} + \left[ 1 - k\delta + 2\left(\frac{k_2}{\gamma} - k\right) \right] \Gamma^{(1)2} \right\},$$

$$V_2 = [\gamma(2 + \delta - k) + k_1] \Gamma^{(1)} \Gamma^{(1)}. \quad (\text{IX.176})$$

Повторяя тот же ход рассуждений при исследовании общего вида комплексных потенциалов второго порядка в координатах недеформированного состояния  $(\eta, \bar{\eta})$ , легко можно убедиться в том, что функции  $\varphi_1^{(2)}(\eta)$ ,  $\psi_1^{(2)}(\eta)$  будут иметь ту же форму (IX.166), что и функции  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi^{(2)}(z)$ ; при этом, поскольку  $V_1$  и  $V_2$  не зависят от постоянных  $\delta_1$  (IX.128),  $\delta_2$  (IX.129), постоянные  $\Gamma^{(2)}$  и  $\Gamma'^{(2)}$  для функций  $\varphi_1^{(2)}(\eta)$  и  $\psi_1^{(2)}(\eta)$  также будут определяться формулами (IX.170) и (IX.176) ( $\gamma$  и  $\delta$  тут не заменяются на  $\gamma'$  и  $\delta'$ ).

Таким образом

$$\varphi_1^{(2)}(\eta) = -\frac{X^{(2)} + iY^{(2)} - E_1}{2\pi(1+k)} \ln \eta + \Gamma^{(2)}\eta + \varphi_{1,0}^{(2)}(\eta),$$

$$\psi_1^{(2)}(\eta) = \frac{k(X^{(2)} - iY^{(2)}) + E_2}{2\pi(1+k)} \ln \eta + \Gamma'^{(2)} + \psi_{1,0}^{(2)}(\eta). \quad (\text{IX.177})$$

По теореме Коши имеем

$$\sum_{j=1}^m \left[ \int f(z) dz \right]_{L_j} = \left[ \int f(z) dz \right]_{L_{m+1}},$$

где контур  $L_{m+1}$  охватывает все контуры  $L_j$ , а функция  $f(z)$  — голоморфна. Поэтому в нашем случае будем иметь \*

$$\sum_{j=1}^m [T_i(z)]_{L_j} = [T_i(z)]_{L_R}, \quad (i = 1, 2). \quad (\text{IX.178})$$

\* Функции  $\Phi^{(1)}(z)$  и  $\Psi^{(1)}(z)$  голоморфны во всей области  $S$ , следовательно, голоморфны в  $S$  и функции  $F_1(z)$  и  $F_2(z)$  (см. формулы (IX.137)).

Здесь  $L_R$  — произвольный контур, охватывающий контур  $L_R$  (обход совершается по часовой стрелке).

Вычислим  $T_i(z)$  при  $z$  вне  $L_R$ . Так как в этом случае

$$\Phi^{(1)}(z) = -\frac{X^{(1)} + iY^{(1)}}{2\pi(k+1)} \cdot \frac{1}{z} + \Gamma^{(1)} + \Phi_0^{(1)'}(z),$$

$$\Psi^{(1)}(z) = \frac{k(X^{(1)} - iY^{(1)})}{2\pi(k+1)} \cdot \frac{1}{z} + \Gamma^{(1)'} + \Psi_0^{(1)'}(z),$$

то

$$T_1(z) = \int \Phi^{(1)}(z) \Psi^{(1)}(z) dz = \frac{k(X^{(1)} - iY^{(1)})\Gamma^{(1)} - (X^{(1)} + iY^{(1)})\Gamma^{(1)'}}{2\pi(k+1)} \ln z + f_{1,2}(z),$$

(IX.179)

$$T_2(z) = \int \Phi^{(1)2}(z) dz = -\frac{(X^{(1)} + iY^{(1)})\Gamma^{(1)}}{\pi(k+1)} \ln z + f_{2,2}(z),$$

где  $f_{i,2}(z)$  — функции, голоморфные вне  $L_R$ .

Таким образом, из формул (IX.178), приняв во внимание соотношение (IX.179), получим

$$\sum_{j=1}^m [T_1(z)]_{L_j} = -i \frac{k(X^{(1)} - iY^{(1)})\Gamma^{(1)} - (X^{(1)} + iY^{(1)})\Gamma^{(1)'}}{(k+1)},$$

(IX.180)

$$\sum_{j=1}^m [T_2(z)]_{L_j} = \frac{2i(X^{(1)} + iY^{(1)})\Gamma^{(1)}}{k+1}.$$

В связи с этим величины  $E_1$  и  $E_2$ , как следует из формул (IX.156) и (IX.162), примут такой вид:

$$E_1 = -\frac{1}{k+1} \{ (k_1 + k'_1) [(X^{(1)} - iY^{(1)})\bar{\Gamma}^{(1)'} - k(X^{(1)} + iY^{(1)})\Gamma^{(1)}] - \\ - 2(k_2 + k'_2)(X^{(1)} + iY^{(1)})\Gamma^{(1)} \};$$

(IX.181)

$$E_2 = -\frac{1}{k+1} \{ (kk_1 - k'_1) [k(X^{(1)} - iY^{(1)})\Gamma^{(1)} - (X^{(1)} + iY^{(1)})\Gamma^{(1)'}] + \\ + 2(kk_2 + k'_2)(X^{(1)} - iY^{(1)})\Gamma^{(1)} \}.$$

Из (IX.181) видим, что величины  $E_1$  и  $E_2$  обращаются в нуль только в том случае, если отсутствуют напряжения на бесконечности или равен нулю главный вектор усилий, приложенных к границе  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_m$  области  $S$ .

**Постановка основных граничных задач\***. В связи с тем что в нелинейной теории упругости возможны различные формы задания как

\* См. Г. Н. Савин и Ю. И. Койфман [1], а также Ю. И. Койфман [5].



внешней нагрузки, действующей на деформированный контур, так и самого контура, то основные граничные задачи могут рассматриваться в нескольких вариантах. Сформулируем постановку некоторых вариантов основных граничных задач плоской нелинейной теории упругости.

*Первая основная задача.* Найти упругое равновесие в случаях, когда:

граница  $L$  области  $S$  и приложенная к ней внешняя нагрузка  $P(t)$  заданы в деформированном состоянии, где  $t$  — аффикс точки деформированного контура (вариант А);

граница  $L$  области  $S$  задана в недеформированном состоянии, а внешняя нагрузка  $P(t)$  задана на деформированном контуре (вариант Б);

граница  $L$  области  $S$  задана в недеформированном состоянии, а действующая в деформированном состоянии внешняя нагрузка  $P(t)$  отнесена к недеформированному контуру (вариант В).

*Вторая основная задача.* Найти упругое равновесие в случаях, когда:

заданы смещения  $g(t)$  точек границы, форма которой известна в деформированном состоянии (вариант Г);

заданы смещения  $g_1(t^*)$  точек границы, форма которой известна в недеформированном состоянии, где  $t^*$  — аффикс точки недеформированного контура (вариант Д).

Наряду с первой и второй основными задачами можно, как и в классической теории упругости, рассматривать различные «контактные» задачи и в частности задачи о равновесии составной пластины. В данной монографии ограничимся рассмотрением двух возможных вариантов ее постановки, а именно найти упругое равновесие составной пластины (тела) в случаях, когда:

граница  $L$  тела и контуры сая  $L_j$  составляющих пластин, а также нагрузка  $P(t)|_L$  заданы в деформированном состоянии; скачок смещений на контурах  $L_j$  отсутствует\* (вариант Е);

граница  $L$  тела и контуры сая  $L_j$  составляющих пластин заданы в недеформированном состоянии, а нагрузка  $P(t)$  задана на деформированной границе тела; скачок смещений на контурах сая отсутствует (вариант И).

Поскольку компоненты напряжений и смещений второго порядка выражаются через функции комплексного переменного, основные граничные задачи во втором приближении сводятся, как и в линейной теории, к граничным задачам теории функций комплексного переменного. В связи с этим при решении граничных задач во втором приближении будем применять методы плоской теории упругости и предполагать, что решения соответствующих линейных задач известны.

Запишем общий вид граничных условий для потенциалов первого и второго порядков в различных вариантах основных граничных задач.

\* В вариантах Ж и З рассмотренных Ю. И. Кофманом [5], изучены случаи, когда заданы скачки смещений на контурах соприкосновения.

*Первая основная задача. Вариант А.* Из формулы (IX.55) или (IX.130) следует, что граничное условие имеет такой вид:

$$2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = i \int_0^s (X_n + iY_n) ds + C = iP(t) + C \text{ на } L, \quad (\text{IX.182})$$

где  $X_n, Y_n$  — компоненты внешней нагрузки;  $L$  — известный контур деформированной области;  $C$  — произвольная постоянная.

Если предположить, что внешнюю нагрузку  $P(t)$  можно представить в виде ряда (IX.132) по степеням  $\varepsilon$ , то, как следует из соотношений (IX.64) и (IX.182), граничные условия для членов первого и второго порядков

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar{z}} = i \int_0^s (X_n^{(1)} + iY_n^{(1)}) ds + C = iP^{(1)}(t) + C, \quad (\text{IX.183})$$

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial \bar{z}} = i \int_0^s (X_n^{(2)} + iY_n^{(2)}) ds = iP^{(2)}(t). \quad (\text{IX.184})$$

Заменяя выражения  $\left. \frac{\partial U^{(k)}}{\partial \bar{z}} \right|_L$  граничным значением соответствующей комбинации функций комплексного переменного, получаем следующие граничные условия соответственно для потенциалов первого и второго порядков:

$$\varphi^{(1)}(t) + t\overline{\varphi^{(1)'(t)}} + \overline{\psi^{(1)}(t)} = iP^{(1)}(t) + C, \quad (\text{IX.185})$$

$$\varphi^{(2)}(t) + \overline{\varphi^{(2)'(t)}} + \overline{\psi^{(2)}(t)} - F_1(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = iP^{(2)}(t). \quad (\text{IX.186})$$

*Вариант Б.* Поскольку здесь известна форма контура области в недеформированном состоянии, граничное условие (IX.182) нужно отнести к известному контуру  $L^*$ . Для этого выразим функции  $P(t)$  и

$2 \frac{\partial U(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}}$  через координаты  $(\eta, \bar{\eta})$  недеформированного состояния. Из

соотношений (IX.114) и (IX.115) следует, что функцию  $2 \frac{\partial U(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}}$

в этом случае можно (с точностью до членов второго порядка) представить в виде

$$2 \frac{\partial U(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = 2^0 H \varepsilon \left\{ \frac{\partial U^{(1)}(\eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}} + \varepsilon \left[ \frac{\partial U^{(2)}(\eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}} + \Gamma(\eta, \bar{\eta}) \right] \right\}. \quad (\text{IX.187})$$

Разложим функцию внешней нагрузки  $P(t) = 2^0 H \varepsilon [P^{(1)}(t) + \varepsilon P^{(2)}(t) + \dots]$

в ряд Тейлора в окрестности произвольной точки  $t^*$  недеформированного контура  $L^*$ :

$$\begin{aligned} P(t) &= 2^0 H \varepsilon \{ P^{(1)}(t^*) + D_1(t^*) P^{(1)'}(t^*) + \dots \\ &\dots + \varepsilon [P^{(2)}(t^*) + D_1(t^*) P^{(2)'}(t^*) + \dots] + \varepsilon^2 [\dots] + \dots = \\ &= 2^0 H \varepsilon \{ P^{(1)}(t^*) + \varepsilon [P^{(2)}(t^*) + D_1^{(1)}(t^*) P^{(1)'}(t^*)] + \dots \}. \end{aligned} \quad (\text{IX.188})$$

Подставляя соответствующие выражения (IX.187) и (IX.188) в граничное условие (IX.182) и приравнивая члены при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем

$$\frac{\partial U^{(1)}(\eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}} = iP^{(1)}(t^*) + C, \quad (\text{IX.189})$$

$$\frac{\partial U^{(2)}(\eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}} + \Gamma(\eta, \bar{\eta}) = i [P^{(2)}(t^*) + D_1^{(1)}(t^*) P^{(1)'}(t^*)]. \quad (\text{IX.190})$$

Заменяя левые части в формулах (IX.189) и (IX.190) граничным значением из (IX.119), представим граничные условия для потенциалов первого и второго порядков (опуская у аффикса  $t^*$  значок  $*$ ) в виде

$$\varphi^{(1)}(t) + \overline{t\varphi^{(1)'}}(t) + \overline{\psi^{(1)}}(t) = iP^{(1)}(t) + C, \quad (\text{IX.191})$$

$$\varphi_1^{(2)}(t) + \overline{t\varphi_1^{(2)'}}(t) + \overline{\psi_1^{(2)}}(t) - F_1^*(t, \bar{t}, \gamma', \delta') = iP^{(2)}(t), \quad (\text{IX.192})$$

где

$$F_1^*(t, \bar{t}, \gamma', \delta') = F_1(t, \bar{t}, \gamma', \delta') + iD_1^{(1)}(t) P^{(1)'}(t). \quad (\text{IX.193})$$

В а р и а н т В. Здесь известна форма недеформированной границы тела, а нагрузка  $* P(t)$ , действующая на деформированный контур, будучи отнесенной к недеформированному контуру, имеет заданный вид  $P_1(t^*)$ . Вследствие этого, относя граничное условие

$$2 \frac{\partial U(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = iP(t) + C \text{ на } L$$

к контуру  $L^*$ , получим следующие граничные условия соответственно для членов первого и второго порядков:

$$\frac{\partial U^{(1)}(\eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}} = iP_1^{(1)}(t^*) + C \text{ на } L^*, \quad (\text{IX.194})$$

$$\frac{\partial U^{(2)}(\eta, \bar{\eta})}{\partial \bar{\eta}} + \Gamma(\eta, \bar{\eta}) = iP_1^{(2)}(t^*). \quad (\text{IX.195})$$

\* Вид нагрузки  $P(t)$  в этом варианте, вообще говоря, неизвестен и может быть определен после решения задачи.

Как и прежде, найдем граничные условия для потенциалов (на  $L^*$ ) в виде

$$\varphi^{(1)}(t) + t\overline{\varphi^{(1)'}}(t) + \overline{\psi^{(1)}}(t) = iP_1^{(1)}(t^*) + C, \quad (\text{IX.196})$$

$$\varphi_1^{(2)}(t) + t\overline{\varphi_1^{(2)'}}(t) + \overline{\psi_1^{(2)}}(t) - F_1(t, \bar{t}, \gamma', \delta') = iP_1^{(2)}(t^*). \quad (\text{IX.197})$$

Из сопоставления граничных условий (IX.197) и (IX.186) видим, что если по форме функции внешней нагрузки в этих вариантах совпадают, то потенциалы второго порядка в вариантах  $A$  и  $B$  определяются одновременно: для этого достаточно заменить в потенциалах  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi^{(2)}(z)$  координату  $z$  на  $\eta$  и постоянные  $\gamma, \delta$  на  $\gamma', \delta'$ .

Выше было показано, что при заданном напряженном состоянии и вполне определенных смещениях можно произвольно задавать в функциях  $\varphi^{(1)}(z), \psi^{(1)}(z)$  только одну из постоянных  $\alpha_1^{(1)}$  или  $\alpha_2^{(1)}$ . В граничном условии (IX.185) подходящим выбором постоянной  $\alpha_1^{(1)}$  (или  $\alpha_2^{(1)}$ ) можно придать любое значение постоянной  $C$ . Вследствие этого при фиксированном значении  $C$  функции  $\varphi^{(1)}(z)$  и  $\psi^{(1)}(z)$  являются вполне определенными, а постоянные  $\varphi^{(1)}(0)$  и  $\psi^{(1)}(0)$  (если начало координат находится в области, занятой телом) должны быть найдены из решения задачи. Потенциалы  $\varphi^{(1)}(z)$  и  $\psi^{(1)}(z)$  можно также зафиксировать, если положить

$$\varphi^{(1)}(0) = 0 \quad (\text{или } \psi^{(1)}(0) = 0); \quad (\text{IX.198})$$

тогда постоянные  $C$  и  $\psi^{(1)}(0)$  (или  $\varphi^{(1)}(0)$ ) определяются из решения задачи.

Если потенциалы  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi^{(2)}(z)$  определены с точностью до слагаемых (IX.146), то функция  $\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z}$  определена с точностью до выражения (при  $k_1 \neq 0, k_2 \neq 0$ )  $\alpha_1^{(2)} + \alpha_2^{(2)} + k_1 g_1' + k_2 g_2'$ . Поскольку постоянные  $k_1, k_2$  связаны с постоянными  $k_1', k_2'$  соотношениями (IX.98), то, если функция  $\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z}$  задана и выполняются условия (IX.148), произвольно можно фиксировать только две из четырех постоянных  $\alpha_j^{(2)}$  и  $g_j$  ( $j = 1, 2$ ). Например, можно положить  $g_j = 0$  (или  $\varphi^{(2)}(0) = \psi^{(2)}(0) = 0$ ) и определить постоянные  $\varphi^{(2)}(0)$  и  $\psi^{(2)}(0)$  или  $g_j$  из решения задачи. Если же  $k_1 = k_2 = 0$  (или  $k_1' = k_2' = 0$ ), то произвольно можно задать или постоянные  $g_j$ , или постоянную  $\alpha_1^{(2)}$  ( $\alpha_2^{(2)}$ ) и одну из постоянных  $g_j$  ( $j = 1, 2$ ).

*Вторая основная задача.* Вариант Г. В этом случае граничное условие имеет такой вид:

$$D(z, \bar{z}) = g(t) \text{ на } L.$$

Предполагая, что  $g(t) = g^{(1)}(t) + \varepsilon g^{(2)}(t) + \dots$ , получаем следующие граничные условия соответственно для потенциалов первого и второго порядков:

$$k\varphi^{(1)}(t) - t\overline{\varphi^{(1)'}}(t) - \overline{\psi^{(1)}}(t) = 2^0 Hg^{(1)}(t) \text{ на } L, \quad (\text{IX.199})$$

$$k\varphi^{(2)}(t) - t\overline{\varphi^{(2)'}}(t) - \overline{\psi^{(2)}}(t) - F_2(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = 2^0 Hg^{(2)}(t). \quad (\text{IX.200})$$

В а р и а н т Д. Из граничного условия  $D_1(\eta, \bar{\eta}) = g_1(t)$  на  $L^*$ , как и прежде, находим

$$k\varphi^{(1)}(t) - \overline{t\varphi^{(1)'}}(t) - \overline{\psi^{(1)}}(t) = 2^0 H g_1^{(1)}(t) \text{ на } L^*, \quad (\text{IX.201})$$

$$k\varphi_1^{(2)}(t) - \overline{t\varphi_1^{(2)'}}(t) - \overline{\psi_1^{(2)}}(t) - F_2(t, \bar{t}, \gamma', \delta') = 2^0 H g_1^{(2)}(t), \quad (\text{IX.202})$$

где  $t$  — аффикс точки недеформированного контура  $L^*$ .

Сравнивая граничные условия (IX.200) и (IX.202), убеждаемся в том, что комплексные потенциалы в вариантах Г и Д определяются одновременно (при замене  $z$  на  $\eta$  и  $\gamma, \delta$  на  $\gamma', \delta'$ ) в тех случаях, когда по форме функции  $g(t)$  и  $g_1(t^*)$  совпадают.

При решении второй основной задачи фиксирование потенциалов  $\varphi^{(j)}(z)$  и  $\psi^{(j)}(z)$  ( $j=1, 2$ ) происходит так, как это указано выше.

Запишем граничные условия задачи об упругом равновесии составных пластин (тел) в вариантах Е и И. Рассмотрим пластинку  $S_{(0)}$  с отверстиями, в некоторые из которых (или во все) посажены без натяга упругие шайбы (пластины)  $S_{(j)}$ , состоящие из различных материалов. При этом предположим, что контуры вставленных шайб и соответствующих отверстий приводятся в соприкосновение без зазора и спаиваются между собой. Предположим, что на границу полученного таким образом (составного) тела  $S$  действует некоторая система внешних усилий. Обозначим границу такого составного тела  $S$  через  $L$ , где  $L = L_{1,0} + L_{2,0} + \dots + L_{m,0}$  — совокупность контуров свободных (не заполненных шайбами) отверстий и внешнего контура составной пластины, а контуры спая пластин с шайбами обозначим через  $L_j$ .

В а р и а н т Е. Граничные условия и условия сопряжения задачи записываются следующим образом:

$$2 \frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = iP(t) + C \text{ на } L, \quad (\text{IX.203})$$

$$\frac{\partial U_{(0)}}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial U_{(j)}}{\partial \bar{z}} + C_{(j)}; \quad D_{(0)}(z, \bar{z}) = D_{(j)}(z, \bar{z}) \text{ на } L_j, \quad (\text{IX.204})$$

где  $U_{(0)}$ ,  $U_{(j)}$ ,  $D_{(0)}$ ,  $D_{(j)}$  — функция Эри и функция смещения соответственно в области  $S_{(0)}$  и в области вставленных пластин  $S_{(j)}$ ;  $C|_{L_{k,0}} = C_{k,0}$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ).

Раскладывая функции  $\frac{\partial U_{(j)}}{\partial \bar{z}}$  и  $D_{(j)}(z, \bar{z})$  в ряды

$$\frac{\partial U_{(j)}}{\partial \bar{z}} = {}^0 H \varepsilon_j \left( \frac{\partial U_{(j)}^{(1)}}{\partial \bar{z}} + \varepsilon_j \frac{\partial U_{(j)}^{(2)}}{\partial \bar{z}} + \dots \right),$$

$$D_{(j)} = \varepsilon_j D_{(j)}^{(1)}(z, \bar{z}) + \varepsilon_j^2 D_{(j)}^{(2)}(z, \bar{z}) + \dots,$$

подставляя эти разложения в граничные условия (IX.203) и условия сопряжения (IX.204), а также приравнивая члены одинакового порядка

малости, получаем следующие условия, соответственно для членов первого и второго порядков:

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial z} = iP^{(1)}(t) + C^* \text{ на } L; \quad (\text{IX.205})$$

$$\frac{\partial U^{(1)}_{(0)}}{\partial z} = \frac{\partial U^{(1)}_{(j)}}{\partial z} + C^*_{(j)}; \quad \varepsilon_0 D^{(1)}_{(0)}(z, \bar{z}) = \varepsilon_j D^{(1)}_{(j)}(z, \bar{z}) \text{ на } L_j; \quad (\text{IX.206})$$

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z} = iP^{(2)}(t) \text{ на } L; \quad (\text{IX.207})$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial U^{(2)}_{(0)}}{\partial z} = \varepsilon_j \frac{\partial U^{(2)}_{(j)}}{\partial z}; \quad \varepsilon_0^2 D^{(2)}_{(0)}(z, \bar{z}) = \varepsilon_j^2 D^{(2)}_{(j)}(z, \bar{z}) \text{ на } L_j. \quad (\text{IX.208})$$

Из условий (IX.205) — (IX.208) следуют граничные условия для потенциалов первого и второго порядков:

$$\varphi^{(1)}(t) + t\overline{\varphi^{(1)'}}(t) + \overline{\psi^{(1)}}(t) = iP^{(1)}(t) + C^* \text{ на } L; \quad (\text{IX.209})$$

$$\varphi^{(1)}_{(0)}(t) + t\overline{\varphi^{(1)'}}_{(0)}(t) + \overline{\psi^{(1)}}_{(0)}(t) = \varphi^{(1)}_{(j)}(t) + t\overline{\varphi^{(1)'}}_{(j)}(t) + \overline{\psi^{(1)}}_{(j)}(t) + C^*_{(j)},$$

$$k_{(0)}\varphi^{(1)}_{(0)}(t) - t\overline{\varphi^{(1)'}}_{(0)}(t) - \overline{\psi^{(1)}}_{(0)}(t) = m_j [k_{(j)}\varphi^{(1)}_{(j)}(t) - t\overline{\varphi^{(1)'}}_{(j)}(t) - \overline{\psi^{(1)}}_{(j)}(t)] \text{ на } L_j; \quad (\text{IX.210})$$

$$\varphi^{(2)}(t) + t\overline{\varphi^{(2)'}}(t) + \overline{\psi^{(2)}}(t) - F_1(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = iP^{(2)}(t) \text{ на } L; \quad (\text{IX.211})$$

$$\varphi^{(2)}_{(0)}(t) + t\overline{\varphi^{(2)'}}_{(0)}(t) + \overline{\psi^{(2)}}_{(0)}(t) - F_{1(0)}(t, \bar{t}, \gamma_{(0)}, \delta_{(0)}) = m_j [\varphi^{(2)}_{(j)}(t) + t\overline{\varphi^{(2)'}}_{(j)}(t) + \overline{\psi^{(2)}}_{(j)}(t) - F_{1(j)}(t, \bar{t}, \gamma_{(j)}, \delta_{(j)})] \text{ на } L_j, \quad (\text{IX.212})$$

$$k_0\varphi^{(2)}_{(0)}(t) - t\overline{\varphi^{(2)'}}_{(0)}(t) - \overline{\psi^{(2)}}_{(0)}(t) - F_{2(0)}(t, \bar{t}, \gamma_{(0)}, \delta_{(0)}) = m_j^2 [k_{(j)}\varphi^{(2)}_{(j)}(t) - t\overline{\varphi^{(2)'}}_{(j)}(t) - \overline{\psi^{(2)}}_{(j)}(t) - F_{2(j)}(t, \bar{t}, \gamma_{(j)}, \delta_{(j)})],$$

где  $m_j = \frac{{}^0H_{(0)}}{{}^0H_{(j)}}$ ;  $\varphi^{(i)}_{(j)}(t)$ ,  $\psi^{(i)}_{(j)}(t)$ ,  $F_{i(j)}(t, \bar{t}, \gamma_{(j)}, \delta_{(j)})$  — граничные значения потенциалов  $\varphi^{(i)}_{(j)}(z)$ ,  $\psi^{(i)}_{(j)}(z)$  и функций  $F_{i(j)}(z, \bar{z}, \gamma_{(j)}, \delta_{(j)})$ .

В а р и а н т И. Граничные условия (IX.203) и условия сопряжения (IX.204) должны быть записаны на внешнем контуре тела и контурах спая, форма которых задана в начальном (недеформированном) состоянии. Раскладывая, как и прежде, внешнюю нагрузку  $P(t)$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $t^*$  недеформированного внешнего контура  $L^*$  и

пользуясь функцией  $\frac{\partial U}{\partial z}$ , выраженной через координаты  $(\eta, \bar{\eta})$ , получим следующие условия для членов первого и второго порядков:

$$\frac{\partial U^{(1)}}{\partial \bar{\eta}} = iP^{(1)}(t) + C \text{ на } L^*, \quad (\text{IX.213})$$

$$\frac{\partial U^{(1)}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} = \frac{\partial U^{(1)}_{(j)}}{\partial \bar{\eta}} + C_{(j)}^*; \quad \varepsilon_{(0)} D_{1(0)}^{(1)}(\eta, \bar{\eta}) = \varepsilon_{(j)} D_{1(j)}^{(1)}(\eta, \bar{\eta}) \text{ на } L^*,$$

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial \bar{\eta}} + \Gamma(\eta, \bar{\eta}) = i[P^{(2)}(t) + D_1^{(1)} P^{(1)'}(t)] \text{ на } L^*;$$

$$\varepsilon_{(0)} \left[ \frac{\partial U^{(2)}_{(0)}}{\partial \bar{\eta}} + \Gamma_{(0)}(\eta, \bar{\eta}) \right] = \varepsilon_{(j)} \left[ \frac{\partial U^{(2)}_{(j)}}{\partial \bar{\eta}} + \Gamma_{(j)}(\eta, \bar{\eta}) \right], \quad (\text{IX.214})$$

$$\varepsilon_{(0)}^2 D_{1(0)}^{(2)}(\eta, \bar{\eta}) = \varepsilon_{(j)}^2 D_{1(j)}^{(2)}(\eta, \bar{\eta}) \text{ на } L^*.$$

Граничные условия для потенциалов первого порядка будут иметь вид (IX.209) и (IX.210), где  $t$  — аффикс точки недеформированного контура.

Условия на  $L^*$  для потенциалов второго порядка представляются в виде

$$\varphi^{(2)}(t) + t\overline{\varphi^{(2)'}}(t) + \overline{\psi^{(2)}}(t) - F_1^*(t, \bar{t}, \gamma', \delta') = iP^{(2)}(t);$$

$$\varphi_{(0)}^{(2)}(t) + t\overline{\varphi_{(0)}^{(2)'}}(t) + \overline{\psi_{(0)}^{(2)}}(t) - F_{1(0)}(t, \bar{t}, \gamma'_{(0)}, \delta'_{(0)}) = \quad (\text{IX.215})$$

$$= m_j [\varphi_{(j)}^{(2)}(t) + t\overline{\varphi_{(j)}^{(2)'}}(t) + \overline{\psi_{(j)}^{(2)}}(t) - F_{1(j)}(t, \bar{t}, \gamma'_{(j)}, \delta'_{(j)})] \text{ на } L^*;$$

$$k\varphi_{(0)}^{(2)}(t) - t\overline{\varphi_{(0)}^{(2)'}}(t) - \overline{\psi_{(0)}^{(2)}}(t) - F_{2(0)}(t, \bar{t}, \gamma'_{(0)}, \delta'_{(0)}) =$$

$$= m_j^2 [k\varphi_{(j)}^{(2)}(t) - t\overline{\varphi_{(j)}^{(2)'}}(t) - \overline{\psi_{(j)}^{(2)}}(t) - F_{2(j)}(t, \bar{t}, \gamma'_{(j)}, \delta'_{(j)})] \text{ на } L^*. \quad (\text{IX.216})$$

Приведем развернутую запись граничных условий для потенциалов второго порядка в случае, когда область  $S$  представляет собой бесконечную плоскость, ослабленную каким-либо криволинейным отверстием. Поместим начало системы координат  $y^\alpha$  внутри отверстия в предположении, что начало координат находится внутри отверстия и до деформации.

Потенциалы второго порядка имеют вид (IX.161)

$$\varphi^{(2)}(z) = -\frac{X^{(2)} + iY^{(2)} - E_1}{2\pi(k+1)} \ln z + \Gamma^{(2)}z + \varphi_0^{(2)}(z);$$

$$\psi^{(2)}(z) = \frac{k(X^{(2)} - iY^{(2)}) + E_2}{2\pi(k+1)} \ln z + \Gamma^{(2)'}z + \psi_0^{(2)}(z).$$

Полагая

$$k_1 = k_2 = 0,$$

из условия (IX.186) получим для варианта А

$$\varphi_0^{(2)}(t) + t\overline{\varphi_0^{(2)'}}(t) + \overline{\psi_0^{(2)}}(t) = k_0(t, \bar{t}, \gamma, \delta) \text{ на } L, \quad (\text{IX.217})$$

где  $L$  — контур отверстия;

$$K_0(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = iP^{(2)}(t) + F_1(t, \bar{t}, \gamma, \delta) - 2\Gamma^{(2)}t - \overline{\Gamma^{(2)'}}\bar{t} + \\ + \frac{X^{(2)} - iY^{(2)} - \bar{E}_1}{2\pi(k+1)} \cdot \frac{t}{\bar{t}} - \frac{E_1}{2\pi(k+1)} \ln(t\bar{t}) + \frac{X^{(2)} + iY^{(2)}}{2\pi(k+1)} (\ln t - k \ln \bar{t}). \quad (\text{IX.218})$$

Для получения граничного условия варианта Б, как было показано выше, достаточно заменить в условии (IX.217) функцию  $K_0(t, \bar{t}, \gamma, \delta)$  на функцию

$$K_0^*(t, \bar{t}, \gamma', \delta') = K_0(t, \bar{t}, \gamma', \delta') + iD^{(1)}P^{(1)'}(t) \quad (\text{IX.219})$$

и считать, что  $t$  — аффикс точки недеформированного контура. Граничные задачи вариантов А и Б решаются одновременно при замене  $\gamma, \delta$  на  $\gamma', \delta'$ .

Нетрудно убедиться в том, что функция  $K_0(t, \bar{t}, \gamma, \delta)$  является однозначной непрерывной функцией точки  $t$  контура  $L$ , т. е.

$$[K_0(t, \bar{t}, \gamma, \delta)]_L = 0.$$

Если предположить, что граничное условие удовлетворяется уже в первом приближении ( $P^{(2)}(t) = 0$ ), а главный вектор усилий, действующих на  $L$ , равен нулю, то функция  $K_0(t, \bar{t}, \gamma, \delta)$  упростится и примет такой вид:

$$K_0(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = F_1(t, \bar{t}, \gamma, \delta) - 2\Gamma^{(2)}t - \overline{\Gamma^{(2)'}}\bar{t}. \quad (\text{IX.220})$$

Заметим также, что если контур  $L$  свободен от нагрузки, то

$$K_0^*(t, \bar{t}, \gamma', \delta') = K_0(t, \bar{t}, \gamma', \delta'), \quad (\text{IX.221})$$

и граничные задачи вариантов А, Б и В решаются одновременно.

Для фиксирования функций  $\varphi_0^{(2)}(z)$  и  $\psi_0^{(2)}(z)$  можно положить (при  $k_1 = k_2 = 0$ )

$$\varphi_0^{(2)}(\infty) = 0 \text{ (или } \psi_0^{(2)}(\infty) = 0). \quad (\text{IX.222})$$

Запишем граничные условия для потенциалов второго порядка в случае второй основной задачи для бесконечной плоскости с отверстием в варианте Г. Полагая

$$k'_1 = k'_2 = 0,$$



из условия (IX. 200) найдем на  $L$ :

$$k\varphi_0^{(2)}(t) - \overline{t\varphi_0^{(2)'}}(t) - \overline{\psi_0^{(2)}}(t) = g_1^{(2)}(t, \bar{t}, \gamma, \delta), \quad (\text{IX.223})$$

где

$$g_1^{(2)}(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = 2^0 H g^{(2)}(t) + F_2(t, \bar{t}, \gamma, \delta) + \frac{k(X^{(2)} + iY^{(2)} - E_1)}{2\pi(k+1)} \ln(t \bar{t}) - \\ - (k\Gamma^{(2)} - \bar{\Gamma}^{(2)})t + \overline{\Gamma^{(2)}\bar{t}} - \frac{X^{(2)} - iY^{(2)} - E_1}{2\pi(k+1)} \cdot \frac{t}{\bar{t}}. \quad (\text{IX.224})$$

В случае варианта Д функция  $g_1^{(2)}(t, \bar{t}, \gamma, \delta)$  заменяется на функцию  $g_1^{(2)}(t, \bar{t}, \gamma', \delta')$ , т. е. граничные задачи вариантов Г и Д, как указывалось выше, можно решать одновременно. Из формулы (IX.224) следует, что  $g(t, \bar{t}, \gamma, \delta)$  — однозначная непрерывная на  $L$  функция.

Потенциалы  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi_0^{(2)}(z)$  во второй основной задаче также фиксируются условиями (IX.222) (при  $k' = k'_2 = 0$ ).

Если предположить, что граничные условия удовлетворяются за счет первого приближения ( $g^{(2)}(t) = 0$ ) и главный вектор усилий равен нулю, то функция

$$g_1^{(2)}(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = F_2(t, \bar{t}, \gamma, \delta) - (k\Gamma^{(2)} - \bar{\Gamma}^{(2)})t - \overline{\Gamma^{(2)}\bar{t}}. \quad (\text{IX.225})$$

Запишем основные соотношения для членов второго порядка при конформном отображении. Вводя в зависимости от формы отверстия отображающую функцию  $z = \omega(\zeta)$  или  $\eta = \omega(\zeta)$ , получим \*

$$\frac{\partial U^{(2)}}{\partial z} = \varphi^{(2)}(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi^{(2)'}}(\zeta) + \overline{\psi^{(2)}}(\zeta) - F_1(\zeta, \bar{\zeta}, \gamma, \delta), \quad (\text{IX.226})$$

$$D^{(2)} = k\varphi^{(2)}(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\varphi^{(2)'}}(\zeta) - \overline{\psi^{(2)}}(\zeta) = -F_2(\zeta, \bar{\zeta}, \gamma, \delta), \quad (\text{IX.227})$$

где

$$F_1(\zeta, \bar{\zeta}, \gamma, \delta) = \gamma \left\{ \left[ \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi^{(1)'}}(\zeta) + \overline{\Psi^{(1)}}(\zeta) \right] \bar{D}^{(1)} + [\Phi^{(1)}(\zeta) + \delta \overline{\Phi^{(1)}}(\zeta)] D^{(1)} \right\} - \\ - k_3 \omega(\zeta) [\overline{\Phi^{(1)}}(\zeta)]^2 - k_1 \int \overline{\Phi^{(1)}}(\zeta) \overline{\Psi^{(1)}}(\zeta) \overline{\omega'(\zeta)} d\bar{\zeta} - k_2 \int [\Phi^{(1)}(\zeta)]^2 \omega'(\zeta) d\zeta, \quad (\text{IX.228})$$

$$F_2(\zeta, \bar{\zeta}, \gamma, \delta) = -\gamma \left\{ \left[ \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \overline{\Phi^{(1)'}}(\zeta) + \overline{\Psi^{(1)}}(\zeta) \right] \bar{D}^{(1)} + [\delta \overline{\Phi^{(1)}}(\zeta) - k\Phi^{(1)}(\zeta)] D^{(1)} \right\} - \\ - k'_3 \omega(\zeta) [\overline{\Phi^{(1)}}(\zeta)]^2 - k'_1 \int \overline{\Phi^{(1)}}(\zeta) \overline{\Psi^{(1)}}(\zeta) \overline{\omega'(\zeta)} d\bar{\zeta} - k'_2 \int [\Phi^{(1)}(\zeta)]^2 \omega'(\zeta) d\zeta. \quad (\text{IX.229})$$

\* При этом обозначим  $\varphi^{(2)}(\zeta) = \varphi^{(2)}[\omega(\zeta)]$  и т. д.

Формулы для компонент напряженного состояния:

$$\sigma_{\varphi} + \sigma_{\theta} = 2 \left\{ 2 \operatorname{Re} \Phi^{(1)}(\zeta) + \frac{1}{2^0 H} [2 \operatorname{Re} \Phi^{(2)}(\zeta) + f(\zeta, \bar{\zeta})] \right\}, \quad (\text{IX.230})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\varphi} - \sigma_{\theta} + 2i\tau_{\varphi\theta} = & 2 \frac{\zeta^2 \omega'(\zeta)}{\varrho^2 \omega'(\zeta)} \left\{ \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi^{(1)'}(\zeta) + \Psi^{(1)}(\zeta) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2^0 H} \left[ \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi^{(2)'}(\zeta) + \Psi^{(2)}(\zeta) + f_1(\zeta, \bar{\zeta}) \right] \right\}, \end{aligned}$$

где

$$f(\zeta, \bar{\zeta}) = \gamma \left\{ \left[ \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi^{(1)'}(\zeta) + \Psi^{(1)}(\zeta) \right] \left[ \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi^{(1)'}(\zeta) + \overline{\Psi^{(1)}(\zeta)} \right] + \right.$$

$$\left. + (1 - k\delta) \Phi^{(1)}(\zeta) \overline{\Phi^{(1)}(\zeta)} + \left( \frac{k_2}{\gamma} - k \right) [\Phi^{(1)2}(\zeta) + \overline{\Phi^{(1)2}(\zeta)}] - 2\delta_1 \operatorname{Re} \Phi^{(1)'}(\zeta) \frac{D^{(1)}}{\omega'(\zeta)} \right\};$$

$$f_1(\zeta, \bar{\zeta}) = \gamma \left\{ \left[ \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi^{(1)'}(\zeta) + \Psi^{(1)}(\zeta) \right] [2\overline{\Phi^{(1)}(\zeta)} + (\delta - k) \Phi^{(1)}(\zeta)] - \right. \quad (\text{IX.231})$$

$$\begin{aligned} & \left. - \delta_1 \frac{1}{\omega'(\zeta)} \left[ \overline{\omega(\zeta)} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left( \frac{\Phi^{(1)'}(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right) + \Psi^{(1)'}(\zeta) \right] D^{(1)} - \delta_2 \Phi^{(1)'}(\zeta) \frac{\overline{D^{(1)}}}{\omega'(\zeta)} \right\} + \\ & + \left[ k_1 \Psi^{(1)}(\zeta) + 2k_3 \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \Phi^{(1)'}(\zeta) \right] \Phi^{(1)}(\zeta). \end{aligned}$$

Запишем выражения для комплексных потенциалов второго порядка в случае отображения бесконечной плоскости с произвольным отверстием на бесконечную плоскость с круговым отверстием единичного радиуса. Отображающую функцию будем брать в виде

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots \right),$$

где  $R$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , вообще говоря, — комплексные постоянные коэффициенты. В этом случае

$$\Phi^{(2)}(\zeta) = - \frac{X^{(2)} + iY^{(2)} - E_1}{2\pi(k+1)} \ln \zeta + R\Gamma^{(2)}\zeta + \Phi_0^{(2)}(\zeta), \quad (\text{IX.232})$$

$$\Psi^{(2)}(\zeta) = \frac{k(X^{(2)} - iY^{(2)}) + E_2}{2\pi(k+1)} \ln \zeta + R\Gamma'^{(2)}\zeta + \Psi_0^{(2)}(\zeta).$$

Граничные условия для потенциалов  $\Phi_0^{(2)}(\zeta)$  и  $\Psi_0^{(2)}(\zeta)$  в случае первой основной задачи (вариант А) имеют на контуре единичного круга  $\gamma_1$  такой вид:

$$\Phi_0^{(2)}(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\Phi_0^{(2)'}} \left( \frac{1}{\sigma} \right) + \overline{\Psi_0^{(2)}} \left( \frac{1}{\sigma} \right) = K_0 \left( \sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta \right), \quad (\text{IX.233})$$

где

$$K_0\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) = iP^{(2)}(\sigma) + F_1\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) - \Gamma^{(2)}R\sigma - \bar{\Gamma}'^{(2)}\frac{R}{\sigma} + \\ + \frac{X^{(2)} + iY^{(2)}}{2\pi} \ln \sigma + \frac{\sigma\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \left[ \frac{X^{(2)} - iY^{(2)} - \bar{E}_1}{2\pi(k+1)} - \Gamma^{(2)}\frac{R}{\sigma} \right]. \quad (\text{IX.234})$$

В случае второй основной задачи (вариант Г) получим

$$k\Phi_0^{(2)}(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \bar{\Phi}_0^{(2)'}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \bar{\Psi}_0^{(2)}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = g_1^{(2)}\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right), \quad (\text{IX.235})$$

где

$$g_1^{(2)}\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) = 2^0 Hg^{(2)}(\sigma) + F_2\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) - \\ - k\Gamma^{(2)}R\sigma + \bar{\Gamma}'^{(2)}\frac{R}{\sigma} + \frac{\sigma\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \left[ \Gamma^{(2)}\frac{R}{\sigma} - \frac{X^{(2)} - iY^{(2)} - \bar{E}_1}{2\pi(k+1)} \right]. \quad (\text{IX.236})$$

Граничные условия для вариантов Б, В и Д очевидны, поэтому приводить их не будем.

## § 2. Влияние нелинейных эффектов второго порядка на распределение напряжений возле отверстий

**Круговое отверстие** \*. Пусть рассматриваемая область представляет собой в деформированном (недеформированном) состоянии бесконечную плоскость с круговым отверстием радиуса  $R$ . Поместим начало системы координат  $(z, \bar{z})$  и  $(\eta, \bar{\eta})$  в центре отверстия и предположим, что напряженное состояние на бесконечности является однородным, а контур отверстия подвергается действию равномерного нормального давления интенсивностью  $p$ . Для определения напряженного и деформированного состояния возле отверстия необходимо решить первую основную задачу со следующими граничными условиями \*\*

$$2 \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_L = -pt + c, \quad (\text{IX.237})$$

где  $t$  — аффикс точки контура  $L$  отверстия;

$$4 \frac{\partial U}{\partial z} = (N_1 + N_2)z - (N_1 - N_2)e^{2i\alpha\bar{z}} \quad (\text{при } |z| \rightarrow \infty). \quad (\text{IX.238})$$

\* См. Ю. И. Койфман [2, 5].

\*\* Поскольку в нелинейной теории нельзя пользоваться наложением решений, задача решается при совместном действии рассматриваемой системы усилий.

Потенциалы первого порядка

$$\begin{aligned}\varphi^{(1)}(z) &= \Gamma^{(1)}z - \bar{\Gamma}'^{(1)} \frac{R^2}{z}, \\ \psi^{(1)}(z) &= \Gamma'^{(1)}z - (2\Gamma^{(1)} + \rho) \frac{R^2}{z} - \bar{\Gamma}'^{(1)} \frac{R^4}{z^3}.\end{aligned}\quad (\text{IX.239})$$

Потенциалы второго порядка определяются из граничного (на  $L$ ) условия (IX.217)

$$\varphi_0^{(2)}(t) + t\overline{\varphi_0^{(2)'(t)}} + \overline{\psi_0(t)} = K_0(t, \bar{t}, \gamma, \delta), \quad (\text{IX.240})$$

где для варианта А

$$K_0(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = F_1(t, \bar{t}, \gamma, \delta) - 2\Gamma^{(2)}t - \bar{\Gamma}'^{(2)}\bar{t}. \quad (\text{IX.241})$$

Подставляя функции (IX.239) в выражение для  $F_1(z, \bar{z}, \gamma, \delta)$  и переходя к значениям на границе, из условия (IX.240), учитывая соотношения (IX.241) и (IX.163), получим, что комплексные потенциалы второго порядка в варианте А имеют такой вид:

$$\begin{aligned}\varphi^{(2)}(z) &= \Gamma^{(2)}z + a_{-1}^{(2)} \frac{R^2}{z} + a_{-3}^{(2)} \frac{R^4}{z^3}, \\ \psi^{(2)}(z) &= \Gamma'^{(2)}z + b_{-1}^{(2)} \frac{R^2}{z} + b_{-3}^{(2)} \frac{R^4}{z^3} + b_{-5}^{(2)} \frac{R^6}{z^5},\end{aligned}\quad (\text{IX.242})$$

где коэффициенты  $a_j^{(2)}$  и  $b_j^{(2)}$  (при  $k_1 = k_2 = 0$ )

$$\begin{aligned}a_{-1}^{(2)} &= \gamma[(k+1)(1-\delta)\Gamma^{(1)} + 2\rho]\bar{\Gamma}'^{(1)} - \bar{\Gamma}'^{(2)}, \\ a_{-3}^{(2)} &= -\gamma(k+1)(\bar{\Gamma}'^{(1)})^2, \\ b_{-1}^{(2)} &= [\gamma(3+\delta)(k+1) - k_3](\Gamma^{(1)})^2 - \gamma(k+1)(1+\delta)\Gamma'^{(1)}\bar{\Gamma}'^{(1)} - \\ &\quad - 2\Gamma^{(2)} + \gamma(4+\delta-k)\Gamma^{(1)}\rho + \gamma\rho^2, \\ b_{-3}^{(2)} &= \gamma[2+\delta-k]\rho\bar{\Gamma}'^{(1)} - 2k_3\bar{\Gamma}'^{(1)}\Gamma^{(1)} - \bar{\Gamma}'^{(2)}, \\ b_{-5}^{(2)} &= -[4\gamma(k+1) + k_3](\bar{\Gamma}'^{(1)})^2.\end{aligned}\quad (\text{IX.243})$$

В случае варианта Б функция  $K_0(t, \bar{t}, \gamma, \delta)$  в граничном условии задачи заменяется на функцию (IX.219):

$$K_0(t, \bar{t}, \gamma', \delta') = K_0(t, \bar{t}, \gamma', \delta') - \rho \left\{ [(k+1)\Gamma^{(1)} + \rho]t - (k+1)\bar{\Gamma}'^{(1)} \frac{R^2}{t} \right\}. \quad (\text{IX.244})$$

Вследствие этого получим, что коэффициенты разложений функций  $\varphi_1^{(2)}(\eta)$  и  $\psi_1^{(2)}(\eta)$  определяются из соотношений (IX.243), если заменить

$\gamma, \delta$  на  $\gamma', \delta'$  и к коэффициентам  $\underline{a}_1^{(2)}, \underline{b}_1^{(2)}$  добавить соответственно члены

$$\rho(k+1)\bar{\Gamma}^{(1)}; \quad -\rho[(k+1)\Gamma^{(1)} + p]. \quad (\text{IX.245})$$

В случае варианта В коэффициенты разложения потенциалов второго порядка определяются по формулам (IX.243), если заменить  $\gamma, \delta$  на  $\gamma', \delta'$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи. Предположим, что контур отверстия свободен от внешней нагрузки; тогда функции  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi^{(2)}(z)$  определяются по формулам (IX.242), (IX.243), если в них положить \*  $\rho=0$ . Коэффициенты потенциалов второго порядка для варианта Б получаются при этом простой заменой  $\gamma, \delta$  на  $\gamma', \delta'$  в формулах (IX.243).

Запишем формулы для компонент напряженного состояния в вариантах А и Б.

**В а р и а н т А.** Рассматривается упругое равновесие тела, которое при данной величине главных напряжений на бесконечности  $N_1$  и  $N_2$  представляет плоскость с круговым отверстием радиуса  $R$ . Очевидно, что в исходном состоянии отверстие, вообще говоря, отличалось от кругового, причем для каждой пары значений  $N_1$  и  $N_2$  исходная форма и размеры отверстия различны.

Введем в деформированном состоянии систему полярных координат  $r, \theta (z=re^{i\theta})$ . Тогда, подставляя функции  $\varphi^{(k)}(z), \psi^{(k)}(z)$  в соотношения для компонент напряжений (IX.124) и (IX.125) и учитывая формулы перехода от декартовой к полярной системе координат, получаем для точек контурной окружности

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta} = N_1 + N_2 - 2(N_1 - N_2) \cos 2\theta + \frac{\gamma}{4\sigma H} [(2 - k\delta)(N_1 - N_2)^2 + (N_1 + \\ + N_2)^2 - 4(N_1^2 - N_2^2) \cos 2\theta + 4(N_1 - N_2)^2 \cos 4\theta]; \quad (\text{IX.246}) \\ \sigma_r = 0. \end{aligned}$$

Формула (IX.246) позволяет найти распределение напряжения  $\sigma_{\theta}$  по контуру кругового отверстия в случае одноосного растяжения — сжатия, всестороннего растяжения — сжатия и чистого сдвига. Коэффициенты концентрации напряжений в этих задачах: при одноосном растяжении — сжатии ( $N_2=0, N_1=N$ )

$$k^{(A)} = 3 \left[ 1 + \frac{\gamma(11 - k\delta)}{12} \cdot \frac{N}{\sigma H} \right]; \quad (\text{IX.247})$$

при всестороннем растяжении — сжатии ( $N_1 = N_2 = N$ )

$$k^{(A)} = 2 \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{N}{\sigma H} \right); \quad (\text{IX.248})$$

\* Выражения для коэффициентов функций  $\varphi^{(2)}(z)$  и  $\psi^{(2)}(z)$  для этого случая были впервые приведены в работе J. E. Adkins, A. E. Green [1].

при чистом сдвиге ( $N_1 = -N_2 = N$ ),

$$k^{(A)} = 4 \left[ 1 + \frac{\gamma(6 - k\delta)}{4} \cdot \frac{N}{\sigma_0 H} \right]. \quad (\text{IX.249})$$

В а р и а н т Б. Рассматривается упругое равновесие тела, которое в начальном (недеформированном) состоянии представляло собой плоскость с круговым отверстием радиуса  $R$ . В процессе деформации форма и размеры отверстия непрерывно изменяются, причем каждой паре значений  $N_1$  и  $N_2$  соответствует определенная форма деформированного контура.

Если ввести в недеформированном состоянии полярные координаты  $r, \vartheta$  ( $\eta = r e^{i\vartheta}$ ), то компонента напряжения на деформированном контуре

$$\begin{aligned} n^{12} = & N_1 + N_2 - 2(N_1 - N_2) \cos 2\vartheta + \frac{\gamma - \frac{k+1}{2}}{4\sigma_0 H} \times \\ & \times \left\{ -\frac{\gamma}{\frac{k+1}{2}} [(2 - k\delta)(N_1 - N_2)^2 + (N_1 + N_2)^2] - \right. \\ & \left. - 4(N_1^2 - N_2^2) \cos 2\vartheta + 4(N_1 - N_2)^2 \cos 4\vartheta \right\}, \quad (\text{IX.250}) \end{aligned}$$

где  $n^{12} = \sigma_r + \sigma_\vartheta$  — сумма главных напряжений.

Заметим, что поскольку компонента  $n^{12}$  является инвариантом относительно преобразования системы координат, то в криволинейной системе координат  $(\rho, \vartheta^*)$ , соответствующей контуру деформированного отверстия, получим

$$n^{12} = \sigma_\rho + \sigma_{\vartheta^*}. \quad (\text{IX.251})$$

Так как на контуре  $\sigma_\rho = 0$ , то компонента  $n^{12}$  является кольцевым напряжением для точек деформированного контура.

Коэффициенты концентрации напряжений на деформированном контуре:

при одноосном растяжении — сжатии ( $N_2 = 0; N_1 = N$ )

$$k^{(B)} = 3 \left\{ 1 + [\gamma(11 - k\delta) - 4(k+1)] \frac{N}{12\sigma_0 H} \right\}; \quad (\text{IX.252})$$

при всестороннем растяжении — сжатии ( $N_1 = N_2 = N$ )

$$k^{(B)} = 2 \left( 1 + \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{N}{\sigma_0 H} \right); \quad (\text{IX.253})$$

при чистом сдвиге ( $N_1 = -N_2 = N$ )

$$k^{(B)} = 4 \left\{ 1 + [\gamma(6 - k\delta) - 2(k+1)] \frac{N}{4\sigma_0 H} \right\}. \quad (\text{IX.254})$$

На основании формул (IX.246) и (IX.250) может быть изучено влияние нелинейных эффектов второго порядка на распределение напряжений по контуру кругового и первоначального кругового отверстия при однородном напряженном состоянии на бесконечности.

Исследуем распределение напряжений  $\sigma_\phi$  на контуре в случае одноосного растяжения—сжатия для несжимаемого материала с функцией энергии в форме Муни (IX.102). При этом постоянные, входящие в формулы (IX.246) и (IX.250), определяются соотношениями (IX.104) и (IX.105).

**В а р и а н т А.** Компонента напряжения на круговом контуре определяется по формулам:

в случае плоской деформации

$$\sigma_\phi = N \left[ 1 - 2 \cos 2\phi + \frac{N}{4\mu} (1 - 2 \cos 2\phi + 2 \cos 4\phi) \right]; \quad (\text{IX.255})$$

в случае плоского напряженного состояния

$$\sigma_\phi = N \left\{ 1 - 2 \cos 2\phi + \frac{5 + \varrho^*}{16(1 + \varrho^*)} \cdot \frac{N}{\circ H} \left[ \frac{9 - 11\varrho^*}{3(5 + \varrho^*)} - 2 \cos 2\phi + 2 \cos 4\phi \right] \right\}, \quad (\text{IX.256})$$

где

$$\varrho^* = \frac{A_2}{A_1}; \quad \circ H = 2h_0\mu.$$

Распределение напряжений  $\sigma_\phi$  (IX.255) и (IX.256) в различных точках контура характеризуется табл. IX.1.

Т а б л и ц а IX.1

$\phi^\circ$	Плоская деформация	Плоское напряженное состояние (при $\varrho^*=1/16$ )
0	$-N \left( 1 - 0,25 \frac{N}{\mu} \right)$	$-N \left( 1 - 0,166 \frac{N}{\circ H} \right)$
30	$-0,25 \frac{N^2}{\mu}$	$-0,433 \frac{N^2}{\circ H}$
45	$N \left( 1 - 0,25 \frac{N}{\mu} \right)$	$N \left( 1 - 0,433 \frac{N}{\circ H} \right)$
60	$2N \left( 1 + 0,125 \frac{N}{\mu} \right)$	$2N \left( 1 + 0,083 \frac{N}{\circ H} \right)$
90	$3N \left( 1 + 0,417 \frac{N}{\mu} \right)$	$3N \left( 1 + 0,455 \frac{N}{\circ H} \right)$

каж контура характеризуется табл. IX.1.

Заметим, что в данной задаче конечный круговой контур может быть получен двояким способом: или растяжением (+N) плоскости с овальным отверстием вдоль его малой оси, или сжатием (-N) вдоль большой оси.

Как следует из табл. IX.1, чем большие растягивающие усилия нужно приложить для деформирования исходного контура в круговой (для овала с более короткой малой осью), тем больше концентрация

напряжений на контуре; при увеличении сжимающих усилий (для овала, более вытянутого вдоль большой оси) концентрация напряжений на контуре падает.

**В а р и а н т Б.** Рассматривается концентрация напряжений на контуре отверстия, которое первоначально было круговым. В результате

деформации круговое отверстие перешло в овальное, вытянутое вдоль оси  $Oy^1$  при растяжении и вдоль оси  $Oy^2$  при сжатии.

Кольцевое напряжение на деформированном контуре отверстия определяется\* по формулам:

в случае плоской деформации

$$n^{12} = N \left[ 1 - 2\cos 2\vartheta + \frac{N}{4\mu} (1 + 2\cos 2\vartheta - 2\cos 4\vartheta) \right]; \quad (\text{IX.257})$$

в случае плоского напряженного состояния

$$n^{12} = N \left[ 1 - 2\cos 2\vartheta + \frac{17 + 29q^*}{48(1 + q^*)} \cdot \frac{N}{\sigma H} \left( \frac{9 - 11q^*}{17 + 29q^*} + 2\cos 2\vartheta - 2\cos 4\vartheta \right) \right]. \quad (\text{IX.258})$$

В формулах (IX.257) и (IX.258)  $\vartheta$  — полярный угол в недеформированной плоскости.

Распределение напряжений  $\sigma_\vartheta$  на деформированном контуре характеризуется табл. IX.2.

Различие между результатами в вариантах А и Б объясняется изменением формы контура в процессе деформации. При увеличении растягивающих усилий исходный круговой контур все более сплющивается вдоль оси  $Oy^1$  и, естественно, концентрация напряжений в точке  $\vartheta = \pi/2$  уменьшается. При сжатии отверстие сплющивается вдоль оси  $Oy^2$ , вследствие чего концентрация напряжений в точке  $\vartheta = \pi/2$  увеличивается. Эти результаты свидетельствуют о том, что члены второго порядка для несжимаемого материала учитывают только геометрическую\*\* нелинейность задачи.

Подобный анализ можно провести в случае всестороннего растяжения—сжатия и чистого сдвига. Результаты этого анализа для несжимаемого материала с функцией энергии в форме Муни (IX.102) при  $A_2 : A_1 = 1 : 19$  могут быть охарактеризованы табл. IX.3 и эпюрами напряжений  $\sigma_\vartheta/N$  на рис. IX.1 и IX.2.

Таблица IX.2

$\vartheta^\circ$	Плоская деформация	Плоское напряженное состояние ( $q^* = 1/19$ )
0	$-N \left( 1 - 0,25 \frac{N}{\mu} \right)$	$-N \left( 1 - 0,166 \frac{N}{\sigma H} \right)$
30	$0,75 \frac{N^2}{\mu}$	$0,900 \frac{N^2}{\sigma H}$
45	$N \left( 1 + 0,75 \frac{N}{\mu} \right)$	$N \left( 1 + 0,900 \frac{N}{\sigma H} \right)$
60	$2N \left( 1 + 0,125 \frac{N}{\mu} \right)$	$2N \left( 1 + 0,083 \frac{N}{\sigma H} \right)$
90	$3N \left( 1 - 0,25 \frac{N}{\mu} \right)$	$3N \left( 1 - 0,433 \frac{N}{\sigma H} \right)$

\* Формулы (IX.255) и (IX.257) впервые были получены в работе J. E. Adkins, A. E. Green, R. T. Shield [1].

\*\* К этому выводу приходим также ниже, в § 3, исходя из несколько отличных отправных позиций.



Полученные результаты кратко могут быть сформулированы следующим образом.

1. В нелинейной теории коэффициент концентрации напряжений зависит от начальной и конечной формы контура отверстия, вида и величины нагрузки на «бесконечности», упругих свойств материала и вида упругого равновесия (плоская деформация или плоское напряженное состояние).

2. Отклонение величины коэффициента концентрации напряжений от коэффициента concentra-

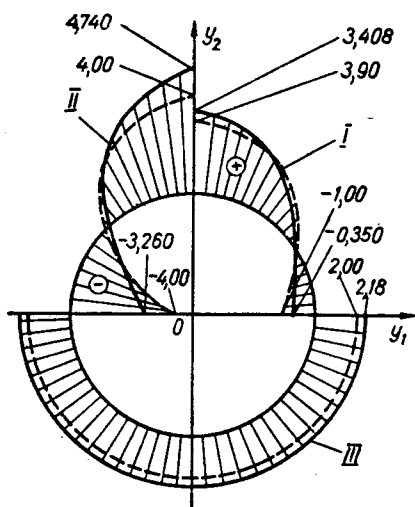


Рис. IX.1.

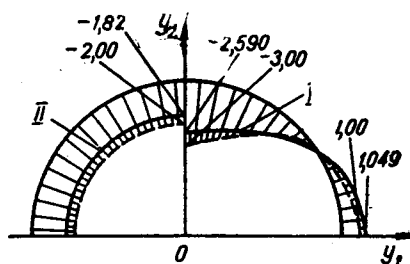


Рис. IX.2.

ции, даваемого линейной теорией, в ряде задач является существенным. При однородном напряженном состоянии на «бесконечности» наибольшее отклонение наблюдается в задаче чистого сдвига.

Таблица IX.3

Напряженное состояние	Плоская деформация		Плоское напряженное состояние		Линейная теория
	Вариант А	Вариант Б	Вариант А	Вариант Б	
Одноосное растяжение	$3\left(1+0,417\frac{N}{\mu}\right)$	$3\left(1-0,250\frac{N}{\mu}\right)$	$3\left(1+0,455\frac{N}{\sigma H}\right)$	$3\left(1-0,433\frac{N}{\sigma H}\right)$	3
Одноосное сжатие	$3\left(1-0,417\frac{N}{\mu}\right)$	$3\left(1+0,250\frac{N}{\mu}\right)$	$3\left(1-0,455\frac{N}{\sigma H}\right)$	$3\left(1+0,433\frac{N}{\sigma H}\right)$	3
Всестороннее растяжение	$2\left(1+0,250\frac{N}{\mu}\right)$	$2\left(1+0,250\frac{N}{\mu}\right)$	$2\left(1+0,300\frac{N}{\sigma H}\right)$	$2\left(1+0,300\frac{N}{\sigma H}\right)$	2
Всестороннее сжатие	$2\left(1-0,250\frac{N}{\mu}\right)$	$2\left(1-0,250\frac{N}{\mu}\right)$	$2\left(1-0,300\frac{N}{\sigma H}\right)$	$2\left(1-0,300\frac{N}{\sigma H}\right)$	2
Чистый сдвиг	$4\left(1+0,625\frac{N}{\mu}\right)$	$4\left(1+0,375\frac{N}{\mu}\right)$	$4\left(1+0,616\frac{N}{\sigma H}\right)$	$4\left(1+0,716\frac{N}{\sigma H}\right)$	4

Используя потенциал первого (IX.239) и второго (IX.242) порядков, можно выписать формулы для компонент напряжений и для других частных случаев. Например, в задаче о всестороннем растяжении—сжатии плоскости с круговым отверстием, контур которого подвергается действию равномерной нормальной нагрузки с потенциалами второго порядка, определяющимися по формулам (IX.242) и (IX.243) при

$$\Gamma^{(1)} = \frac{N}{2}, \quad \Gamma'^{(1)} = 0, \quad (\text{IX.259})$$

для варианта А

$$\varphi^{(2)}(z) = \Gamma^{(2)}z; \quad \psi^{(2)}(z) = b_{-1}^{(2)} \frac{R^2}{z}. \quad (\text{IX.260})$$

На рис. IX.1 показаны кривые напряжений  $\sigma_{\phi}/N$  по контуру кругового отверстия при  $N/H=0,3$  для плоского напряженного состояния, где *I* — одноосное растяжение; *II* — чистый сдвиг; *III* — всестороннее растяжение; штриховая кривая соответствует линейной теории.

На рис. IX.2 показаны кривые напряжений  $\sigma_{\phi}/N$  по контуру кругового отверстия при  $N/H=0,3$  для плоского напряженного состояния, где *I* — одноосное сжатие; *II* — всестороннее сжатие; штриховая кривая соответствует линейной теории.

Для варианта Б

$$\varphi_1^{(2)}(\eta) = \Gamma^{(2)}\eta; \quad \psi_1^{(2)}(\eta) = b_{1,1}^{(2)} \frac{R_1^2}{\eta}. \quad (\text{IX.261})$$

В формулах (IX.260) и (IX.261)  $R$  — радиус кругового отверстия в деформированной плоскости;  $R_1$  — радиус кругового отверстия в начальном состоянии;

$$b_1^{(2)} = \frac{\gamma}{2} (N + \rho) [2(N + \rho) + (k + \delta)N];$$

$$b_{1,1}^{(2)} = (\gamma - 2)(N + \rho)^2 + \frac{1}{2} [\gamma(k + \delta) - 2(k - 1)](N + \rho)N. \quad (\text{IX.262})$$

Если ввести в деформированном и начальном состояниях системы полярных координат  $r, \phi$  и  $r^*, \phi^*$ , то для компонент напряжений получим формулы\*:

для варианта А

$$\sigma_r^I = N - (N + \rho) \frac{R^2}{r^2} \left[ 1 - \frac{\gamma(N + \rho)}{2^0 H} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \right],$$

$$\sigma_{\phi}^I = N + (N + \rho) \frac{R^2}{r^2} \left[ 1 - \frac{\gamma(N + \rho)}{2^0 H} \left( 1 - 3 \frac{R^2}{r^2} \right) \right]; \quad (\text{IX.263})$$

\* См. Ю. И. Койфман [3].

для варианта Б

$$\sigma_{r^*}^{\text{II}} = N - (N + p) \frac{R_1^2}{r^{*2}} \left[ 1 - \frac{(\gamma - 2)(N + p)}{2^0 H} \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^{*2}} \right) \right], \quad (\text{XI.264})$$

$$\sigma_{\phi^*}^{\text{II}} = N + (N + p) \frac{R_1^2}{r^{*2}} \left[ 1 - \frac{(\gamma - 2)(N + p)}{2^0 H} \left( 1 - \frac{R_1^2}{r^{*2}} - \frac{2\gamma R_1^2}{(\gamma - 2)r^{*2}} \right) \right].$$

Поскольку в этой задаче компонента смещения  $u_r$  не зависит от угла  $\phi$ , а компонента  $u_\phi$  равна нулю, то в процессе деформации круговой контур сохраняет свою форму, изменяется лишь величина радиуса отверстия  $R$ . Заметим только, что в случае варианта А каждой паре значений  $N$  и  $p$  соответствует определенное значение начального радиуса, а в случае варианта Б — конечного радиуса отверстия.

Так как деформация является в данной задаче осесимметричной, то  $\sigma_{r^*}$ ,  $\sigma_{\phi^*}$  совпадают с компонентами напряжения в полярной системе координат деформированного состояния, но выражены через начальные значения радиуса отверстия и радиуса-вектора  $r$ . Формулы для компонентов напряжений для точек контурной окружности имеют вид

$$\sigma_r^{\text{I}} = \sigma_r^{\text{II}} = -p; \quad \sigma_\phi^{\text{I}} = \sigma_\phi^{\text{II}} = N + (N + p) \left[ 1 + \frac{\gamma(N + p)}{^0 H} \right]. \quad (\text{IX.265})$$

Полагая в формулах (IX.263) и (IX.264)  $p=0$  или  $N=0$ , получаем выражение компонент напряженного состояния для задач о равномерном нормальном давлении по контуру кругового отверстия в плоскости или о всестороннем растяжении—сжатии плоскости с круговым отверстием\*.

**Эллиптическое отверстие\*\*.** Предположим, что контур эллиптического отверстия подвергается действию равномерной нормальной нагрузки, а напряженное состояние на бесконечности является однородным.

Потенциалы первого порядка для этой задачи даны в § 2 гл. II:

$$\varphi^{(1)}(\zeta) = \Gamma^{(1)} R \zeta - \frac{R T_1}{\zeta}, \quad (\text{IX.266})$$

$$\psi^{(1)}(\zeta) = \Gamma'^{(1)} R \zeta - \frac{R \zeta}{\zeta^2 - m} T_2 - \frac{R \bar{\Gamma}'^{(1)}}{\zeta(\zeta^2 - m)},$$

где  $m$  и  $R$  — параметры отображающей функции

$$z = \omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right), \quad (\text{XI.267})$$

$$\eta = \omega(\zeta) = R \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right),$$

\* Формулы варианта А в первой из этих задач были впервые приведены в работе J. E. Adkins, A. E. Green [1].

\*\* См. Ю. И. Койфман [2, 3, 5], а также G. Lianis [1].

или

$$m = \frac{a-b}{a+b}; \quad R = \frac{a+b}{2};$$

$a$  и  $b$  — полуоси эллипса;

$$T_1 = m\bar{\Gamma}^{(1)} + \bar{\Gamma}'^{(1)} + \rho m; \quad T_2 = (1+m^2)(2\Gamma^{(1)} + \rho) + m\bar{\Gamma}'^{(1)}.$$

Потенциалы второго порядка определяются формулами (IX.232), которые для данной задачи принимают вид

$$\begin{aligned} \Phi^{(2)}(\zeta) &= \Gamma^{(2)}R\zeta + \Phi_0^{(2)}(\zeta), \\ \Psi^{(2)}(\zeta) &= \Gamma'^{(2)}R\zeta + \Psi_0^{(2)}(\zeta). \end{aligned} \quad (\text{IX.268})$$

Функции  $\Phi_0^{(2)}(\zeta)$  и  $\Psi_0^{(2)}(\zeta)$  должны быть определены из граничного условия (IX.233).

Функциональные уравнения для определения потенциалов могут быть записаны по аналогии с линейной \* теорией в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(2)}(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \left[ \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{\sigma^2 + m}{1 - m\sigma^2} \bar{\Phi}_0^{(2)'}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - K_0\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \Phi_0^{(2)}(\infty), \\ \Psi_0^{(2)}(\zeta) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \left[ \sigma \frac{1 + m\sigma^2}{\sigma^2 - m} \Phi_0^{(2)'}(\sigma) - \bar{K}_0\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \Psi_0^{(2)}(\infty), \end{aligned} \quad (\text{IX.269})$$

где

$$K_0\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) = F_1\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) - R\Gamma^{(2)}\left[\sigma + \frac{\sigma^2 + m}{\sigma(1 - m\sigma^2)}\right] - \bar{\Gamma}'^{(2)} \frac{R}{\sigma}. \quad (\text{IX.270})$$

При решении задачи в варианте Б функция  $K_0$  заменяется на функцию

$$K_0^*\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma', \delta'\right) = K_0\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma', \delta'\right) - \rho D^{(1)}, \quad (\text{IX.271})$$

где смещение первого порядка для точек контура

$$D^{(1)}(\sigma) = R\left(T_3\sigma - T_4 \frac{1}{\sigma}\right); \quad (\text{IX.272})$$

здесь

$$T_3 = (k+1)\Gamma^{(1)} + \rho; \quad T_4 = (k+1)(m\Gamma^{(1)} + \bar{\Gamma}'^{(1)}) + k\rho m.$$

Из уравнений (IX.269) после элементарных выкладок находим функции  $\Phi_0^{(2)}(\zeta)$  и  $\Psi_0^{(2)}(\zeta)$ , а затем потенциалы второго порядка окончательно можно записать в таком (вариант А) виде:

$$\Phi^{(2)}(\zeta) = R\left[\Gamma^{(2)}\zeta + \frac{M_1 + M_2\zeta^2}{\zeta(\zeta^2 - m)}\right], \quad (\text{IX.273})$$

\* См. формулы (I.37).

$$\Psi^{(2)}(\zeta) = R \left[ \Gamma'^{(2)}\zeta + \frac{M_3 + M_4\zeta_2 + M_5\zeta^4}{\zeta(\zeta^2 - m)^2} \right] - \zeta \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \Phi_0^{(2)'}(\zeta),$$

где коэффициенты этих функций при  $k_1 = k_2 = 0$

$$M_1 = -\gamma [m\bar{\Gamma}'^{(1)}T_3 + T_4(T_1 - m\delta\Gamma^{(1)})] + k_3m^2(\Gamma^{(1)})^2 + m(\bar{\Gamma}^{(2)} + m\Gamma^{(2)});$$

$$M_2 = \gamma[(\bar{\Gamma}'^{(1)} + T_1 + m\Gamma^{(1)})T_3 - (1 + \delta)\Gamma^{(1)}T_4] - k_3m(\Gamma^{(1)})^2 - (\bar{\Gamma}'^{(2)} + m\Gamma^{(2)});$$

$$M_3 = \gamma[(m\Gamma^{(1)} - \delta T_1)mT_3 - \bar{\Gamma}'^{(1)}T_4] - k_3T_1^2 - m^2\Gamma^{(2)};$$

$$M_4 = \gamma\{(\delta T_1 - m\Gamma^{(1)})T_3 - T_4T_5 + (\bar{\Gamma}'^{(1)} - m^2\Gamma'^{(1)})T_3 + m[(m\Gamma^{(1)} + T_1)\delta T_4 - (1 + \delta)T_3\Gamma^{(1)}] - k_3[(2\Gamma^{(1)} + mT_1)T_1 - m^3(\Gamma^{(1)})^2] + m(3 + m^2)\Gamma^{(2)}\};$$

$$M_5 = \gamma[2mT_3\Gamma'^{(1)} + T_3T_5 + (1 + \delta)\Gamma^{(1)}T_3 - \Gamma'^{(1)}T_4 - \delta\bar{T}_4(m\Gamma^{(1)} + T_1)] - k_3[2m(T_1 + m\Gamma^{(1)}) + \Gamma^{(1)}]\Gamma^{(1)} - (2 + m^2)\Gamma^{(2)};$$

$$T_5 = (1 - m^2)(2\Gamma^{(1)} + \rho) - m(\Gamma'^{(1)} + \bar{\Gamma}'^{(1)}).$$

В случае варианта Б

$$\Phi_1^{(2)}(\zeta) = R\Gamma^{(2)}\zeta + \Phi_{1,0}^{(2)}(\zeta) = R \left[ \Gamma^{(2)}\zeta + \frac{M_1^* + M_2^*\zeta^2}{\zeta(\zeta^2 - m)} + \frac{T_4\rho}{\zeta} \right], \quad (\text{IX.275})$$

$$\Psi_1^{(2)}(\zeta) = R \left[ \Gamma'^{(2)}\zeta + \frac{M_3^* + M_4^*\zeta^2 + M_5^*\zeta^4}{\zeta(\zeta^2 - m)^2} - \frac{T_3\rho}{\zeta} \right] - \zeta \frac{1 + m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \Phi_{1,0}^{(2)'}(\zeta).$$

Здесь коэффициенты  $M_i^*$  определяются по формулам (IX.273), если в них заменить  $\gamma, \delta$  на  $\gamma', \delta'$ .

Используя потенциалы второго порядка (IX.273) или (IX.274), можно рассмотреть несколько частных задач. Приведем для примера формулу для напряжения  $\sigma_\phi$  по контуру свободного отверстия, т. е. при  $\rho=0$ , при однородном напряженном состоянии  $N_1$  и  $N_2$  на бесконечности при  $\alpha=0$ :

$$\sigma_\phi = \frac{1}{d} \left\{ (N_1 + N_2) + 2(N_1 - N_2)(m - \cos 2\theta) + \frac{1}{\sigma_H} \left[ R_1 + R_2 \cos 2\theta + \frac{1}{d} (R_3 + R_4 \cos 2\theta + R_5 \cos 4\theta) + \frac{1}{d^2} (R_6 + R_7 \cos 2\theta + R_8 \cos 4\theta + R_9 \cos 6\theta) \right] \right\}, \quad (\text{IX.276})$$

где

$$R_1 = 2 \left\{ (1 - m^2) \Gamma^{(2)} + \frac{m^2}{16} (N_1 + N_2)^2 [\gamma (1 - \delta) (k + 1) - k_3] - \right. \\ \left. - \frac{m\gamma}{8} (3 - k\delta) (N_1^2 - N_2^2) \right\} + \frac{1}{16} \gamma (1 - k\delta) [(1 + m^2) (N_1 + N_2)^2 + 4d_1], \\ R_2 = \frac{\gamma}{4} [2(N_1^2 - N_2^2) - mk(N_1 - N_2)^2], \quad (\text{IX.277})$$

$$R_3 = \gamma \left\{ \delta_1 m (k + 1) d_2 - \frac{k}{2} \left[ \frac{(N_1 + N_2)^2}{4} ((1 - m^2)^2 - 2m^2) + \right. \right. \\ \left. \left. + 2m(N_1^2 - N_2^2) + m^2 d_1 \right] - (1 - m^2) d_1 + \frac{3}{2} (N_1 - N_2)^2 + \frac{(1 - m^2)^2}{4} (N_1 + N_2)^2 \right\},$$

$$R_4 = -\frac{\gamma}{2} \left\{ \delta_1 (k + 1) (1 + m^2) d_2 - (k - 2) [(1 - m^2) \times \right. \\ \left. \times (N_1^2 - N_2^2) + 2m(N_1 - N_2)^2] \right\},$$

$$R_5 = \frac{\gamma}{4} [2(N_1 - N_2)^2 - km^2(N_1 + N_2)^2 - 2kd_1],$$

$$R_6 = \frac{1}{2} \gamma (k + 1) m^2 (3 + m^2) d_1,$$

$$R_7 = -\frac{1}{2} \gamma (k + 1) m (3 + 4m^2) d_1,$$

$$R_8 = \frac{1}{2} \gamma (1 + k) (1 + 3m^2) d_1,$$

$$R_9 = -\frac{1}{2} \gamma m (k + 1) d_1;$$

$$d_1 = (N_1 - N_2)^2 - m(N_1^2 - N_2^2).$$

$$d_2 = (N_1^2 - N_2^2) - m(N_1 + N_2)^2.$$

В случае варианта А в этих формулах нужно положить  $\delta_1 = 1$ .

При исследовании варианта Б предполагается, что рассматриваемая область в недеформированном состоянии представляла собой плоскость с эллиптическим отверстием, которое характеризовалось параметром  $m = \frac{a-b}{a+b}$ . Конформное отображение в этом случае связано

с криволинейными координатами  $q^*$ ,  $\phi^*$  начального состояния.

В процессе деформации форма контура изменилась, но поскольку компонента  $n^{12}$  является инвариантом, то в системе криволинейных координат  $q$ ,  $\phi$ , связанной с деформированным контуром, можно записать

$$n^{12} = \sigma_{q^*}^{II} + \sigma_{\phi^*}^{II} = \sigma_q^{II} + \sigma_{\phi^*}^{II}. \quad (\text{IX.278})$$

Поскольку на контуре внешняя нагрузка отсутствует, то

$$\sigma_{\phi}^{\text{II}} = 0; \quad n^{12} = \sigma_{\phi}^{\text{I}}. \quad (\text{IX.279})$$

Компонента  $\sigma_{\phi}^{\text{II}}$  определяется формулой (IX.276), если в коэффициентах  $R_4, R_3$  положить  $\delta_1 = 1 - \frac{1}{\gamma}$  и в коэффициентах  $R_6, \dots, R_9$  заменить  $\gamma$  на  $\gamma - 1$ .

Исходя из формулы (IX.276), можно определить напряжения на контуре для следующих задач: 1) для двусосного напряженного состояния ( $N_1 \neq N_2$ ); 2) для растяжения — сжатия вдоль большой оси ( $N_2 = 0$ ); 3) для растяжения — сжатия вдоль малой оси ( $N_1 = 0$ ); 4) для всестороннего растяжения — сжатия ( $N_1 = N_2$ ); 5) для чистого сдвига ( $N_1 = -N_2$ ).

В качестве примера рассмотрим распределение напряжений по контуру эллиптического отверстия при растяжении — сжатии вдоль большой оси в случае плоской деформации несжимаемого материала с функцией энергии в форме Муни при  $m = 1/3$ .

Вариант А. Значения компоненты  $\sigma_{\phi}^{\text{I}}$  в различных точках эллиптического контура приведены ниже ( $\phi$  — полярный угол в плоскости  $\zeta$  деформированного состояния):

$\phi^\circ$	$\sigma_{\phi}^{\text{I}}$
0	$-N \left( 1 - 0,250 \frac{N}{\mu} \right)$
30	$0,71N \left( 1 - 0,271 \frac{N}{\mu} \right)$
45	$1,4N \left( 1 + 0,029 \frac{N}{\mu} \right)$
60	$1,77N \left( 1 + 0,149 \frac{N}{\mu} \right)$
90	$2N \left( 1 + 0,219 \frac{N}{\mu} \right)$

Эти результаты показывают, что аналогично случаю кругового отверстия (см. формулы (IX.255) и (IX.256)) нелинейность задачи приводит к росту коэффициента концентрации при увеличении растягивающих усилий и к его уменьшению при увеличении сжимающих усилий.

Вариант Б. В результате деформации эллиптическое отверстие сплюсчивается вдоль большой оси при растяжении и вдоль малой оси при сжатии. Значения напряжения  $\sigma_{\phi}^{\text{II}}$  в различных точках деформированного контура приведены ниже ( $\phi$  — полярный угол в плоскости  $\zeta$  недеформированного состояния):

$\phi^\circ$	$\sigma_{\phi}^{\text{II}}$
0	$-N \left( 1 - 0,250 \frac{N}{\mu} \right)$
30	$0,71N \left( 1 + 0,671 \frac{N}{\mu} \right)$
45	$1,4N \left( 1 + 0,114 \frac{N}{\mu} \right)$
60	$1,77N \left( 1 - 0,619 \frac{N}{\mu} \right)$
90	$2N \left( 1 - 0,156 \frac{N}{\mu} \right)$

Уменьшение концентрации напряжений в точке  $\phi=90^\circ$  при растяжении, по сравнению с вариантом А, как и в случае кругового отверстия, объясняется тем, что в этом варианте величина концентрации напряжений определяется по контуру более вытянутого вдоль большой оси отверстия, чем в варианте А. При сжатии форма отверстия становится более близкой к круговой, поэтому концентрация напряжений увеличивается.

Значения коэффициента концентрации напряжений по контуру эллиптического (вариант А) или первоначально эллиптического (вариант Б) отверстия при плоской деформации несжимаемого материала с функцией энергии в форме Муни при

$$m = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1}{3}$$

в случае плоской деформации несжимаемого материала для некоторых частных задач приведены в табл. IX.4.

Таблица IX.4

Вид нагрузки	Вариант	Растяжение—сжатие вдоль большой оси	Растяжение—сжатие вдоль малой оси	Всестороннее растяжение—сжатие
Растяжение	А	$2\left(1+0,219\frac{N}{\mu}\right)$	$5\left(1+0,800\frac{N}{\mu}\right)$	$4\left(1+0,687\frac{N}{\mu}\right)$
	Б	$2\left(1-0,156\frac{N}{\mu}\right)$	$5\left(1-0,400\frac{N}{\mu}\right)$	$4\left(1-0,062\frac{N}{\mu}\right)$
Сжатие	А	$2\left(1-0,219\frac{N}{\mu}\right)$	$5\left(1-0,800\frac{N}{\mu}\right)$	$4\left(1-0,687\frac{N}{\mu}\right)$
	Б	$2\left(1+0,156\frac{N}{\mu}\right)$	$5\left(1+0,400\frac{N}{\mu}\right)$	$4\left(1+0,062\frac{N}{\mu}\right)$
Линейная теория	—	2	5	4

Таким образом, приведенные данные иллюстрируют влияние геометрической нелинейности, которая искажает форму контура в процессе деформации, на величину концентрации напряжений.

**Круговое отверстие с подкрепленным краем** \*. Пусть рассматриваемая область представляет собой плоскость с круговым отверстием радиуса  $R$ , в которое впаяно круговое широкое кольцо с внутренним радиусом  $R_1$ . Предположим, что напряженное состояние на бесконечности является однородным, а внутренний контур кольца свободен от внешних усилий.

Задача может быть рассмотрена в двух вариантах Е и И. При рассмотрении варианта Е предполагается, что контур спая  $L$  и внутренний

\* См. Г. Н. Савин и Ю. И. Койфман [1, 2].



контуры кольца  $L_1$  являются круговыми в деформированном состоянии; в варианте И предполагается, что эти контуры являлись круговыми в начальном состоянии.

Граничные условия для потенциалов второго порядка в варианте Е (см. формулы (IX.209) — (IX.212)) записываются следующим образом:

$$\varphi_{(1)}^{(2)}(t) + t\overline{\varphi_{(1)}^{(2)'}}(t) + \overline{\psi_{(1)}^{(2)}(t)} - F_{1(1)}(t, \bar{t}, \gamma_{(1)}, \delta_{(1)}) = 0 \text{ на } L_1; \quad (\text{IX.280})$$

$$\varphi_{(1)}^{(2)}(t) + t\overline{\varphi_{(1)}^{(2)'}}(t) + \overline{\psi_{(1)}^{(2)}(t)} - F_{1(1)}(t, \bar{t}, \gamma_{(1)}, \delta_{(1)}) =$$

$$= m[\varphi_{(0)}^{(2)}(t) + t\overline{\varphi_{(0)}^{(2)'}}(t) + \overline{\psi_{(1)}^{(2)}(t)} - F_{1(0)}(t, \bar{t}, \gamma_{(0)}, \delta_{(0)})],$$

$$k[\varphi_{(1)}^{(2)}(t) - t\overline{\varphi_{(1)}^{(2)'}}(t) - \overline{\psi_{(1)}^{(2)}(t)} - F_{2(1)}(t, \bar{t}, \gamma_{(1)}, \delta_{(1)}) =$$

$$= m^2[k_{(0)}\varphi_{(0)}^{(2)}(t) - t\overline{\varphi_{(0)}^{(2)'}}(t) - \overline{\psi_{(0)}^{(2)}(t)} - F_{2(0)}(t, \bar{t}, \gamma_{(0)}, \delta_{(0)})] \text{ на } L,$$

(IX.281)

где  $\varphi_{(0)}^{(2)}(t)$ ,  $\psi_{(0)}^{(2)}(t)$  и  $\varphi_{(1)}^{(2)}(t)$ ,  $\psi_{(1)}^{(2)}(t)$  — граничные значения потенциалов второго порядка для областей, занятых плоскостью и кольцом соответственно;  $m = \frac{{}^0H_{(1)}}{{}^0H_{(0)}}$ .

Поскольку внутренний контур кольца свободен от внешних усилий, т. е. на  $L_1$  имеет место условие  $p(t) = 0$ , то

$$F_{1(1)}^*(t, \bar{t}, \gamma'_{(1)}, \delta'_{(1)}) = F_{1(1)}(t, \bar{t}, \gamma_{(1)}, \delta_{(1)}) \text{ на } L_1.$$

Вследствие этого, сравнивая граничные условия вариантов Е и И (IX.211), (IX.212) и (IX.215), (IX.216), убеждаемся в том, что в рассматриваемой задаче граничные условия варианта И отличаются от граничных условий (IX.280) и (IX.281) только тем, что в функциях  $F_1(t, \bar{t}, \gamma, \delta)$  и  $F_2(t, \bar{t}, \gamma, \delta)$  постоянные  $\gamma, \delta$  заменены  $\gamma', \delta'$ , а  $t$  — аффикс контуров  $L$  и  $L_1$  в начальном состоянии. Таким образом, потенциалы второго порядка в обоих вариантах данной задачи определяются одновременно из граничных условий (IX.280) и (IX.281).

Потенциалы первого порядка

$$\varphi_{(0)}^{(1)}(z) = \Gamma^{(1)}z + \alpha_{-1}^{(1)} \frac{R^2}{z}, \quad (\text{IX.282})$$

$$\psi_{(0)}^{(1)}(z) = \Gamma'^{(1)}z + \beta_{-1}^{(1)} \frac{R^2}{z} + \beta_{-3}^{(1)} \frac{R^4}{z^3};$$

$$\varphi_{(1)}^{(1)}(z) = \alpha_3^{(1)} \frac{z^3}{R^2} + \alpha_1^{(1)}z + \alpha_{-1}^{(1)} \frac{R^2}{z},$$

(IX.283)

$$\psi_{(1)}^{(1)}(z) = b_1^{(1)}z + b_{-1}^{(1)} \frac{R^2}{z} + b_{-3}^{(1)} \frac{R^4}{z^3}.$$

Подставляя эти потенциалы в функции  $F_1(z, \bar{z}, \gamma, \delta)$  и  $F_2(z, \bar{z}, \gamma, \delta)$  из граничных условий (IX.280) и (IX.281), методом комплексных рядов Фурье находим

$$\varphi_{(0)}^{(2)}(z) = \Gamma^{(2)}z + \sum_{n=1}^2 \alpha_{-(2n-1)}^{(2)} \frac{R^{2n}}{z^{2n-1}}, \quad (\text{IX.284})$$

$$\psi_{(0)}^{(2)}(z) = \Gamma'^{(2)}z + \sum_{n=1}^3 \beta_{-(2n-1)}^{(2)} \frac{R^{2n}}{z^{2n-1}};$$

$$\varphi_{(1)}^{(2)}(z) = \sum_{n=-2}^2 a_{2n+1}^{(2)} \frac{z^{2n+1}}{R^{2n}}, \quad \psi_{(1)}^{(2)}(z) = \sum_{n=-2}^2 b_{2n-1}^{(2)} \frac{z^{2n-1}}{R^{2(n-1)}}. \quad (\text{IX.285})$$

Коэффициенты потенциалов второго порядка определяются следующими соотношениями (при  $k_1 = k_2 = 0$ ):

$$a_{-3}^{(2)} = \frac{p^3}{d_0} \{[(1 + mk_{(0)}) A'_{-3} + p^3 D_1] T_0 + 5p^3 (1 + mk_{(0)})(1 - p^2) D_3\},$$

$$a_{-1}^{(2)} = \frac{p}{d_1} \{[(1 + mk_{(0)}) A'_{-1} + p D_2] T_1 + 3p (1 + mk_{(0)})(1 - p^2) D_4\},$$

$$a_1^{(2)} = \frac{1}{d_2} \{mA_1 + A_{1,1} - m^2 (Q_1 + Q_{1,1}) + (1 - m) p A'_1 + m^2 (k_{(0)} + 1) \Gamma^{(2)}\},$$

$$a_3^{(2)} = \frac{1}{T_1} [D_4 - (1 - m)(1 - p^2) a_{-1}^{(2)}], \quad a_5^{(2)} = \frac{1}{T_0} [D_3 - 3(1 - m)(1 - p^2) a_{-3}^{(2)}];$$

$$b_{-5}^{(2)} = p^2 [A'_5 p^3 + 3a_{-3}^{(2)} - p^8 a_5^{(2)}], \quad b_{-3}^{(2)} = p^2 [p A'_3 + a_{-1}^{(2)} - p^4 a_3^{(2)}],$$

$$b_{-1}^{(2)} = p [A'_1 - 2p a_1^{(2)}], \quad b_1^{(2)} = A_{-1} - a_{-1}^{(2)} - 3a_3^{(2)} + m [\mathbf{F}'^{(2)} + \alpha_{-1}^{(2)} - Q_{-1}],$$

$$b_3^{(2)} = A_{-3} - a_{-3}^{(2)} - 5a_5^{(2)} + m (\alpha_{-3}^{(2)} - Q_{-3}); \quad (\text{IX.286})$$

$$\alpha_{-1}^{(2)} = \frac{(k_{(1)} + 1) a_{-1}^{(2)} - D_5}{m(1 + mk_{(1)})}, \quad \alpha_{-3}^{(2)} = \frac{(k_{(1)} + 1) a_{-3}^{(2)} - D_6}{m(1 + mk_{(1)})};$$

$$\beta_{-1}^{(2)} = \frac{1}{m} [2a_1^{(2)} + b_{-1}^{(2)} - m(2\Gamma^{(2)} - Q_1) - A_{11}],$$

$$\beta_{-3}^{(2)} = \frac{1}{m} [a_3^{(2)} - a_{-1}^{(2)} + b_{-3}^{(2)} + m(\alpha_{-1}^{(2)} + Q_3) - A_3],$$

$$\beta_{-5}^{(2)} = \frac{1}{m} [a_5^{(2)} - 3a_{-3}^{(2)} + b_{-5}^{(2)} + m(3\alpha_{-3}^{(2)} + Q_5) - A_5],$$

где

$$d_0 = 15p^6(1 - p^2)^2(1 - m)(1 + mk_{(0)}) + [p^6(k_{(1)} - mk_{(0)}) + (1 + mk_{(0)})] T_0,$$

$$d_1 = 3p^2(1 - p^2)^2(1 - m)(1 + mk_{(0)}) + [p^2(k_{(1)} - mk_{(0)}) + (1 + mk_{(0)})] T_1,$$

$$d_2 = 2[p^2(1 - m) + m] + k_{(1)} - 1;$$

$$T_0 = m + k_{(1)} + (1 - m)p^{10}, \quad T_1 = m + k_{(1)} + (1 - m)p^6;$$

$$D_1 = m^2[k_{(0)}Q_{-3} - Q_{-3,1}] + A_{-3,1} - mk_{(0)}A_{-3}, \quad (IX.287)$$

$$D_2 = m^2[k_{(0)}Q_{-1} - Q_{-1,1}] + A_{-1,1} - mk_{(0)}A_{-1} - m^2(k_{(0)} + 1)\Gamma^{(2)},$$

$$D_3 = mA_5 + A_{5,1} - m^2(Q_5 + Q_{5,1}) + (1 - m)p^5A'_5,$$

$$D_4 = mA_3 + A_{3,1} - m^2(Q_3 + Q_{3,1}) + (1 - m)p^3A'_3,$$

$$D_5 = A_{-1} + A_{-1,1} - m(Q_{-1} + mQ_{-1,1}) + m(1 - m)\Gamma^{(2)},$$

$$D_6 = A_{-3} + A_{-3,1} - m(Q_{-3} + mQ_{-3,1});$$

$$A'_5 = \gamma_{(1)}(M'_4V'_{-1} + S'_2V'_3) - k_{3(1)}p^{-3}(a_{-1}^{(1)})^2,$$

$$A'_3 = \gamma_{(1)}[(M'_4 + S'_2)V'_1 + M'_2V'_{-1} + S'_0V'_3] + 2k_{3(1)}p^{-1}a_1^{(1)}a_{-1}^{(1)},$$

$$A'_1 = \gamma_{(1)}[(M'_2 + S'_0)V'_1 + (M'_0 + S'_2)V'_{-1} + (M'_4 + S'_2)V'_3] - \\ - k_{3(1)}p[(a_1^{(1)})^2 - 6a_3^{(1)}a_{-1}^{(1)}],$$

$$A'_{-1} = \gamma_{(1)}[(M'_0 + S'_{-2})V'_1 + S'_0V'_{-1} + M'_2V'_3] - 6k_{3(1)}p^3a_1^{(1)}a_3^{(1)},$$

$$A'_{-3} = \gamma_{(1)}[S'_{-2}V'_{-1} + M'_0V'_3] - 9k_{3(1)}p^5(a_3^{(1)})^2,$$

$$A_{5,1} = \gamma_{(1)}[S_2V_3 - M_4V_{-1}] - k'_{3(1)}(a_{-1}^{(1)})^2 + \frac{3}{5}k'_{1(1)}a_{-1}^{(1)}b_{-3}^{(1)} - \frac{9}{5}k'_{2(1)}(a_3^{(1)})^2, \quad (IX.288)$$

$$A_{3,1} = \gamma_{(1)}[S_0V_3 - M_2V_{-1} + (S_2 - M_4)V_1] + 2k'_{3(1)}a_1^{(1)}a_{-1}^{(1)} - \\ - \frac{1}{3}k'_{1(1)}(3a_1^{(1)}b_{-3}^{(1)} - a_{-1}^{(1)}b_{-1}^{(1)}) - 2k'_{2(1)}a_1^{(1)}a_3^{(1)},$$

$$A_{1,1} = \gamma_{(1)}[(S_{-2} - M_4)V_3 + (S_2 - M_0)V_{-1} + (S_0 - M_2)V_1] - k'_{3(1)}[(a_1^{(1)})^2 - \\ - 6a_3^{(1)}a_{-1}^{(1)}] - k'_{1(1)}[a_{-1}^{(1)}b_1^{(1)} + a_1^{(1)}b_{-1}^{(1)} + 9a_3^{(1)}b_{-3}^{(1)}] - k'_{2(1)}[(a_1^{(1)})^2 - 6a_3^{(1)}a_{-1}^{(1)}],$$

$$A_{-1,1} = \gamma_{(1)}[-M_2V_3 + S_0V_{-1} + (S_{-2} - M_0)V_1] - 6k'_{3(1)}a_1^{(1)}a_3^{(1)} - \\ - k'_{1(1)}(a_1^{(1)}b_1^{(1)} - 3a_3^{(1)}b_{-1}^{(1)}) - 2k'_{2(1)}a_{-1}^{(1)}a_1^{(1)},$$

$$A_{-3,1} = \gamma_{(1)}[-M_0V_3 + S_{-2}V_{-1}] - 9k'_{3(1)}(a_3^{(1)})^2 - k'_{1(1)}a_3^{(1)}b_1^{(1)} + \frac{k'_{2(1)}}{3}(a_{-1}^{(1)})^2;$$

$$S'_0 = (1 + \delta_{(1)})a_1^{(1)}, \quad S_2 = 3p^2a_3^{(1)} - \delta_{(1)}p^{-2}a_{-1}^{(1)},$$

$$\begin{aligned}
S_{-2} &= 3\delta_{(1)}\rho^2 a_3^{(1)} - \rho^{-2} a_{-1}^{(1)}, & S_0 &= (k_{(1)} - \delta_{(1)}) a_1^{(1)}, \\
S'_2 &= 3k_{(1)} a_3^{(1)} + \delta_{(1)} a_{-1}^{(1)}, & S'_{-2} &= -(3\delta_{(1)} a_3^{(1)} + k_{(1)} a_{-1}^{(1)}); \\
M'_0 &= 6\rho^2 a_3^{(1)} + b_1^{(1)}, & M'_2 &= -\rho^{-2} b_{-1}^{(1)}, \\
M'_4 &= \rho^{-2} (2a_{-1}^{(1)} - 3\rho^{-2} b_{-3}^{(1)}); \\
V'_3 &= k_{(1)} \rho^3 a_3^{(1)} + \rho^{-1} a_{-1}^{(1)} - \rho^{-3} b_{-3}^{(1)}, \\
V'_1 &= (k_{(1)} - 1) \rho a_1^{(1)} - \rho^{-1} b_{-1}^{(1)}, \\
V'_{-1} &= k_{(1)} \rho^{-1} a_{-1}^{(1)} - 3\rho^3 a_3^{(1)} - \rho b_1^{(1)}; & \rho &= \frac{R_1}{R}.
\end{aligned} \tag{IX.289}$$

Величины  $A_{2n+1}$ ,  $V_r$ ,  $M_j$  определяются соответственно из  $A'_{2n+1}$ ,  $V'_r$ ,  $M'_j$  при  $\rho = 1$ ; величины  $Q_{2n+1}$ ,  $Q_{2n+1,1}$  определяются соответственно из  $A_{2n+1}$ ,  $A_{2n+1,1}$ , если заменить упругие постоянные кольца на упругие постоянные пластинки, а коэффициенты  $a_{2n+1}^{(1)}$ ,  $b_{2n-1}^{(1)}$  ( $n = 1, 0, -1$ ) заменить соответственно на  $0$ ,  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\alpha_{-1}^{(1)}$ ,  $\Gamma'^{(1)}$ ,  $\beta_{-1}^{(1)}$ ,  $\beta_{-3}^{(1)}$ .

Как указывалось выше, для нахождения коэффициентов потенциалов второго порядка в варианте И достаточно заменить в формулах (IX.286) — (IX.289) постоянные  $\gamma$ ,  $\delta$  на  $\gamma'$ ,  $\delta'$  и считать, что  $\rho = \frac{R_1^*}{R^*}$ , где  $R_1^*$ ,  $R^*$  — внутренний радиус кольца и радиус контура сая в начальном состоянии.

Отметим, что, полагая в формулах (IX.286) — (IX.289)  $\rho = R_1/R = 0$ , получаем коэффициенты для потенциалов второго порядка для задачи об упругом равновесии плоскости с круговым отверстием, в которое впаивается сплошная шайба из другого материала.

В полярной системе координат деформированного состояния компоненты напряжений на контуре сая в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned}
\sigma_\theta &= 2\Gamma^{(1)} - \beta_{-1}^{(1)} + (\Gamma'^{(1)} - 3\beta_{-3}^{(1)}) \cos 2\theta + \frac{1}{2^0 H_{(0)}} [B_1 + B_2 \cos 2\theta + B_3 \cos 4\theta], \\
\tau_{r,\theta} &= (\Gamma'^{(1)} + 3\beta_{-3}^{(1)} - 2\alpha_{-1}^{(1)}) \sin 2\theta + \frac{1}{2^0 H_{(0)}} [B_7 \sin 2\theta + B_8 \sin 4\theta],
\end{aligned} \tag{IX.290}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= 2\Gamma^{(1)} + \beta_{-1}^{(1)} + (3\beta_{-3}^{(1)} - \Gamma'^{(1)} - 4\alpha_{-1}^{(1)}) \cos 2\theta + \frac{1}{2^0 H_{(0)}} [B_4 + B_5 \cos 2\theta + \\
&\quad + B_6 \cos 4\theta],
\end{aligned}$$

где

$$B_1 = X_1 + X'_1, \quad B_2 = X_2 + X'_2, \quad B_3 = X_3 + X'_3,$$

$$B_4 = X_1 - X'_1, \quad B_5 = X_2 - X'_2, \quad B_6 = X_3 - X'_3;$$

$$X_1 = \gamma_{(0)} \{ (5 - k_{(0)} \delta_{(0)} - 4\delta_{1(0)}) \alpha_{-1}^{(1)2} + 9\beta_{-3}^{(1)2} + \beta_{-1}^{(1)2} + 4(\delta_{1(0)} - 3) \alpha_{-1}^{(1)} \beta_{-3}^{(1)} \},$$

$$X_2 = -2\alpha_{-1}^{(2)} + \gamma_{(0)} \{ 4(\delta_{1(0)} - 1) \alpha_{-1}^{(1)} \beta_{-1}^{(1)} + 6\beta_{-1}^{(1)} \beta_{-3}^{(1)} - 2\Gamma'^{(1)} \beta_{-1}^{(1)} +$$

$$+ 2[2k_{(0)} - (1 - k_{(0)}\delta_{(0)}) - 2\delta_{1(0)}(k_{(0)} - 1)] \Gamma^{(1)} \alpha_{-1}^{(1)},$$

$$X_3 = -6\alpha_{-3}^{(2)} + \gamma_{(0)} \{4(1 + \delta_{1(0)}) \Gamma^{(1)} \alpha_{-1}^{(1)} - 6\Gamma^{(1)} \beta_{-3}^{(1)} - 2k_{(0)}(1 + \delta_{1(0)}) \alpha_{-1}^{(1)2}\};$$

$$X_1' = -\beta_{-1}^{(2)} + \gamma_{(0)} \{-2\alpha_{-1}^{(1)} V_\alpha - (2 + \delta_{(0)} - k_{(0)}) \Gamma^{(1)} \beta_{-1}^{(1)} - (\delta_{(0)} - k_{(0)}) \alpha_{-1}^{(1)} \Gamma^{(1)} - \\ - \delta_{1(0)} [6V_\beta V_\varepsilon + 2\beta_{-1}^{(1)} V_\gamma] - 2\delta_{2(0)} \alpha_{-1}^{(1)} V_\delta\},$$

$$X_2' = 2\alpha_{-1}^{(2)} - 3\beta_{-3}^{(2)} + \gamma_{(0)} \{(2 + \delta_{(0)} - k_{(0)}) (\alpha_{-1}^{(1)} \beta_{-1}^{(1)} + \Gamma^{(1)} V_\alpha) - \\ - \delta_{1(0)} [6V_\gamma V_\varepsilon + 2\beta_{-1}^{(1)} V_\delta + 2\beta_{-1}^{(1)} V_\beta] - 2\delta_{2(0)} \alpha_{-1}^{(1)} V_\gamma\} + 4k_{3(0)} \Gamma^{(1)} \alpha_{-1}^{(1)},$$

$$X_3' = 12\alpha_{-3}^{(2)} - 5\beta_{-5}^{(2)} + \gamma_{(0)} \{(k_{(0)} - \delta_{(0)}) \alpha_{-1}^{(1)} V_\alpha - 2\Gamma^{(1)} \alpha_{-1}^{(1)} - 6\delta_{1(0)} V_\delta V_\varepsilon - \\ - 2\delta_{2(0)} \alpha_{-1}^{(1)} V_\beta\} - 4k_{3(0)} \alpha_{-1}^{(1)2}; \quad (\text{IX.291})$$

$$B_7 = 3\beta_{-3}^{(2)} - 2\alpha_{-1}^{(2)} + \gamma_{(0)} \{(2 - \delta_{(0)} + k_{(0)}) \alpha_{-1}^{(1)} \beta_{-1}^{(1)} - (2 + \delta_{(0)} - k_{(0)}) \Gamma^{(1)} V_\alpha - \\ - \delta_{1(0)} [2\beta_{-1}^{(1)} V_\beta - 6V_\varepsilon V_\gamma - 2\beta_{-1}^{(1)} V_\delta] + 2\delta_{2(0)} \alpha_{-1}^{(1)} V_\gamma\} - 4k_{3(0)} \Gamma^{(1)} \alpha_{-1}^{(1)},$$

$$B_8 = 5\beta_{-5}^{(2)} - 12\alpha_{-3}^{(2)} + \gamma_{(0)} \{(\delta_{(0)} - k_{(0)}) \alpha_{-1}^{(1)} V_\alpha - 2\Gamma^{(1)} \alpha_{-1}^{(1)} + \\ + 6V_\delta V_\varepsilon \delta_{1(0)} + 2\delta_{2(0)} \alpha_{-1}^{(1)} V_\beta\} + 4k_{3(0)} \alpha_{-1}^{(1)2};$$

$$V_\alpha = 2\alpha_{-1}^{(1)} - 3\beta_{-3}^{(1)}, \quad V_\beta = \alpha_{-1}^{(1)} - \beta_{-3}^{(1)},$$

$$V_\gamma = (k_{(0)} - 1) \Gamma^{(1)} - \beta_{-1}^{(1)}, \quad V_\delta = k_{(0)} \alpha_{-1}^{(1)} - \Gamma^{(1)},$$

$$V_\varepsilon = 2\beta_{-3}^{(1)} - \alpha_{-1}^{(1)}.$$

В варианте Е нужно положить

$$\delta_{1(0)} = 1; \quad \delta_{2(0)} = \delta_{(0)}.$$

В варианте И нужно положить

$$\delta_{1(0)} = 1 - \frac{1}{\gamma_{(0)}}, \quad \delta_{2(0)} = \delta_{(0)} - \frac{1}{\gamma_{(0)}}.$$

По формулам (IX.290), (IX.291) и (IX.284) — (IX.289) можно определить напряженное состояние в точках контура спая как при одноосном растяжении — сжатии ( $N_2=0$ ,  $N_1=N$ ), так и при всестороннем растяжении — сжатии ( $N_1=N_2=N$ ), а также при чистом сдвиге ( $N_1=$   
 $= -N_2=N$ ) как для сжимаемого, так и несжимаемого материала.

**Отверстие с впаынным абсолютно жестким включением (кольцом или шайбой).** Предположим, что рассматриваемая область  $S$  представляет собой бесконечную плоскость с отверстием, которое обладает хотя бы одной осью симметрии. Допустим, что в это отверстие вложено (без натяга) абсолютно жесткое включение в виде кольца или сплошной шайбы. По контуру соприкосновения жесткое включение припаяно к окружающему материалу упругой плоскости. Предположим также, что

плоскость  $S$  в достаточно удаленных от отверстия точках находится под действием внешних усилий  $N_1 = \text{const}$  и  $N_2 = \text{const}$ , т. е. в двухосном напряженном состоянии, причем усилия  $N_1$  на бесконечности действуют вдоль оси симметрии отверстия, а усилия  $N_2$  — перпендикулярно к этой оси. Жесткое включение свободно от внешних сил, кроме сил взаимодействия с окружающим материалом материалом упругой плоскости. Рассмотрим равновесие возле этого абсолютно жесткого включения\*.

При этих предположениях поворот жесткого включения отсутствует, поэтому на контуре спая  $L$  должны выполняться следующие условия\*\*:

$$D(z, \bar{z}) = g(t) = 0 \quad (\text{IX.292})$$

или

$$D^{(k)}(z, \bar{z}) = g^{(k)}(t) = 0. \quad (\text{IX.293})$$

Поскольку в данной задаче главный вектор усилий, действующих как на контур спая, так и на контур отверстия, равен нулю, то  $X^{(k)} = Y^{(k)} = 0$  ( $k = 1, 2$ ) и, как следует из формул (IX.181),  $E_k = 0$ . Тогда, если ввести отображающую функцию

$$z = \omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{a_1}{\zeta} + \frac{a_2}{\zeta^2} + \dots\right), \quad (\text{IX.294})$$

то потенциалы второго порядка будут иметь вид

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\zeta) &= \Gamma^{(2)}R\zeta + \varphi_0^{(2)}(\zeta), \\ \psi^{(2)} &= \Gamma'^{(2)}R\zeta + \psi_0^{(2)}(\zeta). \end{aligned} \quad (\text{IX.295})$$

Функции  $\varphi_0^{(2)}(\zeta)$  и  $\psi_0^{(2)}(\zeta)$  определяются из граничного условия (IX.235) второй основной задачи:

$$k\varphi_0^{(2)}(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \bar{\varphi}_0^{(2)'}\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \bar{\psi}_0^{(2)}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = g_1\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) \text{ на } \gamma_1, \quad (\text{IX.296})$$

где  $\gamma_1$  — окружность единичного радиуса;  $\sigma = e^{i\theta}$ ;

$$g_1\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) = F_2\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) - k\Gamma^{(2)}R\sigma + \bar{\Gamma}'^{(2)}\frac{R}{\sigma} + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}R\Gamma^{(2)}. \quad (\text{IX.297})$$

Полагая в выражении для функции  $F_2(\zeta, \bar{\zeta}, \gamma, \delta)$  (IX.229)  $k'_1 = k'_2 = 0$  и учитывая, что на  $L$   $D^{(1)} = 0$ , получаем

$$F_2\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta\right) = -k'_3\omega(\sigma)\left[\bar{\Phi}^{(1)}\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]^2 \text{ на } \gamma_1. \quad (\text{IX.298})$$

\* См. Ю. И. Койфман [4], Г. Н. Савин и Ю. И. Койфман [2].

\*\* Поскольку контур отверстия не деформируется, задача рассматривается лишь в одном варианте.

Как и в линейной теории\* функции  $\varphi_0^{(2)}(\zeta)$  и  $\psi_0^{(2)}(\zeta)$  найдем из функциональных уравнений

$$\varphi_0^{(2)}(\zeta) = -\frac{1}{2k\pi i} \int_{\gamma_1} \left[ \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0^{(2)'}} \left( \frac{1}{\sigma} \right) + g_1 \left( \sigma, \frac{1}{\sigma}, \gamma, \delta \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \varphi_0^{(2)}(\infty), \quad (\text{IX.299})$$

$$\psi_0^{(2)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \left[ \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0^{(2)'}(\sigma) + \bar{g}_1 \left( \frac{1}{\sigma}, \sigma, \gamma, \delta \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} + \psi_0^{(2)}(\infty).$$

Рассмотрим подробнее частный случай, а именно определим потенциалы второго порядка для случая, когда контур отверстия имеет эллиптическую форму. Потенциалы первого порядка в данной задаче при принятых предположениях имеют вид

$$\varphi^{(1)}(\zeta) = \Gamma^{(1)} R \zeta + (\Gamma^{(1)} m + \Gamma'^{(1)}) \frac{R}{k \zeta}, \quad (\text{IX.300})$$

$$\psi^{(1)}(\zeta) = \Gamma'^{(1)} R \zeta + \Gamma^{(1)} R \left( \frac{k}{\zeta} - \frac{1+m}{\zeta^2 - m} \zeta \right) + (\Gamma^{(1)} m + \Gamma'^{(1)}) \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \cdot \frac{R}{k \zeta},$$

где  $m$  и  $R$  — параметры отображающей функции  $z = R \left( \zeta + \frac{m}{\zeta} \right)$ .

Из функциональных уравнений (IX.299) находим потенциалы

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}(\zeta) &= \Gamma^{(2)} R \zeta + (\Gamma^{(2)} m + \Gamma'^{(2)} - k'_3 m \Gamma^{(1)2}) \frac{R}{k \zeta}, \\ \psi^{(2)}(\zeta) &= \Gamma'^{(2)} R \zeta + \Gamma^{(2)} R \left( \frac{k}{\zeta} - \frac{1+m^2}{\zeta^2 - m} \zeta \right) + \left[ \Gamma^{(2)} m + \Gamma'^{(2)} - \right. \\ &\quad \left. - k'_3 m \Gamma^{(1)2} \right] \frac{1+m\zeta^2}{\zeta^2 - m} \cdot \frac{R}{k \zeta} + R k'_3 \left[ \frac{(\Gamma^{(1)} \zeta^2 - \alpha)^2}{\zeta (\zeta^2 - m)^2} - \right. \\ &\quad \left. - m \frac{2\zeta^3 \Gamma^{(1)} (\alpha - m \Gamma^{(1)}) + \zeta (\Gamma^{(1)2} m^2 - \alpha^2)}{(\zeta^2 - m)^2} \right], \end{aligned} \quad (\text{IX.301})$$

где

$$\alpha = \frac{1}{k} \left( \Gamma^{(1)} m + \Gamma'^{(1)} \right).$$

Полагая в формулах (IX.301)  $m = 0$ , получаем потенциалы второго порядка для кругового отверстия радиуса ( $z = R \zeta$ )

$$\varphi^{(2)}(\zeta) = \Gamma^{(2)} R \zeta + \alpha_{-1}^{(2)} \frac{R}{\zeta}, \quad \psi^{(2)}(\zeta) = \Gamma'^{(2)} R \zeta + \beta_{-1}^{(2)} \frac{R}{\zeta} + \beta_{-3}^{(2)} \frac{R}{\zeta^3} + \beta_{-5}^{(2)} \frac{R}{\zeta^5}, \quad (\text{IX.302})$$

где

$$\alpha_{-1}^{(2)} = \frac{\Gamma'^{(2)}}{k}, \quad \beta_{-1}^{(2)} = (k-1) \Gamma^{(2)} + k'_3 \Gamma^{(1)2},$$

$$\beta_{-3}^{(2)} = \frac{1}{k} [\Gamma'^{(2)} - 2k'_3 \Gamma^{(1)} \Gamma'^{(1)}], \quad \beta_{-5}^{(2)} = \frac{k'_3}{k^2} \Gamma'^{(1)2}.$$

\* См. § 1 гл. I.

Подставив полученные выражения в формулы для компонент напряженного состояния, можно исследовать концентрацию напряжений в общем случае, т. е. для любого эллиптического отверстия. Здесь мы ограничимся изучением концентрации напряжений в случае плоской деформации несжимаемого материала.

Компоненты напряжений на контуре сая для эллиптического отверстия определяются по формулам

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{1}{2} \left\{ N_1 + N_2 + \frac{2}{d} (N_1 - N_2) (\cos 2\vartheta - m) - \frac{(N_1 - N_2)^2}{8\mu} \left[ 1 - \frac{6(1 - \cos 4\vartheta)}{d^2} \right] \right\}, \quad (\text{IX.303})$$

$$\sigma_{\rho} = \frac{1}{2} \left\{ N_1 + N_2 + \frac{2}{d} (N_1 - N_2) (\cos 2\vartheta - m) - \frac{(N_1 - N_2)^2}{8\mu} \left[ 1 + \frac{2(1 - \cos 4\vartheta)}{d^2} \right] \right\},$$

$$\tau_{\rho\vartheta} = -\frac{(N_1 - N_2)}{d} \sin 2\vartheta,$$

где

$$d = 1 - 2m \cos 2\vartheta + m^2.$$

Положив в (IX.303)  $m = 0$ , получим формулы для кругового отверстия

$$\sigma_{\vartheta} = \frac{1}{2} \left\{ N_1 + N_2 + 2(N_1 - N_2) \cos 2\vartheta + \frac{(N_1 - N_2)^2}{8\mu} [5 - 6 \cos 4\vartheta] \right\}, \quad (\text{IX.304})$$

$$\sigma_r = \frac{1}{2} \left\{ (N_1 + N_2) + 2(N_1 - N_2) \cos \vartheta - \frac{(N_1 - N_2)^2}{8\mu} [3 - 2 \cos 2\vartheta] \right\},$$

$$\tau_{r\vartheta} = -(N_1 - N_2) \sin 2\vartheta.$$

Значения коэффициентов концентрации напряжений  $\sigma_{\vartheta}/N$  для кругового и эллиптического ( $m=1/3$ ) отверстия при некоторых частных случаях нагрузки на бесконечности при плоской деформации несжимаемого материала с функцией энергии в форме Муни приведены ниже:

	Круговое отверстие	
Одноосное растяжение—сжатие	Чистый сдвиг	Всестороннее растяжение—сжатие
$1,5 \left( 1 \mp 0,041 \frac{N}{\mu} \right)$	$2 \left( 1 \pm 0,125 \frac{N}{\mu} \right)$	1
	Эллиптическое отверстие	
Растяжение—сжатие вдоль большой оси	Растяжение—сжатие вдоль малой оси	Всестороннее растяжение—сжатие
$2 \left( 1 \mp 0,03 \frac{N}{\mu} \right)$	$1,25 \left( 1 \mp 0,05 \frac{N}{\mu} \right)$	1

В рассматриваемых задачах отличие максимальных напряжений на контуре сая от напряжений, подсчитанных по формулам классической



линейной теории, является незначительным. Это обстоятельство, очевидно, связано с тем, что контур отверстия в процессе деформации плоскости остается неизменным.

**Круговое отверстие, подкрепленное тонким (круговым) упругим стержнем.** Рассмотрим бесконечную плоскость с круговым отверстием, контур которого подкреплен тонким упругим стержнем постоянного поперечного сечения\*. Предположим, что одна из главных осей инерции каждого поперечного сечения подкрепляющего кольца лежит в плоскости пластины и соприкосновение пластины с кольцом происходит по контуру оси кольца. Следовательно, подкрепляющее кольцо рассматривается как упругая линия, работающая лишь на растяжение и изгиб. Предположим также, что упругое равновесие пластины (или массивного тела при плоской деформации) описывается уравнениями плоской нелинейной теории, а упругое равновесие кольца — уравнениями теории малых деформаций тонких линейно-упругих криволинейных стержней. Выберем начало системы координат  $(z, \bar{z})$  в центре отверстия.

На контуре соприкосновения  $L$  пластины с кольцом выполняются следующие условия:

$$u = u_0, \quad v = v_0, \quad X_n = X_{n,0}, \quad Y_n = Y_{n,0},$$

или

$$u + iv = u_0 + iv_0,$$

$$i \int_0^s (X_n + iY_n) ds = i \int_0^s (X_{n,0} + iY_{n,0}) ds + C, \quad (\text{IX.305})$$

где  $u, v, X_n, Y_n$  — компоненты смещения и напряжения по осям декартовой системы координат для пластин;  $u_0, v_0, X_{n,0}, Y_{n,0}$  — аналогичные величины для оси подкрепляющего кольца.

Закон Гука для подкрепляющего кольца возьмем в виде

$$\beta_0 = \frac{Q_1}{G_1} + \frac{M}{eG_1}, \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{G_2} + \frac{\beta_0}{e}, \quad (\text{IX.306})$$

$\beta_0 = \beta_0(s)$  — относительное удлинение элемента оси кольца;  $\theta = \theta(s)$  — величина поворота элемента оси в результате деформации;  $e$  — радиус кривизны кольца после деформации;  $G_1, G_2$  — жесткости на растяжение и изгиб;  $Q_1$  — нормальная сила;  $M$  — изгибающий момент в поперечном сечении кольца.

Связь между нормальной силой  $Q_1$ , перерезывающей силой  $Q_2$ , изгибающим моментом  $M$  и нагрузкой, действующей на кольцо, определяется формулами, приведенными в работе М. П. Шереметьева [1] или в работе Ю. И. Койфмана [1].

\* См. Ю. И. Койфман [1], Г. Н. Савин и Ю. И. Койфман [2].

Комплексное смещение оси кольца можно представить в виде \*

$$u_0 + iv_0 = \int_0^s e^{i\alpha} (i\beta_0 - \theta) ds + C_0,$$

где  $\alpha$  — угол, образованный нормалью с осью  $Oy^1$ .

Поскольку предполагается, что деформации стержня удовлетворяют (геометрически) линейной теории упругости, то вид этих соотношений не изменится, если отнести входящие в них величины к длине дуги недеформированной оси.

Предположим, что проекции усилий для пластины и кольца представляются рядами по параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} X_n + iY_n &= 2^0 H \varepsilon [(X_n^{(1)} + iY_n^{(1)}) + \varepsilon (X_n^{(2)} + iY_n^{(2)}) + \dots], \\ X_{n,0} + iY_{n,0} &= 2^0 H \varepsilon [(X_{n,0}^{(1)} + iY_{n,0}^{(1)}) + \varepsilon (X_{n,0}^{(2)} + iY_{n,0}^{(2)}) + \dots]. \end{aligned} \quad (\text{IX.307})$$

Так как  $Q_1$  и  $M$  выражаются через проекции усилий, то они, а вместе с ними и величины  $\beta_0$  и  $\theta$ , представляются в виде таких же рядов. Поэтому можно записать

$$D_0 = u_0 + iv_0 = 2^0 H \varepsilon [D_0^{(1)} + \varepsilon D_0^{(2)} + \dots] + C_0, \quad (\text{IX.308})$$

где

$$D_0^k = \int_0^s e^{i\alpha} (i\beta_0^{(k)} - \theta^{(k)}) ds.$$

Поскольку, с другой стороны

$$D = u + iv = \varepsilon D^{(1)} + \varepsilon^2 D^{(2)} + \dots,$$

то граничные условия (IX.305) для членов первого и второго порядков можно представить в таком виде:

$$D^{(1)} = 2^0 H \int_0^s e^{i\alpha} (i\beta_0^{(1)} - \theta^{(1)}) ds + C_0, \quad (\text{IX.309})$$

$$i \int_0^s (X_n^{(1)} + iY_n^{(1)}) ds = i \int_0^s (X_{n,0}^{(1)} + iY_{n,0}^{(1)}) ds + C;$$

$$D^{(2)} = 2^0 H \int_0^s e^{i\alpha} (i\beta_0^{(2)} - \theta^{(2)}) ds, \quad (\text{IX.310})$$

$$i \int_0^s (X_n^{(2)} + iY_n^{(2)}) ds = i \int_0^s (X_{n,0}^{(2)} + iY_{n,0}^{(2)}) ds \text{ на } L.$$

\* См. Ю. И. Койфман [1].

Выражая левые части условий (IX.310) через граничные значения комбинации функций комплексного переменного, получаем граничные условия для определения потенциалов первого и второго порядков. В частности, для потенциалов второго порядка

$$\varphi^{(2)}(t) + t\overline{\varphi^{(2)'}}(t) + \overline{\psi^{(2)}}(t) - F_1(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = i \int_0^s (X_{n,0}^{(2)} + iY_{n,0}^{(2)}) ds, \quad (\text{IX.311})$$

$$k\varphi^{(2)}(t) - t\overline{\varphi^{(2)'}}(t) - \overline{\psi^{(2)}}(t) - F_2(t, \bar{t}, \gamma, \delta) = 2^0 H \int_0^s e^{i\alpha} (i\beta_0^{(2)} - \theta^{(2)}) ds,$$

где  $t$  — аффикс точки деформированного контура.

При решении задачи в координатах недеформированного состояния необходимо в граничных условиях (IX.311) заменить постоянные  $\gamma, \delta$  на  $\gamma', \delta'$ ;  $t$  в этом случае — аффикс точки недеформированного контура.

Предположим, что напряженное состояние на бесконечности является однородным. Потенциалы первого порядка для плоскости

$$\varphi^{(1)}(z) = \Gamma^{(1)}z + \alpha_{-1}^{(1)} \frac{R^2}{z}, \quad (\text{IX.312})$$

$$\psi^{(1)}(z) = \Gamma'^{(1)}z + \beta_{-1}^{(1)} \frac{R^2}{z} + \beta_{-3}^{(1)} \frac{R^4}{z^3}.$$

Из (IX.312) находим потенциалы второго порядка

$$\varphi^{(2)}(z) = \Gamma^{(2)}z + \alpha_{-1}^{(2)} \frac{R^2}{z} + \alpha_{-3}^{(2)} \frac{R^4}{z^3}, \quad (\text{IX.313})$$

$$\psi^{(2)}(z) = \Gamma'^{(2)}z + \beta_{-1}^{(2)} \frac{R^2}{z} + \beta_{-3}^{(2)} \frac{R^4}{z^3} + \beta_{-5}^{(2)} \frac{R^6}{z^5},$$

где

$$\alpha_{-1}^{(2)} = \frac{1}{d_1} \{3^0 HR (3G_2 - R^2 G_1) (T_3 + T_{3,1}) + [4^0 H^2 R^4 + 3^0 HR (R^2 G_1 + G_2)] (T_{-1} - \Gamma'^{(2)}) + [12G_1 G_2 + {}^0 HR (R^2 G_1 + 9G_2)] (T_{-1,1} + \Gamma'^{(2)})\},$$

$$\alpha_{-3}^{(2)} = \frac{1}{d_2} \{5^0 HR (15G_2 - R^2 G_1) (T_5 + T_{5,1}) + [4^0 H^2 R^4 + 5(R^2 G_1 + 9G_2) {}^0 HR] T_3 + 3 [80G_1 G_2 + {}^0 HR (R^2 G_1 + 25G_2)] T_{-3,1}\};$$

$$\beta_{-1}^{(2)} = \frac{2^0 HR^3 (T_1 - 2\Gamma^{(2)}) + (R^2 G_1 + G_2) [(k-1) \Gamma^{(2)} - T_{1,1}]}{2^0 HR^3 + R^2 G_1 + G_2},$$

$$\beta_{-3}^{(2)} = \frac{1}{d_1} \{(\Gamma'^{(2)} + T_{-1,1}) [12G_1 G_2 + 6^0 HR G_2 + 2^0 HR^3 G_1] + (T_1 - \Gamma'^{(2)}) [4^0 HR^3 + 3(R^2 G_1 + G_2) + k(3G_2 - R^2 G_1)] {}^0 HR -$$

$$-3(4kG_1G_2 - 2^0HRG_2 + 2^0HR^3G_1)T_{3,1} + {}^0HR[4^0HR^3 - \\ -3(R^2G_1 - 3G_2) + k(R^2G_1 + 9G_2)]T_3\}, \quad (IX.314)$$

$$\beta_{-5}^{(2)} = \frac{1}{d_2} \{12 [60G_1G + {}^0HR(R^2G_1 + 15G_2)]T_{-3,1} + [12^0HR^3 + \\ + 15(R^2G_1 + 9G_2) + 3k(15G_2 - R^2G_1)]^0HRT_{-3} - 20[12kG_1G_2 + \\ + {}^0HR(R^2G_1 - 9G_2)]T_{5,1} + {}^0HR[4^0HR^3 - 15(R^2G_1 - 15G_2) + \\ + 3k(R^2G_1 + 25G_2)]T_5\};$$

$$d_1 = 4^0H^2R^4 + 3^0HR(3k + 1)G_2 + {}^0HR^3(k + 3)G_1 + 12kG_1G_2,$$

$$d_2 = 4^0H^2R^4 + 15^0HR(5k + 3)G_2 + {}^0HR^3(3k + 5)G_1 + 240kG_1G_2; \quad (IX.315)$$

$$V_0 = 2\alpha_{-1}^{(1)} - 3\beta_{-3}^{(1)}, \quad V_1 = k\alpha_{-1}^{(1)} - \Gamma'^{(1)},$$

$$V_2 = \alpha_{-1}^{(1)} - \beta_{-3}^{(1)}, \quad V_3 = (k - 1)\Gamma^{(1)} - \beta_{-1}^{(1)};$$

$$T_5 = \gamma[V_0V_1 - \delta\alpha_{-1}^{(1)}V_2] - k_3\alpha_{-1}^{(1)2} + \frac{3}{5}k_1\alpha_{-1}^{(1)}\beta_{-3}^{(1)},$$

$$T_3 = \gamma[V_0V_3 - \beta_{-1}^{(1)}V_1 + (1 + \delta)\Gamma^{(1)}V_2 - \delta\alpha_{-1}^{(1)}V_3] + 2k_3\alpha_{-1}^{(1)}\Gamma^{(1)} - \\ - \frac{k_1}{3}(3\Gamma^{(1)}\beta_{-3}^{(1)} - \alpha_{-1}^{(1)}\beta_{-1}^{(1)}),$$

$$T_1 = \gamma[V_2V_0 - \beta_{-1}^{(1)}V_3 + \Gamma'^{(1)}V_1 + (1 + \delta)\Gamma^{(1)}V_3 - \delta\alpha_{-1}^{(1)}V_1 - \alpha_{-1}^{(1)}V_2] - \\ - (k_3 + k_2)\Gamma^{(1)2} - k_1(\Gamma^{(1)}\beta_{-1}^{(1)} + \alpha_{-1}^{(1)}\Gamma'^{(1)}),$$

$$T_{-1} = \gamma[(\Gamma'^{(1)} - \alpha_{-1}^{(1)})V_3 - \beta_{-1}^{(1)}V_2 + (1 + \delta)\Gamma^{(1)}V_1] - k_1\Gamma^{(1)}\Gamma'^{(1)} - 2k_2\Gamma^{(1)}\alpha_{-1}^{(1)},$$

$$T_{-3} = \gamma[\Gamma'^{(1)}V_2 - \alpha_{-1}^{(1)}V_1] + \frac{1}{3}k_2\alpha_{-1}^{(1)2},$$

$$T_{5,1} = \gamma[\delta\alpha_{-1}^{(1)}V_2 - V_1V_0] - k'_3\alpha_{-1}^{(1)2} + \frac{3}{5}k'_1\alpha_{-1}^{(1)}\beta_{-3}^{(1)},$$

$$T_{3,1} = \gamma[(\delta\alpha_{-1}^{(1)} - V_0)V_3 + \beta_{-1}^{(1)}V_1 - (\delta - k)\Gamma^{(1)}V_2] + 2k'_3\Gamma^{(1)}\alpha_{-1}^{(1)} - \\ - \frac{k'_1}{2}(3\Gamma^{(1)}\beta_{-3}^{(1)} - \alpha_{-1}^{(1)}\beta_{-1}^{(1)}), \quad (IX.316)$$

$$T_{1,1} = \gamma[-(V_0 + k\alpha_{-1}^{(1)})V_2 + \beta_{-1}^{(1)}V_3 - (\delta - k)\Gamma^{(1)}V_3 + (\delta\alpha_{-1}^{(1)} - \Gamma'^{(1)})V_1] - \\ - (k'_3 + k'_2)\Gamma^{(1)2} - k'_1(\Gamma^{(1)}\beta_{-1}^{(1)} + \Gamma'^{(1)}\alpha_{-1}^{(1)}),$$

$$T_{-1,1} = \gamma [\beta_{-1}^{(1)} V_2 - (\Gamma'^{(1)} + k\alpha_{-1}^{(1)}) V_3 - (\delta - k) \Gamma^{(1)} V_1] - k_1' \Gamma^{(1)} \Gamma'^{(1)} - 2k_2' \Gamma^{(1)} \alpha_{-1}^{(1)},$$

$$T_{-3,1} = -\gamma [\Gamma'^{(1)} V_2 + k\alpha_{-1}^{(1)} V_1] + \frac{1}{3} k_2' \alpha_{-1}^{(1)2}.$$

Значения  $\alpha_{-1}^{(1)}$ ,  $\beta_{-1}^{(1)}$ ,  $\beta_{-3}^{(1)}$  могут быть получены из формул (IX.314), если положить  $T_{2n+1} = T_{2n+1,1} = 0$  и заменить  $\Gamma^{(2)}$ ,  $\Gamma'^{(2)}$  на  $\Gamma^{(1)}$ ,  $\Gamma'^{(1)}$ .

Таким образом, потенциалы первого и второго порядков полностью определены.

Предположим, что для достаточно тонких стержней можно пренебречь влиянием жесткости на изгиб, т. е. положить  $G_2 = 0$ ; тогда получим выражения для коэффициентов функций  $\varphi^{(k)}(z)$  и  $\psi^{(k)}(z)$  (IX.312) и (IX.313) в виде

$$\alpha_{-1}^{(1)} = -\frac{(1+2\Delta)\Gamma'^{(1)}}{1+(k+3)\Delta}, \quad \beta_{-1}^{(1)} = 2\frac{[(k-1)\Delta-1]\Gamma^{(1)}}{1+2\Delta}, \quad (\text{IX.317})$$

$$\beta_{-3}^{(1)} = \frac{[(k-1)\Delta-1]\Gamma'^{(1)}}{1+(k+3)\Delta},$$

$$\alpha_{-1}^{(2)} = \frac{T_{-1} - \Gamma'^{(2)} + \Delta [3(T_{-1} - T_3) + (T_{-1,1} - 3T_{3,1}) - 2\Gamma'^{(2)}]}{1+(k+3)\Delta},$$

$$\alpha_{-3}^{(2)} = \frac{T_{-3} + \Delta [5(T_{-3} - T_5) + (3T_{-3,1} - 5T_{5,1})]}{1+(3k+5)\Delta},$$

$$\beta_{-1}^{(2)} = \frac{1}{1+2\Delta} \{T_1 - 2\Gamma^{(2)} + 2\Delta [(k-1)\Gamma^{(2)} - T_{1,1}]\}, \quad (\text{IX.318})$$

$$\beta_{-3}^{(2)} = \frac{T_{-1} + T_3 - \Gamma'^{(2)} + \Delta [(3-k)(T_{-1} - T_3) + 2(T_{-1,1} - 3T_{3,1}) + (k-1)\Gamma'^{(2)}]}{1+(k+3)\Delta},$$

$$\beta_{-5}^{(2)} = \frac{3T_{-3} + T_5 + \Delta [3(5-k)(T_{-3} - T_5) + 4(3T_{-3,1} - 5T_{5,1})]}{1+(3k+5)\Delta};$$

$$\Delta = \frac{G_1}{4^0 HR}.$$

Если в этих соотношениях положить  $\Delta = 0$ , получим коэффициенты потенциалов первого и второго порядков для случая абсолютно гибкого подкрепления, т. е. для случая свободного отверстия.

В качестве примера изучим концентрацию напряжений по контуру кругового отверстия при плоской деформации несжимаемой среды, край которого усилен тонким кольцом\*, при одноосном растяжении—сжатии упругой плоскости. Рассмотрим два случая.

\* Напомним, что подкрепляющее кольцо принимается за упругую линию, работающую лишь на растяжение и изгиб.

1. Считая кольцо достаточно тонким ( $b/R$  — мало, где  $b$  — толщина кольца в радиальном направлении), будем пренебрегать влиянием жесткости кольца на изгиб и положим

$$G_2 = 0.$$

(IX.319)

Предположим также, что линейно-упругий материал подкрепляющего кольца обладает значительно бóльшим модулем  $E_0$  (модуль Юнга) растяжения при малых деформациях,

Таблица IX.5

$\phi^\circ$	$\sigma_\phi$ (для случая 1)	$\sigma_\phi$ (для случая 2)
0	$-0,022N\left(1-5,91\frac{N}{\mu}\right)$	$0,133\frac{N^2}{\mu}$
30	$0,258N\left(1-0,271\frac{N}{\mu}\right)$	$0,25N\left(1-0,290\frac{N}{\mu}\right)$
45	$0,538N\left(1-0,298\frac{N}{\mu}\right)$	$0,50N\left(1-0,234\frac{N}{\mu}\right)$
60	$0,818N\left(1-0,165\frac{N}{\mu}\right)$	$0,75N\left(1-0,100\frac{N}{\mu}\right)$
90	$1,098N\left(1+0,003\frac{N}{\mu}\right)$	$1,00N\left(1+0,054\frac{N}{\mu}\right)$

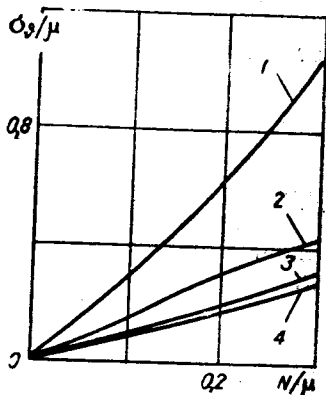


Рис. IX.3.

чем соответствующий модуль  $E=3\mu$  несжимаемого материала окружающей среды, т. е. будем предполагать, что  $E_0/E \gg 1$ . При числовых подсчетах примем

$$\Delta = \frac{3}{4} \cdot \frac{E_0}{E} \cdot \frac{b}{R} = 6.$$

(IX.320)

2. Предположим, что кольцо представляет собой гибкую нерастяжимую нить. В этом случае  $G_2=0$ ;  $G_1 \rightarrow \infty$ ;  $\Delta \rightarrow \infty$ . При таком типе подкрепления длина осевой линии кольца остается неизменной в процессе деформации.

Определяя коэффициенты потенциалов первого и второго порядков (IX.312), (IX.313) по формулам (IX.317), (IX.318) и подставляя их в соответствующие формулы для компонент напряжений, получаем на контуре кольца значения  $\sigma_\phi$ , приведенные в табл. IX.5.

Как видим, тонкое подкрепляющее кольцо, жесткость которого значительно больше жесткости окружающего материала, резко уменьшает концентрацию напряжений на контуре кругового отверстия.

Сравнивая эти результаты, а также результаты при абсолютно жестком подкрепляющем элементе с данными для свободного отверстия, можно убедиться в том, что введение подкрепляющего элемента, ограничивающего подвижность точек контура отверстия, приводит к уменьшению влияния нелинейных поправок второго порядка.

Для наглядности на рис. IX.3 приведены графики величины  $\sigma_\phi^{\max}/\mu$  на контуре кругового отверстия в несжимаемой среде при плоской деформации в случае одноосного растяжения для различных типов подкрепления: 1 — абсолютно гибкое кольцо; 2 — абсолютно жесткое кольцо; 3 — гибкое упругое кольцо при  $\frac{E_0}{E} \cdot \frac{b}{R} = 8$ ; 4 — гибкое кольцо с нерастяжимой линией.

### § 3. Другой вариант решения задачи о распределении напряжений возле отверстий при плоской деформации несжимаемого материала

**Параметры плоской деформации.** Будем рассматривать два состояния тела: естественное (недеформированное) и деформированное.

Естественное состояние тела отнесем к прямоугольной декартовой системе координат  $x, y$ .

Плоское поле смещений будем задавать в зависимости от координат точек тела в естественном состоянии:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y). \quad (\text{IX.321})$$

Деформированное состояние окрестности произвольной точки тела характеризуется параметрами изменения объема и формы.

Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  — главные удлинения, т. е. удлинения главных волокон. Тогда инвариантной характеристикой изменения объема при плоской деформации является величина

$$\Delta = \lambda_1 \lambda_2 - 1 \quad (\lambda_3 = 1). \quad (\text{IX.322})$$

Формоизменение будем характеризовать двумя параметрами из трех:

$$l_k = \frac{\lambda_k}{(1 + \Delta)^{1/3}} \quad (k = 1, 2, 3), \quad (\text{IX.323})$$

так как

$$l_1 l_2 l_3 = 1. \quad (\text{IX.324})$$

Параметры  $l_k$  называются удлинениями при формоизменении, однако удобнее пользоваться логарифмическими величинами:

$$\bar{l}_k = \ln l_k = \ln \lambda_k - \frac{1}{3} \ln(1 + \Delta). \quad (\text{IX.325})$$

Девiator логарифмических удлинений  $\bar{l}_k$  можно задавать главными значениями  $\ln l_k$ , а его главные направления считать совпадающими с главными направлениями тензора деформаций. Второй и третий инварианты этого девiatorа выражаются через главные значения формулами

$$\mathcal{E}_i^2 = \frac{1}{3} (\bar{l}_1^2 + \bar{l}_2^2 + \bar{l}_3^2), \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 3\beta = \frac{1}{3} \bar{l}_1 \bar{l}_2 \bar{l}_3. \quad (\text{IX.326})$$

Величины  $\mathcal{E}_i$  и  $\beta$  называются интенсивностью и фазой формоизменения. Они сохраняют значение характеристик формоизменения при произвольных по величине деформациях. Главные значения девiatorа определяются так

$$\bar{l}_k = \sqrt{2} \mathcal{E}_i \cos \beta_k, \quad \beta_1 = \beta, \quad \beta_2 = \beta + \frac{2}{3} \pi, \quad \beta_3 = \beta - \frac{2}{3} \pi, \quad (\text{IX.327})$$

поэтому фаза плоских деформаций несжимаемого материала оказывается заведомо определенной:

$$\beta = \frac{\pi}{6}, \quad (\text{IX.328})$$

а главные удлинения  $\lambda_k$  определяются только одним параметром — интенсивностью формоизменения:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 2\text{ch} \sqrt{1,5} \mathcal{E}_i, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = 2\text{sh} \sqrt{1,5} \mathcal{E}_i. \quad (\text{IX.329})$$

**Соотношения между напряжениями и деформациями.** В выражении элементарной работы внутренних сил, отнесенной к единице объема деформированного тела, главные истинные напряжения  $\sigma_k$  являются обобщенными силами, если в качестве обобщенных координат деформации принять логарифмические удлинения. Эти напряжения и параметры, определяющие ориентацию главных направлений, принимаются в качестве основных характеристик напряженного состояния. Симметричные инварианты тензора истинных напряжений в главных осях имеют вид

$$\sigma = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \tau_i^2 = \frac{1}{3} [(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2], \quad (\text{IX.330})$$

$$\cos 3\varphi = \frac{\sqrt{2}}{\tau_i^3} (\sigma_1 - \sigma) (\sigma_2 - \sigma) (\sigma_3 - \sigma).$$

Здесь  $\sigma$  — гидростатическое напряжение;  $\tau_i$  — интенсивность напряжений;  $\varphi$  — фаза напряжений. Каждая из этих величин имеет простое физическое значение\*. Аналогично (IX.327) главные напряжения можно выразить через инварианты напряжений:

$$\sigma_k = \sigma + \sqrt{2} \tau_i \cos \varphi_k, \quad \varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \varphi + \frac{2}{3} \pi, \quad \varphi_3 = \varphi - \frac{2}{3} \pi. \quad (\text{IX.331})$$

Будем считать в дальнейшем, что главные направления напряжений в рассматриваемом деформированном состоянии совпадают с главными направлениями деформации, т. е. с направлениями главных волокон. И если эти главные направления оказываются известными, то для установления физических соотношений между напряжениями и деформациями достаточно экспериментально определить инварианты напряжений как функций от инвариантов деформаций:

$$\sigma = \sigma(\Delta, \mathcal{E}_i, \beta), \quad \tau_i = \tau_i(\Delta, \mathcal{E}_i, \beta), \quad \varphi = \varphi(\Delta, \mathcal{E}_i, \beta). \quad (\text{IX.332})$$

Вопрос о том, как однозначно выбрать зависимости (IX.332) для данного материала, остается нерешенным. Имеется несколько вариантов\*\* соотношений типа (IX.332), в той или иной мере обоснованных экспериментально. Остановимся на одном из них.

\* См. Л. А. Толоконников [1].

\*\* См. В. В. Крылов [1, 2].



Опираясь на опыты Бриджмена [1, 2], можно постулировать закон объемной деформации, заключающийся в том, что относительное изменение объема элемента тела определяется только гидростатическим напряжением и не зависит от двух других инвариантов напряжений, т. е.

$$\sigma = \sigma(\Delta). \quad (\text{IX.333})$$

Следует заметить, что при больших деформациях величина относительной объемной деформации в большинстве случаев оказывается весьма малой по сравнению с деформациями изменения формы. Поэтому часто закон объемной деформации заменяют условием несжимаемости

$$\Delta = 0, \quad (\text{IX.334})$$

с достаточной степенью точности отражающим состояние материала.

Поскольку элементарная работа внутренних сил, отнесенная к единице объема деформированного тела,

$$\delta A = \frac{\sigma}{1 + \Delta} \delta \Delta + 3\tau_i [\cos(\varphi - \beta) \delta \mathcal{E}_i + \mathcal{E}_i \sin(\varphi - \beta) \delta \beta], \quad (\text{IX.335})$$

распадается на работу изменения объема и работу изменения формы, следствием (IX.333) и условий существования потенциала внутренних сил является зависимость интенсивности и фазы напряжений только от инвариантов формоизменения:

$$\tau_i = \tau_i(\mathcal{E}_i, \beta), \quad \varphi = \varphi(\mathcal{E}_i, \beta). \quad (\text{IX.336})$$

Опытные данные при осевом сжатии и растяжении цилиндрических образцов, а также при чистом сдвиге указывают на совпадение фазы истинных напряжений и фазы формоизменения. Кроме того, из опытных данных Дэвиса \* следует, что для промежуточных состояний различие в значениях этих величин, как показал Л. А. Толоконников [3], будет небольшим. Это позволяет ввести гипотезу о совпадении фаз:

$$\varphi = \beta, \quad (\text{IX.337})$$

которая точно отражает состояние материала не только в крайних точках диапазона изменения  $\beta$ , но и в средней:

$$\beta = 0, \quad \beta = \frac{\pi}{6}, \quad \beta = \frac{\pi}{3} \quad \left(0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{3}\right). \quad (\text{IX.338})$$

В этом преимущество гипотезы (IX.337) перед другими подобными гипотезами. Следствием (IX.336) и (IX.337) упомянутого условия существования потенциала внутренних сил является универсальность представления интенсивности напряжений как функции только интенсивности формоизменения:

$$\tau_i = \tau_i(\mathcal{E}_i). \quad (\text{IX.339})$$

\* В кн.: Теория пластичности, перевод под ред. Ю. Н. Работнова. М., ИЛ, 1953.

В результате получаем соотношения между напряжениями и деформациями в главных осях:

$$\sigma_k = \sigma(\Delta) + \frac{\tau_i(\Theta)_i}{\Theta_i} \bar{l}_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (\text{IX.340})$$

Переход к произвольным осям не вызывает затруднений. Учитывая (IX.328), получаем  $\varphi = \pi/6$ , а также

$$\sigma_1 = \sigma + \sqrt{1,5} \tau_i, \quad \sigma_2 = \sigma - \sqrt{1,5} \tau_i, \quad \sigma_3 = \sigma. \quad (\text{IX.341})$$

Таким образом выяснение физических свойств плоско-деформируемого тела сводится к экспериментальному определению зависимости (IX.339) интенсивности напряжений от интенсивности формоизменения. Эту зависимость назовем законом формоизменения.

**Функция напряжений.** Плоское деформированное состояние окрестности произвольной точки тела и ее ориентация, как известно\* определяется четырьмя производными\*\*  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ ,  $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$ ,  $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ . Однако для этой цели можно назначить другую четверку независимых параметров, среди которых важную роль играют инварианты деформаций. В качестве таких параметров выберем угол  $\theta$  между главным волокном и осью  $x$  в естественном состоянии, главные удлинения  $\lambda_k$  и угол поворота  $\omega$  главных направлений при переходе тела из естественного в рассматриваемое деформированное состояние. Опираясь на геометрическое толкование параметров  $\theta$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\omega$ , можно утверждать, что их достаточно для определения деформированного состояния и ориентации окрестности любой точки тела. В частности, между упомянутыми двумя группами параметров можно установить соотношения

$$\begin{aligned} 1 + u_x &= \text{ch} \frac{\Theta}{2} \cos \omega + \text{sh} \frac{\Theta}{2} \cos (2\theta + \omega), \\ u_y &= -\text{ch} \frac{\Theta}{2} \sin \omega + \text{sh} \frac{\Theta}{2} \sin (2\theta + \omega), \\ v_x &= \text{ch} \frac{\Theta}{2} \sin \omega + \text{sh} \frac{\Theta}{2} \sin (2\theta + \omega), \\ 1 + v_y &= \text{ch} \frac{\Theta}{2} \cos \omega - \text{sh} \frac{\Theta}{2} \cos (2\theta + \omega). \end{aligned} \quad (\text{IX.342})$$

Здесь использованы смещения (IX.323) и введено обозначение

$$\Theta = 2 \sqrt{1,5} \Theta_i. \quad (\text{IX.343})$$

\* См. В. В. Новожилов [1].

\*\* Для сокращения записи эти производные будем обозначать запятой.

Следствием этих соотношений и условий непрерывности поступательных перемещений и вращений элементов тела является соотношение

$$\begin{aligned} (\cos 2\theta \operatorname{sh} \mathcal{E})_{,yy} - (\cos 2\theta \operatorname{sh} \mathcal{E})_{,xx} - 2(\sin 2\theta \operatorname{sh} \mathcal{E})_{,xy} + (\operatorname{ch} \mathcal{E})_{,xx} + \\ + (\operatorname{ch} \mathcal{E})_{,yy} + 2\theta_{,y} (\operatorname{ch} \mathcal{E})_{,x} - 2\theta_{,x} (\operatorname{ch} \mathcal{E})_{,y} = 0, \end{aligned} \quad (\text{IX.344})$$

которое обобщает классическое условие совместности плоских деформаций и сохраняет геометрическое значение при произвольных по величине деформациях и перемещениях.

Общие уравнения равновесия в переменных Лагранжа применительно к случаю плоской деформации несжимаемого материала, как показано Л. А. Толоконниковым [2], существенно упрощаются. Учитывая (IX.342), дифференциальные уравнения можно представить в виде однородной алгебраической системы относительно двух дифференциальных операторов над инвариантами напряжений. Определитель этой системы отличен от нуля, поэтому единственно возможное тривиальное решение системы представляет собой новую форму уравнений равновесия:

$$\left( \frac{\sigma}{\sqrt{1,5}} - f + \tau_i \cos 2\theta \right)_{,x} + (\tau_i \sin 2\theta)_{,y} = 0, \quad (\text{IX.345})$$

$$(\tau_i \sin 2\theta)_{,x} + \left( \frac{\sigma}{\sqrt{1,5}} - f - \tau_i \cos 2\theta \right)_{,y} = 0,$$

где

$$f = 2\sqrt{1,5} \int_0^{\mathcal{E}_i} \tau_i(\mathcal{E}_i) d\mathcal{E}_i. \quad (\text{IX.346})$$

Структура уравнений (IX.345) повторяет соответствующие уравнения классической плоской задачи, поэтому очевидна возможность введения функции напряжений  $U$ . Подчиняя функции напряжений условию совместности (IX.344), приходим к разрешающему задачу нелинейному дифференциальному уравнению \* относительно этой функции.

Пусть в каждой точке поверхности тела заданы истинные нормальные  $\rho\sigma_n$  и касательные  $\rho\tau_n$  напряжения. Для удобства введен постоянный множитель  $\rho$ , представляющий собой характерное для каждой задачи напряжение. Отметим, что задание соответствующих условных напряжений  $\rho\lambda\sigma_n$  и  $\rho\lambda\tau_n$ , где  $\lambda$  — безразмерная величина — удлинение контурного волокна, функция координат точек контура, не вносит существенных усложнений в решение задач.

Обозначим через  $\alpha$  угол между направлением внешней нормали к границе тела и направлением координатной оси  $x$ . Определив ориентацию граничной площадки тела относительно главных направлений, можно найти \*\* выражение нормальных и касательных напряжений на

\* Это уравнение здесь не приводится, так как ниже будет дана компактная формулировка задачи в комплексных координатах.

\*\* См. Л. А. Толоконников [5].

контурной площадке через главные напряжения либо симметричные инварианты напряжений:

$$\lambda_{\tau}^2 \rho \sigma_n = \lambda_{\tau}^2 \sigma - \sqrt{1,5} \tau_i [\operatorname{sh} \vartheta - \operatorname{ch} \vartheta \cos 2(\alpha - \theta)], \quad (\text{IX.347})$$

$$\lambda_{\tau}^2 \rho \tau_n = -\sqrt{1,5} \tau_i \sin 2(\alpha - \theta),$$

причем

$$\lambda_{\tau}^2 = \operatorname{ch} \vartheta - \operatorname{sh} \vartheta \cos 2(\alpha - \theta). \quad (\text{IX.348})$$

Если заменить здесь  $\theta$ ,  $\tau_i$  и  $\sigma$  их выражениями через производные функции напряжений  $U$

$$\sin 2\theta = -\frac{\rho}{\tau_i} U_{,xy}, \quad \cos 2\theta = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\tau_i} (U_{,yy} - U_{,xx}), \quad (\text{IX.349})$$

$$\tau_i^2 = \rho^2 \left[ U_{,xy}^2 + \frac{1}{4} (U_{,yy} - U_{,xx})^2 \right], \quad \frac{\sigma}{\sqrt{1,5}} = \frac{1}{2} \rho (U_{,yy} + U_{,xx}) + f,$$

то получим формулировку контурных условий для функции напряжений  $U$ .

**Постановка задачи в комплексных координатах.** Подобно классической плоской задаче теории упругости решение многих вопросов теории конечных плоских деформаций удобно проводить в комплексных координатах

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy.$$

Тогда, как известно,

$$(\ )_{,x} = (\ )_{,z} + (\ )_{,\bar{z}}, \quad (\ )_{,y} = i[(\ )_{,z} - (\ )_{,\bar{z}}] \text{ и т. д.,}$$

где символы  $(\ )_{,z}$  и  $(\ )_{,\bar{z}}$  означают дифференцирование по  $z$  и  $\bar{z}$  соответственно. Соотношения (IX.349) приводятся\* к виду

$$\sin 2\theta = -i \frac{\rho}{\tau_i} (U_{,zz} - U_{,\bar{z}\bar{z}}), \quad \cos 2\theta = -\frac{\rho}{\tau_i} (U_{,zz} + U_{,\bar{z}\bar{z}}), \quad (\text{IX.350})$$

$$\tau_i^2 = 4\rho^2 U_{,zz} U_{,\bar{z}\bar{z}}, \quad \frac{\sigma}{\sqrt{1,5}} = 2\rho U_{,zz} + f.$$

Разрешающее уравнение принимает вид

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\tau_i} U_{,zz} \right)_{,\bar{z}\bar{z}} + \left( \frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\tau_i} U_{,\bar{z}\bar{z}} \right)_{,zz} + \frac{1}{\rho} (\operatorname{ch} \vartheta)_{,\bar{z}\bar{z}} + \\ & + \rho \frac{\operatorname{sh} \vartheta}{\tau_i} \frac{d\vartheta}{d\tau_i} (U_{,zzz} U_{,\bar{z}\bar{z}\bar{z}} - U_{,zzz} U_{,\bar{z}\bar{z}\bar{z}}) = 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.351})$$

Здесь интенсивность формоизменения предполагается выраженной посредством закона формоизменения (IX.339) через интенсивность напря-

\* См. Л. А. Толоконников [5]

жений; последняя, в свою очередь, связана с функцией напряжений  $U$  посредством соотношений (IX.350). Чрезвычайная сложность уравнения (IX.351) очевидна. Если, в частности, использовать предположения классической теории упругости и заменить  $\text{sh} \mathcal{E}$  на  $\mathcal{E}$ ,  $\text{ch} \mathcal{E}$  на 1, принять  $\tau_i = G \mathcal{E}$ , где  $G$  — модуль сдвига, и пренебречь в уравнении (IX.351) слагаемыми порядка величин деформаций по сравнению с единицей, то приходим к бигармоническому уравнению\*.

Опираясь на соотношения (IX.347), можно указать\*\* компактную формулировку статических граничных условий для функции напряжений:

$$\frac{dU_z}{ds} = -\frac{i(\sigma_n - i\tau \text{ch} \mathcal{E})}{2\sqrt{1,5}} e^{-i\alpha} + \frac{if_i}{2p} e^{-i\alpha} - \frac{p\tau_n}{\sqrt{1,5}} \cdot \frac{\text{sh} \mathcal{E}}{\tau_i} U_{,zz} e^{i\alpha}, \quad (\text{IX.352})$$

где  $ds$  — элемент дуги граничного контура в естественном состоянии. Для формулировки геометрических граничных условий необходимо располагать физической характеристикой материала (IX.339) и выражениями составляющих перемещений через функцию напряжений. Такие соотношения в комплексной форме установлены в работах В. Г. Громова [1], В. Г. Громова и Л. А. Толоконникова [1]. Если ввести комплексную функцию смещений  $D = u + iv$ , то

$$D = -2p \int \frac{1}{\tau_i} \text{th} \frac{\mathcal{E}}{2} U_{,z\bar{z}} (1 + D_{,z}) d\bar{z} + \xi(z), \quad (\text{IX.353})$$

где  $\xi(z)$  — произвольная функция, определяемая из условия сохранения объема при деформировании:

$$D_{,z} + \bar{D}_{,\bar{z}} + D_{,z} \bar{D}_{,\bar{z}} - D_{,\bar{z}} \bar{D}_{,z} = 0. \quad (\text{IX.354})$$

Из (IX.353) получаем граничные условия для функции напряжений, когда на границе тела заданы перемещения.

Таковы общие соотношения нелинейной задачи теории упругости о плоской деформации.

**Представление функции напряжений и комплексной функции смещений через аналитические функции.** Получение точных решений большинства задач наталкивается на непреодолимые трудности из-за нелинейности основных соотношений. Для построения же приближенных решений можно эффективно использовать метод малого параметра.

Рассмотрим физические нелинейности типа

$$\tau_i = G(\mathcal{E} + g\mathcal{E}^3 + \dots); \quad G, g = \text{const}. \quad (\text{IX.355})$$

Таковыми являются, например, законы

$$\tau_i = G \text{th} \mathcal{E} = G\left(\mathcal{E} - \frac{1}{3} \mathcal{E}^3 + \dots\right), \quad \tau_i = G \text{sh} \mathcal{E} = G\left(\mathcal{E} + \frac{1}{6} \mathcal{E}^3 + \dots\right), \quad (\text{IX.356})$$

\* См. Л. А. Толоконников [5]

\*\* См. В. Г. Громов [1]; В. Г. Громов и Л. А. Толоконников [1].

которые приводят к противоположным отклонениям от линейного закона формоизменения при больших деформациях. Первым из них аппроксимируются экспериментальные кривые многих мягких материалов (цветные металлы и их сплавы), вторым — экспериментальные кривые высокоэластичных материалов (резина, пластмассы).

Положим, что справедливо разложение

$$U = U^{(0)} + U^{(1)}\epsilon + U^{(2)}\epsilon^2 + \dots, \quad (\text{IX.357})$$

где  $\epsilon$  — малый параметр, выбор которого будет указан ниже.

Тогда на основании уравнения (IX.351) для функции напряжений и физических соотношений (IX.355) путем обычных операций, присущих классическому методу малого параметра, устанавливаем дифференциальные уравнения для каждого из приближений  $U^{(k)}$  ( $k=0, 1, 2, \dots$ ):

$$U_{,zzz}^{(k)} = F^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{IX.358})$$

Выпишем вид функций  $F^{(k)}$  для первых трех приближений:

$$\begin{aligned} F^{(0)} &= 0, \quad F^{(1)} = - (U_{,zz}^{(0)} U_{,zz}^{(0)})_{,zz} - \frac{1}{2} (U_{,zzz}^{(0)} U_{,zzz}^{(0)} - U_{,zzz}^{(0)} U_{,zzz}^{(0)}), \\ F^{(2)} &= - 2 \operatorname{Re} \left[ (U_{,zz}^{(0)} U_{,zz}^{(2)})_{,zz} + \frac{1}{2} (U_{,zzz}^{(0)} U_{,zzz}^{(1)} - U_{,zzz}^{(0)} U_{,zzz}^{(1)}) + \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{3} - 2g \right) (U_{,zz}^{(0)2} U_{,zz}^{(0)})_{,zz} \right]. \end{aligned} \quad (\text{IX.359})$$

Значение  $g = -1/3$  соответствует первому, а  $g = 1/6$  — второму из законов (IX.356). Функция  $U^{(0)}$  — бигармоническая, поэтому для нее имеет место представление Э. Гурса через две аналитические функции:

$$U^{(0)} = \operatorname{Re}(\bar{z}\varphi_0 + \chi_0). \quad (\text{IX.360})$$

Теперь можно найти последовательно частные решения уравнения (IX.358)

$$\begin{aligned} U^{*(1)} &= -\frac{1}{8} [(\bar{z}\varphi_0' + \psi_0)(z\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0) - \varphi_0\bar{\varphi}_0]; \\ U^{*(2)} &= -\frac{1}{4} \operatorname{Re} [(\bar{z}\varphi_0' + \psi_0)(z\bar{\varphi}_1' + \bar{\psi}_1) - \varphi_0\bar{\varphi}_1 + J], \end{aligned} \quad (\text{IX.361})$$

где

$$\psi_k = \chi_k' \equiv \frac{d\chi_k}{dz}; \quad \varphi_k' \equiv \frac{d\varphi_k}{dz};$$

$$\begin{aligned} -8J &= [(\bar{z}\varphi_0' + \psi_0)^2 (z\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0)]_{,z} - 2\varphi_0\bar{\varphi}_0' (z\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0) - (z\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0) \times \\ &\times [\bar{z}\varphi_0'^2 + 2 \int \varphi_0''\bar{\psi}_0 dz] - \bar{\varphi}_0 \int \varphi_0'^2 dz - 2 \left( \frac{1}{3} - 8g \right) \int dz \int (z\bar{\varphi}_0'' + \psi_0')^2 (z\bar{\varphi}_0'' + \bar{\psi}_0') dz. \end{aligned} \quad (\text{IX.362})$$

Функции  $U^{(k)} - U^{*(k)}$  — бигармонические, поэтому по формуле Э. Гурса находим

$$U^{(k)} = \operatorname{Re}(\bar{z}\varphi_k + \chi_k + U^{*(k)}) \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (\text{IX.363})$$

Полагаем далее, что справедливы разложения

$$D = \varepsilon(D^{(0)} + D^{(1)}\varepsilon + D^{(2)}\varepsilon^2 + \dots), \quad \xi = \varepsilon(\xi_0 + \xi_1\varepsilon + \xi_2\varepsilon^2 + \dots). \quad (\text{IX.364})$$

Тогда из (IX.353) находим

$$D^{(k)} = -U_{,\bar{z}}^{(k)} + \xi_k + D^{*k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{IX.365})$$

Если ограничиться первыми тремя приближениями, то

$$\begin{aligned} D^{*(0)} &= 0, \quad D^{*(1)} = -\int D_{,\bar{z}}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(0)} d\bar{z}, \\ D^{*(2)} &= -\int (D_{,\bar{z}}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(1)} + D_{,\bar{z}}^{(1)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(0)}) d\bar{z} + \left(\frac{1}{3} + 4g\right) \int U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(0)2} d\bar{z}. \end{aligned} \quad (\text{IX.366})$$

Представляя последовательно функции напряжений  $U^{(k)}$  и перемещений  $D^{(k)}$  через аналитические функции, получаем

$$\begin{aligned} D^{*(1)} &= \frac{1}{4} \left[ -\varphi_0'(z\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0) + \frac{1}{2} z\bar{\varphi}_0'^2 + \int \bar{\varphi}_0' \bar{\psi}_0' d\bar{z} \right], \\ D^{*(2)} &= \frac{1}{4} \left[ -\varphi_0'(z\bar{\varphi}_1' + \bar{\psi}_1) - \varphi_1'(z\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0) + z\bar{\varphi}_0'\bar{\varphi}_1' + \int (\bar{\varphi}_0'\bar{\psi}_1' + \bar{\varphi}_1'\bar{\psi}_0') d\bar{z} \right] + \\ &+ \frac{1}{2} (\bar{\varphi}_0' - \varphi_0') U_{,\bar{z}}^{*(1)} + \frac{1}{4} \varphi_0' D^{*(1)} + \frac{1}{32} \left\{ [\varphi_0'(z\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0')]_{,\bar{z}} - \varphi_0' \bar{\varphi}_0'^2 - \right. \\ &\left. - 2 \int \varphi_0'^2 (z\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0') d\bar{z} - 2 \left( \frac{1}{3} - 8g \right) \int (z\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0') (z\bar{\varphi}_0' + \bar{\psi}_0')^2 d\bar{z} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{IX.367})$$

Из условия несжимаемости (IX.354), приняв во внимание разложения (IX.364), (IX.365) и соотношения (IX.367), находим

$$\xi = \varphi_0, \quad \xi_1 = \varphi_1 + \frac{1}{8} \int \varphi_0'^2 dz, \quad \xi_2 = \varphi_2 + \frac{1}{4} \int \varphi_0' \varphi_1' dz + \frac{1}{48} \int \varphi_0'^3 dz. \quad (\text{IX.368})$$

**Граничные условия для функций  $\varphi_k(z)$  и  $\psi_k(z)$ .** Если на граничном контуре  $L$  заданы смещения  $D$ , то граничные условия для аналитических функций в любом приближении на основании (IX.363), (IX.365) и (IX.368) записываются в виде

$$\varphi_k(t^*) - t^{*'} \overline{\varphi_k'(t^*)} - \overline{\psi_k(t^*)} = g_k(t^*) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (\text{IX.369})$$

где  $t^*$  — аффиксы контурных точек в начальном недеформированном состоянии;

$$g_0 = 2D|_L, \quad g_1 = 2 \left[ U_{,\bar{z}}^{*(1)} - D^{*(1)} - \frac{1}{8} \int \varphi_0'^2 dz \right] \Big|_L, \quad (\text{IX.370})$$

$$g_2 = 2 \left[ U_{,\bar{z}}^{*(2)} - D^{*(2)} - \frac{1}{4} \int \varphi_0' \varphi_1' dz - \frac{1}{48} \int \varphi_0'^3 dz \right] \Big|_L.$$

При заданных на контуре напряжениях  $p\sigma_n$  и  $p\tau_n$  в случае физических законов (IX.355) имеем

$$f = 2p\varepsilon U_{,zz} U_{,\bar{z}\bar{z}} + 0 (\varepsilon^3), \quad (\text{IX.371})$$

где  $p$  — характерный для данной задачи параметр. Поэтому соотношение (IX.352) дает

$$\frac{dU^{(k)}}{ds} = \Phi^{(k)} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{IX.372})$$

Для трех первых приближений функции  $\Phi^{(k)}$  имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi^{(0)} &= -\frac{i}{2\sqrt{1,5}} (\sigma_n - i\tau_n) e^{-i\alpha}, \quad \Phi^{(1)} = iU_{,zz}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(0)} e^{-i\alpha} - \frac{\tau_n}{\sqrt{1,5}} U_{,zz}^{(0)} e^{i\alpha}, \\ \Phi^{(2)} &= \left[ 2i \operatorname{Re} (U_{,zz}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(1)}) - \frac{\tau_n}{\sqrt{1,5}} U_{,zz}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(0)} \right] e^{-i\alpha} - \frac{\tau_n}{\sqrt{1,5}} U_{,zz}^{(1)} e^{i\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{IX.373})$$

Граничные условия для аналитических функций

$$\varphi_k(t^*) + i^* \overline{\varphi_k(t^*)} + \overline{\psi_k(t^*)} = f_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (\text{IX.374})$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{\sqrt{1,5}} \int (\sigma_n + i\tau_n) dt^*, \quad f_1 = -2 \left[ U_{,\bar{z}}^{*(1)} \Big|_L + \right. \\ &\quad \left. + \int_L \left( U_{,zz}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(0)} dt^* + \frac{i}{\sqrt{1,5}} \tau_n U_{,zz}^{(0)} d\bar{t}^* \right) \right], \\ & \quad \quad \quad (\text{IX.375}) \end{aligned}$$

$$f_2 = -2 \left\{ U_{,\bar{z}}^{*(2)} \Big|_L + \int_L \left[ 2 \operatorname{Re} (U_{,zz}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(1)}) - \frac{i\tau_n}{\sqrt{1,5}} U_{,zz}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(0)} \right] dt^* + \frac{i}{\sqrt{1,5}} \int_L \tau_n U_{,zz}^{(1)} d\bar{t}^* \right\}.$$

Таким образом, построение последовательных приближений как при статических, так и при геометрических граничных условиях сводится к повторному решению основной плоской задачи классической теории упругости, и это решение может быть выполнено одним из методов Н. И. Мусхелишвили [1] (см., например, § 1 гл. 1).

**Об однозначности решения.** Рассмотрим для простоты бесконечную односвязную область, т. е. плоскость, ослабленную каким-либо одним отверстием. Инварианты напряжений, приняв во внимание (IX.350) и (IX.371), представим в виде рядов

$$\tau_i^2 = \tau^0 + \tau^{(1)}\varepsilon + \tau^{(2)}\varepsilon^2 + \dots, \quad \sigma = \sigma^0 + \sigma^{(1)}\varepsilon + \sigma^{(2)}\varepsilon^2 + \dots, \quad (\text{IX.376})$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$\begin{aligned} \tau^{(0)} &= 4\rho^2 U_{,zz}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(0)}, \quad \tau^{(1)} = 8\rho^2 \operatorname{Re} (U_{,zz}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(1)}), \\ \tau^{(2)} &= 4\rho^2 [2 \operatorname{Re} (U_{,zz}^{(0)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(2)}) + U_{,zz}^{(1)} U_{,\bar{z}\bar{z}}^{(1)}]. \end{aligned} \quad (\text{IX.377})$$



$$\sigma^{(0)} = 2\sqrt{1,5\rho}U_{,zz}^{(0)}; \quad \sigma^{(1)} = 2\sqrt{1,5\rho}(U_{,zz}^{(1)} + U_{,zz}^{(0)}U_{,zz}^{(0)}),$$

$$\sigma^{(2)} = 2\sqrt{1,5\rho}[U_{,zz}^{(2)} + 2\operatorname{Re}(U_{,zz}^{(0)}U_{,zz}^{(1)})].$$

Однозначность смещений, однозначность и ограниченность напряжений будут иметь место, если при  $k = 0, 1, 2, \dots$  функции  $U_{,zz}^{(k)}$ ,  $U_{,zz}^{(k)}$  — однозначные ограниченные функции;  $D^{(k)}$  — однозначные функции.

Принимая во внимание представления (IX.360), (IX.363) и (IX.365), устанавливаем общий вид функций

$$\varphi_k = B_k \ln z + \Gamma_k z + \varphi_k^*(z), \quad \psi_k = C_k \ln z + \Gamma'_k z + \psi_k^*(z), \quad (\text{IX.378})$$

где  $B_k$ ,  $\Gamma_k$ ,  $C_k$ ,  $\Gamma'_k$  — произвольные постоянные;  $\varphi_k^*$ ,  $\psi_k^*$  — голоморфные функции в бесконечно удаленной точке. При этом последовательно обнаруживаем, что частные решения  $U^{*(1)}$ ,  $U^{*(2)}$  с точностью до аддитивных бигармонических слагаемых обладают единственной однозначной формой. Чтобы получить эту форму, следует в (IX.361) неоднозначные функции  $\varphi_k$ ,  $\psi_k$  заменить однозначными функциями

$$\varphi^{(k)} = B_k \ln \bar{z} + \varphi_k, \quad \psi^{(k)} = C_k \ln \bar{z} + \psi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{IX.379})$$

и воспользоваться тождествами

$$\ln z = \ln(z\bar{z}) - \ln \bar{z}, \quad \ln z \ln \bar{z} = \frac{1}{2}[\ln^2(z\bar{z}) - \ln^2 z - \ln^2 \bar{z}]. \quad (\text{IX.380})$$

Выбор функций  $U^{*(1)}$ ,  $U^{*(2)}$  в однозначной форме приводит к соответствующим однозначным формам функций  $D^{*(1)}$ ,  $D^{*(2)}$  во всех слагаемых, кроме интегральных. Иными словами, в (IX.367) функции  $\varphi_k$ ,  $\psi_k$  заменяются на  $\varphi^{(k)}$ ,  $\psi^{(k)}$ . После этого из условия однозначности  $D^{(k)}$  получаем

$$B_0 + \bar{C}_0 = 0, \quad B_1 + \bar{C}_1 = \bar{B}_0 \bar{\Gamma}'_0 + \Gamma_0 (C_0 - B_0), \quad (\text{IX.381})$$

$$B_2 + \bar{C}_2 = -\frac{1}{4} \Gamma_0 \bar{B}_0 \bar{\Gamma}'_0 + \frac{1}{2} [\bar{B}_0 \bar{\Gamma}'_1 + \bar{B}_1 \bar{\Gamma}'_0 + \Gamma_0 (\bar{C}_1 - B_1) + \Gamma_1 (\bar{C}_0 - B_0)].$$

Кроме того,

$$B_k - \bar{C}_k = \frac{1}{2\pi i} [f_k]_L, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (\text{IX.382})$$

Здесь символом  $[f_k]_L$ , обозначено приращение функции  $f_k$  при обходе замкнутого контура, целиком охватывающего контур  $L$ .

Постоянные  $\Gamma_k$  и  $\Gamma'_k$  определяются напряженным состоянием на бесконечности:

$$\Gamma_0 = \frac{N_1 + N_2}{4\sqrt{1,5\rho}}; \quad \Gamma'_0 = \frac{N_1 - N_2}{2\sqrt{1,5\rho}} e^{-2i\theta(\infty)}, \quad (\text{IX.383})$$

$$\Gamma_1 = -\frac{1}{4} |\Gamma'_0|^2, \quad \Gamma'_1 = \Gamma_2 = \Gamma'_2 = 0,$$

где  $\pm N_1 = \sigma_1^{(\infty)}$ ,  $\pm N_2 = \sigma_2^{(\infty)}$  — главные напряжения на бесконечности;  $\theta^{(\infty)}$  — угол между главным направлением  $N_1$  и осью  $x$ . При этом предполагаем, что

$$\tau^{(1)(\infty)} = \tau^{(2)(\infty)} = \sigma^{(1)(\infty)} = \sigma^{(2)(\infty)} = 0. \quad (\text{IX.384})$$

Для  $\Gamma_k$  ( $k=0, 1, 2$ ) приводим только действительные части, так как можно показать, что их мнимые части определяют вращение тела как жесткого целого.

Приведенные соотношения позволяют строить три первых приближения \* решений конкретных задач о концентрации напряжений около произвольных отверстий при плоской деформации несжимаемого материала.

В случае, если форма отверстия будет отлична от круговой, то при решении задачи необходимо предварительно найти функцию, конформно отображающую рассматриваемую области на внутренность или внешность единичного круга (см. § 1 гл. I), т. е. функцию

$$z = \omega(\zeta). \quad (\text{IX.385})$$

Формулы для функций напряжений  $U^{(k)}$  и смещений  $D^{(k)}$ , а также граничные условия (IX.369) и (IX.374) следует преобразовать к новой переменной  $\zeta$ , даваемой отображающей функцией  $\omega(\zeta)$  (IX.385). Это можно сделать, если воспользоваться зависимостями \*\*

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta}; \quad (\text{IX.386})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{[\omega'(\zeta)]^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} - \frac{\omega''(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \right].$$

Однако на этом останавливаться не будем, так как из отмеченного выше можно уяснить идею метода решения задачи о концентрации напряжений возле любого отверстия \*\*\*, контур которого не имеет угловых точек. Для иллюстрации этой идеи рассмотрим задачу о концентрации напряжений около кругового отверстия. При этом случай осесимметричного напряженного состояния характерен тем, что позволяет решить поставленную задачу до конца, т. е. допускает точное решение при любом законе формоизменения (IX.339). Ценность этого точного решения трудно переоценить, так как оно может быть положено в основу при оценке результатов, полученных различными приближенными методами. **Напряжения возле кругового отверстия при всестороннем растяжении — сжатии (точное решение).** Рассмотрим упругую плоскость (в условиях плоской деформации), в которой в естественном (ненапряжен-

\* Принимая в качестве первого приближения решение однотипной задачи, даваемое классической теорией упругости.

\*\* См. Н. И. Мусхелишвили [1].

\*\*\* См. Г. С. Тарасев, Л. А. Толоконников [1], где рассмотрен случай несжимаемого материала. Случай же сжимаемого материала рассматривается Г. С. Тарасевым [1].

ном) состоянии сделано круговое отверстие радиуса  $R$ . Эта плоскость растягивается или сжимается «на бесконечности» усилиями

$$N_1 = N_2 = \pm p. \quad (\text{IX.387})$$

Знаки в (IX.387) соответствуют: «плюс» — растяжению, «минус» — сжатию.

Контур отверстия будем считать свободным от внешних усилий. Требуется определить напряженное состояние возле отверстия для любого закона формоизменения (IX.339).

В случае осесимметрического напряженного состояния (IX.387) направления главных напряжений можем выбирать произвольно. Будем считать, что первым главным направлением является радиальное направление, а вторым — тангенциальное.

При осевой симметрии эти же направления будут главными в каждой точке плоскости, и решение задачи сводится к квадратурам независимо от закона формоизменения.

Введем новую переменную  $w = \overline{zz} = r^2$ , где  $r$  — радиус-вектор точек плоскости. Предполагаем, что функция напряжений  $U$  зависит только от этого радиуса-вектора  $r$ , т. е.

$$U(z, \bar{z}) = \Phi(w). \quad (\text{IX.388})$$

В этом случае уравнение (IX.351) можно дважды проинтегрировать:

$$2p \frac{\text{sh } \mathcal{E}}{\tau_i} w^2 \Phi'' + w \text{ch } \mathcal{E} = C_1 w + C_2, \quad (\text{IX.389})$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования.

Из третьего соотношения в (IX.350) и (IX.387) получим

$$\tau_i = \pm 2p w \Phi'. \quad (\text{IX.390})$$

Физический смысл знаков в (IX.390) таков: знак «плюс» соответствует выбору в качестве первого главного направления напряжений тангенциального направления, знак «минус» — радиального направления.

Из (IX.389) и (IX.390) находим

$$\pm \mathcal{E} = \ln \left( \frac{C_2}{w} + C_1 \right), \quad (\text{IX.391})$$

т. е. следствием (IX.387) является вполне определенная зависимость интенсивности  $\mathcal{E}$  от координат точек при любом законе формоизменения.

Выразив комплексную функцию смещений  $D$  через компоненты вектора смещений  $u_r$  и  $u_\varphi$  в полярной системе координат  $(r, \varphi)$ , получим

$$D = \frac{r}{\omega^2} (u_r + i u_\varphi). \quad (\text{IX.392})$$

Вектор смещений  $u_r + iu_\varphi$  есть функция только  $\omega$ . Учитывая это, а также (IX.392), интегрируем соотношение (IX.353):

$$u_r = (C_1\omega + C_2)^{\frac{1}{2}} - r, \quad u_\varphi = 0. \quad (\text{IX.393})$$

Из (IX.393) видим, что предположение об осевой симметрии приводит к вполне определенной системе смещений. Постоянная  $C_1$  в (IX.393) определяется из условия (IX.354).

Учитывая (IX.392) и (IX.393), устанавливаем, что соотношение (IX.354) будет выполняться тождественно только при  $C=1$ , поэтому

$$u_r = (r^2 + C_2)^{\frac{1}{2}} - r, \quad u_\varphi = 0 \quad (\text{IX.394})$$

при любом законе формоизменения (IX.339). Из (IX.394) следует, что

$$u_r = \frac{C_2}{2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{C_2^2}{8} \cdot \frac{1}{r^3} + \dots, \quad (\text{IX.395})$$

где первый член есть смещение при плоском осесимметричном пластическом течении в случае малых деформаций. Постоянная  $C_2$  определяется из граничных условий. Соотношение (IX.352) можно \* привести к виду

$$2\rho\Phi' + f = \frac{\rho\sigma_n}{\sqrt{1,5}}; \quad \rho\sigma_n = \text{const}, \quad \rho\tau_n = 0. \quad (\text{IX.396})$$

Из (IX.390), (IX.391) и (IX.396) получаем

$$-\int_0^{\vartheta} \frac{\tau_i(\vartheta)}{e^{\pm\vartheta} - 1} d\vartheta + C = \frac{\rho\sigma_n}{\sqrt{1,5}}, \quad (\text{IX.397})$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Отсюда при выбранном ранее распределении главных напряжений имеем \*\*

$$\sigma_1 = \sqrt{1,5} \left( \int_0^{\vartheta} \frac{\tau_i(\vartheta)}{1 - e^{-\vartheta}} d\vartheta + C \right), \quad \sigma_2 = \sigma_1 - 2\sqrt{1,5} \tau_i(\vartheta). \quad (\text{IX.398})$$

Для полного решения задачи нужно располагать конкретным видом закона формоизменения. Например, рассматривая физические нелинейности (IX.356), находим соответственно для первого и второго законов из (IX.356)

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{1,5}}{2} G \left\{ \ln \left[ 1 + \frac{1}{\left(1 + \frac{C_2}{r^2}\right)^2} \right] - 2 \arctg \left( 1 + \frac{C_2}{r^2} \right) + C \right\}; \quad (\text{IX.399})$$

\* См. В. Г. Громов [1].

\*\* См. В. Г. Громов [3].

$$\sigma_1 = \frac{\sqrt{1,5}}{2} G \left\{ \ln \frac{1}{1 + \frac{C_2}{r^2}} + \frac{1}{1 + \frac{C_2}{r^2}} + C \right\} \quad (\text{IX.400})$$

Для интенсивности напряжений имеем также соответственно для первого и второго законов из (IX.356) выражения

$$\tau_i = G \frac{1 - \left(1 + \frac{C_2}{r^2}\right)^2}{1 + \left(1 + \frac{C_2}{r^2}\right)^2} \quad \text{и} \quad \tau_i = \frac{1}{2} G \frac{1 - \left(1 + \frac{C_2}{r^2}\right)^2}{1 + \frac{C_2}{r^2}} \quad (\text{IX.401})$$

Из условия

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_1^\infty = \pm N_1 \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty \quad (\text{IX.402})$$

находим постоянную  $C$  соответственно для первого и второго законов из (IX.356):

$$C = \pm \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1,5}} - \ln 2 + \frac{\pi}{2}, \quad (\text{IX.403})$$

$$C = \pm \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1,5}} - 1,$$

где

$$\varepsilon = \frac{p}{G}; \quad p = N_1.$$

Для определения постоянной  $C_2$  воспользуемся условием

$$\sigma_1 = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (\text{IX.404})$$

Соотношения (IX.399) и (IX.400) дают уравнения для определения  $C_2$ :

$$\ln \left[ 1 + \frac{1}{\left(1 + C_2\right)^2} \right] - 1 \operatorname{arctg} (1 + C) = \ln 2 - \frac{\pi}{2} - \varepsilon s, \quad (\text{IX.405})$$

$$\ln \frac{1}{1 + C} + \frac{1}{1 + C} = 1 - \varepsilon s, \quad (\text{IX.406})$$

де

$$C = \frac{C_2}{R^2}; \quad s = \pm \frac{2}{\sqrt{1,5}}.$$

Уравнения (IX.405) и (IX.406) — трансцендентные. Их корни могут быть найдены (приближенно) каким-либо численным методом при частных значениях параметра  $\varepsilon = p/G$ .

Пусть  $c_0$  — один из корней уравнений (IX.405) и (IX.406); тогда в точках контура отверстия

$$\sigma_2 = 2\sqrt{1,5}G \frac{(1 + c_0)^2 - 1}{(1 + c_0)^2 + 1}, \quad (\text{IX.407})$$

$$\sigma_2 = \sqrt{1,5}G \frac{(1 + c_0) - 1}{(1 + c_0)}.$$

Отсюда получаем для коэффициентов концентрации  $k = \sigma_2/\rho$  точные выражения, которыми будем пользоваться при сравнении их с приближенными значениями, полученными иными способами:

$$k_T = \frac{2\sqrt{1,5}}{\varepsilon} \cdot \frac{|(1+c_0)^2 - 1|}{(1+c_0)^2 + 1}, \quad (IX.408)$$

$$k_T = \frac{\sqrt{1,5}}{\varepsilon} \left| 1 - \frac{1}{1+c_0} \right|,$$

где

$$\varepsilon = \frac{\rho}{G}; \quad \rho = |\sigma^{(\infty)}| = N_1.$$

**Напряжения возле кругового отверстия при двухосном растяжении — сжатии (приближенное решение).** Пусть напряженное состояние на бесконечности

$$\sigma_1^{(\infty)} = \pm N_1, \quad \sigma_2^{(\infty)} = \pm N_2, \quad (IX.409)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  — заданные неотрицательные величины; знаки в (IX.409) соответствуют: «плюс» — растяжению, а «минус» — сжатию.

Будем предполагать, что контур отверстия свободен от внешних усилий. Удобно ввести параметры

$$s = \frac{1}{2\sqrt{1,5}} \left( \pm \frac{N_1}{\rho} \pm \frac{N_2}{\rho} \right), \quad t = \frac{1}{2\sqrt{1,5}} \left( \pm \frac{N_1}{\rho} \mp \frac{N_2}{\rho} \right), \quad (IX.410)$$

определяющие напряженное состояние на бесконечности.

Как отмечалось выше, построение приближений поставленной задачи сводится к повторному решению первой основной граничной задачи классической теории упругости. Каждая такая задача может быть решена одним из методов Н. И. Muskhelishvili [1]. Применяя наиболее эффективный метод Н. И. Muskhelishvili (см. § 1 гл. I), основанный на применении интегралов типа Коши, и соотношения для первых трех приближений, Л. А. Толоконников и В. Г. Громов [1], а также В. Г. Громов [2—4] нашли приближенные решения рассматриваемой задачи. На основании этих решений были выведены в третьем приближении формулы для напряжений по контуру отверстия

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 2\sqrt{1,5}\rho (\sigma_2^{(0)} + \sigma_2^{(1)}\varepsilon + \sigma_2^{(2)}\varepsilon^2), \quad (IX.411)$$

где

$$\sigma_2^{(0)} = s - 2t \cos 2\theta; \quad \sigma_2^{(1)} = \frac{1}{4}(s^2 + t^2) + st \cos 2\theta - t^2 \cos 4\theta;$$

$$\sigma_2^{(2)} = \alpha + \beta \cos 2\theta + \gamma \cos 4\theta + \delta \cos 6\theta \quad (0 \leq \theta < 2\pi); \quad (IX.412)$$

$$\alpha = -\frac{1}{8}s(s^2 + \frac{81}{5}t^2); \quad \beta = \frac{1}{10}t\left(\frac{27}{4}s^2 + \frac{61}{7}t^2\right); \quad \gamma = \frac{139}{140}st^2; \quad \delta = -\frac{6}{10}t^3;$$

$$(IX.413)$$

$$\alpha = \frac{1}{24} s \left( 5s^2 + \frac{521}{5} t^2 \right); \quad \beta = -\frac{1}{6} t \left( \frac{167}{20} s^2 + \frac{103}{35} t^2 \right); \quad \gamma = \frac{383}{140} st^2; \quad \delta = -\frac{13}{10} t^3$$

соответственно для первого и второго законов из (IX.356).

Отсюда следует, что напряжения на контуре отверстия можно представить в виде

$$\sigma_2 = 2\sqrt{1,5}p \left\{ s + \frac{1}{4}(s^2 + t^2)\varepsilon + \alpha\varepsilon^2 + [-2t + st\varepsilon + \beta\varepsilon^2] \cos 2\theta \right\} + 2\sqrt{1,5}p\varepsilon \{ (-t^2 + \gamma\varepsilon) \cos 4\theta + \varepsilon\delta \cos 6\theta \}. \quad (\text{IX.414})$$

Первая фигурная скобка в (IX.414) есть уточненное значение той части напряжений, характер изменения которой предсказывается классической линейной теорией, вторая — прямое следствие учета геометрической и физической нелинейности. Эти части напряжений различаются по характеру зависимостей от угла  $\theta$ .

В заключение рассмотрим некоторые частные случаи. *Всестороннее растяжение (сжатие)* будем иметь при

$$\sigma_1^{(\infty)} = \sigma_2^{(\infty)} = \pm p \quad (N_1 = N_2 = p). \quad (\text{IX.415})$$

Из (IX.410) получаем

$$s = \pm \frac{1}{\sqrt{1,5}}, \quad t = 0. \quad (\text{IX.416})$$

Напряжения по контуру отверстия соответственно для первого и второго законов из (IX.356):

$$\begin{aligned} \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \pm 2p \left( 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon - \frac{1}{12} \varepsilon^2 \right); \\ \sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = \pm 2p \left( 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon + \frac{5}{36} \varepsilon^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{IX.417})$$

Из (IX.417) видим, что учет второго приближения приводит к увеличению напряжения при всестороннем растяжении и к уменьшению при сжатии по сравнению с классическим значением, независимо от закона формоизменения. Поправки третьего приближения имеют разные знаки для первого и второго законов из (IX.356) и не зависят от перемены знаков напряжений на бесконечности. Учет этих поправок приводит к уменьшению напряжений для первого закона из (IX.356) и к увеличению для второго.

Для коэффициентов концентрации соответственно получаем

$$\begin{aligned} k_{np} = 2 \left( 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon - \frac{1}{12} \varepsilon^2 \right), \\ k_{np} = 2 \left( 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{12} \varepsilon + \frac{5}{36} \varepsilon^2 \right). \end{aligned} \quad (\text{IX.418})$$

Сравним приближенные значения  $k_{np}$  (IX.418) с их точными значениями  $k_T$  (IX.408). При некоторых значениях параметра  $\varepsilon = p/G$  чис-

ленно были найдены корни уравнений (IX.405) и (IX.406), а затем вычислены значения коэффициентов концентрации  $k_T$  по формулам (IX.408) и  $k_{np}$  по формулам (IX.418). Результаты этих подсчетов приведены в табл. IX.6.

Таблица IX.6

$\varepsilon$	$\tau_i = G \operatorname{th} \varepsilon$			$\tau_i = G \operatorname{sh} \varepsilon$		
	$c_0$	$k_T$ (IX. 408)	$k_{np}$ (IX. 418)	$c_0$	$k_T$ (IX. 408)	$k_{np}$ (IX. 418)
0,06	0,052	2,022	2,023	0,052	2,025	2,025
0,12	0,108	2,048	2,048	0,108	2,059	2,055
0,18	0,169	2,069	2,069	0,168	2,082	2,084
0,24	0,236	2,088	2,090	0,234	2,118	2,117
0,30	0,310	2,106	2,109	0,305	2,216	2,151
0,36	0,390	2,179	2,125	0,382	2,256	2,184
0,42	0,480	2,183	2,142	0,466	2,294	2,219
0,48	0,581	2,188	2,158	0,556	2,332	2,260
0,54	0,696	2,190	2,172	0,655	2,379	2,302

Чистый сдвиг, направленный под углом  $\pi/4$  к направлению главных напряжений на бесконечности, интенсивности  $2\rho$  получим при

$$N_1 = -N_2 = \pm \rho. \quad (\text{IX.419})$$

В этом случае параметры (IX.410)

$$s = 0, \quad t = \pm \frac{1}{\sqrt{1,5}}.$$

Напряжения по контуру отверстия

$$\sigma_1 = 0,$$

$$\sigma_2 = 2\sqrt{1,5}\rho \left\{ \frac{1}{4} t^2 s + (-2t + \beta \varepsilon^2) \cos 2\beta \right\} +$$

$$+ 2\sqrt{1,5}\rho \varepsilon \{ -t^2 \cos 4\theta + \varepsilon \delta \cos 6\theta \}, \quad (\text{IX.420})$$

$$\beta = \frac{61}{70} t^3, \quad \delta = -\frac{3}{5} t^3$$

$$\beta = -\frac{103}{210} t^3, \quad \delta = -\frac{13}{10} t^3$$

соответственно для первого и второго законов из (IX.356).

Одноосное растяжение (сжатие). Положим  $N_2 = 0$ . В этом случае

$$\pm N_1 = \sigma_1^{(\infty)} = \pm \rho \left( s = \pm \frac{1}{2\sqrt{1,5}} \right). \quad (\text{IX.421})$$



## Напряжения по контуру отверстия

$$\sigma_1 = 0,$$

$$\sigma_2 = \pm p [1 \pm 0,204\varepsilon + \alpha\varepsilon^2 + (-2 \pm 0,408\varepsilon + \beta\varepsilon^2) \cos 2\theta] \pm p\varepsilon [(\mp 0,408 + \gamma\varepsilon) \cos 4\theta + \varepsilon\delta \cos 6\theta], \quad (\text{IX.422})$$

где соответственно для первого и второго законов из (IX.356)

$$\alpha = -0,358, \quad \beta = 0,258, \quad \gamma = 0,165, \quad \delta = -0,100, \quad (\text{IX.423})$$

$$\alpha = +0,758, \quad \beta = -0,314, \quad \gamma = 0,456, \quad \delta = -0,217.$$

Характер зависимостей (IX.420) и (IX.422), точнее отношений  $\sigma_2/p$ , показан соответственно на рис. IX.4 и IX.5, на которых сплошные кривые соответствуют линейной теории, а штриховые — нелинейной теории.

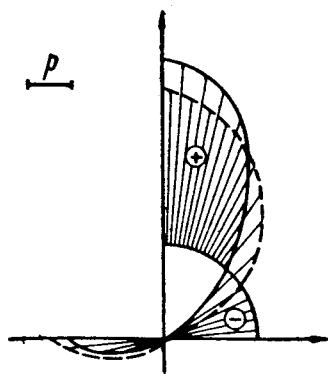


Рис. IX.4.

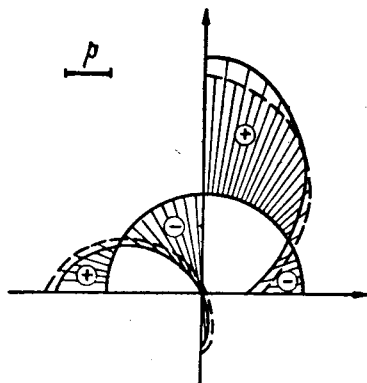


Рис. IX.5.

Из формулы (IX.411), приняв во внимание значения параметров из (IX.413) и то, что при превалирующем действии усилий  $N_1 = p > N_2$ ,  $N_2 \neq 0$ ,  $t = \pm \frac{1}{\sqrt{1,5}} - s \left( -\frac{1}{\sqrt{1,5}} < s < \frac{1}{\sqrt{1,5}} \right)$ , где верхний знак соответствует растяжению, а нижний знак — сжатию, найдем формулы для подсчета коэффициента концентрации  $k = \sigma_2/p$  в точках контура отверстия, которые до деформации определялись значениями угла  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = 3\pi/2$ , в виде

$$k = \frac{\sigma_2}{p} = 2\sqrt{1,5} \left| k^{(0)} + \frac{1}{2} k^{(1)}\varepsilon + \frac{1}{8} k^{(2)}\varepsilon^2 \right|, \quad (\text{IX.424})$$

где

$$k^{(0)} = -s \pm \frac{2}{\sqrt{1,5}}; \quad k^{(1)} = s^2 \pm \frac{1}{\sqrt{1,5}} s - 1;$$

$$k^{(2)} = -1 \frac{24}{35} s^3 \pm 4 \frac{3}{5} \cdot \frac{s^2}{\sqrt{1,5}} - 1 \frac{17}{105} s \mp 1 \frac{47}{105} \cdot \frac{1}{\sqrt{1,5}},$$

либо

$$k^{(2)} = 32 \frac{29}{35} s^3 \mp 59 \frac{2}{15} \cdot \frac{s^2}{\sqrt{1,5}} \mp 9 \frac{31}{315} s \pm 9 \frac{173}{315} \cdot \frac{1}{\sqrt{1,5}}. \quad (\text{IX.425})$$

Для величины  $k^{(1)}$  справедливы следующие оценки:

если  $\sigma_1^{(\infty)} < 0$ , то  $k^{(0)} < 0$ ;

$$k^{(1)} < 0 \quad \text{при} \quad -\frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}} < s < 0;$$

$$k^{(1)} > 0 \quad \text{при} \quad -\frac{1}{\sqrt{1,5}} < s < \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}}; \quad (\text{IX.426})$$

$$k^{(2)} > 0 \quad \text{при} \quad \tau_i = G \operatorname{th} \vartheta;$$

$$k^{(2)} < 0 \quad \text{при} \quad \tau_i = G \operatorname{sh} \vartheta.$$

Если

$$\sigma_1^{(\infty)} > 0, \quad \text{то} \quad k^{(0)} > 0;$$

$$k^{(1)} < 0 \quad \text{при} \quad 0 < s < \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}};$$

$$k^{(1)} > 0 \quad \text{при} \quad \frac{\sqrt{7}-1}{\sqrt{6}} < s < \frac{1}{\sqrt{1,5}}; \quad (\text{IX.427})$$

$$k^{(2)} < 0 \quad \text{при} \quad \tau_i = G \operatorname{th} \vartheta;$$

$$k^{(2)} > 0 \quad \text{при} \quad \tau_i = G \operatorname{sh} \vartheta.$$

Отсюда следует, что учет второго приближения приводит как к большим, так и к меньшим значениям коэффициента концентрации по сравнению с его классическим значением. Решающим здесь оказывается величина и знак  $\sigma_2^{(\infty)}$ . Например, при  $\sigma_1^{(\infty)} > 0$  коэффициент  $k^{(1)}$  монотонно возрастает от  $-1$  до  $1/3$ , причем  $-1 < k^{(1)} < -1/2$  при  $-p < \sigma_2^{(\infty)} < 0$  и

$$-\frac{1}{2} < k^{(1)} < 0 \quad \text{при} \quad \sigma_2^{(\infty)} > 0 \quad \text{для} \quad \sigma_2^{(\infty)} < (\sqrt{7}-2)p; \quad (\text{IX.428})$$

$$0 < k^{(1)} < \frac{1}{3} \quad \text{при} \quad \sigma_2^{(\infty)} > 0 \quad \text{для} \quad (\sqrt{7}-2)p < \sigma_2^{(\infty)} < p.$$

При  $\sigma^{(\infty)} = (\sqrt{7}-2)p$  коэффициент  $k^{(1)} = 0$  и, как следует из (IX.424), в этом случае второе приближение для несжимаемой среды не вносит изменения в числовое значение коэффициента концентрации, даваемое классической линейной теорией.

Учет третьего приближения всегда приводит к уменьшению коэффициента концентрации для первого ( $\tau_i = G \operatorname{th} \vartheta$ ) закона формоизменения из (IX.356) и к увеличению для второго ( $\tau_i = G \operatorname{sh} \vartheta$ ) закона.

Если вспомнить, что вторым приближением учитывается в основном геометрическая нелинейность, а физическая нелинейность начинает учитываться лишь в третьем приближении, то полученные результаты можно легко интерпретировать как проявление качественных особенностей геометрической и физической нелинейностей.

Поведение коэффициента  $k^{(4)}$ , связанного с чисто геометрическим эффектом, объясняется влиянием деформации контура. Например, при чистом сдвиге (IX.420) коэффициент концентрации \*

$$k = 4 (1 \mp 0,306\varepsilon - 0,090\varepsilon^2), \quad (\text{IX.429})$$

$$k = 4 (1 \mp 0,306\varepsilon + 0,597\varepsilon^2);$$

при одноосном растяжении или сжатии (IX.422)

$$k = 3 (1 \mp 0,204\varepsilon - 0,120\varepsilon^2), \quad (\text{IX.430})$$

$$k = 3 (1 \mp 0,204\varepsilon + 0,582\varepsilon^2).$$

Уменьшение коэффициента при растяжении и увеличение при сжатии (по сравнению с классическим значением) являются следствием уменьшения при растяжении и увеличении при сжатии кривизны (кругового до деформации) контура отверстия в изучаемых точках  $\theta = \pi/2$ ,  $\theta = 3\pi/2$ .

Следует заметить, что наибольшее по абсолютной величине напряжение  $\sigma_2$  может оказываться и не в точках  $\theta = \pi/2$ ,  $\theta = 3\pi/2$ , а в точках  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ . Это, например, имеет место в случае чистого сдвига (IX.420). Общие условия, при которых напряжения  $\sigma_2$  в точках  $\theta = \pi/2$ ,  $\theta = 3\pi/2$  больше по абсолютной величине напряжений в точках  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi$ , имеют вид:

$$s + \frac{1}{4} (s^2 - 3t) \varepsilon + (\alpha + \gamma) \varepsilon^2 > 0, \quad -2t + st\varepsilon + (\beta + \delta) \varepsilon^2 < 0$$

либо

$$s + \frac{1}{4} (s^2 - 3t) \varepsilon + (\alpha + \gamma) \varepsilon^2 < 0, \quad -2t + st\varepsilon + (\beta + \delta) \varepsilon^2 > 0. \quad (\text{IX.431})$$

Независимость коэффициентов концентрации в классической линейной теории от перемены знаков напряжений «на бесконечности» объясняется пренебрежением влияния деформаций элементов контура отверстий на распределение напряжений. Как известно, это допущение является одним из основных в классической теории упругости.

\* Первые выражения в формулах (IX.429)—(IX.431) соответствуют первому закону из (IX.356), вторые выражения — второму закону из (IX.356).

**Заключительные замечания.** В более общем случае физической нелинейности (IX.355), отпавляясь от классического решения

$$\varphi_0(z) = \frac{p+q}{4}z + \frac{p-q}{2} \cdot \frac{R^2}{z}, \quad (\text{IX.432})$$

$$\psi_0(z) = -\frac{p-q}{2}z - \frac{p+q}{2} \cdot \frac{R^2}{z} + \frac{p-q}{2} \cdot \frac{R^4}{z^3},$$

соответствующего двухосному напряженному состоянию на бесконечности  $\sigma_x^{(\infty)} = \pm p$ ;  $\sigma_y^{(\infty)} = \pm q$ , как первого приближения, можно построить приближенное (теоретически с любой степенью точности) решение задачи о концентрации напряжений возле кругового отверстия.

Исследования показывают\*, что граничные условия как в усилиях, так и в перемещениях для всех этих трех законов формоизменения (IX.355) и (IX.356) для первых двух приближений оказываются одинаковыми, поэтому первые два приближения для всех этих трех формоизменений (IX.355) и (IX.356) совпадают. Другими словами, все формулы, выведенные в предыдущем разделе, взятые с точностью до второго приближения (включительно), т. е. с удержанием в них членов с  $\epsilon$  в первой степени, будут справедливы для любого из этих трех законов формоизменения (IX.355) и (IX.356). Третье приближение, которое начинает учитывать влияние физической нелинейности задачи, будет для каждого из этих законов (IX.355) и (IX.356) другое, и поэтому слагаемое  $\sigma_2^{(2)}$  в формуле (IX.411) будет для закона (IX.355) иметь вид

$$\sigma_2^{(2)} = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{1}{4} - \frac{4}{3} e \right) s^3 + \left( \frac{11}{2} - \frac{382}{15} e \right) st^2 - \left[ \left( \frac{7}{4} - \frac{124}{15} e \right) s^2 t + \left( \frac{3}{10} + \frac{572}{105} e \right) t^3 \right] \cos 2\theta + \frac{1}{5} \left( 23 - \frac{244}{7} e \right) st^2 \cos 4\theta - \left( \frac{9}{4} - \frac{14}{5} e \right) t^3 \cos 6\theta \right\}, \quad (\text{IX.433})$$

где

$$e = \frac{1}{24} - g.$$

Эти напряжения в точках контура отверстия, которые до деформации определялись значениями  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = \pi$ , будут иметь соответственно вид

$$\sigma_2^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{4} - \frac{4}{3} e \right) s^3 \pm \left( \frac{7}{4} - \frac{124}{15} e \right) s^2 t + \left( \frac{101}{10} - \frac{3406}{105} e \right) st^2 \mp \left( \frac{51}{20} - \frac{866}{105} e \right) t^3 \right], \quad (\text{IX.434})$$

где знак «плюс» соответствует точке  $\theta = \pi/2$ , а знак «минус» — точке  $\theta = \pi$ .

\* См. В. Г. Громов [4].

При всестороннем растяжении — сжатии напряжениями (на бесконечности) с интенсивностью  $2\rho$  параметры  $t=0$ ,  $s = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{1,5}}$ , поэтому из (IX.434) получаем

$$\sigma_2^{(2)} = \pm \frac{4}{9\sqrt[3]{1,5}} \left( \frac{7}{48} + g \right). \quad (\text{IX.435})$$

Из (IX.435) и (IX.411) следует, что для материалов с физической нелинейностью (IX.355) напряжения  $\sigma_2$  (IX.411) по контуру отверстия при  $g < -7/48$ , найденные с точностью до третьего приближения (включительно), будут больше напряжений  $\sigma_2$ , найденных с точностью до второго приближения (включительно). При  $g > -7/48$  будем иметь обратную картину. При  $g = g^* = -7/48 = -0,146$  составляющая  $\sigma_2^{(2)} = 0$ , и поэтому учет третьего приближения не вносит поправки в значения коэффициента концентрации  $k$  (IX.411), найденного с точностью до второго приближения (включительно).

Чистый сдвиг под углом  $\pi/4$  к главным напряжениям на бесконечности получим при  $s=0$  и  $t = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{1,5}}$ . В этом случае из (IX.334) легко находим

$$\sigma_2^{(2)} = \mp \frac{1}{3\sqrt[3]{1,5}} \left[ \left( \frac{3}{10} + \frac{572}{105} e \right) \cos 2\theta + \left( \frac{9}{4} - \frac{14}{5} e \right) \cos 6\theta \right]. \quad (\text{IX.436})$$

В точках  $\theta = \pi/2$  и  $\theta = \pi$  получаем

$$\sigma_2^{(2)} = \mp \frac{1}{3\sqrt[3]{1,5}} \left[ \mp \left( -\frac{51}{20} + \frac{866}{105} e \right) \right]. \quad (\text{IX.437})$$

Из условия  $\sigma_2^{(2)} = 0$  находим «критическое» значение для  $g^* = -0,268$ . Здесь, как и в (IX.434), верхний знак в квадратных скобках соответствует точке  $\theta = \pi/2$ , а нижний — точке  $\theta = \pi$ .

В случае превалирующего действия одного из усилий  $\sigma_1^{(\infty)} = \pm N_1$  или  $\sigma_2^{(\infty)} = \pm N_2$ , например,  $\sigma_1^{(\infty)} = N_1 > 0$ , из (IX.434) следует

$$\begin{aligned} \sigma_2^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{121}{20} - \frac{604}{35} e \right) s^3 \pm \left( -\frac{54}{5} + \frac{478}{15} e \right) \frac{s^2}{\sqrt[3]{1,5}} + \right. \\ \left. + \left( \frac{49}{20} - \frac{808}{105} e \right) \frac{s}{\sqrt[3]{1,5}} \pm \left( \frac{51}{20} - \frac{866}{105} e \right) \frac{1}{(\sqrt[3]{1,5})^3} \right]. \end{aligned} \quad (\text{IX.438})$$

Приравняв  $\sigma_2^{(2)}$  (IX.438) нулю, найдем «критическое» значение

$$g^*(s) = \frac{1}{24} - \frac{21}{8} \cdot \frac{121\kappa^3 - 216\kappa^2 + 49\kappa + 51}{906\kappa^3 - 1673\kappa^2 + 404\kappa + 443}, \quad (\text{IX.439})$$

где

$$\kappa = |s| \sqrt[3]{1,5}.$$

Из (IX.439) видим, приняв во внимание, что  $s$  изменяется в интервале  $-\frac{1}{\sqrt{1,5}} < s < \frac{1}{\sqrt{1,5}}$ , что функция  $g^*(s)$  заключена в интервале

$$-0,268 < g^*(s) < -0,146. \quad (\text{IX.440})$$

Из (IX.440) заключаем, что для законов формоизменения (IX.355) с  $g < -0,268$  и  $g > -0,146$  знак поправки  $\sigma_2^{(2)}$  (IX.438) будет неизменным при любом соотношении напряжений  $\sigma_1^{(\infty)}$  и  $\sigma_2^{(\infty)}$ . В первом случае (при  $g < -0,268$ ) знак  $\sigma_2^{(2)}$  противоположен знаку превалирующего напряжения на бесконечности, во втором случае (при  $g > -0,146$ ) — совпадает с ним. Это приводит либо к увеличению наибольших напряжений  $\sigma_2$  (IX.411), либо к понижению их. Поэтому нелинейность типа (IX.355) при  $g < -0,268$  естественно назвать «мягкой», а при  $g > -0,146$  — «жесткой». Согласно этой классификации первый закон из (IX.356) (при котором  $g = -1/3$ ) будет относиться к категории «мягкой» нелинейности, а второй закон из (IX.356) (при котором  $g = +1/6$ ) — к «жесткой» нелинейности. В каждом отдельном случае, т. е. для заданного значения  $g$  можно, сопоставив это значение  $g$  со значением  $g^*$  (IX.439), судить о влиянии физической нелинейности, точнее третьего приближения, на концентрацию напряжений  $\sigma_2$  (IX.411) возле отверстия. Так, если  $g < g^*$ , то учет третьего приближения приводит к понижению наибольшего напряжения, а при  $g > g^*$  — к увеличению. Очевидно, при  $g = g^*$  напряжение  $\sigma_2^{(2)} = 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

- Бриджмен П. [1] Исследование больших пластических деформаций и разрывов. ИЛ, М., 1955.  
 [2] Вопросы теории пластичности. Изд-во АН СССР, М., 1961.  
 [3] Физика высоких давлений. ОНТИ, М., 1935.
- Грин А., Адкинс Дж. [1] Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. «Мир», М., 1965.
- Громов В. Г. [1] Основные соотношения нелинейной задачи о плоских деформациях и построение последовательных приближений.— В кн.: Ученые записки КБГУ, 17, 1963.  
 [2] Конечные плоские деформации несжимаемого материала.— Автореферат диссерт. Ростовск. ун-та, 1963.  
 [3] Концентрация напряжений около цилиндрической круговой полости.— Прикл. мех., 1965, 1, 1.  
 [4] О влиянии физической нелинейности на концентрацию напряжений возле кругового отверстия при больших деформациях.— Прикл. мех. 1965, 1, 10.  
 [5] Концентрация напряжений около круговой цилиндрической полости в бесконечно протяженном нелинейно упругом теле.— В кн.: Научн. сообщ. Ростовск. ун-та, сер. точных и естественных наук, 67, 1964 (1965).
- Громов В. Г., Толоконников Л. А. [1] К вычислению приближений в задаче о конечных плоских деформациях несжимаемого материала.— Изв. АН СССР, ОТН, 1963, 2.
- Койфман Ю. И. [1] Решение плоской задачи нелинейной теории упругости для пластинки, край которой подкреплён тонким стержнем.— В кн.: Сб. работ аспирантов мех.-мат. и физ. факультетов Львовск. ун-та, 1, 1961.

- [2] Решение плоской задачи нелинейной теории упругости для бесконечной пластинки с криволинейным отверстием.— Изв. вузов, строит. и арх., 1962, 1.
- [3] Розв'язання деяких задач нелінійної плоскої теорії пружності.— В кн.: Питання механіки і математики, 9. Вид-во Львівськ. ун-ту, 1962.
- [4] Нелінійні ефекти другого порядку для пластин з отвором, край якого спаяний з абсолютно жорстким ядром. ДАН УРСР, 1964, 3.
- [5] Некоторые основные задачи плоской нелинейной теории упругости. Автореферат канд. диссерт. Львовск. ун-т, 1963.
- Крылов В. В. [1] Плоская задача теории упругости для конечных перемещений.— ПММ, 1946, 10, 5—6.
- [2] К применению комплексных переменных в плоской задаче теории упругости для конечных перемещений.— ПММ, 1948, 12, 1.
- Мухелишвили Н. И. [1] Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
- Новожилов В. В. [1] Теория упругости. Судпромгиз, Л., 1958.
- Савин Г. Н., Койфман Ю. И. [1] Деякі задачі плоскої нелінійної теорії пружності.— Прикл. мех. 1961, 7, 6.
- [2] Нелинейные эффекты в задачах о концентрации напряжений около отверстий с подкрепленным краем.— Прикл. мех., 1965, 1, 9.
- Толоконников Л. А. [1] О связи между напряжениями и деформациями в нелинейной теории упругости.— ПММ, 1956, 20, 3.
- [2] Уравнения нелинейной теории упругости в перемещениях.— ПММ, 1957, 21, 6.
- [3] Некоторые вопросы нелинейной теории упругости.— Автореферат докт. диссерт., МГУ, 1958.
- [4] Плоская деформация несжимаемого материала.— ДАН СССР, 1957, 119, 6.
- [5] Конечные плоские деформации несжимаемого материала.— ПММ, 1959, 23, 1.
- Тарасьев Г. С. [1] Конечные плоские деформации сжимаемого материала.— Автореферат канд. диссерт., Тула, 1966.
- [2] О концентрации напряжений около круговой полости в нелинейно деформируемом материале.— Прикл. мех., 1966, 2, 3.
- Тарасьев Г. С., Толоконников Л. А. [1] Концентрация напряжений около полостей в несжимаемом материале.— В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», 1965.
- [2] Конечные плоские деформации сжимаемого материала.— Прикл. мех., 1966, 2, 1.
- Шереметьев М. П. [1] Плоско-напряженное состояние пластинки с подкрепленным круговым отверстием.— В кн.: Инж. сб., 14. Изд-во АН СССР, М., 1953.
- [2] Упругое равновесие эллиптического кольца.— Прикл. мат. и мех., 1953, 17, 1.
- Adkins J. E., Green A. E. [1] Plane problems in second-order Elasticity Theory, Proc. of the Roy. Soc., ser. A, v. 239, N 1219, 1957.
- Adkins J. E., Green A. E., Nicholas G. G. [1] Two-dimensional Theory of Elasticity for finite Deformations, Phil. Trans of the Roy. Soc., ser. A, v. 247, 1954.
- Adkins J. E., Green A. E., Shield R. T. [1] Finite plate strain, Phil. Trans of the Roy. Soc., ser. A, v. 246, N 910, 1953.
- Green A. E., Zerna W. [1] Theoretical Elasticity, Oxford, Univ. Press, 1954.
- Green A. E. and Adkins J. E. [1] Large Elastic Deformations and non-Linear Continuum Mechanics. Oxford, At the clarendon Press, 1960.
- Davis E. A. [1] Yielding and Fracture of Medium-Carbon Steel under combined stresses, Appl. Mech., 1945, 12 (Русский перевод в сб. Теория пластичности, ИЛ, М., 1948).
- Lianis G. [1] Finite elastic analysis of an infinite plate with an elliptic hole, 1, Plane strain, Purdue Univ. Rept., 1961, N S 61—1.
- Stoppelli F. [1] Un teorema di esistenza ed Unicità relativo alle eguazioni dell elastostatica isoterma per deformazioni finite, Ricerche matematica, 3, N 2, 1954.
- [2] Sulla svilupabilita in serie di potenze di un parametro delle soluzioni delle eguazioni dell elastostatica isoterma, Ricerche matematica, 4, 1955.
- Smith G. F., Rivlin R. S. [1] Trans. Amer. Math. Soc. 88, (1958), 175.

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЙ В ОБОЛОЧКАХ

## § 1. Постановка задачи \*

**Основные уравнения задачи в дифференциальной форме.** Рассмотрим напряженное состояние в тонкой оболочке постоянной толщины  $h$ , ослабленной каким-либо не очень малым отверстием, контур которого представляет собой пространственную кривую  $\Gamma$ , не имеющую угловых точек. Отнесем срединную поверхность рассматриваемой оболочки к некоторой изотермической, вообще говоря, несамосопряженной системе криволинейных координат  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. X.1).

Уравнение срединной поверхности оболочки в этих координатах будет иметь в векторной форме вид

$$R(\alpha, \beta) = \vec{i}_x f_1(\alpha, \beta) + \vec{i}_y f_2(\alpha, \beta) + \vec{i}_z f_3(\alpha, \beta), \quad (X.1)$$

где  $f_1(\alpha, \beta) = x$ ,  $f_2(\alpha, \beta) = y$ ,  $f_3(\alpha, \beta) = z$  — заданные функции параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

В системе координат  $\alpha$  и  $\beta$  первая и вторая квадратичные формы, как известно, будут иметь вид

$$I \equiv ds^2 = \lambda^2(\alpha, \beta)(d\alpha^2 + d\beta^2), \quad (X.2)$$

$$II \equiv -(\vec{dR}, \vec{dn}) = Dd\alpha^2 + 2D^*d\alpha d\beta + D^{**}d\beta^2. \quad (X.3)$$

Коэффициенты  $\lambda^2$ ,  $D$ ,  $D^*$  и  $D^{**}$  этих форм определяются из заданного уравнения срединной поверхности оболочки (X.1) по формулам

$$\lambda^2(\alpha, \beta) = \left( \vec{\frac{\partial R}{\partial \alpha}}, \vec{\frac{\partial R}{\partial \alpha}} \right) = \left( \vec{\frac{\partial R}{\partial \beta}}, \vec{\frac{\partial R}{\partial \beta}} \right); \quad (X.4)$$

$$D = \left( \vec{n}, \vec{\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha^2}} \right), \quad D^* = \left( \vec{n}, \vec{\frac{\partial^2 R}{\partial \alpha \partial \beta}} \right), \quad D^{**} = \left( \vec{n}, \vec{\frac{\partial^2 R}{\partial \beta^2}} \right), \quad (X.5)$$

где  $\vec{n}(\alpha, \beta)$  — единичная нормаль к поверхности.

Обозначим:

$$\begin{aligned} T_\alpha^*, T_\beta^*, S_\alpha^*, S_\beta^* &— \text{тангенциальные усилия,} \\ Q_\alpha^*, Q_\beta^* &— \text{перерезывающие усилия,} \\ H_\alpha^*, H_\beta^* &— \text{крутящие моменты,} \\ G_\alpha^*, G_\beta^* &— \text{изгибающие моменты,} \end{aligned} \quad (X.6)$$

\* См. Г. Н. Савин [1—6]; Г. Н. Савин, Г. А. Ван Фо Фы [1], Г. Н. Савин, Г. А. Ван Фо Фы, В. Н. Буйвол [1—3]. Иной подход к исследованию напряженного состояния возле кругового отверстия в сферической оболочке указан Л. Б. Именитовым [1—3].



характеризующие напряженное состояние в оболочке с рассматриваемым отверстием, находящейся под действием заданной системы внешних сил при заданных граничных условиях.

Положительные направления компонентов показаны на рис. X.1. Моменты  $H_\alpha^*$  и  $H_\beta^*$ ,  $G_\alpha^*$  и  $G_\beta^*$  изображены в виде векторов, причем если смотреть с положительной стороны вектора, то соответствующий момент будет стремиться произвести поворот по часовой стрелке.

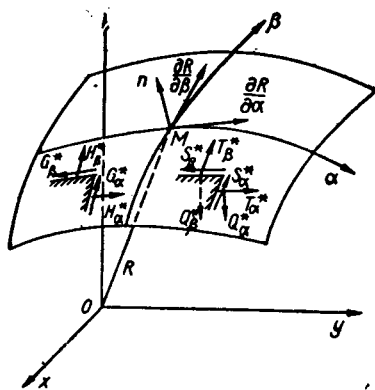


Рис. X.1

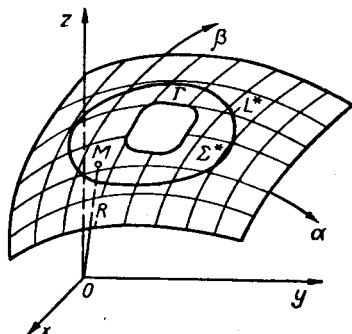


Рис. X.2.

Напряженное состояние в той же, но сплошной (неослабленной отверстием) оболочке, находящейся под действием такой же системы внешних сил и подчиненной таким же граничным условиям, назовем основным и обозначим его следующим образом:

$$\begin{aligned} T_\alpha^0, T_\beta^0, S_\alpha^0, S_\beta^0, Q_\alpha^0, \\ Q_\beta^0, H_\alpha^0, H_\beta^0, G_\alpha^0, G_\beta^0. \end{aligned} \quad (\text{X.7})$$

Представим компоненты  $T_\alpha^*, \dots, G_\beta^*$  в оболочке с отверстием в виде

$$\begin{aligned} T_\alpha^* &= T_\alpha^0 + T_\alpha; & T_\beta^* &= T_\beta^0 + T_\beta; & S_\alpha^* &= S_\alpha^0 + S_\alpha; \\ S_\beta^* &= S_\beta^0 + S_\beta; & G_\alpha^* &= G_\alpha^0 + G_\alpha; & G_\beta^* &= G_\beta^0 + G_\beta; \\ H_\alpha^* &= H_\alpha^0 + H_\alpha; & H_\beta^* &= H_\beta^0 + H_\beta; & Q_\alpha^* &= Q_\alpha^0 + Q_\alpha; \\ & & & & Q_\beta^* &= Q_\beta^0 + Q_\beta. \end{aligned} \quad (\text{X.8})$$

Из (X.8) видим, что компоненты

$$T_\alpha; T_\beta; S_\alpha; S_\beta; Q_\alpha; Q_\beta; H_\alpha; H_\beta; G_\alpha \text{ и } G_\beta \quad (\text{X.9})$$

представляют собой дополнительные компоненты упругих усилий и моментов в оболочке, вызванные наличием отверстия в ней и характери-

зующие, собственно, «концентрацию напряжений» в данной оболочке возле рассматриваемого отверстия\*.

Экспериментальные исследования напряженного состояния в оболочках возле отверстий с достаточно гладкими контурами показывают, что возмущения в напряженном состоянии возле отверстий в оболочке

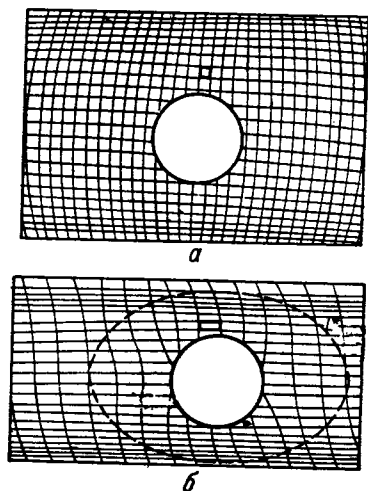


Рис. X.3.

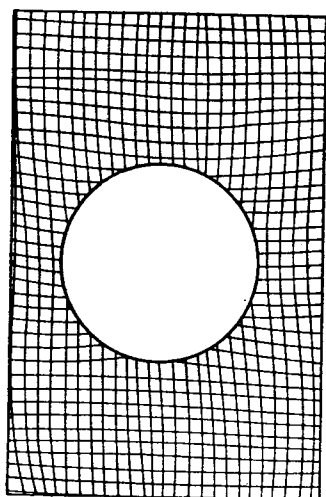


Рис. X.4.

имеют местный характер, распространяясь на сравнительно небольшую зону  $\Sigma^*$  возле отверстия, ограниченную контуром  $L^*$  (рис. X.2).

О величине самого возмущения и зоны затухания напряженного состояния возле кругового диска толщиной  $\delta=3$  мм и диаметром  $d=15$  мм, приклеенного к цилиндрической оболочке (толщиной  $h=1$  мм и диаметром  $d=40$  мм), имитирующего круговое отверстие в оболочке с упругим кольцом при одновременном действии внутреннего давления и осевого растяжения цилиндрической оболочки при  $\epsilon=0$  и  $\epsilon=0,5$  можно судить по рис. X.3. Для удобства наблюдений на этих оболочках нанесена в недеформированном ее состоянии квадратная сетка линий  $\alpha=\text{const}$  и  $\beta=\text{const}$ .

Ту же картину локального характера мы наблюдаем и в случае сферической резиновой оболочки диаметром  $D=250$  мм и толщиной  $h=1$  мм возле наклеенного кругового резинового диска толщиной  $\delta=3$  мм и диаметром  $d=25$  мм при внутреннем давлении (рис. X.4).

Более подробное описание результатов экспериментов приведено в работах Г. Н. Савина [1—3].

\* Такое разбиение напряженного состояния возможно в силу линейности рассматриваемой задачи.

Многочисленные эксперименты по исследованию напряженного состояния возле кругового и эллиптического отверстий в сферических и цилиндрических оболочках приводят к выводу, что и в общем случае в оболочке положительной и нулевой\* гауссовой кривизны с отверстием, ограниченным достаточно гладким контуром, можно указать такую локального характера зону возмущенного напряженного состояния  $\Sigma^*$ , ограниченную контуром  $L^*$  (см. рис. X.2), на котором и, тем более, вне которого компоненты  $T_\alpha, \dots, G_\beta$  (X.9) будут практически равны нулю, а компоненты  $T_\alpha^0, \dots, G_\beta^0$  (X.7) и  $T_\alpha^*, \dots, G_\beta^*$  (X.6) будут совпадать. Это показывает, что компоненты  $T_\alpha, \dots, G_\beta$  (X.9), характеризующие собственно «концентрацию напряжений» в оболочке возле рассматриваемого отверстия, представляют собой быстро затухающие функции координат, и для их определения можно применить теорию напряженных состояний с большим показателем изменчивости, совпадающую с теорией пологих оболочек (см. А. Л. Гольденвейзер [1] и В. З. Власов [1]).

Перед тем, как перейти к установлению основных уравнений и граничных условий для  $T_\alpha, \dots, G_\alpha$  (X.9), заметим, что в силу малости области  $\Sigma^*$  представим (X.2) в виде

$$l = ds^2 = \lambda_0^2 (da^2 + d\beta^2), \quad (X.10)$$

где  $\lambda_0 = \text{const}$ .

Замена  $ds^2$  в области  $\Sigma^*$  на выражение (X.10), которое в случае цилиндрической оболочки является точным выражением, а в теории пологих оболочек принимается для произвольной оболочки, соответствует замене неевклидовой метрики срединной поверхности оболочки на евклидову метрику плоскости.

В дальнейшем будем считать, что отверстия имеют такие размеры, что размеры области  $\Sigma^*$ , ограниченной контуром  $L^*$ , невелики и выражение для  $ds^2$  будем брать в виде (X.10).

Перейдем от старой системы координат  $(\alpha, \beta)$  к такой изотермической системе координат  $(\rho, \theta)$ , одна из координатных линий которой  $\rho = \rho_0 = \text{const}$  совпадала бы с контуром  $\Gamma$  рассматриваемого отверстия в оболочке. Векторное уравнение контура  $\Gamma$  получим, заменив в (X.1)  $\alpha$  и  $\beta$ , определенные функцией  $\omega(\xi)$  (X.11), на новые переменные  $\rho$  и  $\theta$  и положив  $\rho = \rho_0$ :

$$\vec{R}(\rho_0, \theta) = \vec{i}_x \varphi_1(\rho_0, \theta) + \vec{i}_y \varphi_2(\rho_0, \theta) + \vec{i}_z \varphi_3(\rho_0, \theta).$$

На плоскости  $P$  переменных  $\alpha$  и  $\beta$  контурам  $\Gamma$  и  $L^*$  поверхности будут соответствовать контуры  $\gamma$  и  $l$  (рис. X.5).

Будем рассматривать отверстия в оболочках, ограниченные достаточно гладкими контурами  $\Gamma$ , которым в плоскости  $P$  соответствуют

\* См. Ю. И. Вологжанинов, С. Г. Шокотько [1], где методом фотоупругости исследуются возмущенные зоны возле эллиптических отверстий в цилиндрических оболочках.

контуры  $\gamma$  без угловых точек, параметрическое уравнение которых может быть задано аналитической функцией

$$\alpha + i\beta = \omega(\zeta) = a_1\zeta + \frac{a_{-1}}{\zeta} + \frac{a_{-2}}{\zeta^2} + \dots + \frac{a_{-n}}{\zeta^n}, \quad (\text{X.11})$$

где  $\zeta = \exp(\rho_0 + i\theta)$ , а  $\rho_0, a_1, a_{-1}, \dots, a_{-n}$  — постоянные. Другими словами, будем считать, что аналитическая функция (X.11) осуществляет указанное выше преобразование координат. Отверстие в оболочке будем называть в дальнейшем по форме кривой  $\gamma$  на плоскости  $P$  (рис. X.5). Из (X.11) видим, что в новых координатах  $\rho$  и  $\theta$  первая квадратичная форма  $ds^2$  (X.10) будет иметь вид

$$ds^2 = \mathcal{H}^2(\rho, \theta) (d\rho^2 + d\theta^2), \quad (\text{X.12})$$

где

$$\mathcal{H}^2(\rho, \theta) = \lambda_{0e}^{2\sigma} \omega'(\zeta) \overline{\omega'(\zeta)}.$$

Контур  $l$  на плоскости  $P$ , соответствующий контуру  $L^*$ , можно заменить ближайшей к нему координатной линией  $\rho = \rho_1$ .

Для нахождения компонентов  $T_\alpha, \dots, G_\beta$  (X.9), которые в координатах  $\rho$  и  $\theta$  будем обозначать через

$$T_\theta; T_\rho; \dots, G_\rho, \quad (\text{X.13})$$

применим приближенную теорию напряженного состояния с большим показателем изменчивости\*.

Поскольку каждое из напряженных состояний  $T_\rho^*, \dots, G_\rho^*$  (X.9) и  $T_\rho^0, \dots, G_\rho^0$  (X.7) удовлетворяет одним и тем же уравнениям теории пологих оболочек при одних и тех же внешних силах и граничных условиях, то для нахождения компонентов  $T_\rho, \dots, G_\theta$  получим, как легко видеть из (X.8), однородную систему уравнений, которую представим в виде\*\*

$$\begin{aligned} \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^2 \nabla^2 \omega - \nabla_k^2 \hat{\varphi} &= 0, \\ \frac{1}{Eh} \nabla^2 \nabla^2 \hat{\varphi} + \nabla_k^2 \omega &= 0, \end{aligned} \quad (\text{X.14})$$

где  $E$  — модуль Юнга;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $h$  — толщина оболочки. Операторы  $\nabla^2$  и  $\nabla_k^2$  в изотермических координатах  $\rho$  и  $\theta$

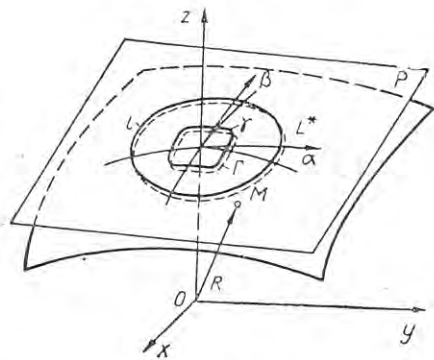


Рис. X.5.

\* См. А. Л. Гольденвейзер [1], уравнения (20.8) и (20.9), стр. 361.

\*\* Так как в дальнейшем будут часто употребляться полярные координаты  $(r, \varphi)$ , то для избежания путаницы для функции напряжений введено обозначение  $\hat{\varphi}(\rho, \theta)$ .

имеют вид

$$\nabla^2 = \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right), \quad (\text{X.15})$$

$$\nabla_k^2 = \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{1}{R_\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{R_{\varrho\theta}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) + \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{1}{R_{\varrho\theta}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{R_\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right],$$

где  $\mathcal{F}\mathcal{L}^2(\varrho, \theta)$  — коэффициент формы (X.12).

Величины

$$\frac{1}{R_\varrho} = -\frac{D}{\mathcal{F}\mathcal{L}^2}, \quad \frac{1}{R_\theta} = -\frac{D^{**}}{\mathcal{F}\mathcal{L}^2} \quad (\text{X.16})$$

представляют собой кривизны нормальных сечений срединной поверхности оболочки, проведенных соответственно вдоль координатных линий  $\varrho = \text{const}$  и  $\theta = \text{const}$ .

Величина

$$\frac{1}{R_{\varrho\theta}} = \frac{D^*}{\mathcal{F}\mathcal{L}^2} \quad (\text{X.17})$$

характеризует степень несамосопряженности изотермических координат  $\varrho$  и  $\theta$ .  $D$ ,  $D^*$  и  $D^{**}$  — коэффициенты формы (X.3), записанной в изотермических координатах  $\varrho$  и  $\theta$ . Прогиб срединной поверхности оболочки  $w(\varrho, \theta)$  считается положительным при прогибе оболочки в сторону отрицательной нормали.

Компоненты изгибной деформации определяются через прогиб  $w(\varrho, \theta)$  по формулам

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}^3} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{L}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}, \\ \kappa_2 &= \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}^3} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{L}}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varrho}, \\ \tau^{(1)} &= \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}^3} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{L}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varrho}, \\ \tau^{(2)} &= -\frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}} \cdot \frac{\partial w}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{L}^3} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{L}}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (\text{X.18})$$

Моменты определяются по формулам

$$\begin{aligned} G_\varrho &= -D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), & G_\theta &= -D(\kappa_2 + \nu\kappa_1), \\ H_\varrho &= D(\tau^{(1)} + \nu\tau^{(2)}), & H_\theta &= D(\tau^{(2)} + \nu\tau^{(1)}), \end{aligned} \quad (\text{X.19})$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — цилиндрическая жесткость.

Компоненты  $T_0, T_\theta, S_0$  и  $S_\theta$  определяются через функцию напряжений  $\hat{\varphi}(\varrho, \theta)$  по формулам

$$\begin{aligned} T_0 &= \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}^3} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{E}}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varrho}, \\ T_\theta &= \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}^3} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{E}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta}; \\ S_0 &= -\frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}^3} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{E}}{\partial \varrho} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta}, \\ S_\theta &= \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}^3} \cdot \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{E}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \varrho}. \end{aligned} \quad (\text{X.20})$$

Перерезывающие усилия определяются через найденные компоненты (X.19) по формулам

$$\begin{aligned} Q_0 &= \frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varrho} (\mathcal{F}\mathcal{E} G_\varrho) - \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{E}}{\partial \theta} H_0 + \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathcal{F}\mathcal{E} H_\theta) - \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{E}}{\partial \varrho} G_\theta \right], \\ Q_\theta &= -\frac{1}{\mathcal{F}\mathcal{E}^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \varrho} (\mathcal{F}\mathcal{E} H_\varrho) + \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{E}}{\partial \theta} G_0 - \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathcal{F}\mathcal{E} G_\theta) - \frac{\partial \mathcal{F}\mathcal{E}}{\partial \varrho} H_\theta \right]. \end{aligned} \quad (\text{X.21})$$

Систему уравнений (X.14) можно, вводя комплексную функцию

$$\Phi(\varrho, \theta) = \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \omega(\varrho, \theta) + i\hat{\varphi}(\varrho, \theta), \quad (\text{X.22})$$

свести к уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi + i \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{h} \nabla_k^2 \Phi = 0. \quad (\text{X.23})$$

Функция (X.22) является частным случаем комплексного преобразования, введенного в теорию оболочек В. В. Новожиловым [1].

**Основные уравнения в интегральной форме.** Введем, следуя И. Н. Векуа [2], вместо независимых переменных  $\varrho$  и  $\theta$  новые, сопряженные между собой независимые переменные:

$$\xi = \varrho + i\theta; \quad \eta = \varrho - i\theta. \quad (\text{X.24})$$

Опуская промежуточные выкладки\*, получаем вместо уравнения (X.23) эквивалентное ему интегральное уравнение типа Вольтерра:

$$\begin{aligned} V(\xi, \eta) + i\epsilon \left[ \int_0^\xi K_1(\xi, \eta, t) V(t, \eta) dt + \int_0^\eta K_2(\eta, \xi, \tau) V(\xi, \tau) d\tau + \right. \\ \left. + \int_0^\xi \left\{ \int_0^\eta K(\xi, \eta, t, \tau) V(t, \tau) d\tau \right\} dt \right] = \int_0^\xi \lambda_1(t, \eta) \psi_0(t) dt + \end{aligned}$$

\* См. Г. Н. Савин [3].

$$+ \int_0^{\eta} \lambda_1^*(\xi, \tau) \psi_0^*(\tau) d\tau + \psi_1(\xi) + \psi_1^*(\eta), \quad (\text{X.25})$$

где

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{8h}.$$

Функция  $V(\xi, \eta) = \Phi\left(\frac{\xi + \eta}{2}, i\frac{\eta - \xi}{2}\right)$  — некоторое регулярное в области  $\Sigma + \bar{\Sigma}$  (рис. X.6) решение уравнения (X.23), т.е. решение непрерывное вместе со своими частными производными порядка  $\leq 4$  в указанной области ( $\xi \in \Sigma$ ;  $\eta \in \bar{\Sigma}$ ). Функции  $\psi_0(\xi)$ ,  $\psi_0^*(\eta)$ ,  $\psi_1(\xi)$  и  $\psi_1^*(\eta)$  — голоморфные и должны быть определены из соответствующих граничных условий и условий на бесконечности. Эти функции при заданной функции  $V(\xi, h)$  определяются однозначно, если их подчинить условиям

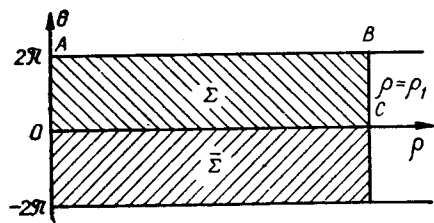


Рис. X.6.

$$\psi_0(0) = \overline{\psi_0^*(0)}; \quad (\text{X.26})$$

$$\psi_1(0) = \overline{\psi_1^*(0)}.$$

Функции  $\lambda(\xi, \eta)$ ;  $\lambda_1(\xi, \eta)$ ;  $\lambda_1^*(\xi, \eta)$ ;  $K(\xi, \eta, t, \tau)$ ;  $K_1(\xi, \eta, t)$  и  $K_2(\eta, \xi, \tau)$ , входящие в уравнение (X.25), известны и зависят лишь от вида оболочки и формы отверстия:

$$\lambda(\xi, \eta) = \mathcal{H}^2(\rho, \theta) = \mathcal{H}^2\left(\frac{\xi + \eta}{2}, \frac{\eta - \xi}{2}\right);$$

$$\lambda_1(\xi, \eta) = \int_0^{\eta} \lambda(\xi, \tau) d\tau; \quad \lambda_1^*(\xi, \eta) = \int_0^{\xi} \lambda(t, \eta) dt;$$

$$K(\xi, \eta, t, \tau) = \lambda(t, \tau) B(t, \tau) + \int_{\tau}^{\eta} \left[ D(t, \tau) \lambda(t, \tau_1) - A(t, \tau) \frac{\partial \lambda(t, \tau)}{\partial t} \right] d\tau_1 +$$

$$+ \int_0^{\xi} \left[ E(t, \tau) \lambda(t_1, \tau) - C(t, \tau) \frac{\partial \lambda(t_1, \tau)}{\partial \tau} \right] dt_1 +$$

$$+ F(t, \tau) \int_t^{\xi} dt_1 \int_{\tau}^{\eta} \lambda(t_1, \tau_1) d\tau_1;$$

$$K_1(\xi, \eta, t) = C(t, \eta) \int_t^{\xi} \lambda(t_1, \eta) dt_1;$$

$$K_2(\eta, \xi, \tau) = A(\xi, \tau) \int_{\tau}^{\eta} \lambda(\xi, \tau_1) d\tau_1;$$

$$\mathcal{H}^2 \nabla_k^2 \Phi = \frac{\partial^2 (AV)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 (BV)}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 (CV)}{\partial \eta^2} +$$

$$+ \frac{\partial (DV)}{\partial \xi} + \frac{\partial (EV)}{\partial \eta} + FV.$$

В качестве примера приведем интегральное уравнение (X. 25) для сферической оболочки, ослабленной каким-либо отверстием:

$$V(\xi, \eta) = \psi_1(\xi) + \psi_1^*(\eta) + \int_0^{\xi} \lambda_1(t, \eta) \psi_1(t) dt +$$

$$+ \int_0^{\eta} \lambda_1^*(\xi, \tau) \psi_0^*(\tau) d\tau - i \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{2} \cdot \frac{1}{R_0 h} \int_0^{\xi} \left[ \int_0^{\eta} \lambda(t, \tau) V(t, \tau) d\tau \right] dt. \quad (X. 27)$$

Здесь  $R_0$  — радиус средней поверхности сферической оболочки. Функция  $\lambda(\xi, \eta) = R_0^2 e^{2i\theta} \omega'(\zeta) \overline{\omega'(\zeta)}$ , где в правую часть следует внести значения

$$\rho = \frac{\xi + \eta}{2}; \quad \theta = i \frac{\eta - \xi}{2}; \quad \zeta = e^{\rho + i\theta}.$$

**Условия однозначности перемещений. Граничные условия.** Функция  $\Phi(\rho, \theta)$ , являющаяся решением уравнения (X. 23) или уравнения (X. 25), должна еще удовлетворять векторному уравнению

$$\oint_{\Gamma} \left\{ \frac{\omega}{2} \vec{e}_\rho + \varepsilon_\theta \vec{e}_\theta + [\vec{e}_\theta, \vec{\Omega}] \right\} \mathcal{H} d\theta = 0, \quad (X. 28)$$

обеспечивающему однозначность вектора перемещений, где

$$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}^0 + \int_{P_0}^P \vec{\Omega}_\theta d\theta; \quad \vec{\Omega}_\theta = \mathcal{H} (\kappa_1 \vec{e}_\rho + \tau^{(2)} \vec{e}_\theta + \zeta^* \vec{e}_n);$$

$$\zeta^* + \frac{1}{\mathcal{H}^2} \left( \varepsilon_\rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (\mathcal{H} \omega)}{\partial \theta} - \frac{\partial (\mathcal{H} \varepsilon_\theta)}{\partial \rho} + \frac{\omega}{2} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \right).$$

Здесь  $\zeta^*$  — уже не комплексная переменная. Подынтегральное выражение в (X.28) является функцией компонентов деформации  $\varepsilon_\rho$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\omega$ ,  $\kappa_1$  и  $\tau^{(2)}$  и радиуса-вектора  $\vec{r}(p)$  точки  $P$  на контуре рассматриваемого отверстия.

Если в подынтегральном выражении (X.28) выразить по известным формулам\* компоненты деформации  $\varepsilon_\rho$ ,  $\varepsilon_\theta$ ,  $\omega$ ,  $\kappa_1$  и  $\tau^{(2)}$  через функцию  $\Phi(\rho, \theta)$ , то найдем для нее три скалярных соотношения. Подставляя в эти соотношения значения  $\Phi$  (X.22) и разделяя действительные и мни-

\* См. А. Л. Гольденвейзер [1].



мые части, найдем для функций  $\widehat{\varphi}(\varrho, \theta)$  и  $\omega(\varrho, \theta)$  шесть скалярных соотношений, обеспечивающих однозначность вектора перемещений  $\vec{u}$ .

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к интегрированию уравнения (X.23); при этом решение должно удовлетворять условиям однозначности перемещений, а именно векторному уравнению (X.28). Кроме того, решение должно удовлетворять граничным условиям на контуре отверстия и так называемым условиям «на бесконечности», т. е. условиям на достаточно удаленных от отверстия частях оболочки вне зоны  $\Sigma^*$ , ограниченной контуром  $L^*$ .

На контуре отверстия  $\Gamma$ , т. е. при  $\varrho = \varrho_0$ , могут быть заданы различные условия: либо внешние усилия, либо перемещения точек контура, либо на одной части контура внешние усилия, а на остальной части контура — перемещения, и т. д. Остановимся на случае, когда по контуру отверстия заданы внешние усилия  $F_1(\varrho_0, \theta)$ ,  $F_2(\varrho_0, \theta)$ ,  $F_3(\varrho_0, \theta)$  и  $F_4(\varrho_0, \theta)$ . Внешние усилия, приложенные по контуру отверстия  $\Gamma$ , должны быть равны приведенным усилиям:

$$\widetilde{T} = F_1(\varrho_0, \theta); \quad \widetilde{S} = F_2(\varrho_0, \theta); \quad \widetilde{G} = F_3(\varrho_0, \theta); \quad \widetilde{Q} = F_4(\varrho_0, \theta), \quad (\text{X. 29})$$

где

$$\widetilde{T} = T_0^* + \frac{\sin 2\chi}{2} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) H_0^*; \quad \widetilde{G} = G_0^*; \quad \widetilde{S} = S_0^* + \frac{H_0^*}{R_\Gamma}; \quad \widetilde{Q} = Q_0^* - \frac{\partial H_0^*}{\partial S_\Gamma};$$

$\chi$  — угол между контуром отверстия  $\Gamma$  и линией на срединной поверхности оболочки, нормальная кривизна которой равна  $1/R_1$ ;  $R_\Gamma$  — радиус кривизны нормального сечения срединной поверхности вдоль контура  $\Gamma$ .

Производная  $\partial H_0^* / \partial S_\Gamma$  в  $\widetilde{Q}$  берется на дуге  $S_\Gamma$  контура отверстия  $\Gamma$ .

При приближенном решении задачи формулы для  $\widetilde{T}$  и  $\widetilde{S}$  можно значительно упростить, а именно пренебречь в них членами порядка  $1/R$ , и, приняв во внимание формулы (X.8), представить граничные условия (X.29) в виде \*

$$T_0 = F_1(\varrho_0, \theta) - T_0^0; \quad S_{0\theta} = F_2(\varrho_0, \theta) - S_{0\theta}^0; \quad (\text{X. 30})$$

$$Q_0 - \frac{\partial H_{0\theta}^0}{\partial S_\Gamma} = F_4(\varrho_0, \theta) - Q_0^0 + \frac{\partial H_{0\theta}^0}{\partial S_\Gamma}; \quad G_0 = F_3(\varrho_0, \theta) - G_0^0.$$

Часто основное напряженное состояние (X. 7) является безмоментным; тогда, полагая в (X. 30)  $H_{0\theta}^0 = Q_0^0 = G_0^0 = 0$ , получаем граничные условия

$$T_0 = F_1(\varrho_0, \theta) - T_0^0; \quad S_{0\theta} = F_2(\varrho_0, \theta) - S_{0\theta}^0; \quad (\text{X. 31})$$

$$\widetilde{Q} = F_4(\varrho_0, \theta); \quad G_0 = F_3(\varrho_0, \theta).$$

\* Здесь и в дальнейшем примем основные допущения теории пологих оболочек и отбросим в (X.29) члены с множителями  $1/R$ . Кроме того, обозначим  $H_0 = -H_\theta = H_{0\theta}$ ;  $S_0 = -S_\theta = -S_{0\theta}$ .

Если контур отверстия свободен от внешних усилий, то в (X.31) следует положить  $F_1 = F_2 = F_3 = F_4 = 0$ :

$$T_q = -T_q^0; \quad S_{q\theta} = -S_{q\theta}^0; \quad G_q = \tilde{Q}_q = 0. \quad (\text{X. 32})$$

Рассмотрим граничные условия для отверстия в оболочке, которая находится в условиях основного напряженного состояния, вызванного внутренним гидростатическим давлением  $p_0 = \text{const}$ . Здесь принимаем следующие допущения: отверстие оболочки плотно закрыто крышкой специальной конструкции, которая обеспечивает равномерность внутреннего давления в резервуаре; эта крышка от внутреннего давления, которое приходится на нее, передает на контур отверстия только перерезывающее усилие и не создает другого силового воздействия на область оболочки около отверстия.

Граничные условия в этом случае имеют вид

$$\tilde{Q}_q = f^{(*)}(\theta); \quad (\text{X. 33})$$

$$T_q = -T_q^0; \quad S_{q\theta} = -S_{q\theta}^0; \quad G_q = -G_q^0.$$

Функция  $f^{(*)}(\theta)$  в условиях (X.33) характеризует перерезывающие усилия, которые передаются крышкой на контур отверстия. Вообще  $f^{(*)}(\theta)$  может быть произвольной интегрируемой функцией, которая должна удовлетворять только одному условию, а именно: чтобы равнодействующая этих перерезывающих усилий по контуру  $\Gamma$  равнялась силе

$$Fp_0 = \oint f^{(*)}(\theta) ds = \int_0^{2\pi} f^{(*)}(\theta) \mathcal{H}(q_0, \theta) d\theta, \quad (\text{X. 34})$$

где  $F$  — площадь отверстия в оболочке;  $p_0 = \text{const}$  — внутреннее гидростатическое давление.

Граничные условия для произвольной, не только пологой, оболочки, ослабленной отверстием, край которого подкреплен тонким упругим кольцом, получены Н. П. Флейшманом [2, 3]. В общем случае их выписывать не будем, а выпишем их в следующем параграфе для случая пологой оболочки.

Перейдем к условиям «на бесконечности». Так как компоненты  $T_\rho$ ,  $T_\theta$ , ...,  $G_\theta$  (X.13) при удалении от контура отверстия  $\Gamma$  быстро затухают, то функции  $w(q, \theta)$  и  $\hat{\varphi}(q, \theta)$ , найденные из уравнения (X.23) и граничных условий в одной из форм (X.29) — (X.33), должны удовлетворять этим условиям, т. е. они должны при  $q \rightarrow \infty$  удовлетворять условиям

$$T_q = 0; \quad S_{q\theta} = 0; \quad G_q = 0 \quad \text{и} \quad \tilde{Q}_q = 0. \quad (\text{X. 35})$$

Заметим, что уравнения (X.23) и относящиеся к ним соотношения получены при условии, что гауссова кривизна  $K$  срединной поверхности равна нулю. Ясно, что полученное таким образом решение задачи о концентрации напряжений для оболочек, для которых  $K \neq 0$ , будет тем точнее, чем меньше зона  $\Sigma^*$ , т. е. чем меньше величина отверстия в обо-

лочке. Однако, как показали теоретические и экспериментальные исследования, проведенные под руководством В. З. Власова в ЦНИИПС [1], приближенные решения, основанные на теории пологих оболочек, дают хорошее совпадение с экспериментом для оболочек, для которых отношение стрелы подъема  $f$  оболочки к наименьшему ее размеру в пластине  $a$  будет  $f/a < 1/5$ .

## § 2. Методы решения

**О разделении переменных.** Заметим, что решение  $\Phi(\varrho, \theta)$  (X.22) уравнения (X.23) должно быть периодическим по  $\theta$ , т. е.

$$\Phi(\varrho, \theta) = \Phi(\varrho, \theta + 2\pi), \quad (\text{X. 36})$$

поэтому естественно представить его в виде ряда Фурье:

$$\Phi(\varrho, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} [f_k(\varrho) \cos k\theta + g_k(\varrho) \sin k\theta]. \quad (\text{X. 37})$$

Однако легко убедиться путем непосредственной подстановки функции (X.37) в (X.23), что для произвольной системы координат  $(\varrho, \theta)$ , даваемой функцией  $\omega(\xi)$  (X.11), получить решение  $\Phi(\varrho, \theta)$  уравнения (X.23) в форме (X.37) для любой оболочки не представляется возможным\*. Исключение представляет сферическая оболочка для частных видов систем координат, поэтому и перейдем к исследованию возможности разделения переменных в уравнении для сферической оболочки.

Для сферической оболочки

$$\frac{1}{R_\varrho} = \frac{1}{R_\theta} = \frac{1}{R}; \quad \frac{1}{R_{\varrho\theta}} = 0. \quad (\text{X. 38})$$

Подставляя (X.38) в (X.15) и (X.23), получаем уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi + i \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Rh} \nabla^2 \Phi = 0, \quad (\text{X. 39})$$

решение которого можно представить в виде суммы

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (\text{X. 40})$$

где  $\Phi_1$  — решение уравнения Лапласа  $\nabla^2 \Phi_1 = 0$ ;  $\Phi_2$  — решение уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \Phi_2 + i \frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Rh} \Phi_2 = 0. \quad (\text{X. 41})$$

Переменные в уравнении Лапласа разделяются для любой системы координат, даваемой отображающей функцией  $\omega(\xi)$  (X.11), а перемен-

\* При подстановке (X.37) в (X.23) получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которую не удастся представить в обозримом виде.

ные в уравнении Гельмгольца разделяются только для полярной и эллиптической систем координат; решение в последней системе представляется через функции Матье. Некоторые задачи для сферической оболочки в эллиптической системе координат рассмотрены в работах Г. А. Ван Фо Фы [1—4], Г. Н. Савина и Г. А. Ван Фо Фы [1, 2].

**Метод «возмущения формы границы».** Применение метода разделения переменных, как видим из изложенного выше, может привести к успеху лишь в отдельном весьма частном случае, поэтому к решению рассматриваемых задач целесообразно применить приближенные методы. В этом параграфе рассмотрим приближенный метод «возмущения формы границы» в форме, впервые предложенной А. Н. Гузем [2—7] для эллиптического, квадратного и треугольного отверстий с закругленными углами. Подобный метод для плоской задачи теории упругости анизотропной среды был ранее предложен С. Г. Лехницким [1]. В работе [5] А. Н. Гузь распространил этот метод на двухсвязные области, а в работе [8] рассмотрел ряд задач о концентрации напряжений возле некоторых криволинейных отверстий в круговой цилиндрической оболочке. В работе Г. Н. Савина и А. Н. Гузя [1] метод «возмущения формы границы» распространен на решение задач о концентрации напряжений около произвольных отверстий, контур которых не имеет угловых точек.

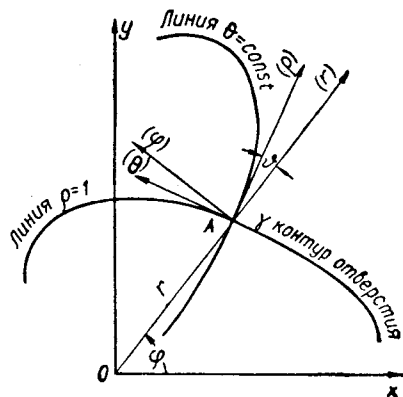


Рис. X.7.

Для удобства заменим положительные направления  $w$ ,  $G_p$ ,  $G_\theta$ ,  $Q_p$  и  $Q_\theta$  на противоположные, а уравнение (X.23) отнесем к безразмерным координатам. Тогда это уравнение примет вид

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi - i\kappa^2 R \nabla_k^2 \Phi = 0, \quad (\text{X.42})$$

где

$$\Phi = w + i n \hat{\varphi}; \quad n = \frac{\sqrt{12(1-\nu)}}{E h^2}; \quad \kappa = r_0 \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2}};$$

$r_0$  — действительная величина, характеризующая размеры отверстия;  
 $R$  — минимальный радиус кривизны.

Рассмотрим плоскость переменных, к которым отнесена срединная поверхность оболочки. На рис. X.7  $(x, y)$  — прямоугольная система координат;  $(r, \theta)$  — полярная система координат\*;  $(\rho, \phi)$  — ортогональная

\* Здесь все координаты — безразмерные, отнесенные к некоторой величине  $r_0$ , характерной для рассматриваемого отверстия. Так, в случае кругового отверстия  $r_0$  — радиус отверстия в плоскости  $P$  (рис. X.5), в случае эллиптического отверстия  $r_0 = \frac{a+b}{2}$ , где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса (см. рис. X.8 и X.9).

система координат;  $\gamma$  — контур отверстия в плоскости  $P$  переменных  $(\rho, \theta)$ , к которым отнесена срединная поверхность оболочки. Контур  $\Gamma$  в оболочке соответствует контур  $\gamma$  на плоскости  $P$  (рис. X.5). Ось  $(\rho)$  направлена по внешней нормали к контуру  $\gamma$  (рис. X.7);  $\theta$  — угол, на который повернута система координат  $(\rho)A(\theta)$  относительно полярной системы координат  $(r)A(\varphi)$ . Приведем формулы для компонентов напряженного и деформированного состояния, выраженных через функцию  $\Phi$  в полярной системе координат  $(r, \varphi)$ . Согласно принятым положительным направлениям для перемещений, усилий и моментов получим

$$T_r = \frac{1}{nr_0^2} \left( \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \right) \text{Im } \Phi(r, \varphi); \quad T_\varphi = \frac{1}{nr_0^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2} \text{Im } \Phi(r, \varphi);$$

$$S_{r\varphi} = -\frac{1}{nr_0^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\text{Im } \Phi(r, \varphi)}{r}; \quad G_r = -\frac{D}{r_0^2} \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu \nabla^2 \right] \text{Re } \Phi(r, \varphi); \quad (X.43)$$

$$G_\varphi = -\frac{D}{r_0^2} \left[ \nabla^2 - (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \text{Re } \Phi(r, \varphi); \quad H_{r\varphi} = -D \frac{1-\nu}{r_0^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\text{Re } \Phi(r, \varphi)}{r};$$

$$\tilde{Q}_r = -\frac{D}{r_0^3} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 + \frac{1-\nu}{r} \cdot \frac{\partial^3}{\partial r \partial \varphi^2} \tau \cdot \frac{1}{r} \right] \text{Re } \Phi(r, \varphi).$$

Перемещения  $u$  и  $v$  определяются путем интегрирования системы уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -r_0 \frac{\text{Re } \Phi(r, \varphi)}{R_r} + \frac{1}{Ehnr_0} \left[ \nabla^2 - (1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \text{Im } \Phi(r, \varphi);$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} = -r_0 \frac{\text{Re } \Phi(r, \varphi)}{R_\varphi} + \frac{1}{Ehnr_0} \left[ (1+\nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \nu \nabla^2 \right] \text{Im } \Phi(r, \varphi); \quad (X.44)$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) = 2r_0 \frac{\text{Re } \Phi(r, \varphi)}{R_{r\varphi}} - 2 \frac{1+\nu}{Ehnr_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \frac{\text{Im } \Phi(r, \varphi)}{r}.$$

Пусть контур отверстия в оболочке  $\Gamma$  (рис. X.5) имеет такую форму, что функция

$$z = \omega(\zeta); \quad \omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta) \quad (z = re^{i\varphi}; \quad \zeta = \rho e^{i\theta}) \quad (X.45)$$

конформно отображает бесконечную плоскость  $(\zeta)$  с круговым отверстием единичного радиуса на бесконечную плоскость  $P$  с отверстием, контур которого  $\gamma$  (рис. X.5).

Функция  $f(\zeta)$  зависит от формы  $\Gamma$  ( $\varepsilon \ll 1$ ), а корни уравнения  $1 + \varepsilon f'(\zeta) = 0$  должны лежать в плоскости  $\zeta$  внутри окружности единичного радиуса. При этих ограничениях функция  $\omega(\zeta)$  конформно отображает внешность единичного круга на внешность рассматриваемого отверстия.

Значения величин  $r$ ,  $\varphi$  и  $\theta$  (рис. X.7) на координатной линии  $\varrho = \text{const}$  и, в частности, на контуре  $\gamma$  отверстия ( $\varrho = 1$ ) будут \*

$$r = \sqrt{\zeta \bar{\zeta} + \varepsilon [\zeta f(\zeta) + \bar{\zeta} \bar{f}(\bar{\zeta}) + \varepsilon^2 f(\zeta) \bar{f}(\bar{\zeta})]} \Big|_{\varrho = \text{const}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x} = \arctg \frac{\sin \theta + \varepsilon \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\bar{\zeta})}{2i\varrho}}{\cos \theta + \varepsilon \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\bar{\zeta})}{2i\varrho}} \Big|_{\varrho = \text{const}}; \quad (X.46)$$

$$e^{i\theta} = \frac{\zeta}{\varrho} \cdot \frac{\omega(\zeta)}{|\omega(\zeta)|} \cdot \frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}.$$

Чтобы иметь в каждом из последовательных приближений краевую задачу с разделяющимися переменными, необходимо, чтобы решение уравнения (X.42) в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  допускало представление в виде

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} [f_k(r) \cos k\varphi + g_k(r) \sin k\varphi]. \quad (X.47)$$

Представим решение уравнения (X.42) в полярной системе координат  $(r, \varphi)$  и компоненты напряженного и деформированного состояния в криволинейной ортогональной системе координат \*\* ( $\varrho, \theta$ ) в виде рядов по параметру  $\varepsilon$ :

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Phi_j(r, \varphi); \quad (X.48)$$

$$T_{\varrho} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j T_{\varrho}^{(j)}; \quad T_{\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j T_{\theta}^{(j)}; \quad S_{\varrho\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j S_{\varrho\theta}^{(j)};$$

$$G_{\varrho} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j G_{\varrho}^{(j)}; \quad G_{\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j G_{\theta}^{(j)}; \quad H_{\varrho\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j H_{\varrho\theta}^{(j)};$$

$$\tilde{Q}_{\varrho} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \tilde{Q}_{\varrho}^{(j)}; \quad \omega = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \omega_j;$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial n} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \left( \frac{\partial \omega}{\partial n} \right)^{(j)}; \quad u_{\varrho} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_{\varrho}^{(j)}; \quad (X.49)$$

$$u_{\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_{\theta}^{(j)}.$$

\* См. гл. VI, где приведен вывод этих формул.

\*\* Координатная линия  $\varrho = 1$  совпадает с контуром  $\gamma$  отверстия на плоскости  $P$  (рис. X.5).

Получив решение уравнения (X.42) в форме (X.47), по формулам (X.43) и (X.44) можем найти компоненты напряженного и деформированного состояния в полярной системе координат  $(r, \varphi)$ . Для определения соответствующих компонент в криволинейной системе координат  $(\varrho, \theta)$  воспользуемся формулами преобразования компонентов напряженного и деформированного состояния при повороте системы координат  $(\varrho, \theta)$  относительно координат  $(r, \varphi)$  на угол  $\vartheta$  (рис. X.7):

$$\begin{aligned} T_{\varrho} &= T_r \cos^2 \vartheta + T_{\varphi} \sin^2 \vartheta + 2S_{r\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta; \\ T_{\theta} &= T_r \sin^2 \vartheta + T_{\varphi} \cos^2 \vartheta - 2S_{r\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta, \\ S_{\varrho\theta} &= (T_{\varphi} - T_r) \sin \vartheta \cos \vartheta + S_{r\varphi} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta); \\ G_{\varrho} &= G_r \cos^2 \vartheta + G_{\varphi} \sin^2 \vartheta + 2H_{r\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta; \\ G_{\theta} &= G_r \sin^2 \vartheta + G_{\varphi} \cos^2 \vartheta - 2H_{r\varphi} \sin \vartheta \cos \vartheta; \\ H_{\varrho\theta} &= (G_{\varphi} - G_r) \sin \vartheta \cos \vartheta + H_{r\varphi} (\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta); \\ \tilde{Q}_{\varrho} &= Q_r \cos \vartheta + Q_{\varphi} \sin \vartheta + \frac{\partial H_{\varrho\theta}}{\partial s}; \\ u_{\varrho} &= u \cos \vartheta + v \sin \vartheta; \\ u_{\theta} &= -u \sin \vartheta + v \cos \vartheta; \\ \frac{\partial w}{\partial n} &= \frac{\partial w}{\partial r} \cos \vartheta + \frac{\partial w}{\partial \varphi} \cdot \frac{\sin \vartheta}{r} \end{aligned} \quad (X.50)$$

( $s$  — дуга).

В полученные выражения следует подставить значения  $r$ ,  $\varphi$  и  $\vartheta$  из (X.46).

Подставляя (X.48) в уравнение (X.42), предварительно отнеся его к полярной системе координат  $(r, \varphi)$ , получим бесконечную цепочку уравнений

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi_j(r, \varphi) - i\kappa^2 R \nabla_k^2 \Phi_j(r, \varphi) = 0. \quad (X.51)$$

Согласно (X.47) решение уравнения (X.51) имеет вид

$$\Phi_j(r, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{kj}(r) \cos k\varphi + g_{kj}(r) \sin k\varphi. \quad (X.52)$$

Зависимости (X.46) также раскладываем в ряды по параметру  $\varepsilon$ , а выражения (X.50) раскладываем в ряды как сложные функции. Приравняв коэффициенты при  $\varepsilon^j$  в левых и правых частях (X.50), получаем

$$T_{\varrho}^{(j)} = T_r^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_1^{(j-m)} T_r^{(m)} + L_2^{(j-m)} (T_{\varphi}^{(m)} - T_r^{(m)}) + L_3^{(j-m)} S_{r\varphi}^{(m)}];$$

$$T_{\theta}^{(j)} = T_{\varphi}^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_1^{(j-m)} T_{\varphi}^{(m)} + L_2^{(j-m)} (T_r^{(m)} - T_{\varphi}^{(m)}) - L_3^{(j-m)} S_{r\varphi}^{(m)}];$$

$$S_{\theta\theta}^{(j)} = S_{r\varphi}^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} \left[ (L_1^{(j-m)} - 2L_2^{(j-m)}) S_{r\varphi}^{(m)} + \frac{L_3^{(j-m)}}{2} (T_{\varphi}^{(m)} - T_r^{(m)}) \right];$$

$$G_{\theta}^{(j)} = G_r^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-m} [L_1^{(j-m)} G_r^{(m)} + L_2^{(j-m)} (G_{\varphi}^{(m)} - G_r^{(m)}) + L_3^{(j-m)} H_{r\varphi}^{(m)}];$$

$$G_{\theta}^{(j)} = G_{\varphi}^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_1^{(j-m)} G_{\varphi}^{(m)} + L_2^{(j-m)} (G_2^{(m)} - G_{\varphi}^{(m)}) - L_3^{(j-m)} H_{r\varphi}^{(m)}];$$

$$H_{\theta\theta}^{(j)} = H_{r\varphi}^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} \left[ (L_1^{(j-m)} - 2L_2^{(j-m)}) H_{r\varphi}^{(m)} + \frac{L_3^{(j-m)}}{2} (G_{\varphi}^{(m)} - G_r^{(m)}) \right];$$

$$\tilde{Q}_{\theta}^{(j)} = \tilde{Q}_r^{(j)} - \frac{D}{r_0} \sum_{m=0}^{j-1} L_4^{(j-m)} \operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta);$$

$$w_j = \operatorname{Re} \Phi_j(\varrho, \theta) + \sum_{m=0}^{j-1} L_4^{(j-m)} \operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta);$$

$$\left( \frac{\partial w}{\partial n} \right)^{(j)} = \frac{1}{r_0} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \operatorname{Re} \Phi_j(\varrho, \theta) + \frac{1}{r_0} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ L_5 \frac{\partial}{\partial \varrho} + L_6 \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta);$$

$$u_{\theta}^{(j)} = u^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_5^{(j-m)} u^{(m)} + L_6^{(j-m)} v^{(m)}];$$

$$u_{\theta}^{(j)} = v^{(j)} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_5^{(j-m)} v^{(m)} - L_6^{(j-m)} u^{(m)}].$$

Чтобы в (X.53) получить значения компонентов напряженного и деформированного состояния на контуре отверстия, следует положить в них  $\varrho = 1$ .

Величины с индексами  $j$  и  $m$ , стоящие в правых частях (X.53), имеют следующий вид:

$$T_r^{(m)} = \frac{1}{nr_0^2} \left( \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \right) \operatorname{Im} \Phi_m(\varrho, \theta); \quad T_{\varphi}^{(m)} = \frac{1}{nr_0^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \operatorname{Im} \Phi_m(\varrho, \theta);$$

$$S_{r\varphi}^{(m)} = -\frac{1}{nr_0^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \cdot \frac{\operatorname{Im} \Phi_m(\varrho, \theta)}{\varrho}; \quad G_r^{(m)} = -\frac{D}{r_0^2} \left[ (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \nu \nabla^2 \right] \operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta);$$



$$G_{\varphi}^{(m)} = -\frac{D}{r_0^2} \left[ \nabla^2 - (1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \right] \operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta); \quad H_{r\varphi}^{(m)} = -D \frac{1 - \nu}{r_0^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \cdot \frac{\operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta)}{\varrho};$$

$$\tilde{Q}_r^{(m)} = -\frac{D}{r_0^3} \left[ \frac{\partial}{\partial \varrho} \nabla^2 + \frac{1 - \nu}{\varrho} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \varrho \partial \theta^2} \cdot \frac{1}{\varrho} \right] \operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta).$$

Перемещения  $u^{(m)}$  и  $v^{(m)}$  определяются интегрированием системы уравнений

$$\frac{\partial u^{(m)}}{\partial \varrho} = -r_0 \frac{\operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta)}{R_r'} + \frac{1}{Ehnr_0} \left[ \nabla^2 - (1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \right] \operatorname{Im} \Phi_m(\varrho, \theta);$$

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial v^{(m)}}{\partial \theta} + \frac{u^{(m)}}{\varrho} = -r_0 \frac{\operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta)}{R_{\varphi}'} + \frac{1}{Ehnr_0^2} \left[ (1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} - \nu \nabla^2 \right] \operatorname{Im} \Phi_m(\varrho, \theta); \quad (\text{X.55})$$

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial u^{(m)}}{\partial \theta} + \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \left( \frac{v^{(m)}}{\varrho} \right) = 2r_0 \frac{\operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta)}{R_{r\varphi}'} - 2 \frac{1 + \nu}{Ehnr_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \cdot \frac{\operatorname{Im} \Phi_m(\varrho, \theta)}{\varrho},$$

где  $R_r'$ ,  $R_{\varphi}'$  и  $R_{r\varphi}'$  равны соответственно  $R_r$ ,  $R_{\varphi}$  и  $R_{r\varphi}$ , в которых  $r$  заменено на  $\varrho$ , а  $\varphi$  на  $\theta$ . Заметим, что (X.54) и (X.55) совпадают соответственно с (X.43) и (X.44), если в последних заменить  $r$  на  $\varrho$ , а  $\varphi$  на  $\theta$ , т. е. в соответствующих формулах вместо букв  $r$  и  $\varphi$  поставить  $\varrho$  и  $\theta$ .

В (X.53) входят еще шесть дифференциальных операторов  $L_k^{(j-m)}$  ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ), порядок которых указан верхним индексом. Выпишем в развернутом виде операторы  $L_k^{(j-m)}$ , которые будут нужны при решении задач в нулевом, первом и втором приближениях ( $L_k^{(0)} \equiv 0$ ):

$$L_1^{(1)} = \frac{\zeta \bar{f}(\zeta) + \bar{\zeta} f(\zeta)}{2\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} + \left( \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\zeta)}{2i\varrho} \cos \theta - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\zeta)}{2\varrho} \sin \theta \right) \frac{\partial}{\partial \theta}; \quad L_2^{(1)} = 0;$$

$$L_1^{(2)} = \frac{[\zeta \bar{f}(\zeta) + \bar{\zeta} f(\zeta)]^2}{8\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{\zeta \bar{f}(\zeta) + \bar{\zeta} f(\zeta)}{\varrho^2} \left[ \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\zeta)}{4i} \cos \theta - \right.$$

$$\left. - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\zeta)}{4} \sin \theta \right] \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} + \frac{i[f^2(\zeta) + \bar{f}^2(\zeta)] \sin 2\theta - [f^2(\zeta) - \bar{f}^2(\zeta)] \cos 2\theta}{4i\varrho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} -$$

$$- \frac{[\zeta \bar{f}(\zeta) - \bar{\zeta} f(\zeta)]^2}{8\varrho^3} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{2if(\zeta) \bar{f}(\zeta) - i[f^2(\zeta) + \bar{f}^2(\zeta)] \cos 2\theta - [f^2(\zeta) - \bar{f}^2(\zeta)] \sin 2\theta}{8i\varrho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2};$$

$$L_2^{(2)} = -\frac{1}{4} [f'(\zeta) - \bar{f}'(\zeta)]^2 - \frac{[\zeta \bar{f}(\zeta) - \bar{\zeta} f(\zeta)]^2 + 2\zeta \bar{\zeta} [\zeta \bar{f}(\zeta) - \bar{\zeta} f(\zeta)] [f'(\zeta) - \bar{f}'(\zeta)]}{4\zeta^2 \bar{\zeta}^2};$$

$$L_3^{(1)} = \frac{f'(\zeta) - \bar{f}'(\zeta)}{i} + \frac{\zeta \bar{f}(\zeta) - \bar{\zeta} f(\zeta)}{i\zeta \bar{\zeta}}; \quad (\text{X.56})$$

$$L_3^{(2)} = \frac{\zeta^2 \bar{\zeta}^2 (f(\zeta) - \bar{f}(\zeta)) + \zeta^2 \bar{\zeta}^2 [f'^2(\zeta) - \bar{f}'^2(\zeta)]}{2i\zeta^2 \bar{\zeta}^2} + \left[ \frac{\zeta \bar{f}(\zeta) - \bar{\zeta} f(\zeta)}{i\zeta \bar{\zeta}} + \right.$$

$$\left. + \frac{f'(\zeta) - \bar{f}'(\zeta)}{i} \right] \left[ \frac{\zeta \bar{f}(\zeta) + \bar{\zeta} f(\zeta)}{2\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} + \left( \frac{f(\zeta) - \bar{f}(\zeta)}{2i\varrho} \cos \theta - \frac{f(\zeta) + \bar{f}(\zeta)}{2\varrho} \sin \theta \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right];$$

$$\begin{aligned}
L_4^{(1)} = & \left[ L_1^{(1)} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{2} L_3^{(1)} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \nabla^2 + \frac{1-\nu}{\varrho} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} L_1^{(1)} - \frac{f'(\zeta) + \overline{f'(\zeta)}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\varrho} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} L_3^{(1)} \left( \nabla^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \right) \right]; \quad L_4^{(2)} = \left[ \left( L_1^{(2)} - \frac{1}{2} L_2^{(2)} \right) \frac{\partial}{\partial \varrho} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} L_3^{(2)} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \nabla^2 + \frac{1-\nu}{\varrho} \left[ \left[ \frac{3f'^2(\zeta) + 2f'(\zeta)\overline{f'(\zeta)} + 3\overline{f'^2(\zeta)}}{8} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{f'(\zeta) + \overline{f'(\zeta)}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} L_1^{(1)} + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( L_1^{(2)} - 2L_2^{(2)} \right) \right] \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} L_3^{(2)} - \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{f'(\zeta) + \overline{f'(\zeta)}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} L_3^{(1)} \right] \left( \nabla^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \right) \right];
\end{aligned}$$

$$L_5^{(1)} = L_1^{(1)}; \quad L_6^{(1)} = \frac{1}{2} L_3^{(1)}; \quad L_5^{(2)} = L_1^{(2)} - \frac{1}{2} L_2^{(2)};$$

$$L_6^{(2)} = \frac{1}{2} L_3^{(2)}.$$

Используя соотношение (X.46), правые части граничных условий (X.29) — (X.33) также раскладываем в ряды по  $\epsilon$ .

Под функцией  $\Phi_m(\varrho, \theta)$  в (X.54) и (X.55) следует понимать решение уравнения (X.50) в  $m$ -ом приближении, в котором  $r$  заменено на  $\varrho$ , а  $\varphi$  на  $\theta$ . В  $j$ -ом приближении неизвестной является только функция  $\Phi_j(\varrho, \theta)$ , функции же  $\Phi_m(\varrho, \theta)$  ( $m < j$ ) известны из предыдущих приближений.

Внося из (X.53) разложения соответствующих компонент в рассматриваемые граничные условия, получим системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов в функциях  $\hat{f}_{kj}(r)$  и  $q_{kj}(r)$ .

Из (X.53) — (X.55) видим, что в каждом из последовательных приближений (для каждого  $j$ ) задачи формально сводятся к последовательности краевых задач для кругового отверстия в плоскости  $\zeta$  (в криволинейных координатах  $\varrho, \theta$ ). Таким образом, задачу для неканонической области (бесконечная плоскость с криволинейным отверстием) можем решать, если известно полное решение основного уравнения для канонической области (бесконечная плоскость с круговым отверстием).

Развернутый вид функции  $\hat{f}(\zeta)$  (X.45) для различных форм отверстий возьмем из функции  $\omega(\zeta)$  (X.45), конформно отображающей внешность единичного круга на внешность отверстия рассматриваемой формы.

Под значением какой-либо величины, например  $T_\theta^*$ , полученной в  $n$ -ом приближении, будем понимать следующую величину:

$$\begin{aligned}
T_\theta^*|_{n,\Gamma} = & T_\theta^0|_\Gamma + \sum_{j=0}^n \epsilon^j T_\theta^j|_{\varrho=1} + \sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^{j-1} \epsilon^j [L_1^{(j-m)} T_\theta^{(m)} + \\
& + L_2^{(j-m)} (T_r^{(m)}) - T_\theta^{(m)}] - L_3^{(j-m)} S_{r\varphi}^{(m)}|_{\varrho=1}.
\end{aligned} \tag{X.57}$$

Рассмотрим применение метода «возмущения формы границы» к исследованию напряженного состояния оболочек, ослабленных отверстием, край которого подкреплён тонким упругим кольцом. Последнее будем рассматривать как материальную нить, сопротивляющуюся растяжению, изгибу и кручению. Граничные условия для этого случая получены в работе Н. П. Флейшмана [2]. Считая, что одна из осей инерции поперечного сечения подкрепляющего кольца лежит в срединной поверхности оболочки и принимая основные допущения теории пологих оболочек, граничные условия можем записать в виде

$$\begin{aligned}
 T_{\varrho} |_{\varrho=1} + T_{\varrho}^{(0)} |_{\varrho=1} &= T_{\varrho}^{(0)} - B \frac{\partial^3}{\partial s^3} \left[ \frac{u_{\theta} + u_{\theta}^0}{R^*} - \frac{\partial}{\partial s} (u_{\varrho} + u_{\varrho}^0) \right] \Big|_{\varrho=1} + \\
 &+ \frac{E_1 F}{R^*} \left[ \frac{\partial}{\partial s} (u_{\theta} + u_{\theta}^0) + \frac{u_{\varrho} + u_{\varrho}^0}{R^*} \right] \Big|_{\varrho=1}; \\
 S_{\varrho\theta} |_{\varrho=1} + S_{\varrho\theta}^{(0)} |_{\varrho=1} &= S_{\varrho\theta}^{(0)} - \frac{B}{R^*} \cdot \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left[ \frac{u_{\theta} + u_{\theta}^0}{R^*} - \frac{\partial}{\partial s} (u_{\varrho} + u_{\varrho}^0) \right] \Big|_{\varrho=1} - \\
 &- E_1 F \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{\partial}{\partial s} (u_{\theta} + u_{\theta}^0) + \frac{u_{\varrho} + u_{\varrho}^0}{R^*} \right] \Big|_{\varrho=1}; \\
 G_{\varrho}^0 |_{\varrho=1} + G_{\varrho}^0 |_{\varrho=1} &= G_{\varrho}^{(0)} + \left[ C \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} - \frac{1}{R^*} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \right) - \right. \\
 &\left. - \frac{A}{R^*} \left( \frac{1}{R^*} \cdot \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \right] (w + w^0) \Big|_{\varrho=1}; \\
 \tilde{Q}_{\varrho}^0 |_{\varrho=1} + \tilde{Q}_{\varrho}^0 |_{\varrho=1} &= \tilde{Q}_{\varrho}^{(0)} + \frac{\partial}{\partial s} \left[ \frac{C}{R^*} \left( \frac{\partial^2}{\partial n \partial s} - \frac{1}{R^*} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \right) + \right. \\
 &\left. + A \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{1}{R^*} \cdot \frac{\partial}{\partial n} + \frac{\partial^2}{\partial s^2} \right) \right] (w + w^0) \Big|_{\varrho=1}.
 \end{aligned} \tag{X.58}$$

Здесь  $u_{\rho}^0$ ,  $u_{\theta}^0$  и  $w$  — компоненты основного деформированного состояния;  $T_{\rho}^{(0)}$ , ...,  $\tilde{Q}_{\rho}^{(0)}$  — внешние нагрузки на подкрепляющее кольцо;  $R^*$  — радиус кривизны контура отверстия в плоскости переменных  $(\varrho, \theta)$ , к которым отнесена срединная поверхность оболочки;  $A$ ,  $B$  и  $C$  — жесткости кольца на изгиб относительно двух осей и на кручение;  $F$  — площадь поперечного сечения кольца;  $E_1$  и  $\nu_1$  — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала кольца.

Подставляя (X.48) и (X.49) в (X.58) и собирая коэффициенты при  $e^j$ , получаем

$$\begin{aligned}
 T_{\varrho}^{(j)} |_{\varrho=1} + T_{\varrho}^{(0)(j)} |_{\varrho=1} &= T_{\varrho}^{(0)(j)} - \frac{B}{r_0^4 \varrho^4} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left[ v^{(j)} + \delta_j^0 v^0 - \frac{\partial}{\partial \theta} (u^{(j)} + \delta_j^0 u^0) \right] \Big|_{\varrho=1} + \\
 &+ \frac{E_1 F}{r_0^2 \varrho^2} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (v^{(j)} + \delta_j^0 v^0) + u^{(j)} + \delta_j^0 u^0 \right] \Big|_{\varrho=1} + \sum_{m=0}^{j-1} [L_7^{(j-m)} (u^{(m)} + \delta_m^0 u^0) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L_8^{(j-m)} (v^{(m)} + \delta_m^0 v^0) \Big|_{\varrho=1}; \\
S_{\varrho\theta}^{(j)} \Big|_{\varrho=1} + S_{\varrho\theta}^{0(j)} \Big|_{\varrho=1} &= S_{\varrho\theta}^{(0)j} - \frac{B}{r_0^4 \varrho^4} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} [v^{(j)} + \delta_j^0 v^0 - \frac{\partial}{\partial \theta} (u^{(j)} + \\
& + \delta_j^0 u^0) \Big|_{\varrho=1} - \frac{E_1 F}{r_0^2 \varrho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (v^{(j)} + \delta_j^0 v^0) + u^{(j)} + \delta_j^0 u^0 \right] \Big|_{\varrho=1} + \\
& + \sum_{m=0}^{j-1} [L_9^{(j-m)} (u^{(m)} + \delta_m^0 u^0) + L_{10}^{(j-m)} (v^{(m)} + \delta_m^0 v^0)] \Big|_{\varrho=1}; \quad (X.59)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{\varrho}^{(j)} \Big|_{\varrho=1} + G_{\varrho}^{0(j)} \Big|_{\varrho=1} &= G^{(j)} + \frac{1}{r_0^3} \left[ \frac{C}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial \theta^2} \cdot \frac{1}{\varrho} - \frac{A}{\varrho^2} \left( \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] \times \\
& \times [\operatorname{Re} \Phi_j(\varrho, \theta) + \delta_j^0 w^0] \Big|_{\varrho=1} + \frac{1}{r_0^3} \sum_{m=0}^{j-1} L_{11}^{(j-m)} [\operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta) + \delta_m^0 w^0] \Big|_{\varrho=1}; \\
Q_{\varrho}^{(j)} \Big|_{\varrho=1} + Q_{\varrho}^{0(j)} \Big|_{\varrho=1} &= \tilde{Q}_{\varrho}^{(0)j} + \frac{1}{r_0^4} \cdot \frac{1}{\varrho^3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[ C \varrho \frac{\partial}{\partial \varrho} \cdot \frac{1}{\varrho} + \right. \\
& + A \left( \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left. \right] [\operatorname{Re} \Phi_j(\varrho, \theta) + \delta_j^0 w^0] \Big|_{\varrho=1} + \\
& + \frac{1}{r_0^4} \sum_{m=0}^{j-1} L_{12}^{(j-m)} [\operatorname{Re} \Phi_m(\varrho, \theta) + \delta_m^0 w^0] \Big|_{\varrho=1}.
\end{aligned}$$

где  $T_{\varrho}^{0(j)}$ ,  $S_{\varrho\theta}^{0(j)}$ , ...,  $Q_{\varrho}^{0(j)}$  — коэффициенты разложений компонентов основного напряженного состояния;  $T_{\varrho}^{(0)(j)}$ , ...,  $\tilde{Q}_{\varrho}^{(0)(j)}$  — коэффициенты разложений внешних усилий, действующих на кольцо;  $u^0$ ,  $v^0$ ,  $w^0$  — компоненты основного деформированного состояния в полярной системе координат, в которых  $r$  и  $\varphi$  заменены соответственно на  $\varrho$  и  $\theta$ ;  $L_1^{(j-m)}$ , ...,  $L_{12}^{(j-m)}$  — дифференциальные операторы;  $\delta_k^n = \begin{cases} 1; & k = n, \\ 0; & k \neq n. \end{cases}$

Из соотношений (X.53) — (X.55) и граничных условий (X.59) видим, что задача свелась к последовательности краевых задач для кругового отверстия в плоскости  $\zeta$ .

Рассмотрим случай, когда на контуре криволинейного отверстия заданы усилия. Тогда граничные усилия имеют вид

$$\begin{aligned}
T_{\varrho} \Big|_{\varrho=1} &= g_1(\theta, \varepsilon) - T_{\varrho}^0 \Big|_{\varrho=1}; & S_{\varrho\theta} \Big|_{\varrho=1} &= g_2(\theta, \varepsilon) - S_{\varrho\theta}^0 \Big|_{\varrho=1}; \\
G_{\varrho} \Big|_{\varrho=1} &= g_3(\theta, \varepsilon) - G_{\varrho}^0 \Big|_{\varrho=1}; & \tilde{Q}_{\varrho} \Big|_{\varrho=1} &= g_4(\theta, \varepsilon) - \tilde{Q}_{\varrho}^0 \Big|_{\varrho=1}.
\end{aligned} \quad (X.60)$$

Раскладывая функции  $g_1(\theta, \varepsilon)$ ,  $g_2(\theta, \varepsilon)$ ,  $g_3(\theta, \varepsilon)$ ,  $g_4(\theta, \varepsilon)$  в ряды по  $\varepsilon$  и подставляя (X.49) в (X.60), получаем в  $j$ -ом приближении

$$\begin{aligned} T_q^{(j)}|_{q=1} &= \hat{g}_1^{(j)}(\theta); & S_q^{(j)}|_{q=1} &= \hat{g}_2^{(j)}(\theta); \\ G_q^{(j)}|_{q=1} &= \hat{g}_3^{(j)}(\theta); & \tilde{Q}_q^{(j)}|_{q=1} &= \hat{g}_4^{(j)}(\theta). \end{aligned} \quad (\text{X.61})$$

Подставляя (X.53) в (X.61), получаем граничные условия для определения функции  $\Phi_j(r, \varphi)$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \text{Im } \Phi_j(\rho, \theta)|_{\rho=1} &= - \sum_{m=0}^{j-1} \left[ L_1^{(j-m)} \left( \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \right. \\ &+ L_2^{(j-m)} \left( 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \nabla^2 \right) - L_3^{(j-m)} \left. \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\rho} \right] \text{Im } \Phi_m(\rho, \theta)|_{\rho=1} + \\ &+ nr_0^2 \hat{g}_1^{(j)}(\theta); \\ - \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{\text{Im } \Phi_j(\rho, \theta)}{\rho} \Big|_{\rho=1} &= \sum_{m=0}^{j-1} \left[ (L_1^{(j-m)} - 2L_2^{(j-m)}) \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\rho} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} L_3^{(j-m)} \left( \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) \right] \text{Im } \Phi_m(\rho, \theta)|_{\rho=1} + \\ &+ nr_0^2 \hat{g}_2^{(j)}(\theta); \end{aligned} \quad (\text{X.62})$$

$$\begin{aligned} - \left[ (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \nu \nabla^2 \right] \text{Re } \Phi_j(\rho, \theta)|_{\rho=1} &= \sum_{m=0}^{j-1} \left[ L_1^{(j-m)} (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \right. \\ &+ \left. \nu \nabla^2 + L_2^{(j-m)} (1-\nu) \left( \nabla^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right) + (1-\nu) L_3^{(j-m)} \frac{\partial^2}{\partial \rho \partial \theta} \cdot \frac{1}{\rho} \right] \times \\ &\times \text{Re } \Phi_m(\rho, \theta)|_{\rho=1} + \frac{r_0^2}{D} \hat{g}_3^{(j)}(\theta); \end{aligned}$$

$$- \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} \nabla^2 + \frac{1-\nu}{\rho} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \rho \partial \theta^2} \cdot \frac{1}{\rho} \right] \text{Re } \Phi_j(\rho, \theta)|_{\rho=1} = \sum_{m=0}^{j-1} L_4^{(j-m)} \text{Re } \Phi_m(\rho, \theta)|_{\rho=1} + \frac{r_0^3}{D} \hat{g}_4^{(j)}(\theta).$$

**О применении метода последовательных приближений при использовании основных уравнений в интегральной форме.** Легко видеть, что в некоторых случаях уравнение (X.25) с условиями (X.26), т. е. основная система уравнений в интегральной форме более удобна в приложениях, чем система уравнений (X.14) или (X.23) в дифференциальной форме. Это связано с тем, что решение  $V(\xi, \eta)$  интегрального уравнения

(X.25) всегда существует и его можно найти методом последовательных приближений, приняв за нулевое (исходное) приближение функцию

$$V_0(\xi, \eta) = \Phi_0 \left( \frac{\xi + \eta}{2}, i \frac{\eta - \xi}{2} \right) = \frac{Eh^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \omega_0 + \hat{\varphi}_0, \quad (\text{X.63})$$

где  $\hat{\varphi}_0$  — функция напряжений Эри для пластинки, ослабленной тем же отверстием, при том же основном напряженном состоянии и при тех же граничных условиях относительно тангенциальных компонентов на контуре отверстия, что и в рассматриваемой оболочке, а функция  $\omega_0$  — прогиб пластинки, ослабленной тем же отверстием, что и в рассматриваемой оболочке, найденный при тех же нетангенциальных граничных условиях на контуре отверстия, что и в заданной оболочке.

Для многих наиболее интересных случаев функции  $\hat{\varphi}_0$  и  $\omega_0$  для пластинок, ослабленных отверстием, известны\*; следовательно\*\*, извествуна и функция  $V_0(\xi, \eta)$ , являющаяся нулевым приближением. Подставляя эту функцию в интегральное уравнение (X.25), находим первое приближение, т. е.  $V_1(\xi, \eta)$ . Поступая аналогичным образом, получаем функцию  $V_n(\xi, \eta)$ , являющуюся  $n$ -ым приближением к искомому решению; при этом в каждом из приближений четыре голоморфных функции —  $\psi_0(\xi)$ ,  $\psi_0^*(\eta)$ ,  $\psi_1(\xi)$  и  $\psi_1^*(\eta)$ , которые, удовлетворяя условиям (X.26), определяем из граничных условий задачи.

**О применении метода конечных разностей.** Как показывают экспериментальные исследования (рис. X.3 и X.4), условия «на бесконечности» (X.35) будут с наперед заданной точностью удовлетворены, как только координатная линия  $\varrho = \varrho_1 = \text{const}$  достигнет контура  $L^*$  (рис. X.2); последний же практически будет отстоять от контура отверстия на расстоянии, не превышающем четырехкратного наибольшего размера отверстия. Этим можно воспользоваться при приближенном решении уравнения (X.23), а именно в условиях «на бесконечности» (X.35) можно принять  $\varrho = 1,5 \div 2,0$  для любой формы отверстия, контур которого задан в параметрической форме аналитической функцией  $\alpha + i\beta = \omega(\zeta)$  (X.11) комплексной переменной  $\zeta$ , где  $\zeta = e^{\rho + i\theta}$ . Заменяя, например, методом конечных разностей дифференциальное уравнение системой линейных алгебраических уравнений, необходимо к полученной системе добавить помимо уравнений, вытекающих из граничных условий и условий «на бесконечности» задачи, шесть уравнений для

функций  $\hat{\varphi}(\varrho, \theta)$  и  $\omega(\varrho, \theta)$ , вытекающих из векторного условия (X.28), обеспечивающего однозначность вектора перемещений срединной поверхности оболочки.

Численное интегрирование уравнения (X.23) § 1 в переменных  $\varrho$  и  $\theta$  должно быть проведено в прямоугольнике  $OABC$ , являющемся конформным отображением двусвязной области, ограниченной контурами  $\Gamma$  и  $L$ , на плоскости  $(\varrho, \theta)$  (рис. X.6).

\* См. Г. Н. Савин [8], гл. VI.

\*\* Случай квадратного отверстия этим методом рассмотрел С. Мохбалиев [2].

Указанная выше возможность реализована в работе И. О. Губерман [1], в которой краевые задачи для дифференциального уравнения (X.23) в случае сферической оболочки, ослабленной эллиптическим и квадратным отверстиями (с закругленными углами), сведены к конечно-разностным краевым задачам.

**Представление решения основного уравнения для сферической оболочки.** Для исследования напряженного состояния в оболочках около криволинейных отверстий необходимо иметь представление решения основного уравнения (X.42) в форме (X.47). Рассмотрим такое представление для сферической оболочки, для которой основное уравнение (X.42) имеет вид

$$\nabla^2 (\nabla^2 - i\kappa^2) \Phi = 0. \quad (X.64)$$

Уравнение (X.64) представим как сумму решения уравнений Лапласа и Гельмгольца. Для  $j$ -го приближения

$$\begin{aligned} \Phi_j(r, \varphi) = & (c_1^{j,0} + id_1^{j,0}) + (c_2^{j,0} + id_2^{j,0}) \ln r + \\ & + (c_3^{j,0} + id_3^{j,0}) J(r\kappa \sqrt{-i}) + (c_4^{j,0} + id_4^{j,0}) H(r\kappa \sqrt{-i}) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} [(c_1^{j,k} + id_1^{j,k}) r^k + (c_2^{j,k} + id_2^{j,k}) r^{-k} + \\ & + (c_3^{j,k} + id_3^{j,k}) J_k(r\kappa \sqrt{-i}) + \\ & + (c_4^{j,k} + id_4^{j,k}) H_k(r\kappa \sqrt{-i})] \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, \end{aligned} \quad (X.65)$$

где  $J_k(r\kappa \sqrt{-i}) = \text{ber}_k r\kappa + i \text{bei}_k r\kappa$  — функция Бесселя первого рода  $k$ -го порядка;  $H_k^{(1)}(r\kappa \sqrt{-i}) = \text{her}_k r\kappa + i \text{hei}_k r\kappa$  — функция Ханкеля первого рода  $k$ -го порядка;  $\text{ber}_k r\kappa$ ,  $\text{bei}_k r\kappa$ ,  $\text{her}_k r\kappa$  и  $\text{hei}_k r\kappa$  — функции Томпсона; для нулевых функций индекс 0 опускаем. Асимптотические представления функций Бесселя и Ханкеля:

$$\begin{aligned} J_k(r\kappa \sqrt{-i}) & \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r \sqrt{-i}}} \cos\left(r\kappa \sqrt{-i} - \frac{\pi}{4} k - \frac{\pi}{4}\right), \\ H_k^{(1)}(r\kappa \sqrt{-i}) & \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\kappa r \sqrt{-i}}} e^{i\left(r\kappa \sqrt{-i} - \frac{\pi}{4} k - \frac{\pi}{4}\right)}. \end{aligned} \quad (X.66)$$

Из асимптотических представлений (X.66) и решения в форме (X.65) видим, что для выполнения условий «на бесконечности» (X.35) необходимо положить

$$c_1^{j,0} = d_1^{j,0} = c_2^{j,0} = c_3^{j,0} = d_3^{j,0} = c_1^{j,k} = d_1^{j,k} = c_3^{j,k} = d_3^{j,k} = 0. \quad (X.67)$$

Решение в такой форме удобно применять при исследовании напряженного состояния в сферической оболочке, ослабленной любым криволинейным отверстием, контур которого не имеет угловых точек. Заметим,

что решение в форме (X.65) можно получить путем перегруппировки членов из полного решения, приведенного в монографии И. Н. Векуа [2]. Из (X.44) при

$$\frac{1}{R_r} = \frac{1}{R_0} = \frac{1}{R^*}, \quad \frac{1}{R_{r_0}} = 0 \quad (\text{X.68})$$

получаем систему уравнений для определения перемещений  $u$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^{(l)}}{\partial r} &= -\frac{r_0}{R} \operatorname{Re} \Phi_j(r, \varphi) + \frac{1}{Ehnr_0} \left[ \nabla^2 - (1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \operatorname{Im} \Phi_j(r, \varphi); \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v^{(l)}}{\partial \varphi} + \frac{u^{(l)}}{r} &= -\frac{r_0}{R} \operatorname{Re} \Phi_j(r, \varphi) + \frac{1}{Ehnr_0} \left[ (1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \nu \nabla^2 \right] \operatorname{Im} \Phi_j(r, \varphi); \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u^{(l)}}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v^{(l)}}{r} \right) &= -2 \frac{1 + \nu}{Ehnr_0} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{\operatorname{Im} \Phi_j(r, \varphi)}{r}. \end{aligned} \quad (\text{X.69})$$

В правые части (X.69) следует подставить  $\Phi(r, \varphi)$  из (X.65), учитывая (X.67). Полученную систему можно проинтегрировать. Опуская промежуточные выкладки и учитывая (X.67), приведем значения перемещений:

$$\begin{aligned} u^{(l)}(r, \varphi) &= -\frac{r_0}{R} (1 + \nu) \left[ \frac{d_2^{j,0}}{\kappa^2 r} + r c_4^{j,0} (\operatorname{her} \kappa r - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{hei}'' \kappa r) - r d_4^{j,0} (\operatorname{hei} \kappa r + \operatorname{her}'' \kappa r) \right] + \\ &\quad + \frac{r_0}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{c_2^{j,k}}{k-1} r^{-k+1} + k \frac{1 + \nu}{\kappa^2} r^{-k+1} d_2^{j,k} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1 + \nu}{\kappa} (c_4^{j,k} \operatorname{hei}'_k r \kappa + d_4^{j,k} \operatorname{her}'_k r \kappa) \right\} \frac{\cos k \varphi}{\sin k \varphi}; \quad (\text{X.70}) \\ v^{(l)}(r, \varphi) &= \frac{r_0}{R} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -c_2^{j,k} \frac{r^{-k+1}}{k-1} + k \frac{1 + \nu}{\kappa^2} d_2^{j,k} r^{-k-1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1 + \nu}{r \kappa^2} k (c_4^{j,k} \operatorname{hei}'_k r \kappa + d_4^{j,k} \operatorname{her}'_k r \kappa) \right\} \frac{\sin k \varphi}{(-\cos k \varphi)}. \end{aligned}$$

Если интегрировать систему (X.69) при  $k=1$ , то у  $c_2^{j,1}$  появляется логарифмический член, поэтому для удовлетворения условий «на бесконечности» (X.35) следует положить

$$c_2^{j,1} = 0. \quad (\text{X.71})$$

Таким образом, условия (X.70) и (X.71) обеспечивают выполнение условий «на бесконечности».



Остановимся на вопросе о выборе закона распределения перерезывающей силы для криволинейного отверстия в сферической оболочке, нагруженной равномерным внутренним давлением, когда отверстие закрыто крышкой специальной конструкции, которая передает только действие перерезывающей силы. Рассмотрим отверстия, для которых

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta^N}. \quad (\text{X.72})$$

Функция  $f^*(\theta)$ , входящая в первое условие (X.33), вообще говоря, может быть произвольной интегрируемой функцией, но ее для указанных криволинейных отверстий следует взять в таком виде, чтобы при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получалось распределение перерезывающей силы для кругового отверстия. Функция  $f^*(\theta)$  в работе Г. Н. Савина и Г. А. Ван Фо Фы [1] для эллиптического отверстия была выбрана исходя из анализа распределения напряжений на контуре эллиптической пластинки. Перерезывающая сила представлена в виде двух слагаемых, из которых первое соответствует перерезывающей силе на контуре вписанного круга, а второе — добавке, которая стремится к нулю, когда контур стремится к окружности. Эта добавка принимается пропорциональной относительной разности площадей эллипса и вписанного круга и умножается на тригонометрическую функцию, которая обеспечивает максимальную перерезывающую силу на концах малой оси, т. е. в точках, наиболее близких к центру отверстия, и минимальную на концах большой оси, т. е. в точках, наиболее удаленных от центра отверстия.

Эти рассуждения обобщим на случай произвольного отверстия, контур которого задан функцией  $\omega(\zeta) = \zeta + \varepsilon \frac{1}{\zeta^N}$  при  $q = 1$  ( $\zeta = \rho e^{i\theta}$ ). Будем считать, что  $\varepsilon > 0$ ; тогда  $r_1 = r_0(1 - \varepsilon)$  — радиус вписанного круга. Наиболее близкие к центру отверстия точки контура получим при  $\theta = \pi \frac{1+2l}{N+1}$  ( $l$  — целое число), а для перерезывающей силы получим следующий закон распределения:

$$\tilde{Q}_q|_{\Gamma} = -p \frac{D}{S} \left[ 1 - \frac{D - D_0}{D} \cos(N+1)\theta \right], \quad (\text{X.73})$$

где  $D_0 = \pi r_0^2(1 - \varepsilon)^2$  — площадь вписанного круга;  $D = \pi r_0^2(1 - N\varepsilon^2)$  — площадь отверстия;  $S = 2\pi r_0(1 + \varepsilon^2 N^2/4 + \dots)$  — длина дуги контура отверстия; все эти величины вычислены с точностью до  $\varepsilon^2$ .

Окончательно для перерезывающей силы:

$$\tilde{Q}_q|_{\Gamma} = -\frac{pr_0}{2} \left\{ 1 - \varepsilon^2 N \frac{N-1}{4} - [2\varepsilon - (N+1)\varepsilon^2] \cos(N+1)\varphi + \dots \right\}. \quad (\text{X.74})$$

Представление решений основного уравнения для малых отверстий в круговой цилиндрической оболочке. Если вместо функции  $\hat{\varphi}$  ввести  $-\hat{\varphi}$ , а для функции  $\Phi$  оставить прежнее представление ( $\Phi = \omega + i\eta\hat{\varphi}$ ), то

уравнение (X.42) для круговой цилиндрической оболочки примет следующий вид:

$$\nabla^2 \nabla^2 \Phi(x, y) + 8i\beta^2 \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = 0, \quad (\text{X.75})$$

где  $\beta = \frac{r_0}{\sqrt{Rh}} \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2}$ ;  $R$  — радиус срединной поверхности оболочки; ось  $Ox$  направлена по образующей, а  $Oy$  — по направляющей. Изменение обозначений предпринято для того, чтобы наши обозначения совпали с обозначениями, принятыми в многочисленных работах по исследованию напряженного состояния около малых отверстий в цилиндрической оболочке. Тогда в соотношениях (X.43) и (X.44) перед  $\text{Im } \Phi$  следует изменить знак на обратный. Из (X.44), учитывая это замечание, получаем систему уравнений для определения перемещений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= -r_0 \frac{\sin^2 \varphi}{R} \text{Re } \Phi(r, \varphi) - \frac{1}{Ehnr_0} \left[ \nabla^2 - (1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \text{Im } \Phi(r, \varphi); \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} &= -r_0 \frac{\cos^2 \varphi}{R} \text{Re } \Phi(r, \varphi) - \frac{1}{Ehnr_0} \left[ (1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \right. \\ &\quad \left. - \nu \nabla^2 \right] \text{Im } \Phi(r, \varphi); \end{aligned} \quad (\text{X.76})$$

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v}{r} \right) = r_0 \frac{\sin 2\varphi}{R} \text{Re } \Phi(r, \varphi) + 2 \frac{1 + \nu}{Ehnr_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \cdot \frac{\text{Im } \Phi(r, \varphi)}{r}.$$

Для круговой цилиндрической оболочки

$$\frac{1}{R_r} = \frac{\sin^2 \varphi}{R}; \quad \frac{1}{R_\varphi} = \frac{\cos^2 \varphi}{R}; \quad \frac{1}{R_{r\varphi}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 2\varphi}{R}. \quad (\text{X.77})$$

Следуя А. И. Лурье [1], решение уравнения (X.75) представим в виде суммы

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2, \quad (\text{X.78})$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi_1 \pm 2(1-i)\beta \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} &= 0, \\ \nabla^2 \Phi_2 - 2(1-i)\beta \frac{\partial \Phi_2}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{X.79})$$

Введем новые (неизвестные) функции:

$$\Phi_1 = e^{-(1-i)\beta x} \psi_1(x, y); \quad \Phi_2 = e^{(1-i)\beta x} \psi_2(x, y). \quad (\text{X.80})$$

Подставив (X.80) в (X.79), получим, что функции  $\psi_1$  и  $\psi_2$  удовлетворяют уравнению:

$$\nabla^2 \psi + 2i\beta^2 \psi = 0. \quad (\text{X.81})$$

Решение уравнения Гельмгольца (X.81) представим в полярной системе координат  $(r, \varphi)$ :

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} [(a_k + ib_k) J_k(\beta r \sqrt{2i}) + (c_k + id_k) H_k^{(1)}(\beta r \sqrt{2i})] \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}, \quad (\text{X.82})$$

где  $J_k(\beta r \sqrt{2i}) = \text{ber}_k(\beta r \sqrt{2}) - i \text{bei}_k(\beta r \sqrt{2})$  — функция Бесселя первого рода  $k$ -го порядка;  $H_k^{(1)}(\beta r \sqrt{2i}) = \text{her}_k(\beta r \sqrt{2}) - i \text{hei}_k(\beta r \sqrt{2})$  — функция Ханкеля первого рода  $k$ -го порядка. Выпишем главные члены асимптотических представлений функций Бесселя и Ханкеля:

$$J_k(\beta r \sqrt{2i}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \beta r \sqrt{2i}}} \cos\left(r\beta \sqrt{2i} - \frac{\pi}{4}k - \frac{\pi}{4}\right); \quad (\text{X.83})$$

$$H_k(\beta r \sqrt{2i}) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi \beta r \sqrt{2i}}} e^{i\left(r\beta \sqrt{2i} - \frac{\pi}{4}k - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Из условий «на бесконечности» (X.35) и асимптотических представлений (X.83) следует, что

$$a_k = b_k = 0. \quad (\text{X.84})$$

Подставляя (X.82) в (X.80) и (X.78), учитывая (X.84), получаем общее решение уравнения (X.75) в виде

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} [(A_k + iB_k) e^{-(1-i)\beta x} + (C_k + iD_k) e^{(1-i)\beta x}] H_k(r\beta \sqrt{2i}) \frac{\cos k\varphi}{\sin k\varphi}. \quad (\text{X.85})$$

Из асимптотического представления функции Ханкеля (X.83) и решения в форме (X.85) видим, что по образующей (при  $\varphi=0$ ) функция  $\Phi$  затухает, как

$$\Phi \sim \frac{\text{const}}{Vr}. \quad (\text{X.86})$$

Следовательно, эта функция удовлетворяет условиям «на бесконечности» (X.35). Заметим, что решение в форме (X.85) является решением с неразделенными переменными.

А. И. Лурье [1, 2] предложил приближенный метод решения задачи о концентрации напряжений возле «кругового» отверстия; этот метод заключается в приближенном представлении решения уравнения (X.75) в форме (X.85) с точностью до  $\beta^2$ , т. е. для отверстий малых размеров. Приведем решение, полученное по методу А. И. Лурье, следуя работе И. М. Пирогова [20], где это решение представлено в виде ряда Фурье в наиболее полной форме. Сделаем предварительно несколько преобра-

зований решения (X.85). Это решение можно представить в виде суммы следующих решений:

$$\Phi_n = [K_1(\beta x) - 2iK_3(\beta x)] H_n(\beta r \sqrt{2i}) \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi}, \quad (X.87)$$

$$\Phi_n = [K_2(\beta x) - 2iK_4(\beta x)] H_n(\beta r \sqrt{2i}) \frac{\cos n\varphi}{\sin n\varphi},$$

где  $K_1(\beta x)$ ,  $K_2(\beta x)$ ,  $K_3(\beta x)$  и  $K_4(\beta x)$  — функции А. Н. Крылова, являющиеся комбинацией  $e^{-(1-i)\beta x}$  и  $e^{(1-i)\beta x}$ . Функции А. Н. Крылова и Ханкеля в области начала координат раскладываем в ряды. Для упрощения дальнейшего изложения будем в отдельности рассматривать напряженные состояния, соответствующие каждому из решений (X.87).

Рассмотрим решение уравнения (X.75) в форме

$$\Phi_n = [K_1(\beta x) - 2iK_3(\beta x)] H_n(\beta r \sqrt{2i}) \cos n\varphi \quad (n = 0, 2, 4, \dots), \quad (X.88)$$

$$\Phi_n = [K_2(\beta x) - 2iK_4(\beta x)] H_n(\beta r \sqrt{2i}) (1 + i) \cos n\varphi \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad \dagger$$

Комплексную функцию напряжений, соответствующую (X.88), будем искать в виде

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + ib_n) \Phi_n, \quad (X.89)$$

где произвольные постоянные, следуя А. И. Лурье, представим в виде

$$\left. \begin{aligned} a_n &= A_n \beta^n + B_n \beta^{n+2} + \dots \\ b_n &= C_n \beta^n + D_n \beta^{n+2} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (n = 0, 2, 4, \dots),$$

$$\left. \begin{aligned} a_n &= A_n \beta^{n-1} + B_n \beta^{n+1} + \dots \\ b_n &= C_n \beta^{n-1} + D_n \beta^{n+1} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (n = 1, 3, 5, \dots). \quad (X.90)$$

Подставив (X.90) и (X.88), а также функции А. Н. Крылова и Ханкеля, разложенные в окрестности начала координат, в (X.89), получим решение, представленное в виде ряда по малому параметру  $\beta$ . Собирая коэффициенты при одинаковых степенях  $\beta$  и вводя новые обозначения постоянных, получаем с точностью до  $\beta^2$  это решение в виде

$$\begin{aligned} \text{Im } \Phi &= \frac{2}{\pi} A_0 (\ln r + \gamma') + \frac{1}{\pi} A_2 \cos 2\varphi + \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \left[ \frac{n-2}{2\pi r^{n-2}} A_n + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\pi r^n} (C_n + A_{n+2}) \right] \cos n\varphi + \frac{1}{\pi} \beta^2 \left\{ 2B_0 (\ln r + \gamma') + (2C_0 + \right. \\ &+ B_2) r^2 (\ln r + \gamma') - \frac{1}{4} (2\pi A_0 + 4C_0 + \pi A_2 + B_2) r^2 + \left[ (C_2 + \right. \\ &+ B_2) r^2 (\ln r + \gamma') - \frac{1}{4} (\pi A_0 + \pi A_2 + \frac{2}{3} B_2) r^2 + F_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{F_2}{r^2} \cos 2\varphi + \frac{1}{12} B_2 r^2 \cos 4\varphi + \sum_{k=4,6,8,\dots}^{\infty} \left[ \frac{n-4}{24r^{n-6}} B_{n-2} + \right. \\
& \left. + \frac{D_{n-2}}{4r^{n-4}} + \frac{E_n}{r^{n-2}} + \frac{F_n}{r^n} \right] \cos n\varphi \Big\}; \quad (X.91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \Phi = & -\frac{2}{\pi} C_0 (\ln r + \gamma') - \frac{1}{\pi} B_2 \cos 2\varphi - \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \left[ \frac{n-2}{2\pi r^{n-2}} B_n + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\pi r^n} (D_n + B_{n+2}) \right] \cos n\varphi + \frac{1}{\pi} \beta^2 \left\{ -2D_0 (\ln r + \gamma') + (2A_0 + \right. \\
& + A_2) r^2 (\ln r + \gamma') + \frac{1}{4} (2\pi C_0 - 4A_0 + \pi B_2 - A_2) r^2 + \left[ (A_0 + A_2) r^2 (\ln r + \right. \\
& + \gamma') + \frac{1}{4} (\pi C_0 + \pi B_2 - \frac{2}{3} A_2) r^2 + H_2 + \frac{K^2}{r^2} \Big] \cos 2\varphi + \frac{1}{12} A_2 r^2 \cos 4\varphi + \\
& \left. + \sum_{n=4,6,8,\dots}^{\infty} \left[ \frac{n-4}{24r^{n-6}} A_{n-2} + \frac{C_{n-2}}{4r^{n-4}} + \frac{H_n}{r^{n-2}} + \frac{K_n}{r^n} \right] \cos n\varphi \right\},
\end{aligned}$$

где  $\gamma' = \frac{\beta \ln \gamma}{\sqrt{2}}$ ;  $\gamma$  — постоянные Эйлера.

Это решение и решения для других напряженных состояний получены И. М. Пироговым [20] методом А. И. Лурье [1]:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \Phi = & \frac{A_1 + A_3}{2\pi r} \cos \varphi + \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} \left[ \frac{n-2}{2\pi r^{n-2}} A_n + \frac{1}{\pi r^n} (C_n + A_{n+2}) \right] \cos n\varphi + \\
& + \frac{1}{\pi} \beta^2 \left\{ \left[ 2C_1 r (\ln r + \gamma') - \frac{1}{2} (\pi A_1 - C_1 + \frac{1}{6} B_3) r + \frac{1}{r} F_1 \right] \cos \varphi + \right. \\
& \left. + \left[ \frac{1}{8} (4C_1 - B_3) r + \frac{1}{r} E_3 + \frac{F_3}{r^3} \right] \cos 3\varphi + \right. \\
& \left. + \sum_{n=5,7,9,\dots}^{\infty} \left[ \frac{n-4}{24r^{n-6}} B_{n-2} + \frac{D_{n-2}}{4r^{n-4}} + \frac{E_n}{r^{n-2}} + \frac{F_n}{r^n} \right] \cos n\varphi \right\} + \dots; \quad (X.92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \Phi = & -\frac{1}{2\pi r} (4C_1 + B_3) \cos \varphi - \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} \left[ \frac{n-2}{2\pi r^{n-2}} B_n + \frac{D_n + B_{n+2}}{\pi r^n} \right] \cos n\varphi + \\
& + \frac{1}{\pi} \beta^2 \left\{ \left[ 2A_1 r (\ln r + \gamma') + \frac{1}{2} (\pi C_1 + A_1 - \frac{A_3}{6}) r + \frac{K_1}{r} \right] \cos \varphi + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \left[ \frac{1}{8} (4A_1 + A_3) r + \frac{H_3}{r} + \frac{K_3}{r^3} \right] \cos 3\varphi + \sum_{n=5,7,9,\dots}^{\infty} \left[ \frac{n-4}{24r^{n-6}} A_{n-2} + \frac{C_{n-2}}{4r^{n-4}} + \frac{H_n}{r^{n-2}} + \frac{K_n}{r^n} \right] \cos n\varphi \} + \dots$$

Решения (X.91) и (X.92) представлены в виде рядов Фурье по косинусам; аналогичным образом можно построить решения в виде рядов по синусам. Эти решения будут отличаться от решений (X.91) и (X.92) только числами при  $n=1,2$  (члены, соответствующие  $n=0$ , отсутствуют), которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\Phi &= \frac{1}{2\pi r} (4A_1 + A_3) \sin \varphi + \left[ \frac{A_3}{\pi} + \frac{C_2 + A_4}{\pi r^2} \right] \sin 2\varphi + \\ &+ \frac{1}{\pi} \beta^2 \left\{ \left[ 2C_1 r (\ln r + \gamma') - \frac{1}{2} (\pi A_1 + C_1 + \frac{B_3}{3}) r + \frac{F_1}{r} \right] \sin \varphi + \right. \\ &+ \left. \left[ B_2 r^2 (\ln r - \gamma') - \left( \frac{\pi}{4} A_2 + \frac{B_2}{3} \right) r^2 + E_2 + \frac{1}{r^2} F_2 \right] \sin 2\varphi \right\}; \quad (\text{X.93}) \\ \operatorname{Re}\Phi &= -\frac{1}{2\pi r} (4C_1 + B_3) \sin \varphi - \left[ \frac{B_2}{\pi} + \frac{D_2 + B_4}{\pi r^2} \right] \sin 2\varphi + \\ &+ \frac{1}{\pi} \beta^2 \left\{ \left[ 2A_1 r (\ln r + \gamma') + \frac{1}{2} (\pi C_1 - A_1 - \frac{A_3}{3}) r + \frac{K_1}{r} \right] \sin \varphi + \right. \\ &+ \left. \left[ A_2 r^2 (\ln r + \gamma') + \left( \frac{\pi}{4} B_2 - \frac{A_2}{3} \right) r^2 + H_2 + \frac{K_2}{r^2} \right] \sin 2\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Остальные коэффициенты при тригонометрических функциях остаются без изменений.

Приведем решение уравнения (X.75) в  $j$ -ом приближении, которым можно воспользоваться при исследовании напряженного состояния около криволинейного свободного отверстия, имеющего две оси симметрии, совпадающих с образующей и направляющей, при основном напряженном состоянии, симметричном относительно этих осей:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\Phi_j(r, \varphi) &= \frac{2}{\pi} A_0^{(j)} (\ln r + \gamma') + \frac{\cos 2\varphi}{\pi} \left( A_2^{(j)} + \frac{B_2^{(j)}}{r^2} \right) + \\ &+ \sum_{k=4,6,\dots}^{\infty} \left( \frac{k-2}{2r^{k-2}} A_k^{(j)} + \frac{B_k^{(j)}}{r^k} \right) \frac{\cos k\varphi}{\pi} + \frac{1}{\pi} \beta^2 \left\{ 2B_0^{(j)} (\ln r + \gamma') - \right. \\ &- \frac{\pi}{4} (2A_0^{(j)} + A_2^{(j)}) r^2 + \left[ -\frac{\pi}{4} (A_0^{(j)} + A_2^{(j)}) r^2 + E_2^{(j)} + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{F_2^{(j)}}{r^2} \right] \cos 2\varphi + \sum_{k=4,6,\dots}^{\infty} \left( \frac{E_k^{(j)}}{r^{k-2}} + \frac{F_k^{(j)}}{r^k} \right) \cos k\varphi \right\}; \quad (\text{X.94}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi_I(r, \varphi) = & \frac{1}{\pi} \beta^2 \left\{ -2D_0^{(j)} (\ln r + \gamma') + (2A_1^{(j)} + \right. \\ & + A_2^{(j)}) r^2 (\ln r + \gamma') - \frac{1}{4} (4A_0^{(j)} + A_2^{(j)}) r^2 + [(A_0^{(j)} + \\ & + A_2^{(j)}) r^2 (\ln r + \gamma') - \frac{A_2^{(j)}}{6} r^2 + H_2^{(j)} + \frac{K_2}{r^2}] \cos 2\varphi + \\ & + \frac{A_2^{(j)} r^2}{12} \cos 4\varphi + \sum_{k=4,6,\dots}^{\infty} \left[ \frac{(k-4) A_{k-2}^{(j)}}{24r^{k-6}} + \frac{B_{k-2}^{(j)} - A_k^{(j)}}{4r^{k-4}} + \right. \\ & \left. + \frac{H_k^{(j)}}{r^{k-2}} + \frac{K_k^{(j)}}{r^k} \right] \cos k\varphi \left. \right\}. \end{aligned}$$

Функцию  $\Phi$  (X.94) можно получить из (X.88) — (X.90) при соответствующей замене постоянных.

### § 3. Сферическая оболочка с криволинейным отверстием

Рассмотрим напряженное состояние в сферической оболочке, ослабленной криволинейным отверстием и находящейся под действием равномерного внутреннего давления интенсивности  $p$ . Основное напряженное состояние будем считать безмоментным. Компоненты основного напряженного состояния представим в виде

$$\begin{aligned} T_r^0 = p_0 h; \quad T_\varphi^0 = p_0 h; \quad S_{r\varphi}^0 = 0; \quad G_r^0 = 0; \\ G_\varphi^0 = 0; \quad \tilde{Q}_r^0 = 0; \quad \omega^0 = 0; \quad \nu^0 = 0; \\ u^0 = p_0 \frac{1-\nu}{E} r_0 r; \quad p_0 = \frac{pR}{2h}. \end{aligned} \quad (\text{X.95})$$

**Круговое отверстие.** Рассмотрим случай, когда отверстие закрыто крышкой, которая передает только действие перерезывающей силы; тогда граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} T_r|_{r=1} = -p_0 h; \quad S_{r\varphi}|_{r=1} = 0; \\ G_r|_{r=1} = 0; \quad \tilde{Q}_r|_{r=1} = -\frac{pr_0}{2}. \end{aligned} \quad (\text{X.96})$$

Задача является осесимметричной, поэтому решение можем взять в форме (X.65) при  $j=k=0$ . Подставляя (X.43) и (X.65) в граничные

условия (X.96), определяем постоянные, входящие в (X.65) при  $j=k=0$ :

$$d_2^{0,0} = 0;$$

$$c_4^{0,0} = -\frac{pr_0^4}{2D\kappa^3} \cdot \frac{\kappa \operatorname{hei}''\kappa + \nu \operatorname{hei}'\kappa}{\kappa (\operatorname{her}'\kappa \operatorname{her}''\kappa + \operatorname{hei}'\kappa \operatorname{hei}''\kappa) + \nu (\operatorname{her}'^2\kappa + \operatorname{hei}'^2\kappa)}; \quad (\text{X.97})$$

$$d_4^{0,0} = -\frac{pr_0^4}{2D\kappa^3} \cdot \frac{\kappa \operatorname{her}''\kappa + \nu \operatorname{her}'\kappa}{\kappa (\operatorname{her}'\kappa \operatorname{her}''\kappa + \operatorname{hei}'\kappa \operatorname{hei}''\kappa) + \nu (\operatorname{her}'^2\kappa + \operatorname{hei}'^2\kappa)}.$$

Подставив (X.97) в (X.43) и (X.65), получим значения компонентов напряженного состояния на контуре отверстия\*:

$$T_\varphi^* = 2\rho_0 h - \rho_0 h \kappa \frac{\kappa (\operatorname{hei}''\kappa \operatorname{her}\kappa - \operatorname{hei}\kappa \operatorname{her}''\kappa) + \nu (\operatorname{hei}'\kappa \operatorname{her}\kappa - \operatorname{her}'\kappa \operatorname{hei}\kappa)}{\kappa (\operatorname{her}'\kappa \operatorname{her}''\kappa + \operatorname{hei}'\kappa \operatorname{hei}''\kappa) + \nu (\operatorname{her}'^2\kappa + \operatorname{hei}'^2\kappa)}; \quad (\text{X.98})$$

$$G_\varphi^* = \rho_0 h \frac{\kappa h}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \cdot \frac{(1-\nu^2)(\operatorname{her}\kappa \operatorname{her}'\kappa + \operatorname{hei}\kappa \operatorname{hei}'\kappa)}{\kappa (\operatorname{her}'\kappa \operatorname{her}''\kappa + \operatorname{hei}'\kappa \operatorname{hei}''\kappa) + \nu (\operatorname{her}'^2\kappa + \operatorname{hei}'^2\kappa)}.$$

Эта задача была впервые решена Ю. А. Шевляковым [5, 6], который принял несколько иные обозначения:

$$\chi_1 = -\operatorname{her}\kappa + \frac{1-\nu}{\kappa} \operatorname{hei}'\kappa;$$

$$\chi_2 = -\operatorname{hei}\kappa - \frac{1-\nu}{\kappa} \operatorname{her}'\kappa; \quad (\text{X.99})$$

$$\Psi = \chi_2 \operatorname{her}'\kappa - \chi_1 \operatorname{hei}'\kappa.$$

Значение  $T_\varphi^*|_{r=1}$  можно представить в виде

$$T_\varphi^*|_{r=1} = 2\rho_0 h \left[ 1 + k 0,93 \frac{r_0}{\sqrt{Rh}} \right]. \quad (\text{X.100})$$

Для оболочки  $R = 200$  см;  $r_0 = 10$  см;  $h = 0,2$  см;  $\nu = 0,3$ ;  $k = 1,65$ .

Таким образом, коэффициент концентрации  $k = T_\varphi^*|_{r=1} / \rho_0 h$  на контуре отверстия в рассматриваемой оболочке больше  $k$  для пластинки в 2,65 раза.

Приведем величины коэффициента концентрации  $k$  для некоторых значений  $\kappa = \frac{r_0}{\sqrt{Rh}} \sqrt{12(1-\nu^2)}$  по данным Ю. А. Шевлякова [5, 6]:

$\kappa$	1,35	1,20	1,10	1,00	0,45	0,20	0,10
$k$	0,90	0,85	0,75	0,70	0,40	0,15	0,08

\* Если в (X.98) положить  $R = \infty$ , получим значения  $T_\varphi^*$  в плоской пластинке в случае ее всестороннего равномерного растяжения.



Эллиптическое отверстие. Для этого отверстия

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{a+b}{2}; & \varepsilon &= \frac{a-b}{a+b}; \\ f(\zeta) &= \frac{1}{\zeta}; & N &= 1, \end{aligned} \quad (\text{X.101})$$

Будем считать, что отверстие закрыто крышкой специальной конструкции, которая передает только действие перерезывающей силы; тогда граничные условия (X.74) с точностью до  $\varepsilon^2$  имеют вид

$$\begin{aligned} T_Q &= -p_0 h; & S_Q &= 0; & G_Q &= 0; \\ \tilde{Q}_Q &= -\frac{pr_0}{2} [1 - 2(\varepsilon - \varepsilon^2) \cos 2\theta]. \end{aligned} \quad (\text{X.102})$$

Раскладывая (X.103) в ряде по  $\varepsilon$ , получаем правые части граничных условий для последовательных приближений. Решение возьмем в форме (X.65). Решение этой задачи методом «возмущения формы границы» получено в работе Г. Н. Савина и А. Н. Гузя [2]. Эта задача также рассматривалась Г. Н. Савиным и Г. А. Ван Фо Фы [1], где решение было представлено через функции Матье, однако последнее применимо для сравнительно небольших значений эксцентриситета.

Решение в нулевом приближении совпадает с решением для кругового отверстия (X.96) — (X.98), поэтому перейдем к определению функций  $\Phi_j(r, \varphi)$ , используя результаты § 2.

Для определения постоянных  $c_2^{1,2}; d_2^{1,2}; c_4^{1,2}; d_4^{1,2}; d_2^{2,0}; c_4^{2,0}; d_4^{2,0}; d_2^{2,2}; c_2^{2,2}; c_4^{2,2}; d_4^{2,2}; c_2^{3,4}; d_2^{3,4}; c_4^{3,4}$  и  $d_4^{3,4}$  получаем системы алгебраических уравнений, которые ввиду их громоздкости здесь приводить не будем. Остальные постоянные в (X.65) при  $j=1$  и  $j=2$  равны нулю. Для определения  $T_0^{(1)}$  и  $T_0^{(2)}$  на контуре отверстия получим

$$\begin{aligned} T_0^{(1)} &= \frac{1}{nr_0^2} \left[ 6d_2^{1,2} + \kappa c_4^{1,2} \operatorname{hei}_2'' \kappa + \kappa^2 d_4^{1,2} \operatorname{her}_2'' \kappa + \right. \\ &\quad \left. + p_0 \frac{\kappa^4 R}{E\Psi} (\chi_1 \operatorname{hei}''' \kappa - \chi_2 \operatorname{her}''' \kappa) \right] \cos 2\theta; \\ T_0^{(2)} &= \frac{1}{nr_0^2} \left\{ -d_2^{2,0} + c_4^{2,0} \kappa^2 \operatorname{hei}'' \kappa + d_4^{2,0} \kappa^2 \operatorname{her}'' \kappa + \right. \\ &\quad \left. + 6d_2^{1,2} + c_4^{1,2} \left( \frac{\kappa^3}{2} \operatorname{hei}_2'' \kappa + \kappa^2 \operatorname{hei}_2'' \kappa - 4\kappa \operatorname{hei}_2' \kappa + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 4 \operatorname{hei}_2 \kappa \right) + d_4^{1,2} \left( \frac{\kappa^3}{2} \operatorname{her}_2'' \kappa + \kappa^2 \operatorname{her}_2'' \kappa - 4\kappa \operatorname{her}_2' \kappa - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 4 \operatorname{her}_2 \kappa \right) + p_0 \frac{\kappa^2 R}{4E\Psi} \left[ \chi_1 (-8\kappa \operatorname{hei}'' \kappa + \kappa^3 \operatorname{hei}''' \kappa + \right. \right. \end{aligned} \quad (\text{X.103})$$

$$\begin{aligned}
& + \kappa^2 \text{hei}''\kappa + 8 \text{hei}'\kappa) - \chi_2 (-8\kappa \text{her}''\kappa + \kappa^3 \text{her}^{\text{IV}}\kappa + \\
& + \kappa^2 \text{her}'''\kappa + 8 \text{her}'\kappa) \Big] + \frac{1}{nr_0^2} \left\{ 6d_2^{2,2} + \kappa^2 c_4^{2,2} \text{hei}_2''\kappa + \right. \\
& + \kappa^2 d_4^{2,2} \text{her}_2''\kappa \Big\} \cos 2\theta + \frac{1}{nr_0^2} \left\{ 20d_2^{2,4} + c_4^{2,4} \kappa \text{hei}_4''\kappa + \right. \\
& + d_4^{2,4} \kappa^2 \text{her}_4''\kappa - 30d_2^{1,2} + c_4^{1,2} \left( \frac{\kappa^3}{2} \text{hei}_2'''\kappa - \kappa^2 \text{hei}_2''\kappa + \right. \\
& + 4\kappa \text{hei}_2'\kappa - 4 \text{hei}_2\kappa) + \rho_0 \frac{\kappa^2 R}{4E\Psi} \left[ \chi_1 (8\kappa \text{hei}''\kappa + \kappa^3 \text{hei}'''\kappa - \right. \\
& - \kappa^2 \text{hei}'''\kappa - 8 \text{hei}'\kappa) - \chi_2 (8\kappa \text{her}''\kappa + \kappa^3 \text{her}^{\text{IV}}\kappa - \\
& \left. \left. - \kappa^2 \text{her}'''\kappa - 8 \text{her}'\kappa) \right] \right\} \cos 4\theta. \tag{X.104}
\end{aligned}$$

Значения усилия  $T_\theta^*$  на контуре отверстия определяются с точностью до  $\varepsilon^2$ :

$$T_\theta^* = T_\varphi^* + \frac{a-b}{a+b} T_\theta^{(1)} + \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 T_\theta^{(2)}, \tag{X.105}$$

где  $T_\varphi^*$  определено формулой (X.98);  $T_\theta^{(1)}$  — (X.103) и  $T_\theta^{(2)}$  — (X.104).

Как видим, формула (X.105) дает возможность, изменяя отношение  $a/b$ , подсчитать значения  $T_\theta^*$  при фиксированном  $r_0 = \frac{a+b}{2}$  для некоторого семейства эллиптических отверстий.

В качестве примера рассмотрим значение коэффициента концентрации  $k = \frac{T_\theta^*}{\rho_0 h}$  для оболочки с параметрами  $R = 200 \text{ см}$ ;  $\frac{a+b}{2} = 10 \text{ см}$ ;  $h = 0,2 \text{ см}$  и  $\nu = 0,3$ . В этом случае

$$\begin{aligned}
k = \frac{T_\theta^*}{\rho_0 h} &= 5,30 + \frac{a-b}{a+b} 19,44 \cos 2\theta + \\
& + \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 (16,93 - 2,49 \cos 2\theta + 10,96 \cos 4\theta). \tag{X.106}
\end{aligned}$$

Этим же методом было получено и приближенное решение для пластинки при всестороннем равномерном растяжении ее усилиями интенсивности  $\rho_0 h$ .

В табл. X.1 приведены значения  $k$ , подсчитанные по формуле (X.105), для пластинки и оболочки при  $\theta=0$  (на конце большой полуоси). Как видим, максимальное значение  $k$  (при  $\theta=0$ ) в пластинке, полученное во втором приближении, даже при  $a/b=1,5$  отличается на 1,5% от значения  $k$ , полученного из точного решения.

Формула для  $T_\theta^*$  по контуру отверстия в пластинке с учетом второго приближения имеет вид

$$T_\theta^* = 2\rho_0 h [1 + 2\varepsilon \cos 2\theta + 2\varepsilon^2 \cos 4\theta + \dots], \tag{X.107}$$

а формула для  $T_\theta^*$  по контуру отверстия, полученная из точного решения,

$$T_\theta^* = 2\rho_0 h \frac{1 - \varepsilon^2}{1 - 2\varepsilon \cos 2\theta + \varepsilon^2}. \tag{X.108}$$

Если разложить  $T_0^*$  (X.108) в ряд по  $\varepsilon$ , то с точностью до  $\varepsilon^2$  получаем формулу для  $T_0^*$  (X.107).

Для квадратного и равностороннего треугольного отверстия с закругленными углами в пластинке имеем аналогичные явления, т. е. разложенные в ряд по  $\varepsilon$  значения  $k$  из точного решения совпадают с точностью до  $\varepsilon^2$  со значением  $k$ , полученным из приближенного решения с учетом второго приближения.

Т а б л и ц а X.1

	Приближение	a/b					
		1,00	1,10	1,20	1,30	1,40	1,50
В пластинке	Точное решение	2,00	2,21	2,44	2,62	2,80	3,00
	Нулевое	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
	Первое	2,00	2,19	2,39	2,52	2,66	2,80
	Второе	2,00	2,20	2,43	2,59	2,76	2,96
В оболочке	Нулевое	5,30	5,30	5,30	5,30	5,30	5,30
	Первое	5,30	6,27	7,05	7,53	8,23	9,19
	Второе	5,30	6,31	7,25	8,03	8,94	10,20

Табл. X.1 дает представление о скорости сходимости полученного решения для оболочки, ослабленной эллиптическим отверстием. Даже при  $a/b=1,5$  быстроту сходимости полученного решения также следует считать удовлетворительной, так как максимальное значение  $k$  в первом приближении больше на 73% значения  $k$  в нулевом приближении, а  $k$  во втором приближении больше  $k$  в первом приближении на 11%.

На рис. X.8 приведено распределение  $T_0^*/\rho_0 h$ , найденное по (X.106) по сечениям  $\theta_0^* = 0$  (кривая I);  $\theta = \pi/2$  (кривая II) для кругового отверстия, т. е. при  $a/b = 1$  ( $l$  — безразмерное, отнесенное к  $r_0$ , расстояние от контура отверстия), а на рис. X.9 — распределение\*  $k = T_0^*/\rho_0 h$  по контуру эллиптического отверстия при  $R = 200$  см;  $r_0 = 10$  см;  $h = 0,2$  см;  $\nu = 0,3$ ;  $a/b = 1,5$ .

**Квадратное отверстие с закругленными углами.** Рассмотрим напряженное состояние в сферической оболочке, ослабленной квадратным отверстием с закругленными углами и нагруженной равномерным внутренним давлением интенсивности  $p$ . Будем считать, что отверстие закрыто крышкой, которая передает давление, приходящееся на нее, только в виде перерезывающей силы, а основное напряженное состояние будем считать безмоментным.

Решение этой задачи получено А. Н. Гузем [10]. Для квадратного отверстия с закругленными углами

$$\varepsilon = \pm \frac{1}{9}; \quad f(\zeta) = \frac{1}{\zeta^3}. \quad (\text{X.109})$$

\* На рис. X.9, X.11, X.13, X.20—X.29 значение  $k$  отложено (в некотором масштабе) по радиусу-вектору с указанием его знака (+ или —).

Согласно (X.109) граничные условия, приняв во внимание (X.74), можем записать в виде

$$T_{\theta} = -p_0 h; \quad S_{\theta\theta} = 0; \quad (X.110)$$

$$G_{\theta} = \hat{0}; \quad \tilde{Q}_{\theta} = -\frac{pr_0}{1} \left[ 1 - \frac{3}{2} \varepsilon^2 - 2(\varepsilon - 2\varepsilon^2) \cos 4\gamma \right].$$

Раскладывая (X.110) в ряды по  $\varepsilon$ , получаем граничные условия для любого приближения. Решение в нулевом приближении совпадает с решением

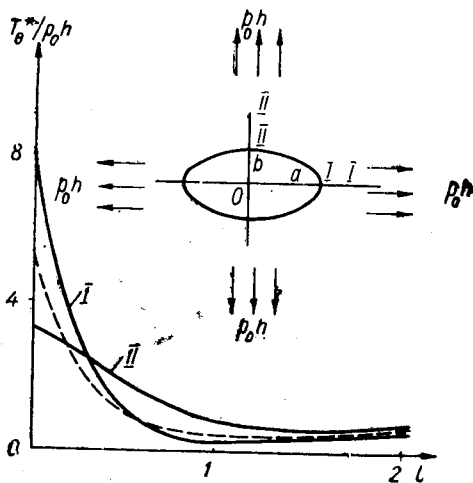


Рис. X.8.

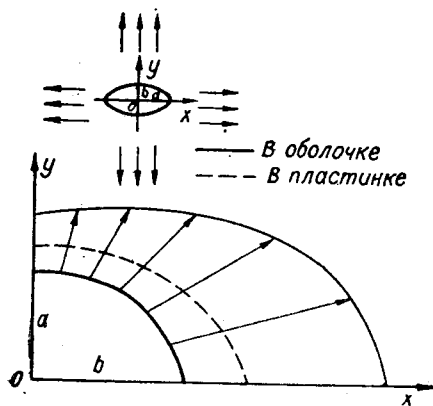


Рис. X.9.

для кругового отверстия (X.96)—(X.98). Перейдем к определению функции  $\Phi_j(r, \varphi)$  при  $j=1$  и  $j=2$ , которую возьмем в форме (X.65). Для определения постоянных  $c_2^{1,4}, d_2^{1,4}, c_4^{1,4}, d_4^{1,4}, d_2^{2,0}, c_4^{2,0}, d_4^{2,0}, c_2^{2,4}, d_2^{2,4}, c_4^{2,4}, d_4^{2,4}, c_2^{2,6}, d_2^{2,8}, c_4^{2,8}$  и  $d_4^{2,8}$  получены системы алгебраических уравнений, которые в виду их громоздкости здесь не приводим.

Остальные постоянные в (X.65) при  $j=1$  и  $j=2$  равны нулю. Для определения  $T_{\theta}^{(1)}$  и  $T_{\theta}^{(2)}$  на контуре отверстия получены формулы

$$T_{\theta}^{(1)} = \frac{1}{nr_0^2} \left[ 20d_2^{1,4} + \kappa^2 c_4^{1,4} \text{hei}_4'' \kappa + \kappa^2 d_4^{1,4} \text{her}_4'' \kappa + \right. \\ \left. + p_0 \frac{\kappa^4 R}{E\Psi} (\chi_1 \text{hei}''' \kappa - \chi_2 \text{her}''' \kappa) \right] \cos 4\theta, \dots \quad (X.111)$$

$$T_{\theta}^{(2)} = \frac{1}{nr_0^2} \left\{ -d_2^{2,0} + c_4^{2,0} \kappa^2 \text{hei}'' \kappa + d_4^{2,0} \kappa^2 \text{her}'' \kappa + 60d_2^{1,4} + \right. \\ \left. + c_4^{1,4} \left( \frac{\kappa^3}{2} \text{hei}_4''' \kappa + 2\kappa^2 \text{hei}_4'' \kappa - 16\kappa \text{hei}_4' \kappa + 16 \text{hei}_4 \kappa \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + d_4^{1,4} \left( \frac{\kappa^3}{2} \text{her}_4''' \kappa + 2\kappa^2 \text{her}_4'' \kappa - 16\kappa \text{her}_4' \kappa + 16 \text{her}_4 \kappa \right) + \\
& + \rho_0 \frac{\kappa^2 R}{4E\Psi} \left[ \chi_1 \left( -32\kappa \text{hei}'' \kappa + \kappa^3 \text{hei}^{\text{IV}} \kappa + \kappa^2 \text{hei}''' \kappa + \right. \right. \\
& + 32 \text{hei}' \kappa \left. \right) - \chi_2 \left( -32\kappa \text{her}'' \kappa + \kappa^3 \text{her}^{\text{IV}} \kappa + \kappa^2 \text{her}''' \kappa + \right. \\
& \left. \left. + 32 \text{her}' \kappa \right) \right] \left\{ + \frac{1}{nr_0^2} \left\{ 20d_2^{2,4} + \kappa^2 (c_4^{2,4} \text{hei}_4'' \kappa + \right. \right. \\
& \left. \left. + d_4^{2,4} \text{her}_4'' \kappa \right) \right\} \cos 4\theta + \frac{1}{nr_0^2} \left\{ 72d_2^{2,8} + c_4^{2,8} \kappa^2 \text{hei}_8'' \kappa + \right. \\
& \left. + d_4^{2,8} \kappa^2 \text{her}_8'' \kappa - 180d_2^{1,4} + c_4^{1,4} \left[ \frac{\kappa^3}{2} \text{hei}_4''' \kappa - 2\kappa^2 \text{hei}_4'' \kappa + \right. \right. \\
& \left. \left. + 16(\kappa \text{hei}_4' \kappa - \text{hei}_4 \kappa) \right] + d_4^{1,4} \left[ \frac{\kappa^3}{2} \text{her}_4''' \kappa - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2\kappa^2 \text{her}_4'' \kappa + 16(\kappa \text{her}_4' \kappa - \text{her}_4 \kappa) \right] \right\} + \\
& + \rho_0 \frac{\kappa^2 R}{4E\Psi} \left[ \chi_1 (32\kappa \text{hei}'' \kappa + \kappa^3 \text{hei}^{\text{IV}} \kappa - \right. \\
& - \kappa^2 \text{hei}''' \kappa - 32 \text{hei}' \kappa) - \chi_2 (32\kappa \text{her}'' \kappa + \\
& \left. + \kappa^3 \text{her}^{\text{IV}} \kappa - \kappa^2 \text{her}''' \kappa - 32 \text{her}' \kappa) \right] \left\} \cos 8\theta. \quad (\text{X.112})
\end{aligned}$$

Значения  $T_\theta^*$  на контуре отверстия с точностью до  $\varepsilon^2$  определим по формуле

$$T_\theta^* = T_\varphi^* + \varepsilon T_\theta^{(1)} + \varepsilon^2 T_\theta^{(2)} + \dots, \quad (\text{X.113})$$

где  $T_\varphi^*$  определено формулой (X.98),  $T_\theta^{(1)}$  — (X.111), а  $T_\theta^{(2)}$  — (X.112).

В качестве примера рассмотрим значение коэффициента концентрации  $k = T_\theta^* / \rho_0 h$  на контуре отверстия, подсчитанное по формуле (X.113), для оболочки с параметрами  $R = 200$  см;  $r_0 = 10$  см;  $h = 0,2$  см;  $\nu = 0,3$ ;  $\varepsilon = 1/9$ .

С учетом второго приближения

$$k = 5,85 + 3,22 \cos 4\theta + 1,01 \cos 8\theta. \quad (\text{X.114})$$

В таблице приведены значения  $k_{\max}$  (при  $\theta = 0$ ) для пластинки и оболочки.

Таблица X.2

$\kappa$	Приближение			Точное решение
	Нулевое	Первое	Второе	
В пластинке при $\theta=0$	2,00	3,33	3,77	4,00
В оболочке при $\theta=0$	5,30	8,53	10,08	—

Табл. X.2 дает представление о быстрой сходимости полученного решения. Как видим, значения  $k$  во втором приближении для пластинки отличаются от  $k$ , найденного из точного решения, на 5,7%. Максимальное значение  $k$  в оболочке в первом приближении больше нулевого приближения на 61%, а значение  $k$  во втором приближении больше  $k$

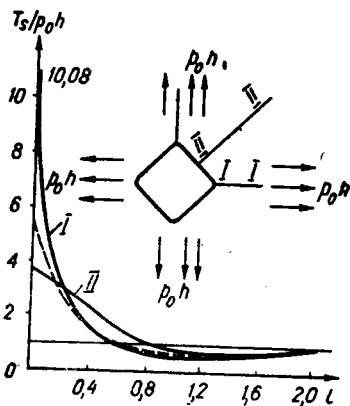


Рис. X.10.

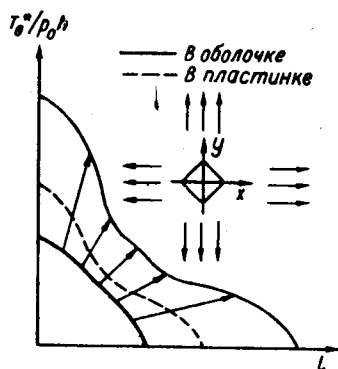


Рис. X.11.

в первом приближении на 18%.  $k_{\max}$  в оболочке для квадратного отверстия больше  $k$  для кругового отверстия на 92%, в пластинке по приближенному решению — на 89%, а по точному — на 180%.

На рис. X.10 приведено распределение  $T_0^*/p_0h$  для рассматриваемого примера по сечениям  $\theta = 0$  (кривая I);  $\theta = \pi/4$  (кривая II) и для кругового отверстия ( $l$  — безразмерное, отнесенное к  $r_0$ , расстояние от контура отверстия), а на рис. X.11 — распределения  $T_0^*/p_0h$ , найденные по формуле (X.114), по контуру отверстия при  $\epsilon = 1/9R = 200$  см;  $h = 0,2$  см;  $r_0 = 10$  см;  $\nu = 0,3$ .

### Равностороннее треугольное отверстие с закругленными углами.

Рассмотрим напряженное состояние сферической оболочки, ослабленной равносторонним треугольным отверстием с закругленными углами и нагруженной равномерным внутренним давлением \* интенсивности  $p$ . Будем считать, что отверстие закрыто крышкой специальной конструкции, которая передает давление, приходящееся на нее, только в виде перерезывающей силы, а основное напряженное состояние в оболочке будем считать безмоментным.

Для равностороннего треугольного отверстия с закругленными углами

$$\epsilon = \pm \frac{1}{4}; \quad f(\xi) = \frac{1}{\xi^2}; \quad N = 2. \quad (\text{X.115})$$

\* См. А. Н. Гузь [3].

Согласно (X.115) граничные условия, приняв во внимание (X.74), можем записать в виде

$$T_{\theta} = -p_0 h; S_{\theta 0} = 0; G_{\theta} = 0; \quad (X.116)$$

$$\tilde{Q}_{\theta} = -\frac{pr_0}{2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 - (2\varepsilon - 3\varepsilon^2) \cos 3\theta \right].$$

Раскладывая граничные условия (X.116) в ряды по  $\varepsilon$ , получаем граничные условия для последовательных приближений.

Решение в нулевом приближении совпадает с решением для кругового отверстия (X.96) — (X.98), поэтому перейдем к определению функции  $\Phi_j(r, \varphi)$  при  $j=1$  и  $j=2$ , которую возьмем в форме (X.63). Подставляя (X.65) в граничные условия для первого приближения, получаем систему алгебраических уравнений для определения постоянных  $c_2^{1,3}; d_2^{1,3}; c_4^{1,3}; d_4^{1,3}; d_2^{2,0}; c_4^{2,0}; d_4^{2,0}; c_2^{2,3}; d_2^{2,3}; c_4^{2,3}; c_2^{2,6}; d_2^{2,6}; c_4^{2,6}$  и  $d_4^{2,6}$ , которые в виду их громоздкости здесь не приводим.

Остальные постоянные (X.65) при  $j=1$  и  $j=2$  для разностороннего треугольного отверстия с закругленными углами равны нулю. Для определения  $T_{\theta}^{(1)}$  и  $T_{\theta}^{(2)}$  по контуру отверстия получены выражения

$$T_{\theta}^{(1)} = \frac{1}{nr_0^2} \left[ 12d_2^{1,3} + \kappa^2 c_4^{1,3} \text{her}_3'' \kappa + d_4^{1,3} \kappa^2 \text{her}_3'' \kappa + \right. \\ \left. + p_0 \frac{\kappa^4 R}{E \Psi} (\chi_1 \text{hei}''' \kappa + \chi_2 \text{her}''' \kappa) \right] \cos 2\theta; \quad (X.117)$$

$$T_{\theta}^{(2)} = \frac{1}{nr_0^2} \left\{ -d_2^{2,0} + c_4^{2,0} \kappa^2 \text{hei}'' \kappa + d_4^{2,0} \kappa^2 \text{her}'' \kappa + \right. \\ + 24d_2^{1,3} + c_4^{1,3} \left( \frac{\kappa^3}{2} \text{hei}_3''' \kappa + 3 \frac{\kappa^2}{2} \text{hei}_3'' \kappa - 9\kappa \text{hei}_3' \kappa + \right. \\ \left. + 9 \text{hei}_3 \kappa \right) + d_4^{1,3} \left( \frac{\kappa^3}{2} \text{her}_3''' \kappa + 3 \frac{\kappa^2}{2} \text{her}_3'' \kappa - 9\kappa \text{her}_3' \kappa + \right. \\ \left. + 9 \text{her}_3 \kappa \right) + p_0 \frac{\kappa^2 R}{4E \Psi} \left[ \chi_1 (18\kappa \text{hei}'' \kappa + \kappa^3 \text{hei}^{IV} \kappa + \right. \\ \left. + \kappa^2 \text{hei}''' \kappa + 18 \text{hei}' \kappa) - \chi_2 (-18\kappa \text{her}'' \kappa + \kappa^3 \text{her}^{IV} \kappa + \right. \\ \left. + \kappa^2 \text{her}''' \kappa + 18 \text{her}' \kappa) \right] \left. \right\} + \frac{1}{nr_0^2} \left\{ 12d_2^{2,3} + c_4^{2,3} \kappa^2 \text{hei}_3'' \kappa + \right. \\ \left. + d_4^{2,3} \kappa^2 \text{her}_3'' \kappa \right\} \cos 3\theta + \frac{1}{nr_0^2} \left\{ 42d_2^{2,6} + \right. \\ \left. + c_4^{2,6} \kappa^2 \text{hei}_6'' \kappa + d_4^{2,6} \kappa^2 \text{her}_6'' \kappa - 84d_2^{1,3} + c_4^{1,3} \left( \frac{\kappa^3}{2} \text{hei}_3''' \kappa - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& - 3 \frac{\kappa^2}{2} \text{hei}_3''\kappa + 9\kappa \text{hei}_3'\kappa - 9 \text{hei}_3\kappa) + d_4^{1,3} \left( \frac{\kappa^3}{2} \text{her}_3'''\kappa - \right. \\
& - 3 \frac{\kappa^2}{2} \text{her}_3''\kappa + 9\kappa \text{her}_3'\kappa - 9 \text{her}_3\kappa) + \rho_0 \frac{\kappa^2}{HE\Psi} \left[ \chi_1 (18\kappa \text{hei}''\kappa + \right. \\
& + \kappa^3 \text{hei}^{IV}\kappa - \kappa^2 \text{hei}'''\kappa - 18 \text{hei}'\kappa) - \chi_2 (18\kappa \text{her}''\kappa + \\
& \left. + \kappa^3 \text{her}^{IV}\kappa - \kappa^2 \text{her}'''\kappa - 18 \text{her}'\kappa) \right] \Big| \cos 6\theta. \quad (\text{X.118})
\end{aligned}$$

Значение  $T_\theta^*$  на контуре отверстия определяется по формуле

$$T_\theta^* = T_\varphi^* + \varepsilon T_\theta^{(1)} + \varepsilon^2 T_\theta^{(2)} + \varepsilon^3 T_\theta^{(3)} + \dots, \quad (\text{X.119})$$

где  $T_\varphi^*$  определяется по формуле (X.98),  $T_\theta^{(1)}$  — по (X.117), а  $T_\theta^{(2)}$  — по (X.118).

В качестве примера рассмотрим значения коэффициента концентрации усилий  $k = T_\theta^*/\rho_0 h$  на контуре отверстия, подсчитанные по формуле (X.119), для оболочки с параметрами  $R = 200 \text{ см}$ ;  $r_0 = 10 \text{ см}$ ;  $h = 0,2 \text{ см}$ ;  $\nu = 0,3 \text{ см}$ .

В этом случае с точностью до  $\varepsilon^2$

$$k = 6,50 + 6,37 \cos 3\theta + 2,48 \cos 6\theta. \quad (\text{X.120})$$

В табл. X.3 приведены значения  $k_{\max}$  (при  $\theta = 0$ ) для пластинки в случае ее всестороннего равномерного растяжения усилиями интенсивности  $\rho_0 h$  и оболочки. Табл. X.3 дает представление о скорости сходимости полученного решения. Значение  $(k_{\max})_{\theta=0}$  во втором приближении для пластинки отличается от  $(k_{\max})_{\theta=0}$ , полученного из точного решения, на 16,7%. Значение  $(k_{\max})_{\theta=0}$  в оболочке в первом приближении больше нулевого на 122,1%, а во втором приближении больше первого приближения на 30,4%. Значение  $k_{\max}$  в оболочке для равностороннего треугольного отверстия с закругленными углами (при  $\varepsilon = 1/4$ ), найденное с точностью до  $\varepsilon^2$ , больше  $k_{\max}$  для кругового отверстия\* на 189,6%. Значения  $k_{\max}$  в пластинке для равностороннего треугольного отверстия (с закругленными углами) больше  $k$  для кругового отверстия по сравнению с точным решением на 200%, а в сравнении с приближенным (с точностью до  $\varepsilon^2$ ) решением — на 150%.

Т а б л и ц а X.3

$k_{\max}$	Приближение			Точное решение
	Нулевое	Первое	Второе	
В пластинке при $\theta=0$	2,00	4,00	5,00	6,00
В оболочке при $\theta=0$	5,30	11,77	15,35	—

На рис. X.12 приведено распределение  $T_\theta^*/\rho_0 h$  для рассматриваемого примера по сечениям  $\theta = 0$  (кривая I);  $\theta = \pi/4$  (кривая II) и для кругового отверстия (I — безразмерное, отнесенное к  $r_0$ , расстояние от контура отверстия), а на рис. X.13 — распределение  $T_\theta^*/\rho_0 h$ , подсчитанное по формуле (X.120), по контуру отверстия при  $R = 200 \text{ см}$ ;  $h = 0,2 \text{ см}$ ;  $r_0 = 10 \text{ см}$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\varepsilon = 1/4$ .

\* Значение  $r_0$  было взято одинаковым как для кругового, так и для рассматриваемого (равностороннего) треугольного отверстия.



**Влияние анизотропии материала.** Исследуем напряженное состояние в сферической ортотропной оболочке, ослабленной круговым отверстием и нагруженной равномерным внутренним давлением интенсивности  $p$ . Оболочка имеет три поверхности упругой симметрии, которые совпадают с координатными поверхностями сферической системы координат, начало которой находится в центре оболочки. Будем считать, что отверстие закрыто крышкой специальной конструкции, которая передает давление, приходящееся на нее, в виде перерезывающей силы, а основное напряженное состояние будем считать безмоментным. Кроме того,

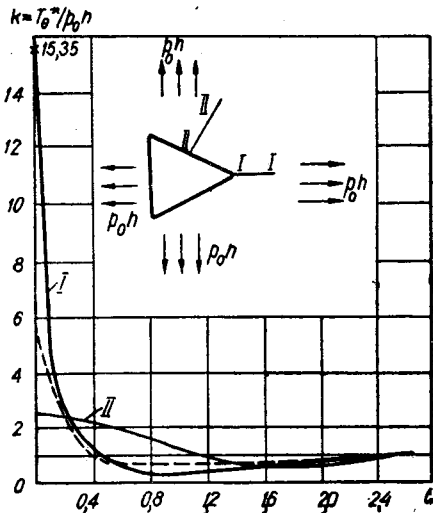


Рис. X.12.

закрыто крышкой специальной конструкции, которая передает давление, приходящееся на нее, в виде перерезывающей силы, а основное напряженное состояние будем считать безмоментным. Кроме того,

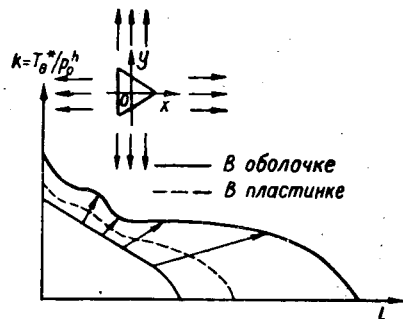


Рис. X.13.

предположим, что контур отверстия совпадает с одной из координатных линий указанной выше сферической системы координат\*.

Для исследования дополнительного напряженного состояния, возникающего вследствие наличия отверстия, отнесем срединную поверхность к полярной системе координат  $(r, \varphi)$ , начало которой помещено в центре отверстия.

Исследование сводится к решению уравнения

$$\nabla^2 (\nabla^2 - i) \Phi = \frac{E_\varphi - E_r}{E_r} \cdot \frac{1}{a^2} \left( \nabla^2 - 2 \frac{1}{a} \cdot \frac{d}{da} \right) \Phi \quad (\text{X.121})$$

при граничных условиях

$$T_r = -\rho_0 h; \quad G_r = 0; \quad \tilde{Q}_r = -\frac{p r_0}{2}, \quad (\text{X.122})$$

где  $\Phi = \omega + i n \varphi$ ;  $r_0$  — радиус отверстия;  $\rho_0 = \frac{p R}{2h}$ ;

\* В такой постановке задача была рассмотрена А. Н. Гузем [1].

$$n = \sqrt{\frac{12(1 - \nu_r \nu_\varphi)}{E_r E_\varphi h^3}}; \quad (X.123)$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{R^2 h^2}{12(1 - \nu_r \nu_\varphi)} \cdot \frac{E_r}{E_\varphi}};$$

$r = ka$ ;  $\alpha$  — переменная;  $E_\varphi$ ,  $F_r$  и  $\nu_r$ ,  $\nu_\varphi$  — соответственно модули Юнга и коэффициенты Пуассона.

Компоненты напряженного состояния определяются по формулам

$$T_r = \frac{1}{nk^2 \alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \operatorname{Im} \Phi; \quad T_\varphi = \frac{1}{nk^2} \cdot \frac{d^2}{d\alpha^2} \operatorname{Im} \Phi;$$

$$G_r = -\frac{1}{k^2} \cdot \frac{E_r h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\varphi)} \left( \frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{\nu_\varphi}{\alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \right) \operatorname{Re} \Phi; \quad (X.124)$$

$$\tilde{Q}_r = -\frac{1}{k^2} \cdot \frac{E_r h^3}{12(1 - \nu_r \nu_\varphi)} \left( \frac{d}{d\alpha} \nabla^2 - \frac{E_\varphi - E_r}{E_r} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{d}{d\alpha} \right) \operatorname{Re} \Phi.$$

Введем параметр  $\varepsilon = \frac{E_\varphi - E_r}{E_r}$  и будем считать, что  $\varepsilon < 1$ . Если для данного материала  $\varepsilon > 1$ , то уравнение (X.121) и соотношение (X.124) легко перестроить и выделить параметр  $\varepsilon' = \frac{E_r - E_\varphi}{E_\varphi}$ , для которого при условии  $\frac{E_\varphi - E_r}{E_r} > 1$  получаем  $\frac{E_r - E_\varphi}{E_\varphi} < 1$ . Таким образом, при любом соотношении между модулями Юнга можем вести разложение по одному из двух параметров  $\varepsilon$  или  $\varepsilon'$ .

Остановимся для определенности на случае  $\varepsilon < 1$ ; для случая же  $\varepsilon' < 1$  полученные результаты остаются в силе, если в (X.123) и (X.124)  $E_r$  заменить на  $E_\varphi$ . Представим функцию  $\Phi$  в виде

$$\Phi(\alpha, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \Phi_j(\alpha). \quad (X.125)$$

Подставив (X.125) в (X.123) и (X.124) и приняв во внимание (X.125), получим последовательность краевых задач для уравнения

$$\nabla^2 (\nabla^2 - i) \Phi_j = \frac{1}{\alpha^2} \left( \nabla^2 - \frac{2}{\alpha} \frac{d}{d\alpha} \right) \Phi_{j-1}$$

$$(j = 1, 2, 3, \dots) \quad (X.126)$$

при таких граничных условиях, т. е. при  $\alpha = \alpha_0$ :

$$\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \operatorname{Im} \Phi_j = -\rho_0 h k^2 n \delta_j^0; \quad (X.127)$$

$$\left( \frac{d^2}{d\alpha^2} + \frac{\nu_\Phi}{\alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \right) \operatorname{Re} \Phi_j = 0;$$

$$\frac{d}{d\alpha} \nabla^2 \operatorname{Re} \Phi_j = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re} \Phi_{j-1} + \frac{k^2 p r_0}{2E_r h^3} 12 (1 - \nu_r \nu_\Phi) \delta_j^0,$$

где  $\alpha_0 = k r_0$ ;  $\delta_j^k = \begin{cases} 1 & \text{при } k = j, \\ 0 & \text{при } k \neq j; \end{cases} \Phi_k(\alpha) \equiv 0 \text{ для } k < 0.$

Решение уравнения (X.126) в  $j$ -ом приближении, удовлетворяющее условиям «на бесконечности» (X.35), представим в виде

$$\Phi_j(\alpha) = iC_j \ln \alpha + (A_j + iB_j) H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{-i}) + \hat{\Phi}_j(\alpha), \quad (X.128)$$

где  $H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{-i}) = \operatorname{her} \alpha + i \operatorname{hei} \alpha$  — функция Ханкеля нулевого порядка первого рода;  $\hat{\Phi}_j(\alpha)$  — частное решение уравнения (X.126).

В нулевом приближении определяем функцию  $\Phi_0(\alpha)$  (X.128) из граничных условий (X.127) при  $j = 0$  ( $\hat{\Phi}_0 \equiv 0$ ):

$$\Phi_0 = D \frac{\chi_{01} - i\chi_{02}}{\Psi_0} H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{-i}), \quad (X.129)$$

где

$$D = \frac{p r_0 k^3}{2E_r h^3} 12 (1 - \nu_r \nu_\Phi);$$

$$\chi_{01} = -\operatorname{her} \alpha_0 + \frac{1 - \nu_\Phi}{\alpha_0} \operatorname{hei}' \alpha_0;$$

$$\chi_{02} = -\operatorname{hei} \alpha_0 - \frac{1 - \nu_\Phi}{\alpha_0} \operatorname{her}' \alpha_0;$$

$$\Psi_0 = \chi_{02} \operatorname{her}' \alpha_0 - \chi_{01} \operatorname{hei}' \alpha_0.$$

При  $E_r = E_\Phi$  функция  $\Phi_0$  (X.129) совпадает с решением для изотропной оболочки в форме (X.96) — (X.98).

Для определения функции  $\Phi_1$  из (X.126) получаем уравнение

$$\nabla^2 (\nabla^2 - i) \Phi_1 = D \frac{\chi_{01} - i\chi_{02}}{\Psi_0} \cdot \frac{1}{\alpha} \left( \nabla^2 - \frac{2}{\alpha} \cdot \frac{d}{d\alpha} \right) H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{-i}), \quad (X.130)$$

решение которого согласно (X.128) можно представить в виде

$$\Phi_1(\alpha) = iC_1 \ln \alpha + (A_1 + iB_1) H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{-i}) - \frac{D}{2} \frac{\chi_{01} - i\chi_{02}}{\Psi_0} \int \frac{H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{-i})}{\alpha} d\alpha. \quad (X.131)$$

Определив постоянные  $C_1$ ,  $A_1$  и  $B_1$  из граничных условий (X.127), при  $j := 1$  для  $\Phi_1(\alpha)$  получаем

$$\begin{aligned} \Phi_1(\alpha) = & -\frac{D}{2} \cdot \frac{\chi_{01} - i\chi_{02}}{\Psi_0} \int \frac{H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{-i})}{\alpha} d\alpha + \\ & + \left[ \frac{\text{her}' \alpha_0}{\alpha_0} \left( \chi_{12} - \frac{1 - \nu_\varphi}{\alpha_0} \chi_{11} + \chi_{01} \Psi_1 \right) - i \frac{\chi_{02} \Psi_1 + \frac{\text{hei}' \alpha_0}{\alpha_0} \left( \chi_{12} - \frac{1 - \nu_\varphi}{\alpha_0} \chi_{11} \right)}{\Psi_0^2} \right] \times \\ & \times \frac{D}{2} H_0^{(1)}(\alpha \sqrt{-i}), \end{aligned} \quad (\text{X.132})$$

где

$$\chi_{11} = \chi_{01} \text{her} \alpha_0 + \chi_{02} \text{hei} \alpha_0, \quad (\text{X.133})$$

$$\chi_{12} = \chi_{01} \text{her}' \alpha_0 + \chi_{02} \text{hei}' \alpha_0;$$

$$\Psi_1 = -\chi_{01} \text{hei} \alpha_0 + \chi_{02} \text{her} \alpha_0. \quad (\text{X.134})$$

Воспользовавшись (X.129) и (X.132), определим значения  $T_\varphi^*$  на контуре отверстия с точностью до  $\varepsilon$  в виде\*

$$\begin{aligned} T_\varphi^* = & 2\rho_0 h \left( 1 + \frac{\alpha_0}{2} \cdot \frac{\chi_{11}}{\Psi_0} \right) + \frac{E_\varphi - E_r}{E_r} \cdot \frac{\rho_0 h}{2} \left[ 1 + 2 \frac{\Psi_1 \chi_{11}}{\Psi_0^2} - \right. \\ & \left. - \left( \frac{\text{her} \alpha_0 \text{her}' \alpha_0 + \text{hei} \alpha_0 \text{hei}' \alpha_0}{\Psi_0} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (\text{X.135})$$

В качестве примера рассмотрим значения  $k = T_\varphi^* / \rho_0 h$ , подсчитанные по формуле (X.135), на контуре отверстия при различных соотношениях между  $E_r$  и  $E_\varphi$ ,  $\nu_r$  и  $\nu_\varphi$  для сферической оболочки с круговым отверстием, параметры которой  $R = 25$  см;  $r_0 = 2$  см;  $h = 0,4$  см. Результаты вычислений приведены в табл. X.4. В работе В. З. Карнаухова [1] получено точное решение уравнения (X.121), однако оно выражено через нетабулированные функции.

Таблица X.4

k	$E_\varphi/E_r$							
	1,50	1,00	0,91	0,83	0,77	0,71	0,67	0,50
В оболочке при $\nu_r=0,3$	3,17	2,90	2,85	2,78	2,76	2,71	2,68	2,54
В оболочке при $\nu_r=0,15$	3,10	2,86	2,80	2,76	2,73	2,68	2,66	2,38
В пластинке . . . . .	2,22	2,00	1,95	1,91	1,88	1,85	1,81	1,71

**Круговое отверстие, край которого подкреплен тонким упругим кольцом.** Рассмотрим напряженное состояние сферической оболочки, ослабленной круговым отверстием и нагруженной равномерным внут-

\* В формуле (X.135) исправлены неточности, вкравшиеся в соответствующие формулы работы А. Н. Гузя [1], о которых любезно сообщил автор.

ренним давлением интенсивности  $p$ . Край отверстия подкреплен тонким упругим кольцом, которое будем рассматривать как материальную нить, сопротивляющуюся растяжению, изгибу и кручению; одна из осей инерции поперечного сечения подкрепляющего кольца лежит в срединной поверхности оболочки. Будем считать, что отверстие закрыто крышкой специальной конструкции, которая передает действие приходящего на нее давления на кольцо в виде перерезывающей силы. Основное напряженное состояние будем считать безмоментным. Эта задача рассматривается в работах В. Н. Буйвола, С. А. Голобородько и К. И. Шнеренко [1]; А. Н. Гузя и Г. Н. Савина [1]. В последней работе эта задача рассматривалась как нулевое приближение при решении задач о напряженном состоянии в оболочках около криволинейного отверстия, край которого подкреплен тонким упругим кольцом. Здесь будем следовать работе А. Н. Гузя и Г. Н. Савина [1]. Граничные условия для этой задачи можно получить из (X.59) при  $j=0$ , если положить

$$\begin{aligned} T_r^{(0,0)} &= p_0 h; & G_r^{(0,0)} &= 0; & \tilde{Q}_r^{(0,0)} &= 0; \\ u^{(0,0)} &= p_0 \frac{1-\nu}{E} r_0 r; & v^{(0,0)} &= 0; & \omega^{(0,0)} &= 0; \\ T_r^{(0,0)(0)} &= 0; & G_r^{(0,0)(0)} &= 0; & \tilde{Q}_r^{(0,0)(0)} &= -\frac{pr_0}{2}. \end{aligned} \quad (\text{X.136})$$

Функцию  $\Phi(r, \varphi)$  возьмем в форме (X.65), учитывая (X.67) и (X.72); перемещения — в форме (X.70). Как видим из граничных условий, задача является осесимметричной, поэтому в (X.65) и (X.70) останутся члены только при  $k=0$ . Подставляя (X.65) и (X.70) в граничные условия (X.59) при  $j=0$  и учитывая (X.67), (X.72) и (X.136), определяем постоянные

$$\begin{aligned} d_2^{0,0} &= \frac{pRE_1 F r_0 \sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2 [Ehr_0 + E_1 F (1+\nu)]}; \\ c_4^{0,0} &= -\frac{pr_0^4}{2D\kappa^3} \cdot \frac{r_0 \kappa D \operatorname{hei}'' \kappa + (Dr_0 \nu - A) \operatorname{hei}' \kappa}{r_0 \kappa D (\operatorname{her}' \kappa \operatorname{her}'' \kappa + \operatorname{hei}' \kappa \operatorname{hei}'' \kappa) + (Dr_0 \nu - A)(\operatorname{her}'' \kappa + \operatorname{hei}'^2 \kappa)}; \\ d_4^{0,0} &= \frac{r_0 \kappa D \operatorname{her}'' \kappa + (Dr_0 \nu - A) \operatorname{her}' \kappa}{r_0 \kappa D \operatorname{hei}'' \kappa + (Dr_0 \nu - A) \operatorname{hei}' \kappa} c_4^{0,0}. \end{aligned} \quad (\text{X.137})$$

Подставляя (X.65) в (X.43) и учитывая (X.127), получаем компоненты напряженного состояния на контуре отверстия

$$\begin{aligned} T_r^* &= p_0 h \frac{2E_1 F}{Ehr_0 + E_1 F (1+\nu)}; & T_\varphi^* &= 2p_0 h \frac{Ehr_0 + \nu E_1 F}{Ehr_0 + E_1 F (1+\nu)} - \\ &- \frac{p_0 h \kappa}{M} [r_0 \kappa D (\operatorname{hei}'' \kappa \operatorname{her} \kappa - \operatorname{hei} \kappa \operatorname{her}'' \kappa) + (Dr_0 \nu - A)(\operatorname{hei}' \kappa \operatorname{her} \kappa - \operatorname{her}' \kappa \operatorname{hei} \kappa)]; \\ G_r^* &= -\frac{\kappa h A}{M \sqrt{12(1-\nu^2)}} (\operatorname{hei}' \kappa \operatorname{her}'' \kappa - \operatorname{her}' \kappa \operatorname{hei}'' \kappa); \end{aligned} \quad (\text{X.138})$$

$$G_{\Phi}^* = \frac{\rho_0 h^2 \kappa}{M \sqrt{12(1-\nu^2)}} (Dr_0 - Dr_0 \nu^2 + A\nu)(\text{her } \kappa \text{ her}' \kappa + \text{hei } \kappa \text{ hei}' \kappa),$$

где

$$M = r_0 \kappa D (\text{her}' \kappa \text{ her}'' \kappa + \text{hei}'' \kappa \text{ hei}' \kappa) + (Dr_0 \nu - A)(\text{her}'' \kappa + \text{hei}'' \kappa).$$

Заметим, что  $T_r^*$  (X.138) для оболочки в случае кругового отверстия не зависит от радиуса сферы  $R$  и совпадает с  $T_r^*$  для кругового отверстия в пластинке при всестороннем ее растяжении усилиями интенсивности  $\rho_0 h$ .

Если в (X.138) положить  $R = \infty$ , получим значения компонентов напряженного состояния для плоской пластинки; если положить  $E_1 = 0$  или  $E_1 = \infty$  (в выражения для жесткостей  $A, B$  и  $C$  входит  $E_1$  линейно), получим значения компонентов, характеризующих напряженное состояние на контуре, соответственно неподкрепленного или подкрепленного абсолютно жестким кольцом, кругового отверстия в сферической оболочке.

По формуле (X.138) проведены подсчеты  $T_r^*$  для сферической оболочки с параметрами  $R = 200$  см;  $h = 0,2$  см;  $r_0 = 10$  см;  $\nu = 0,3$  и  $\nu_1 = 0,3$  (для кольца) и подкрепляющего кольца квадратного поперечного сечения, длина стороны которого равна  $0,1r_0$ .

На рис. X.14 показаны зависимости  $T_r^*/\rho_0 h$ , найденные из (X.138), — кривая  $I$  для пластинки и оболочки (она совпадает согласно (X.138));  $T_{\Phi}^*/\rho_0 h$  (X.138) — кривая  $II$  для пластинки; кривая  $III'$  — для оболочки;  $6G_r^*/\rho_0 h^2$  (X.138) — кривая  $I''$ ;  $6G_{\Phi}^*/\rho_0 h^2$  (X.138) — кривая  $II''$  в зависимости от параметра  $\alpha = \frac{E_1}{E_1 + E}$ . Из приведенных графиков видим, что изменение жесткости подкрепляющего кольца может значительно изменить напряженное состояние около отверстия.

Согласно (X.43) компоненты, характеризующие напряженное состояние в оболочке возле отверстия, можно представить в виде

$$T_r^* = \rho_0 h + \frac{1}{nr_0^2} \left[ \frac{d_2^{0,0}}{r^2} + \frac{\kappa}{r} (c_4^{0,0} \text{hei}'' \kappa r + d_4^{0,0} \text{her}' \kappa r) \right];$$

$$T_{\Phi}^* = \rho_0 h + \frac{1}{nr_0^2} \left[ -\frac{d_2^{0,0}}{r^2} + c_4^{0,0} \kappa^2 \text{hei}'' \kappa r + d_4^{0,0} \kappa^2 \text{her}'' \kappa r \right];$$

(X.139)

$$G_r^* = -D \frac{\kappa^2}{r_0^2} \{c_4^{0,0} [(1-\nu) \text{her}'' \kappa r - \nu \text{hei} \kappa r] - d_4^{0,0} [(1-\nu) \text{hei}'' \kappa r + \nu \text{her} \kappa r]\};$$

$$G_{\Phi}^* = D \frac{\kappa^2}{r_0^2} \{c_4^{0,0} [\text{hei} \kappa r + (1-\nu) \text{her}'' \kappa r] + d_4^{0,0} [\text{her} \kappa r - (1-\nu) \text{hei}'' \kappa r]\}.$$

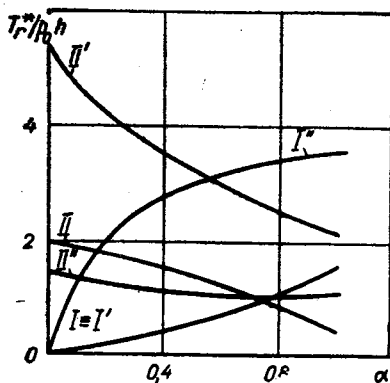


Рис. X.14.

Если в (X.139) положить  $r=1$  и подставить значения  $d_2^{0,0}$ ;  $c_4^{0,0}$  и  $d_4^{0,0}$  из (X.137), получим формулы (X.138).

**Эллиптическое отверстие, край которого подкреплен упругим кольцом.** Рассмотрим напряженное состояние в сферической оболочке, ослабленной эллиптическим отверстием и нагруженной равномерным внутренним давлением интенсивности  $p$ . Край отверстия подкреплен тонким упругим кольцом, которое будем рассматривать как материальную нить, сопротивляющуюся растяжению, изгибу и кручению, причем одна из осей инерции поперечного сечения подкрепляющего кольца лежит в срединной поверхности оболочки. Будем считать, что отверстие закрыто крышкой специальной конструкции, которая передает давление, приходящееся на нее, на подкрепляющее кольцо в виде перерезывающей силы, а основное напряженное состояние будем считать безмоментным\*.

Закон распределения перерезывающей силы примем в форме (X.102). Граничные условия получим из (X.58) в виде

$$\begin{aligned} T_{\theta}^0 &= p_0 h; & T_{\theta}^0 &= p_0 h; & S_{\theta\theta}^0 &= 0; \\ G_{\theta}^0 &= 0; & G_{\theta}^0 &= 0; & \tilde{Q}_{\theta}^0 &= 0; \\ \tilde{Q}_{\theta}^0 &= 0; & u^0 &= p \frac{1-\nu}{E} r_0 r; \end{aligned} \quad (X.140)$$

$$v^0 = 0; \quad w^0 = 0; \quad T_{\theta}^{(0)} = 0; \quad S_{\theta\theta}^{(0)} = 0; \quad G_{\theta}^{(0)} = 0;$$

$$Q_{\theta}^{(0)} = -\frac{pr_0}{2} [1 - 2(\epsilon - \epsilon^2) \cos 2\theta].$$

Раскладывая (X.140) в ряды по  $\epsilon$  и подставляя в (X.59), получаем граничные условия для последовательных приближений.

Нулевое приближение совпадает с решением для кругового отверстия (X.136) и (X.139), поэтому перейдем к определению первого приближения. Функцию  $\Phi_j(r, \varphi)$  возьмем в форме (X.65), учитывая (X.67) и (X.72), а перемещения в форме (X.70) при  $j=1$ . Подставляя (X.65) и (X.70) в граничные условия (X.59) при  $j=1$  и учитывая (X.67), (X.72) и (X.140), получаем систему алгебраических уравнений для определения постоянных  $c_2^{1,2}$ ,  $d_2^{1,2}$ ,  $c_4^{1,2}$  и  $d_4^{1,2}$ , которую в виду громоздкости приводить здесь не будем. Остальные постоянные в (X.65) и (X.70) при  $j=1$  для рассматриваемой задачи равны нулю.

Для малых значений эксцентриситета  $\epsilon = \frac{a-b}{a+b}$  ограничимся нулевым

\* Эта задача была рассмотрена А. Н. Гузем и Г. Н. Савиным [1].





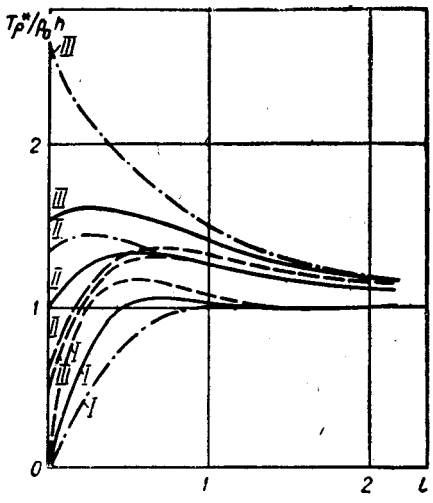


Рис. X.15

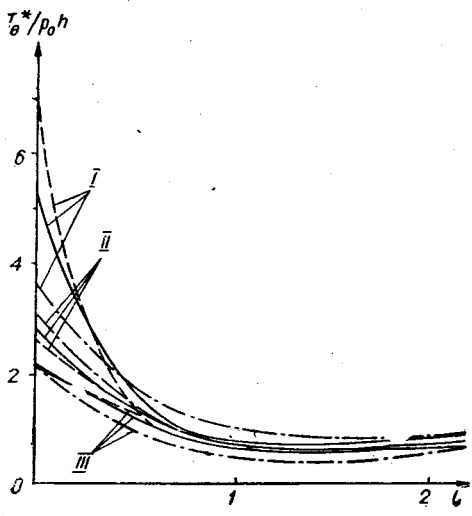


Рис. X.16.

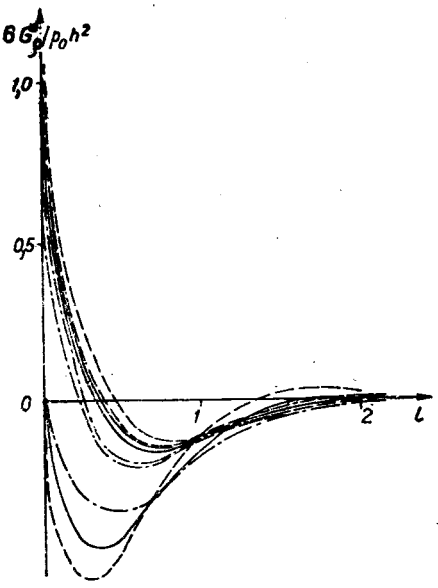


Рис. X.17.

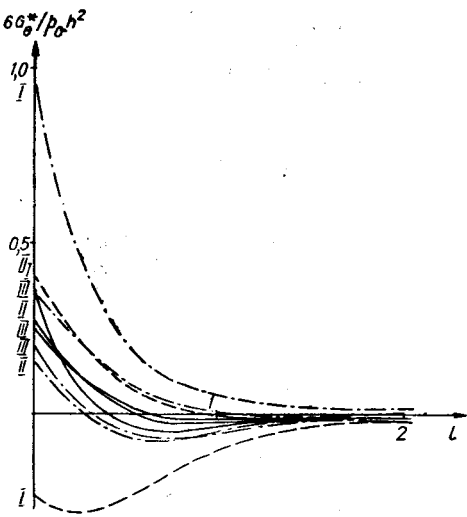


Рис. X.18.

В качестве примера были определены компоненты  $T_0^*$ ;  $T_\theta^*$ ;  $G_0^*$  и  $G_\theta^*$  по сечениям  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  кругового отверстия при  $E_1 = 0$ ;  $E_1/E = 2,632$ ;  $E_1 = \infty$  для оболочки и кольца с параметрами  $R = 200$  см;  $r_0 = 10$  см;  $h = 0,2$  см;  $\nu = 0,3$ ;  $\nu_1 = 0,3$  (для кольца);  $a/b = 1,2$ . Было взято кольцо квадратного поперечного сечения с длиной стороны  $0,1 r_0$ . На рис. X.15—X.18 графически показаны зависимости, соответственно  $T_0^*/\rho_0 h$ ;  $T_\theta^*/\rho_0 h$ ;  $6G_0^*/\rho_0 h^2$  и  $6G_\theta^*/\rho_0 h^2$ , подсчитанные по формулам (X.141), в функции от безразмерного параметра  $l$  (расстояние от контура отверстия), отнесенного к  $r_0 = \frac{a+b}{2}$ . На этих рисунках сплошные линии соответствуют круговому отверстию, пунктирные — по сечению  $\theta = 0$  возле эллиптического отверстия и штрих-пунктирные — по сечению  $\theta = \pi/2$  возле эллиптического отверстия, причем кривые I соответствуют значению  $E_1 = \infty$ ; кривые II — значению  $E_1/E = 2,632$ ; кривые III — значению  $E_1 = 0$ .

Из приведенных графиков видим, что даже малая эллиптичность отверстия ( $a/b = 1,2$ ) оказывает значительное влияние на распределение напряжений около него. При удалении от отверстия на расстоянии  $1,5 r_0 - 2,0 r_0$  распределение усилий и моментов возле криволинейного отверстия в оболочке очень близко к напряженному состоянию около кругового отверстия и по мере удаления стремится к основному напряженному состоянию.

Изменение жесткости подкрепляющего кольца сильно влияет на распределение напряжений по контуру отверстия. При малых жесткостях подкрепляющего кольца основное влияние на концентрацию напряжений оказывают мембранные напряжения; с ростом жесткости подкрепляющего кольца увеличивается влияние на концентрацию напряжений изгибных напряжений от  $G_0^*$ , однако коэффициент концентрации изгибных напряжений от  $G_0^*$  даже в случае абсолютно жесткого кольца в два раза меньше коэффициента концентрации напряжений от  $T_0^*$  и  $G_\theta^*$ .

С ростом жесткости подкрепляющего кольца концентрация усилий и моментов увеличивается на конце малой полуоси и уменьшается на конце большой полуоси.

Аналогичным образом может быть исследована концентрация напряжений в сферической оболочке около подкрепленных отверстий другой формы, в частности квадратной, равностороннего треугольника, правильного многоугольника с закругленными углами и т. д., однако выкладки для этих форм отверстий значительно усложняются.

#### § 4. Круговая цилиндрическая оболочка, ослабленная малым криволинейным отверстием

Рассмотрим напряженное состояние в круговой цилиндрической оболочке около кругового, эллиптического, квадратного и равностороннего треугольного отверстия с закругленными углами при различных случаях подкрепления отверстий и при различных внешних нагрузках. Отверстия будем считать малыми. Под малыми будем понимать такие отверстия, для которых справедливо неравенство

$$\frac{r_0}{\sqrt{Rh}} \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2} < 1, \quad (\text{X.142})$$

где  $r_0$  — величина, характеризующая абсолютные размеры отверстия; в случае кругового отверстия — это радиус отверстия, в случае эллиптического отверстия — это полусумма главных полуосей и т. д.;  $R$  — радиус срединной поверхности цилиндрической оболочки;  $h$  — толщина оболочки. Ось  $Ox$  будем направлять по образующей, а ось  $Oy$  по направляющей.

**Круговое отверстие.** Напряженное состояние около малого кругового отверстия в цилиндрической оболочке при равномерном внутреннем давлении и одноосевом растяжении исследовано в работах А. И. Лурье\* [1, 2]; при кручении — в работе Ю. А. Шевлякова и Ф. С. Зигеля [1]. Нам эти результаты нужны как нулевое приближение для криволинейных отверстий, поскольку нулевое приближение совпадает с решением для кругового отверстия при соответствующей нагрузке. Многочисленные интересные задачи для цилиндрической оболочки, ослабленной малым круговым отверстием при различных граничных условиях и различных нагрузках рассмотрены в работах И. М. Пирогова [1—24]. В этих работах указывается, что в случае неподкрепленных малых круговых отверстий при безмоментном основном напряженном состоянии максимальные изгибные напряжения значительно меньше мембранных. Для криволинейных отверстий нет оснований ожидать отклонений от указанного выше вывода, поэтому для последних будем исследовать только концентрацию напряжений от усилий  $T_\theta$  и определять только  $\text{Im}\Phi_j$ . В  $\text{Re}\Phi_j$  входит достаточное количество неопределенных постоянных для удовлетворения граничных условий для  $G_\rho$  и  $\tilde{Q}_\rho$ .

Приведем значения  $T_\theta^{(0)} + T_\theta^{(0(0))}$  на контуре кругового отверстия при различных нагрузках;  $T_\theta^{(0(j))}$  — коэффициент при  $\epsilon^j$  в разложении  $T_\theta^0$ .

*Одноосное растяжение* вдоль образующей усилиями интенсивности  $ph$

$$T_\theta^{(0)} + T_\theta^{(0(0))} = ph \left[ 1 - 2 \cos 2\theta + \frac{\pi\beta^2}{2} \cos 2\theta \right]. \quad (\text{X.143})$$

*Равномерное внутреннее давление* интенсивности  $p$

$$T_\theta^{(0)} + T_\theta^{(0(0))} = qh \left[ \frac{3}{4} + \cos 2\theta + \pi\beta^2 \left( 1 + \frac{5}{4} \cos 2\theta \right) \right], \quad (\text{X.144})$$

где

$$q = \frac{pR}{2}.$$

*Кручение* усилиями интенсивности  $\tau h$

$$T_\theta^{(0)} + T_\theta^{(0(0))} = -4\tau h \left[ 1 + \frac{1}{2} \pi\beta^2 \right] \sin 2\theta. \quad (\text{X.145})$$

**Влияние подкрепляющего кольца на концентрацию напряжений около кругового отверстия.** Принимая, что основное напряженное состояние является безмоментным с компонентами

$$T_x^0 = ph; \quad T_y^0 = qh; \quad S_{xy}^0 = 0, \quad (\text{X.146})$$

и рассматривая подкрепляющее кольцо как материальную нить, сопротивляющуюся растяжению, изгибу и кручению, т. е. принимая гранич-

\* В этой работе имеется неточность, которая устранена Н. П. Флейшманом [1].

ные условия в виде (X.58), Н. П. Флейшман [1] исследовал напряженное состояние цилиндрической оболочки, ослабленной малым круговым отверстием. Здесь мы будем останавливаться на громоздких промежуточных выкладках, а приведем только окончательные результаты рассмотренного им числового примера.

Рассмотрим случай, когда оболочка загружена равномерным внутренним давлением интенсивности  $p_0$ , а отверстие закрыто крышкой специальной конструкции, которая передает на контур отверстия только действие перерезывающей силы. В этом случае  $2p = q = p_0 R/h$ . Числовой пример рассмотрен для следующих значений параметров:  $r_0/\sqrt{Rh} = 0,5$ ;  $r_0 = 15h$ ;  $h_1 = 3h$ ;  $h_2 = 2b$ ;  $b = 0,1r_0$ ;  $\nu = 0,3$ , где  $h_1$  и  $b$  — высота и ширина кольца;  $E$  и  $E_1$  — модули Юнга соответственно материала оболочки и кольца;  $\frac{E_1}{E} = \frac{\delta}{1-\nu^2}$ ;  $\kappa = \frac{\delta}{\delta+20}$ . Значения полных напряжений на контуре отверстия для внешней поверхности оболочки в зависимости от  $\kappa$  приведены на рис. X.19:  $(\frac{1}{q} \sigma_\varphi)_{\varphi=0}$  — кривая 1;  $(\frac{1}{q} \sigma_r)_{\varphi=\pi/2}$  — кривая 2 и  $(\frac{1}{q} \sigma_r)_{\varphi=0}$  — кривая 3. Приведенные кривые указывают на существенное влияние жесткости подкрепляющего кольца на концентрацию напряжений.

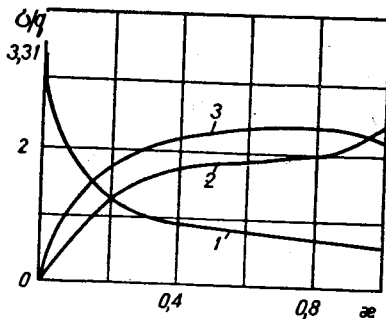


Рис. X.19.

**Эллиптическое отверстие. Равномерное внутреннее давление.** Рассмотрим напряженное состояние внутренней круговой цилиндрической оболочки, ослабленной малым эллиптическим отверстием и загруженной равномерным внутренним давлением интенсивности  $p$ . Будем считать, что отверстие закрыто крышкой специальной конструкции, которая передает действие только перерезывающей силы. В такой постановке задача решена в работе А. Н. Гузя [8], которой будем следовать и здесь. Для эллиптического отверстия

$$r_0 = \frac{a+b}{2}; \quad \varepsilon = \frac{a-b}{a+b}; \quad f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}, \quad (\text{X.147})$$

где  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса.

Будем считать, что основное напряженное состояние является безмоментным; тогда компоненты основного напряженного состояния, разложенные в ряды по  $\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}$ , имеют вид

$$\begin{aligned} T_\varphi^0 &= \frac{qh}{4} [3 - \cos 2\theta + \varepsilon (1 - \cos 4\theta) + \varepsilon^2 (\cos 2\theta - \cos 6\theta)]; \\ T_\theta^0 &= \frac{qh}{4} [3 + \cos 2\theta + \varepsilon (\cos 4\theta - 1) + \varepsilon^2 (\cos 6\theta - \cos 2\theta)]; \\ S_{\theta\varphi}^0 &= \frac{qh}{4} [\sin 2\theta + \varepsilon \sin 4\theta + \varepsilon^2 (\sin 6\theta - \sin 2\theta)]. \end{aligned} \quad (\text{X.148})$$

На контуре отверстия должны выполняться граничные условия

$$T_{\theta} + T_{\theta}^0 = 0; \quad S_{\theta\theta} + S_{\theta\theta}^0 = 0; \quad (X.149)$$

$$G_{\theta} = 0; \quad \oint_{\gamma} \tilde{Q}_{\theta} ds = -Dp,$$

где  $D$  — площадь отверстия;  $\gamma$  — контур отверстия (см. рис. X.5). Из (X.148) и (X.149), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем граничные условия для последовательных приближений.

Решение основного уравнения (X.75) в  $j$ -ом приближении будем брать в виде (X.94). Определим только концентрацию усилий, т. е. в решениях вида (X.94) будем брать только \*  $\text{Im}\Phi$ .

Принимая во внимание изложенное в § 2, на контуре отверстия получаем \*\*

$$T_{\theta}^{(1)} + T_{\theta}^{0(1)} = qh [(3 \cos 2\theta + \cos 4\theta) + \frac{\pi\beta^2}{4} (5 + 16 \cos 2\theta + 5 \cos 4\theta)]; \quad (X.150)$$

$$T_{\theta}^{(2)} + T_{\theta}^{0(2)} = qh \left[ \left( 3 \cos 4\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2} \cos 6\theta \right) + \right. \\ \left. + \pi\beta^2 \left( 1 + \frac{15}{4} \cos 2\theta + \frac{13}{2} \cos 4\theta + \frac{5}{4} \cos 6\theta \right) \right]. \quad (X.151)$$

Значения  $T_{\theta}^*$  на контуре отверстия с точностью до  $\varepsilon^2$ , учитывая (X.144), (X.151) и (X.151), определим по формуле

$$T_{\theta}^* = T_{\theta}^{(0)} + T_{\theta}^{0(0)} + \varepsilon (T_{\theta}^{(1)} + T_{\theta}^{0(1)}) + \varepsilon^2 (T_{\theta}^{(2)} + T_{\theta}^{0(2)}) + \varepsilon^3 (\dots) + \dots \quad (X.152)$$

Формулу (X.152) удобно представить в виде

$$T_{\theta}^* = T_{\theta}^{(пл)} + T_{\theta}^{(доб)}, \quad (X.153)$$

где  $T_{\theta}^{(пл)}$  — значения усилий в плоской пластинке при соответствующей нагрузке, а  $T_{\theta}^{(доб)}$  — добавка, которая возникает в оболочке вследствие искривленности ее поверхности.

В табл. X.5 приведены значения  $(T_{\theta}^{(дон)}/qh)_{\theta=0}$  в числителях и  $(T_{\theta}^{(дон)}/qh)_{\theta=\pi/2}$

в знаменателях для различных соотношений между  $R$ ;  $h$ ;  $r_0 = \frac{a+b}{2}$ ;  $\frac{a}{b}$  при  $\nu = 0,3$ , когда полуось эллипса  $a$  направлена по образующей, а  $b$  — по направляющей.

\* В функцию  $\text{Re}\Phi$  входит достаточное количество постоянных, чтобы удовлетворить граничным условиям для  $G_{\theta}$  и  $\tilde{Q}_{\theta}$ .

\*\* Нулевое приближение совпадает с решением для кругового отверстия (X.144).

Приведем формулу для коэффициентов концентрации  $k = T_{\theta}^*/qh$ , полученную из (X.152) при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ :

$$(k)_{\theta=0} = \frac{5}{2} + 4 \frac{a-b}{a+b} + 4 \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \frac{\pi\beta^2}{4} \left[ 9 + 26 \frac{a-b}{a+b} + 50 \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 \right] + \dots \quad (\text{X.154})$$

$$(k)_{\theta=\pi/2} = \frac{1}{2} - 2 \frac{a-b}{a+b} + 2 \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 + \frac{\pi\beta^2}{4} \left[ -1 - 6 \frac{a-b}{a+b} + 10 \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2 \right]. \quad (\text{X.155})$$

Таблица X.5

$r_0/\sqrt{Rh}$	$a/b$						
	1,300	1,200	1,100	1,000	$\frac{1}{1,100}$	$\frac{1}{1,200}$	$\frac{1}{1,300}$
0,500	$\frac{+1,072}{-0,135}$	$\frac{+0,927}{-0,121}$	$\frac{+0,831}{-0,103}$	$\frac{+0,729}{-0,081}$	$\frac{+0,636}{-0,057}$	$\frac{+0,554}{-0,030}$	$\frac{+0,524}{-0,004}$
0,400	$\frac{+0,686}{-0,086}$	$\frac{+0,593}{-0,077}$	$\frac{+0,531}{-0,065}$	$\frac{+0,466}{-0,052}$	$\frac{+0,401}{-0,036}$	$\frac{+0,354}{-0,019}$	$\frac{+0,335}{-0,002}$
0,300	$\frac{+0,386}{-0,049}$	$\frac{+0,334}{-0,043}$	$\frac{+0,299}{-0,037}$	$\frac{+0,262}{-0,029}$	$\frac{+0,229}{-0,020}$	$\frac{+0,199}{-0,011}$	$\frac{+0,188}{-0,002}$
0,200	$\frac{+0,179}{-0,022}$	$\frac{+0,154}{-0,020}$	$\frac{+0,155}{-0,017}$	$\frac{+0,121}{-0,014}$	$\frac{+0,106}{-0,009}$	$\frac{+0,092}{-0,005}$	$\frac{+0,087}{-0,001}$
0,100	$\frac{+0,043}{-0,005}$	$\frac{+0,037}{-0,005}$	$\frac{+0,033}{-0,004}$	$\frac{+0,029}{-0,003}$	$\frac{+0,025}{+0,002}$	$\frac{+0,022}{-0,001}$	$\frac{+0,021}{-0,000}$

Из (X.154) и (X.155) видим, что  $(k)_{\theta=0}$  и  $(k)_{\theta=\pi/2}$  существенно зависят от отношения  $a/b$ , а коэффициент концентрации  $(k_{\theta})_{\theta=0}$ , кроме того, сильно зависит и от радиуса  $R$  оболочки.

В табл. X.6 приведены значения  $T_{\theta}^*/qh$  на контуре отверстия в оболочке и в пластинке при  $a/b = 1,3$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $r_0/\sqrt{Rh} = 0,5$  для различных значений  $\theta$ .

В табл. X.7 приведены значения  $T_{\theta}^*/qh$  на контуре отверстия в оболочке и в пластинке при  $b/a = 1,3$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $r_0/\sqrt{Rh} = 0,5$  для различных значений  $\theta$ .

Таблица X.6

$T_{\theta}^*$	$\theta^{\circ}$						
	0	15	30	45	60	75	90
$T_{\theta}^{*(пл)}/qh$	+3,10	+2,82	+2,11	+1,57	+0,70	+0,37	+0,28
$T_{\theta}^{*(об)}/qh$	+4,17	+3,76	+2,73	+1,85	+0,99	+0,27	+0,15

Из табл. X.6 и X.7 видим, что кривизна оболочки оказывает существенное влияние на концентрацию усилий при  $\theta = 0$ . Так, при  $a/b = 1,3$  коэффициент концентрации  $k$  (X.154) в оболочке увеличивается на 34% по сравнению с пластинкой, а при  $b/a = 1,3$  — лишь на 25%.

Таблица X.7

$T_{\theta}^*$	$\theta^{\circ}$						
	0	15	30	45	60	75	90
$T_{\theta}^{*(пл)}/qh$	+2,06	+2,02	+1,85	+1,57	+1,22	+0,89	+0,80
$T_{\theta}^{*(об)}/qh$	+2,58	+2,51	+2,10	+1,85	+1,38	+0,94	+0,76

Чтобы судить о точности полученного решения, сравним значения  $(k^{(пл)})_{\theta=0}$  и  $(k^{(пл)})_{\theta=\pi/2}$  (коэффициенты концентрации усилия в пластинке), полученные из приближенного решения с точностью до  $\varepsilon^2$  и точного решения.

Из (X.154) и (X.155) при  $R = \infty$  получаем приближенное значение из приближенного решения

$$(k^{(пл)})_{\theta=0} = \frac{5}{2} + 4 \frac{a-b}{a+b} + 4 \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2; \quad (X.156)$$

$$(k^{(пл)})_{\theta=\pi/2} = \frac{1}{2} - 2 \frac{a-b}{a+b} + 2 \left( \frac{a-b}{a+b} \right)^2. \quad (X.157)$$

Приведем значения этих коэффициентов, найденные из точного решения\* задачи:

$$(k^{(пл)})_{\theta=0} = \frac{5 - 2\varepsilon - 3\varepsilon^2}{2 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2}; \quad (X.158)$$

$$(k^{(пл)})_{\theta=\pi/2} = \frac{1 - 2\varepsilon - 3\varepsilon^2}{2 + 4\varepsilon + 2\varepsilon^2} \quad \left( \varepsilon = \frac{a-b}{a+b} \right). \quad (X.159)$$

Из (X.156)—(X.159) видим, что разложения  $(k^{(пл)})_{\theta=0}$  и  $(k^{(пл)})_{\theta=\pi/2}$ , полученные из точного решения (X.158) и (X.159), совпадают с точностью до  $\varepsilon^2$  с (X.156) и (X.157).

Результаты вычислений при  $a/b = 1,3$  и  $a/b = 1,3 \left( \frac{a+b}{2\sqrt{Rh}} = 0,5 \right)$  сведены в табл. X.8.

Из табл. X.8 видим, что коэффициенты концентрации  $k^{(пл)}$  при  $a/b = 1,3$  и  $b/a = 1,3$  на концах малой и большой полуоси эллиптического отверстия, полученные из приближенного решения (X.156) и (X.157), отличаются от значений этих же коэффициентов, полученных из точного решения (X.158) и (X.159), не более чем на 2%. На рис. X.20 при  $a/b = 1,3$  и X.21 при  $b/a = 1,3$ ;  $\frac{a+b}{2\sqrt{Rh}} = 0,5$  приведено распределение  $T_{\theta}^*/qh$  по контуру отверстия.

\* См. С. Г. Лехницкий [1] или Г. Н. Савин [8].

**Одноосное растяжение.** Рассмотрим напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки, ослабленной малым эллиптическим отверстием \* и растянутой вдоль образующей усилиями интенсивности  $ph$ . Будем считать, что отверстие неподкреплено.

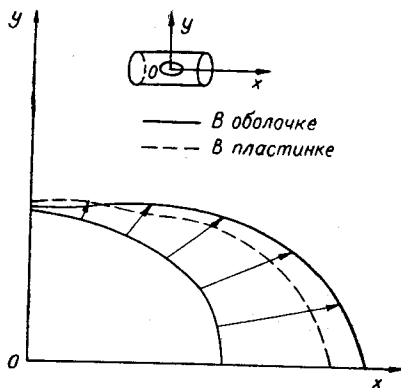


Рис. X.20.

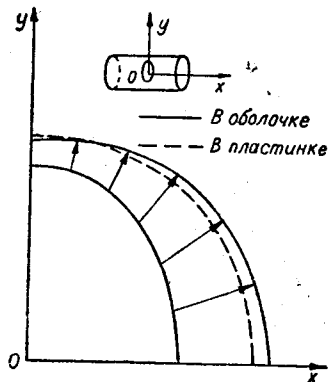


Рис. X.21.

Основное напряженное состояние является безмоментным с компонентами

$$T_x^0 = ph; \quad T_y^0 = 0; \quad S_{xy}^0 = 0. \quad (X.160)$$

Приведем формулы для компонентов основного напряженного состояния в системе координат  $(\rho, \theta)$ , разложив их в степенные ряды по  $\varepsilon$ :

$$T_\rho^0 = \frac{ph}{2} [1 + \cos 2\theta + \varepsilon (\cos 4\theta - 1) + \varepsilon^2 (\cos 6\theta - \cos 2\theta) + \dots];$$

$$T_\theta^0 = \frac{ph}{2} [1 - \cos 2\theta + \varepsilon (1 - \cos 4\theta) + \varepsilon^2 (\cos 2\theta - \cos 6\theta) + \dots]; \quad (X.161)$$

$$S_{\rho\theta}^0 = -\frac{ph}{2} [\sin 2\theta + \varepsilon \sin 4\theta + \varepsilon^2 (\sin 6\theta - \sin 2\theta) + \dots];$$

Таблица X.8

$k$	Приближение						Точное решение	
	Нулевое		Первое		Второе			
	$a/b=1,3$	$a/b=1/1,3$	$a/b=1,3$	$a/b=1/1,3$	$a/b=1,3$	$a/b=1/1,3$		
В пластинке при $\theta=0$	2,500	2,500	3,020	1,980	3,088	2,048	3,097	2,039
В пластинке при $\theta=\pi/2$	0,500	0,500	0,240	0,760	0,274	0,794	0,269	0,798

\* См. А. Н. Гузь [6].



На контуре неподкрепленного отверстия должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} T_{\varrho} + T_{\varrho}^0 &= 0; & S_{\varrho\theta} + S_{\varrho\theta}^0 &= 0; \\ G_{\varrho} &= 0; & \tilde{Q}_{\varrho} &= 0. \end{aligned} \quad (\text{X.162})$$

Из (X.161) и (X.162) получаем граничные условия для последовательных приближений.

Будем определять только концентрацию напряжений от усилий  $T_{\theta}$ ,  $T_{\rho}$  и  $S_{\rho\theta}$ , поскольку в случае кругового неподкрепленного отверстия моменты по величине незначительны. Это следует ожидать и для эллиптического отверстия.

Решение основного уравнения (X.75) будем брать в виде (X.94).

Решение в нулевом приближении совпадает с решением для кругового отверстия (X.143).

Принимая во внимание результаты § 2, для  $T_{\theta}^{(j)} + T_{\theta}^{0(j)}$  ( $j=1, 2$ ) на контуре отверстия получим

$$T_{\theta}^{(1)} + T_{\theta}^{0(1)} = \rho h \left[ 2 \cos 2\theta - \frac{3}{2} \cos 4\theta - \frac{1}{2} - \frac{\pi\beta^2}{2} (1 + \cos 4\theta) \right]; \quad (\text{X.163})$$

$$T_{\theta}^{(2)} + T_{\theta}^{0(2)} = \rho h \left[ 2 \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 6\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{\pi\beta^2}{2} (3 \cos 2\theta + \cos 6\theta) \right]. \quad (\text{X.164})$$

Значения  $T_{\theta}^*$  на контуре отверстия с точностью до  $\varepsilon^2$ , учитывая (X.143), (X.163) и (X.164), определим по формуле

$$T_{\theta}^* = T_{\theta}^{(0)} + T_{\theta}^{0(0)} + \varepsilon (T_{\theta}^{(1)} + T_{\theta}^{0(1)}) + \varepsilon^2 (T_{\theta}^{(2)} + T_{\theta}^{0(2)}) + \dots \quad (\text{X.165})$$

Значения  $T_{\theta}^*$  на контуре отверстия, приняв во внимание (X.143), (X.163) и (X.164), при  $\nu = 0,3$  определим по формуле

$$\begin{aligned} T_{\theta}^* &= \rho h \left\{ \left[ 1 - 2 \cos 2\theta + 2\varepsilon (\cos 2\theta - \cos 4\theta) + 2\varepsilon^2 \left( \cos 4\theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta - \right. \right. \right. \\ &\left. \left. \left. - \frac{1}{2} \cos 6\theta \right) \right] - 0,649 \frac{\varepsilon^2}{4Rh} \left[ \cos 2\theta + \varepsilon (1 + \cos 4\theta) + \varepsilon^2 (3 \cos 2\theta + \cos 6\theta) \right] \right\} \\ &\quad \left( \varepsilon = \frac{a-b}{a+b} \right). \end{aligned} \quad (\text{X.166})$$

Формулу (X.166) можно представить в виде

$$T_{\theta}^* = T_{\theta}^{(пл)} + T_{\theta}^{(доб)}, \quad (\text{X.167})$$

где  $T_{\theta}^{(пл)}$  — значения усилий в плоской пластинке при соответствующей нагрузке;  $T_{\theta}^{(доб)}$  — добавка, которая возникает в оболочке вследствие искривленности ее поверхности.

В табл. X.9 приведены значения  $(T_{\theta}^{(доб)}/\rho h)_{\theta=0}$  в числителе и  $(T_{\theta}^{(доб)}/\rho h)_{\theta=\pi/2}$  в знаменателе при  $\nu = 0,3$  (на контуре отверстия) для различных значений  $\frac{a+b}{2}$ ;  $R$ ;  $h$  и  $a/b$ .

Заметим, что полуось  $a$  направлена по образующей, а полуось  $b$  — по направляющей срединной поверхности цилиндрической оболочки.

Таблица X.9

$\frac{r_0}{\sqrt{Rh}}$	$a/b$						
	1,4	1,2	1,1	1,0	$\frac{1,0}{1,1}$	$\frac{1,0}{1,2}$	$\frac{1,0}{1,4}$
0,500	-0,234	-0,197	-0,179	-0,162	-0,148	-0,138	-0,126
	0,126	0,138	0,148	0,162	0,179	0,197	0,234
0,400	-0,149	-0,126	-0,114	-0,104	-0,094	-0,088	-0,080
	0,080	0,088	0,094	0,104	0,114	0,126	0,149
0,300	-0,084	-0,070	-0,064	-0,058	-0,053	-0,049	-0,045
	0,045	0,049	0,053	0,058	0,064	0,070	0,084
0,200	-0,037	-0,031	-0,028	-0,025	-0,023	-0,022	-0,020
	0,020	0,022	0,023	0,025	0,028	0,031	0,037

Из (X.166) легко находим для коэффициента концентрации  $k = T_{\theta}^*/\rho h$  при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$  формулы

$$(k)_{\theta=0} = -1 - 0,649 \frac{(a+b)^2}{4Rh} [1 + 2\varepsilon + 4\varepsilon^2]; \quad (X.168)$$

$$(k)_{\theta=\pi/2} = 3 - 4\varepsilon + 4\varepsilon^2 + 0,649 \frac{(a+b)^2}{4Rh} [1 - 2\varepsilon + 4\varepsilon^2]$$

$$\left(\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}\right). \quad (X.169)$$

Из (X.168) и (X.169) видим, что  $(k)_{\theta=0}$  и  $(k)_{\theta=\pi/2}$  существенно зависят от соотношения  $a/b$ , а  $(k)_{\theta=0}$  также сильно зависит от  $R$ . При  $\theta = 0$  получаем качественное различие в распределении усилий в оболочке по сравнению с пластинкой. Так, в пластинке  $(k^{(nn)})_{\theta=0} = -1$  и не зависит от соотношения  $a/b$ , а в оболочке  $(k)_{\theta=0}$  (X.168) существенно зависит от соотношения  $a/b$ .

В табл. X.10 приведены значения  $T_{\theta}^*/\rho h$  на контуре отверстия при  $\frac{a+b}{2\sqrt{Rh}} = 0,5$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\frac{a}{b} = 1,4$  для различных точек контура отверстия.

Таблица X.10

$T_{\theta}^*$	$\theta^\circ$						
	0	15	30	45	60	75	90
$T_{\theta}^{(nn)}/\rho h$	-1,00	-0,62	0,28	1,28	2,00	2,36	2,44
$T_{\theta}^{(об)}/\rho h$	-1,23	-0,81	0,19	1,28	2,07	2,45	2,57

Из табл. X.10 видим, что  $(k^{(об)})_{\theta=0}$  больше на 23% значения  $(k^{(пл)})_{\theta=0}$ , а  $(k^{(об)})_{\theta=\pi/2}$  — лишь на 5% больше  $(k^{(пл)})_{\theta=\pi/2}$ . Заметим, что в рассматриваемом случае  $k_{\max}^{(об)} = (k^{(об)})_{\theta=\pi/2}$ . В нулевом приближении  $k_{\max}^{(об)} = 3,16$ , в первом приближении  $k_{\max}^{(об)} = 2,43$ , а во втором приближении  $k_{\max}^{(об)} = 2,57$ , т. е. первое приближение отличается от нулевого на 23%, а второе приближение

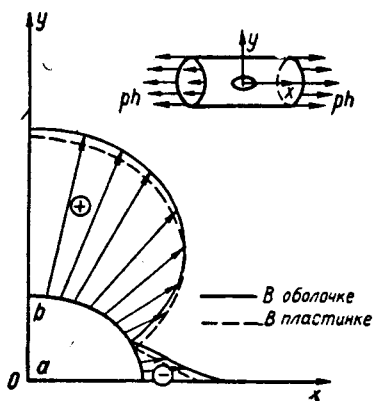


Рис. X.22.

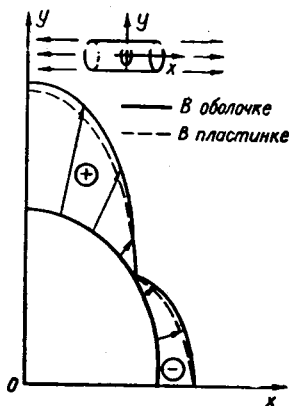


Рис. X.23.

от первого на 5%. Заметим также, что  $k_{\theta=0}^{(пл)}$  и  $k_{\theta=\pi/2}^{(пл)}$ , полученные по приближенному решению с точностью до  $\epsilon^2$ , совпадают с разложениями  $(k^{(пл)})_{\theta=0}$  и  $(k^{(пл)})_{\theta=\pi/2}$ , полученными из точного решения.

На рис. X.22 при  $a/b = 1,4$  и рис. X.23 при  $a/b = 1,4$  и  $\frac{a+b}{2\sqrt{Rh}} = 0,5$

приведено распределение  $T_0^*/ph$ , найденное из (X.166), по контуру эллиптического отверстия.

**Квадратное отверстие с закругленными углами. Равномерное внутреннее давление.** Рассмотрим напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки, ослабленной малым квадратным отверстием с закругленными углами и нагруженной равномерным внутренним давлением интенсивности  $p$ . Будем считать, что отверстие закрыто крышкой специальной конструкции, которая передает действие только перерезывающей силы\*.

Для квадратного отверстия с закругленными углами

$$\epsilon = \pm \frac{1}{9}; \quad f(\zeta) = \frac{1}{\zeta^3}; \quad (\text{X.170})$$

При  $\epsilon = +1/9$  диагональ квадрата направлена по образующей, а при  $\epsilon = -1/9$  под углом  $\pi/4$  к образующей.

\* См. А. Н. Гузь и С. А. Голобородько [1].

Будем считать, что основное напряженное состояние является безмоментным; тогда

$$\begin{aligned} T_x^0 &= \frac{1}{2} gh; & T_y^0 &= qh; \\ S_{xy}^0 &= 0; & q &= \rho \frac{R}{h}. \end{aligned} \quad (\text{X.171})$$

Представляя компоненты основного напряженного состояния в системе координат  $(\rho, \theta)$  и раскладывая их в ряды по  $\varepsilon$ , сохранив члены с  $\varepsilon^2$ , найдем

$$T_\theta^0 = \frac{qh}{4} [3 - \cos 2\theta - 3\varepsilon (\cos 6\theta - \cos 2\theta) - 9\varepsilon^2 (\cos 10\theta - \cos 2\theta) + \dots];$$

$$T_\rho^0 = \frac{qh}{4} [3 + \cos 2\theta + 3\varepsilon (\cos 6\theta - \cos 2\theta) + 9\varepsilon^2 (\cos 10\theta - \cos 2\theta) + \dots];$$

$$S_{\theta\rho}^0 = \frac{qh}{4} [\sin 2\theta + 3\varepsilon (\sin 6\theta + \sin 2\theta) + 9\varepsilon^2 (\sin 10\theta - \sin 2\theta) + \dots]$$

$$\left( \varepsilon = \pm \frac{1}{9} \right). \quad (\text{X.172})$$

На контуре отверстия должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} T_\theta + T_\theta^0 &= 0; & S_{\theta\rho} + S_{\theta\rho}^0 &= 0; \\ G_\rho &= 0; & \oint_\gamma Q_\rho ds &= -D\rho, \end{aligned} \quad (\text{X.173})$$

где  $D$  — площадь области, ограниченной контуром  $\gamma$  (см. рис. X.5) отверстия.

Из (X.172) и (X.173), приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем граничные условия для последовательных приближений. Решение основного уравнения (X.75) будем брать в виде (X.94).

Поскольку нас интересует лишь концентрация усилий возле отверстия, в функциях  $\Phi$  достаточно рассмотреть  $\text{Im } \Phi$ . В функцию  $\text{Re } \Phi$  входит столько постоянных, сколько необходимо, чтобы удовлетворить

граничным условиям для  $\tilde{Q}_\rho$  и  $G_\rho$ .

Нулевое приближение совпадает с решением для кругового отверстия (X.44).

Основываясь на результатах § 2, для  $T_\theta^{(j)} + T_\rho^{(j)}$  ( $j=1,2$ ) на контуре отверстия получим

$$\begin{aligned} T_\theta^{(1)} + T_\rho^{(1)} &= qh \{ \cos 2\theta + 9 \cos 4\theta + 3 \cos 6\theta + \\ &+ \frac{\pi\beta^2}{4} [1 + 7 \cos 2\theta + 24 \cos 4\theta + 15 \cos 6\theta] \}; \end{aligned} \quad (\text{X.174})$$

$$T_{\theta}^{(2)} + T_{\theta}^{0(2)} = qh \{ \cos 2\theta + 3 \cos 6\theta + 27 \cos 8\theta + 9 \cos 10\theta + \\ + \frac{\pi\beta^2}{4} (10 + 4,5 \cos 2\theta + 6 \cos 4\theta + 21 \cos 6\theta + 72 \cos 8\theta + 45 \cos 10\theta) \}. \quad (\text{X.175})$$

Из (X.144), (X.174) и (X.175) легко найдем значения  $T_{\theta}^*$  на контуре отверстия с точностью до  $\varepsilon^2$

$$T_{\theta}^* = T_{\theta}^{(0)} + T_{\theta}^{0(0)} + \varepsilon (T_{\theta}^{(1)} + T_{\theta}^{0(1)}) + \varepsilon^2 (T_{\theta}^{(2)} + T_{\theta}^{0(2)}). \quad (\text{X.176})$$

Формула (X.176) при  $\nu = 0,3$  и  $\varepsilon = 1/9$ , т. е. в случае, когда диагональ квадрата направлена по образующей цилиндрической оболочки, будет иметь вид

$$T_{\theta}^* = qh [1,5 + 1,125 \cos 2\theta + \cos 4\theta + 0,37 \cos 6\theta + 0,335 \cos 8\theta + \\ + 0,11 \cos 10\theta + 0,325 \frac{r_0^2}{Rh} (4,26 + 6 \cos 2\theta + 3,41 \cos 4\theta + \\ + 1,93 \cos 6\theta + 0,89 \cos 8\theta + 0,56 \cos 10\theta)]. \quad (\text{X.177})$$

При  $\varepsilon = -1/9$ , т. е. когда диагональ квадрата направлена под углом  $\pi/4$  к образующей.

$$T_{\theta}^* = qh [1,5 + 0,9 \cos 2\theta - \cos 4\theta - 0,295 \cos 6\theta + 0,335 \cos 8\theta + \\ + 0,11 \cos 10\theta + 0,325 \frac{r_0^2}{Rh} (4,01 + 4,44 \cos 2\theta - 2,59 \cos 4\theta - \\ - 1,41 \cos 6\theta + 0,89 \cos 8\theta + 0,56 \cos 10\theta)]. \quad (\text{X.178})$$

Приведем значения  $k = T_{\theta}^*/qh$  в некоторых точках контура отверстия, т. е. для некоторых значений параметра  $\theta$ :  
при  $\varepsilon = 1/9$

$$(k)_{\theta=0} = 4,44 + 5,54 \frac{r_0^2}{Rh}; \quad (\text{X.179})$$

$$(k)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 1,26 + 0,07 \frac{r_0^2}{Rh};$$

при  $\varepsilon = -1/9$

$$(k)_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 2,83 + 2,43 \frac{r_0^2}{Rh}. \quad (\text{X.180})$$

В табл. X.11 приведены значения  $k$  для пластинки\* и оболочки при  $r_0/\sqrt{Rh} = 0,6$ ;  $\epsilon = 1/9$  и  $\nu = 0,3$  в нулевом, первом и втором приближениях для различных значений  $\theta$ .

Из (X.179) и (X.180) видим, что кривизна оболочки наиболее существенно влияет на коэффициент концентрации при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/4$ , а при  $\theta = \pi/2$  почти не оказывает влияния.

Таблица X.11

$k$	Приближение			Точное решение
	Нулевое	Первое	Второе	
В пластинке при $\theta=0$ . . .	2,50	3,94	4,44	4,68
В оболочке при $\theta=0$ . . .	3,55	5,61	6,43	—
В пластинке при $\theta=\pi/2$ . .	0,50	1,05	1,23	1,30
В оболочке при $\theta=\pi/2$ . .	0,38	0,97	1,24	—

Из данных, приведенных в табл. X.11, можно сделать вывод, что  $k^{(пл)}$  при  $\theta = 0$  и  $\theta = \pi/2$ , подсчитанное по приближенному решению, отличается от  $k^{(об)}$  в этих же точках, подсчитанного по точному решению, на 4—5%. При  $\theta = 0$  как в пластинке, так и в оболочке  $(k)_{\theta=0} = k_{\max}$ . В первом приближении  $k_{\max}^{(об)}$  больше  $k_{\max}^{(об)}$  в нулевом приближении на 58%, а  $k_{\max}^{(об)}$  во втором приближении больше  $k_{\max}^{(об)}$  в первом приближении на 12%. Следует заметить, что  $k_{\max}^{(об)}$  для квадратного отверстия больше  $k_{\max}^{(об)}$  для кругового отверстия на 77%.

В табл. X.12 приведены величины  $k$ , подсчитанные по формулам (X.177) и (X.178) при различных значениях  $r_0/\sqrt{Rh}$  при  $\nu = 0,3$  для  $\theta = 0$ ,  $\theta = \pi/4$  и  $\theta = \pi/2$ .

Таблица X.12

$\epsilon; k$	$r_0/\sqrt{Rh}$						
	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,0
$\epsilon=1/9; (k^{(об)})_{\theta=0}$	6,43	5,83	5,33	4,99	4,66	4,49	4,44
$\epsilon=1/9; (k^{(об)})_{\theta=\pi/2}$	1,24	1,24	1,23	1,23	1,23	1,23	1,23
$\epsilon=1/9; (k^{(об)})_{\theta=\pi/4}$	1,00	0,97	0,93	0,88	0,86	0,84	0,84
$\epsilon=-1/9; (k^{(об)})_{\theta=\pi/4}$	3,71	3,45	3,22	3,05	2,93	2,86	0,83

На рис. X.24 для  $\epsilon = 1/9$  и X.25 для  $\epsilon = -1/9$  при  $r_0/\sqrt{Rh} = 0,5$  приведены кривые, характеризующие  $T_0^*/qh$ , подсчитанные по формулам (X.177) и (X.178) по контуру отверстия.

\* См. С. Г. Лехницкий [1] или Г. Н. Савин [8].

**Одноосное растяжение.** Рассмотрим напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки, ослабленной малым квадратным отверстием с закругленными углами и растянутой (вдоль образующих) усилиями интенсивности  $ph$ . Будем считать отверстие неподкрепленным\*. Основное напряженное состояние является безмоментным с компонентами

$$T_x^0 = ph; \quad T_y^0 = 0; \quad S_{xy}^0 = 0. \quad (X.181)$$

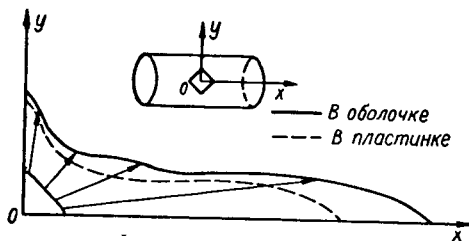


Рис. X.24.

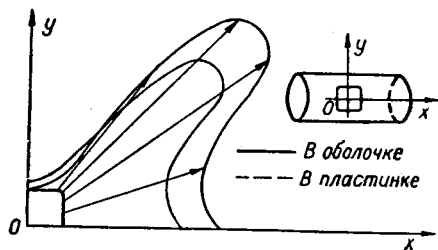


Рис. X.25.

Компоненты (X.181) в системе координат  $(\varrho, \theta)$  представим в виде рядов по  $\varepsilon$ :

$$T_\varrho^0 = \frac{ph}{2} [1 + \cos 2\theta + 3\varepsilon (\cos 6\theta - \cos 2\theta) + 9\varepsilon^2 (\cos 10\theta - \cos 2\theta) + \dots]; \quad (X.182)$$

$$T_\theta^0 = \frac{ph}{2} [1 - \cos 2\theta - 3\varepsilon (\cos 6\theta - \cos 2\theta) - 9\varepsilon^2 (\cos 10\theta - \cos 2\theta) + \dots];$$

$$S_{\varrho\theta}^0 = -\frac{ph}{2} [\sin 2\theta + 3\varepsilon (\sin 6\theta + \sin 2\theta) + 9\varepsilon^2 (\sin 10\theta - \sin 2\theta) + \dots].$$

На контуре неподкрепленного отверстия должны выполняться следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} T_\varrho + T_\varrho^0 &= 0; & S_{\varrho\theta} + S_{\varrho\theta}^0 &= 0; \\ G_\varrho &= 0; & \tilde{Q}_\varrho &= 0. \end{aligned} \quad (X.183)$$

Из (X.182) и (X.183) получаем граничные условия для последовательных приближений.

Будем определять только концентрацию напряжений от усилий  $T_\theta$ ,  $T_\varrho$  и  $S_{\varrho\theta}$ , так как в этом случае величины моментов на контуре отверстия будут незначительны.

Решение основного уравнения (X.75) возьмем в виде (X.94).

В нулевом приближении искомое решение совпадает с решением для кругового отверстия (X.143).

\* См. Г. Н. Савин и А. Н. Гузь [1].

Основываясь на результатах § 2, найдем выражения

$$T_{\theta}^{(1)} + T_{\theta}^{0(1)} = \rho h \left\{ -2 \cos 2\theta + 6 \cos 4\theta - 6 \cos 6\theta - \frac{\pi \beta^2}{2} [1 + 3 \cos 2\theta + 3 \cos 6\theta] \right\}; \quad (\text{X.184})$$

$$T_{\theta}^{(2)} + T_{\theta}^{0(2)} = \rho h \left\{ -2 \cos 2\theta - 6 \cos 6\theta + 18 \cos 10\theta - 18 \cos 10\theta + \frac{\pi \beta^2}{2} [4 - 4 \cos 2\theta - 12 \cos 4\theta - 18 \cos 6\theta - 18 \cos 10\theta] \right\}. \quad (\text{X.185})$$

Усилия  $T_{\theta}^*$  на контуре отверстия с точностью до  $\varepsilon^2$ , как следует из (X.143), (X.184) и (X.185), определим по формуле

$$T_{\theta}^* = T_{\theta}^{(0)} + T_{\theta}^{(1)} + \varepsilon (T_{\theta}^{(1)} + T_{\theta}^{0(1)}) + \varepsilon^2 (T_{\theta}^{(2)} + T_{\theta}^{0(2)}). \quad (\text{X.186})$$

Значения  $T_{\theta}^*$  (X.186) при  $\nu = 0,3$ , найденные с точностью до  $\varepsilon^2$ , будут иметь такой вид:

при  $\varepsilon = 1/9$

$$T_{\theta}^* = \rho h \left[ 1 - 2,24 \cos 2\theta + 0,66 \cos 4\theta + 0,73 \cos 6\theta + 0,22 \cos 8\theta - 0,22 \cos 10\theta - 0,65 \frac{r_0^2}{Rh} (0,08 + 1,34 \cos 2\theta + 0,06 \cos 4\theta - 0,44 \cos 6\theta + 0,11 \cos 10\theta) \right]; \quad (\text{X.187})$$

при  $\varepsilon = -1/9$

$$T_{\theta}^* = \rho h \left[ 1 - 1,8 \cos 2\theta - 0,66 \cos 4\theta + 0,59 \cos 6\theta + 0,22 \cos 8\theta - 0,22 \cos 10\theta + 0,65 \frac{r_0^2}{Rh} (0,12 - 0,7 \cos 2\theta - 0,06 \cos 4\theta + 0,22 \cos 6\theta - 0,11 \cos 10\theta) \right]. \quad (\text{X.188})$$

Приведем значения коэффициента концентрации  $k = T_{\theta}^*/\rho h$ , найденного из (X.187) и (X.188), на контуре отверстия для некоторых значений параметра  $\theta$ :

при  $\varepsilon = 1/9$

$$(k)_{\theta=0} = -1,31 - 1,02\pi\beta^2, \\ (k)_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 5,07 + 0,87\pi\beta^2; \quad (\text{X.189})$$

при  $\varepsilon = -1/9$

$$(k)_{\theta=\frac{\pi}{4}} = 1,88 + 0,09\pi\beta^2. \quad (\text{X.190})$$



Значения  $k$  для пластинки и оболочки, полученные в нулевом, первом и втором приближениях, при  $\theta = \pi/2$ ;  $r_0/\sqrt{Rh} = 0,5$ ;  $\epsilon = 1/9$  и  $\nu = 0,3$  приведены в табл. X.13.

Таблица X.13

$k$	Приближение			Точное решение
	Нулевое	Первое	Второе	
В пластинке при $\theta = \pi/2$ . .	3,00	4,55	5,09	5,38
В оболочке при $\theta = \pi/2$ . .	3,16	4,80	5,37	—

На рис. X.26 для  $\epsilon = 1/9$  и X.27 для  $\epsilon = -1/9$  при  $r_0/\sqrt{Rh} = 0,6$  приведено распределение  $T_\theta^*/\rho h$  (X.187) и (X.188) по контуру отверстия.

*Кручение.* Рассмотрим напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки, ослабленной квадратным неподкрепленным отверстием с закругленными углами. Оболочка скручивается моментами, приложенными к ее концам \*. Основное напряженное состояние будем считать безмоментным с компонентами

$$T_x^0 = 0; \quad T_y^0 = 0; \quad S_{xy}^0 = \tau h. \quad (\text{X.191})$$

Представим компоненты основного напряженного состояния в системе координат  $(\rho, \theta)$ , разложив их в степенные ряды по  $\epsilon$  и удержав члены с  $\epsilon^2$ :

$$T_\rho^0 = \tau h [\sin 2\theta + 3\epsilon (\sin 6\theta + \sin 2\theta) + 9\epsilon^2 (\sin 10\theta - \sin 2\theta) + \dots]; \quad (\text{X.192})$$

$$T_\theta^0 = -T_\rho^0;$$

$$S_{\rho\theta}^0 = \tau h [\cos 2\theta + 3\epsilon (\cos 6\theta - \cos 2\theta) + 9\epsilon^2 (\cos 10\theta - \cos 2\theta) + \dots].$$

На контуре отверстия, свободного от действия внешних усилий, должны выполняться следующие граничные условия:

$$T_\rho^0 + T_\theta^0 = 0; \quad S_{\rho\theta}^0 + S_{\theta\rho}^0 = 0; \quad (\text{X.193})$$

$$G_\rho = 0; \quad \tilde{Q}_\rho = 0.$$

Из (X.192) и (X.193) получаем, приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\epsilon$ , граничные условия для нулевого, первого и второго приближений.

Решения основного уравнения (X.75) будем брать в виде (X.91) и (X.94).

Заметим, что здесь, как и в предыдущих задачах, нас интересует лишь концентрация усилий, поэтому будем определять только функцию

\* См. А. Н. Гузь [9].

$\text{Im}\Phi_j$ . Величины моментов  $G_\theta$  на контуре отверстия в случае неподкрепленных отверстий незначительны.

Нулевое приближение совпадает с решением для кругового отверстия (X.145).

Поступая аналогично тому, как это указано в предыдущих случаях, на основании изложенного в § 2 на контуре отверстия получим

$$T_\theta^{(1)} + T_\theta^{0(1)} = 4\tau h [\sin 2\theta - 3 \sin 6\theta + \pi\beta^2 (\sin 2\theta - 1,5 \sin 6\theta)]; \quad (\text{X.194})$$

$$T_\theta^{(2)} + T_\theta^{0(2)} = -\tau h [6 \sin 2\theta - 12 \sin 6\theta + 38 \sin 10\theta + \pi\beta^2 (7 \sin 2\theta - 12 \sin 6\theta + 19 \sin 10\theta)]. \quad (\text{X.195})$$

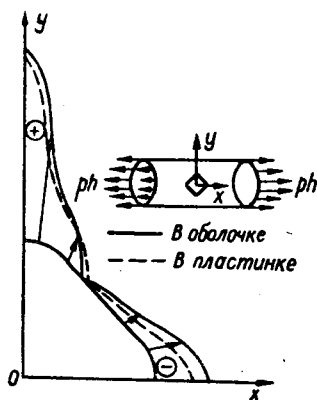


Рис. X.26.

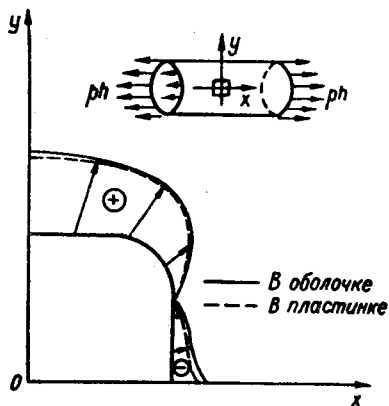


Рис. X.27.

Усилия  $T_\theta^*$  на контуре отверстия с точностью до  $\epsilon^2$  определяются с учетом (X.145), (X.194) и (X.195) по формуле (X.186).

Приведем значения  $T_\theta^*$  (X.186) (для случая кручения оболочки) на контуре отверстия с точностью до  $\epsilon^2$ :

при  $\epsilon = 1/9$

$$T_\theta^* = -\tau h \left[ 3,63 \sin 2\theta + 1,18 \sin 6\theta + 0,47 \sin 10\theta + 0,78 \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{r_0^2}{Rh} (1,65 \sin 2\theta + 0,51 \sin 6\theta + 0,23 \sin 10\theta) \right]; \quad (\text{X.196})$$

при  $\epsilon = -1/9$

$$T_\theta^* = -\tau h \left[ 4,51 \sin 2\theta - 1,48 \sin 6\theta + 0,47 \sin 10\theta + 0,78 \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{r_0^2}{Rh} (2,53 \sin 2\theta - 0,81 \sin 6\theta + 0,23 \sin 10\theta) \right]. \quad (\text{X.197})$$

Как видим из (X.196) и (X.197), максимальное значение коэффициента концентрации  $k = T_{\theta}^*/\tau h$  на контуре отверстия достигается при  $\theta = \pi/4$ :  
при  $\varepsilon = 1/9$

$$(k)_{\theta=\pi/4} = -2,98 - 1,07 \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{r_0^2}{Rh}; \quad (\text{X.198})$$

при  $\varepsilon = -1/9$

$$(k)_{\theta=\pi/4} = -6,48 - 2,97 \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{r_0}{Rh}. \quad (\text{X.199})$$

В табл. X.14 приведены величины  $(k)_{\theta=\pi/4}$  (X.198) при  $\varepsilon = -1/9$ ,  $\nu = 0,3$  и различных значениях  $r_0/\sqrt{Rh}$ . При  $r_0/\sqrt{Rh}$  получаем значения коэффициента концентрации  $k$  для пластинки.

Таблица X.14

Коэффициент концентрации	$r_0/\sqrt{Rh}$						
	0,0	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
	В пластинке	В оболочке					
$(k)_{\theta=\pi/4}$	-6,46	-6,51	-6,64	-6,87	-7,20	-7,61	-8,11
$\left(\frac{k^{(об)}}{k^{(пл)}}\right)_{\theta=\pi/4}$	1,00	1,01	1,03	1,06	1,11	1,18	1,25

В табл. X.15 приведены  $(k)_{\theta=\pi/4}$  (X.199) при  $\varepsilon = -1/9$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $r_0/\sqrt{Rh} = 0,6$  как в пластинке, так и в оболочке в нулевом, первом и втором приближениях, а для пластинки также приведено значение  $(k)_{\theta=\pi/4}$ , полученное из точного решения. Из табл. X.15 следует, что значение  $(k^{(пл)})_{\theta=\pi/4} = -6,46$ , полученное во втором приближении, отличается от точного его значения (6,75) на 4,3%, а  $(k^{(пл)})_{\theta=0}$  и  $(k^{(пл)})_{\theta=\pi/2}$ , как показывают подсчеты, совпадают с точным значением. Для оболочки значение  $(k^{(об)})_{\theta=\pi/4}$  в первом приближении больше, чем в нулевом приближении, на 46%, а во втором приближении больше, чем в первом приближении, на 12%. Величина  $(k^{(об)})_{\theta=\pi/4}$  для квадратного отверстия отличается на 65% от этой величины для кругового отверстия.

Таблица X.15

$k$ при $\theta=\pi/4$	Приближение			Точное решение
	Нулевое	Первое	Второе	
В пластинке . . . . .	-4,00	-5,77	-6,46	-6,75
В оболочке . . . . .	-4,92	-7,20	-8,11	—

На рис. X.28 для  $\varepsilon = 1/9$  и X.29 для  $\varepsilon = -1/9$  показано распределение  $k$ , найденное из (X.196) и (X.197), на контуре квадратного отверстия для оболочки и пластинки при  $\nu = 0,3$  и  $r_0/\sqrt{Rh} = 0,6$ .

Кручение цилиндрической оболочки, ослабленной равносторонним треугольным отверстием. Рассмотрим напряженное состояние цилиндрической оболочки, которая скручивается моментами, приложенными к ее

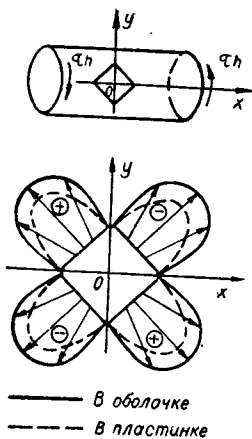


Рис. X.28.

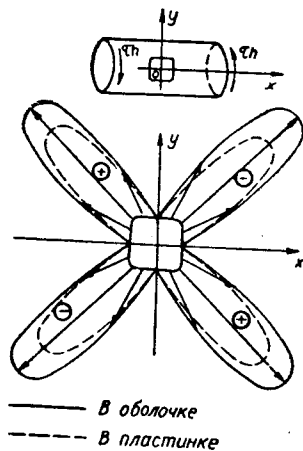


Рис. X.29.

концам. Оболочка ослаблена неподкрепленным равносторонним треугольным отверстием с закругленными углами\*. Для этого отверстия

$$\varepsilon = \pm \frac{1}{4}; \quad f(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}. \quad (\text{X.200})$$

Отверстия в оболочке расположены так, как показано на рис. X.30, а при  $\varepsilon = 1/4$  и X.30, б при  $\varepsilon = -1/4$ .

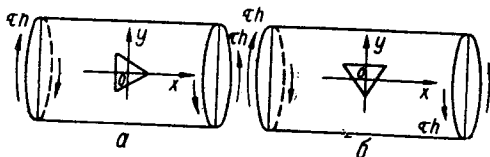


Рис. X.30.

Основное напряженное состояние будем считать безмоментным с компонентами

$$T_x^0 = 0; \quad T_y^0 = 0; \quad S_{xy}^0 = \tau h. \quad (\text{X.201})$$

Запишем компоненты основного напряженного состояния в системе координат  $(\rho, \theta)$  в виде степенных рядов по  $\varepsilon$ , удержав в этих разло-

\* См. А. Н. Гузь [13].

жениях лишь члены с  $\epsilon^2$ . Разложения компонентов (X.201) на контуре отверстия

$$T_{\theta}^0 = \tau h [\sin 2\theta + 2\epsilon (\sin 5\theta + \sin \theta) + 4\epsilon^2 (\sin 8\theta - \sin 2\theta) + \dots];$$

Т а б л и ц а X.16

$\theta$	Приближение		
	Нулевое	Первое	Второе
0	$\frac{0,00}{0,00}$	$\frac{0,00}{0,00}$	$\frac{0,00}{0,00}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{-4,52}{-4,52}$	$\frac{-2,92}{-6,12}$	$\frac{-2,92}{-6,12}$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-3,89}{-3,89}$	$\frac{-1,95}{-5,83}$	$\frac{-2,84}{-6,72}$
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{0,00}{0,00}$	$\frac{-2,26}{2,26}$	$\frac{-2,26}{2,26}$
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3,89}{3,89}$	$\frac{5,83}{1,95}$	$\frac{6,72}{2,84}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{4,52}{4,52}$	$\frac{6,12}{2,92}$	$\frac{6,12}{2,92}$
$\pi$	$\frac{0,00}{0,00}$	$\frac{0,00}{0,00}$	$\frac{0,00}{0,00}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{-4,52}{-4,52}$	$\frac{-6,12}{-2,92}$	$\frac{-6,12}{-2,92}$
$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3,89}{3,89}$	$\frac{1,95}{5,83}$	$\frac{1,04}{4,94}$
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{0,00}{0,00}$	$\frac{-2,26}{2,26}$	$\frac{-2,26}{2,26}$
$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{3,89}{3,89}$	$\frac{1,95}{5,83}$	$\frac{2,84}{6,72}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{4,52}{4,52}$	$\frac{2,92}{6,12}$	$\frac{2,03}{5,53}$

$$T_{\theta}^0 = -T_{\theta}^0;$$

$$S_{\theta\theta}^0 = \tau h [\cos 2\theta - 2\epsilon (\cos \theta - \cos 5\theta) - 4\epsilon^2 (\cos 2\theta - \cos 8\theta) + \dots].$$

На контуре отверстия, на которое не действуют внешние усилия, должны выполняться граничные условия (X.193). Из (X.193) и (X.202), приравнявая нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $\epsilon$ , получаем граничные условия для нулевого, первого и второго приближений.

Решения основного уравнения (X.75) будем брать в виде (X.91) — (X.94).

Нулевое приближение совпадает с решением для кругового отверстия (X.145).

Основываясь на результатах § 2, получаем на контуре отверстия

$$T_{\theta}^{(1)} + T_{\theta}^{(1)} = -8\tau h \left(1 + \frac{1}{2} \pi \beta^2\right) \sin 5\theta; \quad (X.203)$$

$$T_{\theta}^{(2)} + T_{\theta}^{(2)} = -16\tau h \left(1 + \frac{1}{8} \pi \beta^2\right) \sin 8\theta. \quad (X.204)$$

Значения  $T_{\theta}^*$  на контуре отверстия с точностью до  $\epsilon^2$  с учетом (X.145), (X.203) и (X.204) определяются по фор-

муле (X.186). Приведем эти значения на контуре отверстия (с точностью до  $\epsilon^2$ ):

при  $\epsilon = 1/4$  (см. рис. X.30, а)

$$T_{\theta}^* = -4\tau h [\sin 2\theta + 0,5 \sin 5\theta + 0,25 \sin 8\theta + 0,5\pi\beta^2 (\sin 2\theta + 0,5 \sin 5\theta + 0,0625 \sin 8\theta)]; \quad (X.205)$$

при  $\epsilon = -1/4$  (см. рис. X.30, б)

$$T_{\theta}^* = -4\tau h [\sin 2\theta - 0,5 \sin 5\theta + 0,25 \sin 8\theta + 0,5\pi\beta^2 (\sin 2\theta - 0,5 \sin 5\theta + 0,0625 \sin 8\theta)]. \quad (X.206)$$

В табл. X.16 приведены значения  $k = T_0^*/\tau h$  в некоторых точках контура отверстия, подсчитанные по формулам (X.205) и (X.206). В числителях даны значения  $k$  при  $\varepsilon = 1/4$ , а в знаменателях — при  $\varepsilon = -1/4$  для  $\nu = 0,3$  и  $r_0/\sqrt{Rh}$ . Как видим,  $k_{\max}$  достигается при  $\theta = 2\pi/3$  в случае  $\varepsilon = 1/4$  и при  $\theta = \pi/3$  в случае  $\varepsilon = -1/4$ . При этих значениях  $\theta$  величина  $k^{(об)}$  больше  $k^{(на)}$  на 12%. В точках  $\theta = 0$ ;  $\theta = \pi/4$ ;  $\theta = \pi/2$ ;  $\theta = 3\pi/4$ ;  $\theta = \pi$ ;  $\theta = 5\pi/4$  и  $\theta = 3\pi/2$  второе приближение совпадает с первым; в других точках сходимость хуже. Так,  $k_{\max}^{(об)}$  в первом приближении больше нулевого приближения на 50%, а во втором приближении больше первого на 15%.

### § 5. Заключительные замечания

В этой главе были рассмотрены задачи о концентрации напряжений возле одного свободного или подкрепленного отверстия в сферической и цилиндрической оболочках. Приведенные решения не исчерпывают круг задач, исследованных в настоящее время, и эти решения приведены в весьма краткой форме. Поэтому для того чтобы читатель имел возможность подробнее ознакомиться с работами, о которых была речь, и с работами, о которых не удалось даже упомянуть, составлен довольно подробный список литературы. В него включены также работы, относящиеся к проблеме концентрации напряжений возле отверстий в оболочках, которые из-за ограниченности объема монографии не удалось изложить в данной главе.

В настоящее время получены существенные результаты по исследованию концентрации напряжений возле отверстий в оболочках положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны. Эти результаты можно разделить на: 1) исследование напряженных состояний в оболочках возле больших отверстий; 2) применение к проблеме концентрации напряжений вариационных методов; 3) исследование напряженного состояния возле отверстия в упруго-пластической постановке; 4) исследование геометрически нелинейных задач, т. е. напряженного состояния в оболочках возле отверстий при закритических ее деформациях; 5) исследование влияния физической нелинейности материала оболочки на концентрацию напряжений возле отверстий; 6) исследование многосвязных областей, т. е. в случае как конечного, так и бесконечного числа отверстий, изучение их взаимовлияния, влияния края оболочки, жесткости подкрепляющих колец и т. п.; 7) периодические задачи для оболочек, ослабленных отверстиями, и др.

Изложению указанных результатов исследований и более подробному анализу результатов данной главы будет посвящена специальная монография.

## ЛИТЕРАТУРА

- Александров А. Я., Ахметзянов М. Х., Ракин А. С. [1]. Исследование упруго-пластического деформирования оболочек с вырезами и усилениями методом фотоупругих покрытий.—Прикл. мех., 1966, 2, 3.
- Ашмарин Ю. А. [1] Концентрация напряжений около кругового отверстия в ортотропной цилиндрической оболочке.—Прикл. мех., 1966, 2, 2. [2] О напряженном состоянии около кругового отверстия в ортотропной цилиндрической оболочке.—Прикл. мех., 1966, 2, 7. [3] Влияние величины модуля сдвига на концентрацию напряжений.—Прикл. мех., 1967, 3, 2.
- Бокштейн М. Ф. [1] Поляризационно-оптические исследования напряжений у отверстий в оболочке, нагруженной внутренним давлением.—В кн.: Поляризац. оптич. метод исслед. напряжений, «Наука», М., 1965.
- Буйвол В. Н. [1] Концентрация напряжений около кругового отверстия в эллипсоидальной оболочке вращения.—В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965. [2] Полога сферична оболочка, ослаблена симметрично розташованими отворами.—Прикл. мех., 1963, 9, 1. [3] До питання про напружений стан пологих сферичних оболонок з круговими отворами.—Прикл. мех., 1963, 9, 2. [4] Полога сферична оболочка, ослаблена эксцентричним коловим отвором.—ДАН УРСР, 1963, 8. [5] Концентрація напружень в сферичній оболочці навколо підсиленого отвору.—ДАН УРСР, 1963, 11. [6] Концентрація напружень около отверстий в некоторых оболочках вращения.—Прикл. мех., 1967, 3, 2.
- Буйвол В. М., Голобородько С. О., Шнеренко К. І. [1] Розподіл напружень у сферичній оболочці з отвором, край якого підкріплений пружним кільцем.—Прикл. мех., 1964, 10, 3.
- Бурлаков А. В. [1] Концентрация напряжений около отверстий на боковой поверхности цилиндра в условиях ползучести.—В кн.: Тр. Харьковск. политехн. ин-та, сер. инж. физ., 1958, 14, 2.
- Вайнберг Д. В., Синявский А. Л. [1] Расчет оболочек. Госстройиздат УССР, К., 1961.  
[2] Приближенный расчет оболочек с вырезами методами теории потенциала.—В кн.: Проблемы механики сплошной среды. Изд-во АН СССР, М., 1961.
- Ван Фо Фы Г. А. [1] Приложение функций Матъе и дельта-функций к исследованию пластин и оболочек. Автореферат канд. диссерт., Ин-т механики АН УССР, К., 1959.  
[2] Рівновага пологої сферичної оболочкі, обмеженої співфокусними еліпсами.—Прикл. мех., 1961, 7, 4.  
[3] Концентрация напряжений около эллиптического отверстия в сферической оболочке.—Информ. бюлл. ВИНТИ, АН СССР, М., 1961.
- Василенко Н. Г. [1] Напряженное состояние в цилиндрической оболочке, ослабленной круговым отверстием. Автореферат канд. диссерт., ЛПИ, 1953.
- Васильев В. В. [1] Осесимметричный пружно-пластичный стан оболочки обертання.—Прикл. мех., 1961, 7, 3.  
[2] Пружно-пластичний стан сферичної оболочкі з отвором при зміні жорсткості підкріпленого кільця.—Прикл. мех., 1961, 7, 4.  
[3] Осесимметричное упруго-пластическое состояние оболочки вращения. Автореферат канд. диссерт. К., 1962.  
[4] Розрахунок за границею пружності сферичної оболочкі з патрубком.—Прикл. мех., 1962, 8, 2.  
[5] К решению задачи о концентрации напряжений возле кругового отверстия в сферической оболочке в упруго-пластической стадии.—В кн.: Теория оболочек и пластин, Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1964.
- Васильев В. В., Чернышенко И. С. [1] Упруго-пластическое состояние около подкрепленного отверстия в сферической оболочке.—В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.  
[2] Упруго-пластическое состояние конструкции, состоящей из сферической и тороидальной оболочек.—Прикл. мех. 1965, 1, 4.
- Векуа И. Н. [1] Обобщенные аналитические функции. Физматгиз, М.—Л., 1959.

- [2] Новые методы решения эллиптических уравнений. Физматгиз, М.—Л., 1948.
- Власов В. Д. [1] Общая теория оболочек и ее приложение в технике. Гостехиздат, М., 1949.
- Вологжанинов Ю. И. [1] Исследование напряженного состояния возле круговых отверстий в конических оболочках методом фотоупругости. — Прикл. мех., 1966, 2, 6.
- [2] Исследование оболочек отрицательной гауссовой кривизны, ослабленных отверстиями, методом фотоупругости. — Прикл. мех., 1967, 3, 2.
- Вологжанинов Ю. И., Савченко В. И., Фенчак М. Д. [1] Исследование концентрации напряжений возле кругового отверстия в гиперболической оболочке методом фотоупругости. — В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.
- Вологжанинов Ю. И., Шокотько С. Г. [1] Исследование напряженного состояния возле эллиптических отверстий в цилиндрических оболочках методом фотоупругости. — Прикл. мех., 1965, 1, 8.
- Гавеля С. П. [1] Шарнирное опирание и подвижное закрепление пологой сферической оболочки с отверстием. — В кн.: Концентрация напряжений, 1, «Наукова думка», К., 1965.
- Гаганова А. И. [1] О концентрации напряжений при совместной работе пластины и оболочки. — Инж. журн., 1966, 4.
- Галкин С. И. [1] Кручение круговой каркасированной цилиндрической оболочки с подкрепленным круговым вырезом с учетом упругости шпангоута. — В кн.: Теория пластин и оболочек, Казань, 1961.
- [2] Кручение каркасированной круговой цилиндрической оболочки с прямоугольным вырезом. — Изв. СО АН СССР, 1960, 4.
- Галкин С. И., Кабанов В. В., Лещенко С. С. [1] Экспериментальное исследование каркасированной круговой цилиндрической оболочки с большим прямоугольным вырезом. — Изв. вузов, авиац. техн., 1959, 2.
- Галкин С. И., Левизкая Т. Е. [1] Исследование влияния упругости шпангоутов на напряженное состояние круговой цилиндрической оболочки с прямоугольным вырезом при кручении. — Инж. журн. 1966, 6.
- Голобородько С. А. [1] Исследование концентрации усилий около квадратного отверстия с закругленными углами в цилиндрической оболочке. — Прикл. мех., 1965, 1, 10.
- Гольденвейзер А. Л. [1] Теория упругих тонких оболочек. ГИТТЛ, М., 1953.
- Геоджаев Я. О. [1] Расчет подкрепленной цилиндрической оболочки с вырезом произвольной формы. — В кн.: Труды МФТИ, 5. Изд-во АН СССР, М., 1960.
- Губерман И. О. [1] Розв'язання задачі про концентрацію напружень навколо криволінійних отворів в оболонках методом скінчених різниць. — Прикл. мех., 1963, 9, 6.
- Гузъ О. М. [1] Концентрація напружень біля кругового отвору в сферичній анізотропній оболонці. — Прикл. мех. 1961, 7, 4.
- [2] Про наближений метод визначення концентрації напружень біля криволінійних отворів в оболонках. — Прикл. мех. 1962, 8, 6.
- [3] Концентрація напружень біля кругового отвору, підкріпленого жорстким патрубком, в циліндричній ортотропній оболонці. — ДАН УРСР, 1962, 12.
- [4] Приближенные решения задач о концентрации напряжений около отверстий в изотропных и ортотропных оболочках. Автореферат канд. диссерт., Ин-т механики АН УССР, К., 1962.
- [5] Наближені розв'язки задач теорії пластин і пологих оболонок для деяких двозв'язних областей. — Прикл. мех. 1963, 9, 1.
- [6] Концентрація напружень біля еліптичного отвору з малим ексцентриситетом в циліндричній оболонці. — ДАН УРСР, 1963, 10.
- [7] Приближенные решения некоторых задач о концентрации напряжений около отверстий в изотропных и ортотропных оболочках. — В кн.: Теория пластин и оболочек. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1964.
- [8] Концентрация напряжений около криволинейных отверстий на боковой поверхности кругового цилиндра. — Инж. журн. 1964, 4, 2.
- [9] Кручення циліндричної оболонки, послабленої квадратним отвором з за-



округленими кутами. — ДАН УРСР, 1964, 4.

[10] Концентрація напружень біля квадратного отвору в сферичній оболонці. — ДАН УРСР, 1964, 9.

[11] Равновесие сферической оболочки, ослабленной треугольным отверстием. — Прикл. мех., 1965, 1, 3.

[12] О напряженном состоянии около кругового отверстия в оболочке вращения с пологой меридиональной дугой. — Изв. АН СССР, мех. и маш., 1964, 3.

[13] Кручення циліндричної оболонки, послабленої рівнобічним трикутним отвором з заокругленими кутами. — ДАН УРСР, 1965, 1.

[14] Напряженное состояние конической оболочки, ослабленной круговым отверстием. — Инж. журн., 1965, 5, 3.

[15] О решении задач для пологой сферической оболочки в случае многосвязных областей. — ДАН СССР, 1964, 158, 6.

[16] Исследование напряженного состояния сферических оболочек в случае многосвязных областей. — В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.

[17] Исследование напряженного состояния около отверстий в тонких упругих оболочках. — В кн.: Тр. XIII конф., посвященной памяти П. Ф. Папковича, «Наука», М.—Л., 1965.

[18] Про напружений стан в оболонках, послаблених рядом отворів. — ДАН УРСР, 1965, 5.

[19] Периодические задачи для тонких упругих оболочек, ослабленных отверстиями, 6. НТО Судпром, Л., 1965.

[20] О квазирегулярности бесконечных систем для сферической оболочки, ослабленной несколькими отверстиями. — Прикл. мех., 1966, 2, 3.

[21] Осесиметрична деформація пологих ортотропних оболонок обертання. — ДАН УРСР, 1962, 8.

Гузъ А. Н., Голобородько С. А. [1] Про напружений стан біля квадратного отвору з закругленими кутами в циліндричній оболонці. — Прикл. мех., 1964, 10, 6.

Гузъ А. Н., Поляков П. С. [1] Экспериментальное исследование деформаций сферических днищ, ослабленных отверстиями, за пределом упругости. — Прикл. мех., 1966, 2, 11.

Гузъ А. Н., Рындюк М. А., Черней Л. И. [1] Влияние подкрепленных колец на напряженное состояние сферической оболочки, ослабленной двумя равными круговыми отверстиями. — Прикл. мех., 1965, 1, 10.

Гузъ А. Н., Савин Г. Н. [1] О напряженном состоянии около криволинейных подкрепленных отверстий в оболочках. — Инж. журн. 1965, 5, 1.

Гузъ А. Н., Шнеренко К. И. [1] О напряженном состоянии в сферической оболочке, ослабленной двумя отверстиями. В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.

[2] О напряженном состоянии в оболочке, ослабленной двумя криволинейными отверстиями. — Прикл. мех., 1965, 1, 5.

[3] Равновесие сферической оболочки в виде эксцентричного кольца. — Прикл. мех., 1966, 2, 6.

[4] Исследование бесконечных систем уравнений для конечных многосвязных областей в оболочках. — В кн.: Теория оболочек и пластинок. Изд-во АН АзССР, 1966.

Гуляев В. И., Синявский А. Л. [1] Постановка краевых задач статики пологих оболочек для многосвязных областей. — В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.

Детинюв Ю. М. [1] Снижение пиков напряжений в районе выреза цилиндрической оболочки с помощью накладных листов. — В кн.: Самолетостр. и техн. возд. флота, 2, 1965.

Длугач М. И. [1] Расчет цилиндрических оболочек с прямоугольными отверстиями методом конечных разностей. — В кн.: Аннот. докл. I Всес. съезда по теор. и прикл. механ., 1960.

[2] Основні положення розрахунку циліндричних оболонок з прямокутними отворами методом скінченних різниць. — Прикл. мех., 1960, 6, 6.

- Д л у г а ч М. И., Ш и н к а р ь А. И. [1] Применение ЭЦМ к расчету гладких и ребристых пластин и оболочек, ослабленных и неослабленных отверстиями. — В кн.: Теория оболочек и пластин. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1964.
- [2] Розв'язання та ЕОМ симетричних систем лінійних алгебраїчних рівнянь будівельної механіки та теорії пружності.— ДАН УССР, 1962, 4.
- [3] Применение ЭВМ к расчету многосвязных областей и оболочек с отверстиями. — В кн.: Теория оболочек и пластин. Изд-во АН УССР, К., 1962.
- И в а н о в О. Н. [1] Напряженное состояние осесимметрично нагретого ортотропного днища, ослабленного круглым отверстием.— Прикл. мех., 1965, 1, 10.
- И м е н и т о в Л. Б. [1] Концентрация напряжений в тонких упругих сферических оболочках. — В кн.: Теория оболочек и пластин. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1964.
- [2] Применение теории функций комплексного переменного к решению статических неопредельных задач безмоментной теории сферической оболочки. — В кн.: Теория пластин и оболочек. Изд-во АН УССР, К., 1962.
- [3] Задача о сферической оболочке с неподкрепленным краем. — Инж. журн., 1963, 3, 1.
- К а б а н о в В. В. [1] К расчету на кручение открытых частей круговых цилиндрических оболочек типа фюзеляжа с большим прямоугольным вырезом. Гос. комитет СМ СССР по авиац. техн., М., 1959.
- К а н С. Н. [1] О работе цилиндрических оболочек с вырезами. — Изв. вузов, авиац. техн., 1959, 1.
- К а р н а у х о в В. Г. [1] Про концентрацію напружень біля кругового отвору в сферичній анізотропній оболонці. — Прикл. мех., 1962, 8, 6.
- К в а ш а А. Н. [1] Вопросы снижения концентрации напряжений в ослабленных пластинках и оболочках. Автореферат канд. диссерт., К., 1961.
- К р у г л я к о в а В. И. [1] Оболочки вращения с малым центральным отверстием под действием симметричной и обратносимметричной нагрузки. — В кн.: Иссл. по упругости и пластичности, Изд-во ЛГУ, 1965.
- [2] Расчет оболочек вращения с малым отверстием в вершине при симметричном и обратносимметричном нагружении. — В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.
- Л у р ь е А. И. [1] Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, М., 1947.
- [2] Концентрация напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра. — ПММ, 1946, 10, 3.
- Л е х н и ц к и й С. Г. [1] Анизотропные пластинки, ГИТТЛ, М., 1957.
- Л о ш к а р е в М. А. [1] Исследование напряженного состояния тонкостенного цилиндра, ослабленного отверстием. — В кн.: Вопросы прочн. в хим. маш., Машгиз, М., 1958.
- М а м е д о в И. С. [1] Напряженное состояние кольцеобразной мембраны при больших деформациях. — Инж. журн., 1965, 5.
- М е л ь н и к о в В. Б. [1] О концентрации напряжений в круговой ортотропной цилиндрической оболочке, ослабленной круговым вырезом.— В кн.: Тр. XIII конф., посвященной памяти П. Ф. Папковича. «Наука», М.—Л., 1965.
- М о с с а к о в с ь к и й В. І., К в а ш а О. М. [1] Конструкція та розрахунок люків, які не викликають концентрації напружень у сферичній оболонці. — Прикл. мех., 1959, 5, 4.
- М о х б а л и е в С. А. [1] Об исследовании напряженного состояния сферической оболочки, ослабленной криволинейным отверстием. — ДАН АзССР, 1965, 21, 3.
- [2] Исследование напряженного состояния сферической оболочки, ослабленной криволинейным отверстием. — В кн.: Тр. VI Всес. конф. по теории оболочек и пластинок. Изд-во АзССР. Баку, 1966.
- [3] Об исследовании напряженного состояния сферической оболочки, ослабленной криволинейным отверстием. Автореферат канд. диссерт., Баку, 1965.
- М о х б а л и е в С. А., Б а б и ч И. Ю. [1] Концентрация усилий в сферической оболочке около квадратного отверстия. — Прикл. мех., 1965, 1, 12.
- Н о в о ж и л о в В. В. [1] Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Л., 1962.
- П а в л ю к Н. Ф., К и ч а е в П. М. [1] Влияние граничных условий на концентрацию напряжений у отверстия в сферической оболочке.— Прикл. мех., 1965, 1, 6.

- Пашенцев С. В. [1] Исследование напряженного состояния эллипсоидальных оболочек с правильным рядом отверстий. — В кн.: Теория оболочек и пластин. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1964.
- Пирогов Н. М. [1] Распределение напряжений в области отверстия на поверхности кругового цилиндра. — В кн.: Сб. статей Всес. заочн. политехи. ин-та, 15, М., 1956.
- [2] Концентрация напряжений в области жесткого кольца на поверхности кругового цилиндра. — В кн.: Сб. статей Всес. заочн. политехн. ин-та, 16, М., 1957.
- [3] Розтяг скривленої пластини, ослабленої отвором, в який впресована жорстка шайба. — ДАН УРСР, 1958, 5.
- [4] Распределение напряжений в цилиндрической пластинке с подкрепленным отверстием. — Изв. вузов, маш., 1959, 1.
- [5] О напряжениях в цилиндрической оболочке, ослабленной отверстием под действием сосредоточенной силы. — Изв. вузов, ОТН, маш. и приборостр., 1959, 2.
- [6] Распределение напряжений около отверстия в цилиндрической оболочке при действии сосредоточенных сил. — Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1959, 2.
- [7] Кручение и сдвиг искривленной пластинки, ослабленной отверстием. — Изв. вузов, авиац. техн., 1959, 3.
- [8] Изгиб цилиндрической пластинки, ослабленной отверстием. — Изв. вузов, маш., 1959, 2.
- [9] Об одном случае изгиба цилиндрической оболочки. — Изв. вузов, авиац. техн., 1960, 1.
- [10] Концентрация напряжений в области подкрепленного отверстия на поверхности цилиндрической оболочки. — Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1960, 3.
- [11] Кручение цилиндрической оболочки, ослабленной отверстием. — Изв. вузов, маш., 1960, 9.
- [12] Напряженное состояние вблизи отверстия на поверхности цилиндрической оболочки при действии сосредоточенной силы. — Изв. вузов, маш., 1960, 11.
- [13] Напряженное состояние в цилиндрической оболочке с подкрепленным отверстием. — Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1960, 16.
- [14] Растяжение цилиндрической пластинки, ослабленной отверстием, в которое впресована упругая шайба. Изв. вузов, маш., 1961, 5.
- [15] Кручение цилиндрической пластинки с отверстием, край которого подкреплен упругим кольцом. — Изв. вузов, маш., 1961, 6.
- [16] Кручение цилиндрической оболочки с подкрепленным отверстием на боковой поверхности. — Изв. вузов, маш., 1961, 7.
- [17] Згин циліндричної пластинки з підкріпленням отвором. — ДАН УРСР, 1961, 9.
- [18] Концентрация напряжений вблизи подкрепленного отверстия на поверхности кругового цилиндра. — Изв. вузов, маш., 1961, 11.
- [19] Изгиб цилиндрической пластинки с отверстием, край которого подкреплен упругим кольцом. — Изв. вузов, маш., 1962, 4.
- [20] О приближенном решении основного дифференциального уравнения в теории цилиндрических оболочек. — Изв. вузов, маш., 1962, 6.
- [21] О напряжениях в цилиндрической оболочке с отверстием, в которое впресовано упругое кольцо. — Изв. вузов, маш., 1962, 2.
- [22] Концентрация напряжений в области отверстия в цилиндрическом резервуаре. — Изв. вузов, маш., 1963, 7.
- [23] Концентрация напряжений возле подкрепленного отверстия в цилиндрическом резервуаре, наполненном жидкостью. — Прикл. мех., 1965, 1, 1.
- [24] Некоторые задачи статики цилиндрических оболочек и пластин, ослабленных отверстием. Автореферат докт. диссерт., М., 1962.
- [25] Распределение напряжений вблизи отверстия в цилиндрическом резервуаре под действием сил собственного веса. — Прикл. мех., 1965, 1, 3.
- [26] Влияние кривизны на распределение напряжений около отверстия в цилиндрической оболочке. — Прикл. мех., 1965, 1, 12.
- Писковитина И. А. [1] Расчет подкрепленных днщ, соединенных с резервуарами. — Строит. механ. и расчет сооружений, 1965, 5.

- Розенберг Л. Б., Безпалько Л. А. [1] Концентрація напружень в сферичному днищі біля круглого отвору.— ДАН УРСР, 1959, 2.
- Савин Г. Н. [1] Распределение напряжений в тонкой оболочке, ослабленной каким-либо отверстием.— В кн.: Проблемы механики сплошной среды. Изд-во АН СССР, М., 1961.
- [2] Про концентрацію напружень навколо отворів у тонких пружних оболочках.— Прикл. мех., 1961, 7, 1.
- [3] Концентрация напряжений около отверстий в оболочках.— В кн.: Теория пластин и оболочек. Изд-во АН УССР, К., 1962.
- [4] Stress Concentration around Holes in thin Shells Bul. Inst. Polit. DIW Jasi, S. N. Tom. VII (XI), Fasc. 3—4, 1961.
- [5] Распределение напряжений в тонких оболочках, ослабленных каким-либо отверстием.— Информ. бюлл. № 2, ВИНТИ, Изд-во АН СССР, М., 1961.
- [6] The stress Distribution in a Thin shell with an Arbitrary Hole. Problems of Continuum Mechanics. Philadelphia, 1961 (Society for Industrial and Applied Mathematics).
- [7] Concentration of Stresses Around Curvilinear Holes in Plates and Shells. Proceedings of the Eleventh Intern. Congr. of appl. Mech., Munich (Germany), 1964, Springer-Verlag, 1965.
- [8] Концентрация напряжений около отверстий. ГТТИ, М.—Л., 1951.
- [9] Концентрация напряжений около криволинейных отверстий в пластинах и оболочках.— В кн.: Тр. II Всес. съезда по теор. и прикл. мех., «Наука», М., 1966.
- Савин Г. М., Ван Фо Фи Г. А. [1] Концентрація напружень у сферичній оболонці біля еліптичного отвору з малим ексцентриситетом.— ДАН УРСР, 1960, 10.
- [2] Приложение функций Матье к исследованию оболочек.— В кн.: Аннот. докл. I Всес. съезда по теор. и прикл. мех., М., 1960.
- Савин Г. М., Ван Фо Фи Г. А., Буйвол В. Н. [1] Застосування методу послідовних наближень в деяких задачах теорії пологих оболонок.— Прикл. мех., 1961, 7, 5.
- [2] Сферическая оболочка, ослабленная двумя неравными круговыми отверстиями.— В кн.: Теория оболочек и пластин. Изд-во АН УССР, К., 1962.
- [3] Концентрація напружень навколо двох отворів у сферичній оболонці.— ДАН УРСР, 1961, 11.
- Савин Г. Н., Гузь А. Н. [1] О напряженном состоянии около криволинейных отверстий в оболочках.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1964, 6.
- [2] Концентрація напружень біля еліптичного отвору в сферичній оболонці.— ДАН УРСР, 1964, 1.
- [3] До питання про концентрацію напружень навколо отворів у циліндричній оболонці.— ДАН УРСР, 1964, 11.
- Савин Г. Н., Койфман Ю. И. [1] Нелинейные эффекты в задачах о концентрации напряжений около отверстий с подкрепленным краем.— Прикл. мех., 1965, 1, 9.
- Семеновко А. Н. [1] Экспериментальное исследование напряженного состояния сферических единиц сосудов давления, имеющих отверстия.— Изв. вузов, маш., 1964, 7.
- Смоленцев Ю. А. [1] Расчет перфорированных тонкостенных цилиндров и пластин.— Хим. маш., 1964, 4.
- Суюншалиев Н. Х. [1] Приближенное решение задачи об изгибе пологой сферической оболочки, ослабленной отверстием.— Изв. АН УзССР, техн., 1964, 3.
- Фролов О. А. [1] Концентрация напряжений в цилиндрической оболочке, ослабленной вырезом.— В кн.: Тр. конф. по теории пластин и оболочек. Казань, 1961.
- Флерова Н. А. [1] Исследование оптическим методом концентрации напряжений в цилиндрической оболочке.— В кн.: Тр. НИИ им. Крылова, М., 1965.
- Флейшман Н. П. [1] Вплив підкріплюючого кільця на напруження в циліндричній оболонці з круговим вирізом.— ДАН УРСР, 1960, 10.

- [2] Граничні умови для оболонок з отвором, край якого підкріплений тонким пружним кільцем.— Прикл. мех., 1961, 7, 6.
- [3] Некоторые задачи изгиба пластин и оболочек с ребрами жесткости. Автореферат докт. диссерт., К., 1962.
- Х о м а И. Ю. [1] Пружно-пластична задача для пологої сферичної оболонки.— Прикл. мех., 1964, 10, 2.
- [2] Концентрация напряженного состояния вокруг отверстий в пологих оболочках в упруго-пластической стадии деформации. Автореферат канд. диссерт., Ин-т механики АН УССР, К., 1964.
- Черных К. Ф. [1] К проблеме определения концентрации напряжений возле отверстия в оболочке (в линейной постановке).— В кн.: Концентрация напряжений, «Наука думка», К., 1965.
- Чернышенко И. С. [1] Об упруго-пластическом равновесии оболочек вращения при конечных прогибах.— Прикл. мех., 1966, 2, 9.
- [2] Осесимметричное упруго-пластическое состояние сферической оболочки, ослабленной отверстием, при конечных прогибах.— В кн.: Тр. VI Всес. конф. по теории пластин и оболочек, «Наука», М., 1966.
- [3] Упруго-пластический изгиб цилиндрической оболочки с учетом конечных прогибов.— Прикл. мех., 1967, 3, 5.
- Шевляков Ю. А. [1] Основные граничные задачи пологих оболочек и пластин.— В кн.: Научн. зап. Днепропетр. гос. ун-та, 73, 1959.
- [2] Некоторые задачи статики оболочек и пластин. Автореферат докт. диссерт., К., 1955.
- [3] К вопросу о концентрации напряжений возле отверстий в цилиндрической оболочке.— В кн.: Научн. зап. Днепропетр. гос. ун-та, 41, 1, 1953.
- [4] Концентрація напружень біля кругового отвору в сферичному днищі.— ДАН УРСР, 1955, 1.
- [5] Напряжение в сферическом днище, ослабленном круговым вырезом.— Инж. сб., 24, «Наука», М., 1965.
- Шевляков Ю. А., Зигель Ф. С. [1] Кручення полого циліндра з отвором на боковій поверхні.— ДАН УРСР, 1964, 1.
- Шевляков Ю. А., Чехов В. Н. [1] О коэффициентах влияния сферической оболочки.— Прикл. мех., 1965, 1, 7.
- Шнеренко К. И. [1] Распределение напряжений в сферической оболочке с подкрепленным криволинейным отверстием.— Прикл. мех., 1966, 2, 2.
- Abd El Wahab Hassan Atif [1] Die flache Kugelschale mit elliptischem Kern unter konstantem Druck. Abhandl. Braunschweig wiss Ges 16, 1964.
- Burrows W. R., Graves R. L., Stevens P. G., Horvay G. [1] Discussion of the paper by Galletly G. D. «Influence coefficients for hemispherical shells with small openings at the vertex». J. Appl. Mech., 22, N 1, 1955 (ПЖМех., 1958, 13020).
- Bower John Elliott, Jr. [1] Stress concentrations around cutouts in shells of revolution. Doct. diss Univ. Illinois, 1963, 52.
- Carlson W. B., Mckean J. D. [1] Cylindrical pressure vessels: stress systems in plain cylindrical shells and pierced drumheads. Proc. Inst. Mech. Engrn. 169, N 12, 1955 (ПЖМех., 1957, 2423).
- Clound R. L. [1] Minimum weight Design of a Radial Nozzle in Spherical shells.
- Csonka P. [1] On the internal edge beam of paraboloidal shells of revolution having a circular skylight opening. «Acta Techn Acad. Scient. hung», 1964, 49, N 1—2.
- [2] Kör alaprúzu felüvílágítóval bíró forgas—paraboloidhejak belső peremgerendájáról, «Magyar tud. Akad. Musz. tud. OSZT, Közl», 1964, 34, N 1—2.
- [3] Forgásparaboloid alaku hej kulponbos Ilhelyezkedesu koralaprajzu nyilanal, «Madyar tud. Akad. Musz. tud. OSZT, Közl», 1964, 33, 1—4.
- Faupen I. H., Harris D. B. [1] Stress concentration in heavywalled cylindrical pressure vessels. Industr. and Engng. Chem, 49, N 10, 1957.
- Fontaine B. [1] Comportement des tubes métalliques munis de fenestres et soumis a flexion et torsion, «Acier» (Belg.), 31, N 7—8, 1966.
- Galletly G. D. [1] Influence coefficients for open crown hemispheres. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs. N SA—4, 1959 (ПЖМех., 1960, 7, 9204).
- [2] Influence coefficients for open crown hemispheres, Trans. ASME, N 1, A—82, 1960 (ПЖМех., 1960, 12, 16 568).

- [3] Influence coefficients for hemispherical shells with small openings at the vertex, *J. Appl. Mech.*, 22, N 1, 1955 (PЖMex., 1956, 5, 3058).
- [4] Analysis of Discontinuity stresses adjacent to a central Circular opening in a Hemispherical shell, David W., *Faylir Mod. Bassion Rep.* 8, 70, 1964.
- Grioli G. [1] On the Deformation of a Cylindrical shell with Holes Stressed Uniformly, *Publ. Inst. Appl. Calc.* N 246, 1949, L, *Ingenere*, 5, 1949.
- Horvay Me Comb G. Jr., Low E. F. [1] Comparison between theoretical and experimental stresses in circular semimonocoque cylinders with rectangular cutouts, *Ir. NACA Tech. Note*, N 3544, 1955 (PЖMex., 1960, 9, 12 032).
- [2] Stresses analysis of circular semimonocoque cylinders with cutouts by a perturbation load technique. *Nat. Advis. Comm. Aeronaut.*, *Fech. Notes*. N 3200, 1954, *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, 58, N 528, 1954.
- Jaworski Andrzej. [1] Powłoka obrotowa ze współśrodkowym otworem wierzchołkowym, wzmocnionym pierścieniem, obciążonym siłą skupioną, *Arch. budowy maszyn*, 6, N 2, 1959 (PЖMex., 1962, 5 B 47).
- Jessop H. T., Shell G., Allison J. M. [1] The stress concentration factors in cylindrical tubes with transverse circular holes, *Aeronaut Quart.*, 10, N 4, 1959.
- Kitching R., Perkins J. [1] Rim reinforced opening. Part 2, *Nucl. Engrg.* 6, N 65, 1961, 423—426 (PЖMex., 1962, 6878).
- [2] Stress analysis of rim reinforced opening in pressure vessels. Part 1, *Fuel. Engrg.* 5, N 63, 1961 (PЖMex., 1962, 6 B 77).
- Mader F. W. [1] Zur Spannungsermittlung in Torsionsröhren mit Ausschnitten, *Bau-technik*, 36, N 8, 1959 (PЖMex., 1960, 10, 135, 09).
- Naghdi A. K., Eringer A. C. [1] Stress distribution in a circular cylindrical shell with a circular cutout, *Ingr — Arch.*, 1965, 34, N 3.
- Mchringer F. J., Cooper W. E. [1] Experimental determinations of stresses in the vicinity of pipe appendages to a cylindrical shell. *Proc. Soc. Expertl. Stress Analysis*. 14, N 2, 1959.
- Noughton D. S., Rothweil A. [1] The effect of curvature on the stress concentrations around holes in shells. *Co A Rept.* N 196, 1962.
- [2] The effect of curvature on the stress concentrations around holes in shells. *Rept. Coll. Aeronaut. Cranfield*, N 156, 1962.
- [3] Stress concentrations around cutouts in cylinder. *J. Roy. Aeronaut. Soc.* 65, N 603, 1961.
- Popov Egor P., Penzien Yoseph, Rayan Mandayam K. S. [1] Stress concentrations in thin spherical shells. *Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs.*, NMD-A, 6, 1965.
- Sandro Dei Poli [1] Sulla torsione del guscio cilindrico di serione ellittica e spessore costante provvisto di apertura. *Costruz. metall.*, N 3, 15, 1963 (PЖMex., 1964, 7, 7 B 68).
- Tyn Myint J. R., M. Radok and Marie Wolfson [1] Numerical solution of shell Intersection Problems, *Ingenieur-Archiv*, B, 16, N 3.
- Ural Oktay [1] Stress concentrations around the periphery of a large opening in a spherical thin shell under simulated uniform loading, *Doct. diss. Raleigh*, N. C. State Univ., 1964, p. 135, 1962 (PЖMex., 1964, 2, 2 B 60).
- Van Dyke Peter [1] Stresses about a circular hole in a cylindrical shell. *AYAA Journal*, 3, N 9, 1965.
- Venkitapathy [1] Die Kreiszyllinderschale mit elliptischem Ausschnitt. *Dissertation. Technische Hochschule Hannover*, 1963.
- Withum D. [1] Die Kreiszyllinderschale mit Kreisförmigem Ausschnitt unter Schubbeanspruchung, *Ingenieur-Archiv*, Heft 26, 1958 (PЖMex., 1960, 3, 3703).
- Zandbergen P. I. [1] Determination of the stresses in a spherical shell with a hole, due to an axial force, a bending moment and a transverse force. *Verslag en Verhand. Nat. Lucht. en ruimte Vaatlab. Amsterdam*, 23, 1961 (PЖMex., 1964, 1B 65).

# ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЙ

В предыдущих главах рассматривались задачи о концентрации напряжений возле отверстий при статическом, т. е. весьма медленном нагружении. Однако на практике довольно часто приходится встречаться со случаями, когда характер внешней нагрузки таков, что в уравнениях равновесия отбрасывать инерционные члены не представляется возможным. Это обстоятельство связано с тем, что приложенные силы изменяются во времени достаточно быстро, а интервал времени наблюдения меньше интервала, по истечении которого тело приходит в состояние статического равновесия. В этих случаях будем иметь дело с распространением в теле (сплошной среде) возмущений — волн, движущихся с определенными скоростями.

Ниже будут рассмотрены некоторые наиболее характерные задачи, связанные с изучением упругих\* волновых движений в областях, ослабленных отверстиями.

## § 1. Постановка задач

В случае плоской задачи теории упругости удобно ввести две функции  $\varphi(x, y)$  и  $\vec{\psi} = \vec{k}\psi(x, y)$ , где  $\vec{k}$  — орт нормали к плоскости  $xOy$ , связанный с вектором смещений  $\vec{u}$  соотношением

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi + \text{rot } \vec{\psi}. \quad (\text{XI.1})$$

Тогда из известных уравнений Ляме\*\* получим, что функции  $\varphi(x, y, t)$  и  $\psi(x, y, t)$  должны удовлетворять двум волновым уравнениям:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \psi - \frac{1}{c_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (\text{XI.2})$$

где  $\nabla^2$  — оператор Лапласа.

\* Подробнее о нелинейных, упруго-вязких и пластических волнах см. в обзорах Н. Kolsky [1]; Х. А. Рахматулина и Г. С. Шапиро [1, 2]; В. Олышак, З. Мруз и П. Пежина [1] и монографии Х. А. Рахматулина и Ю. М. Демьянова [1].

\*\* В которых опущены массовые силы. Движение, происходящее от массовых сил, см. А. Ляв [1], стр. 317—319.

Уравнения (XI.2) описывают два типа упругих волн, имеющих место в безграничной однородной среде. Функция  $\varphi(x, y, t)$  соответствует безвихревой волне ( $\vec{u}_1 = \text{grad } \varphi$ ), т. е. такой, для которой

$$\text{rot } \vec{u}_1 = 0,$$

а объемное расширение

$$\Delta = \text{div } \vec{u}_1 = \nabla^2 \varphi.$$

Функция  $\psi(x, y, t)$  соответствует эквиволуминальной волне ( $\vec{u}_2 = \text{rot } \vec{k}\psi$ ). Для этого типа волн

$$\text{div } \vec{u}_2 = 0, \quad \vec{\Omega} = \text{rot } \vec{u}_2 = -\vec{k}\nabla^2 \psi.$$

Здесь  $\vec{\Omega}$  — вектор мгновенного вращения\*.

В уравнениях (XI.2)  $c_1$  — скорость безвихревой волны, а  $c_2$  — эквиволуминальной.

В случае плоской деформации

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{g}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{g}}, \quad (\text{XI.3})$$

а в случае (обобщенного) плоского напряженного состояния

$$c_1 = \sqrt{\frac{\lambda' + 2\mu}{g}} = \sqrt{\frac{E}{(1-\nu^2)g}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{g}} = \sqrt{\frac{G}{g}}, \quad \lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}. \quad (\text{XI.4})$$

Здесь  $\lambda, \mu$  — постоянные Ляме;  $g$  — плотность среды.

Если внешняя нагрузка изменяется во времени гармонически, т. е. функции, описывающие волновое поле, имеют вид

$$\varphi = \varphi(M) e^{-i\omega t}, \quad \psi = \psi(M) e^{-i\omega t},$$

где  $\omega$  — круговая частота, то для  $\varphi(M), \psi(M)$ , зависящих от пространственных координат точки  $M$ , получим из (XI.2) уравнения Гельмгольца

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi + \frac{\omega^2}{c_1^2} \varphi &= 0, \\ \nabla^2 \psi + \frac{\omega^2}{c_2^2} \psi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{XI.5})$$

Если решения уравнений (XI.5) помножить на  $e^{-i\omega t}$  и в последних выделить вещественную часть, получим решение уравнений (XI.2) для случая установившихся волновых движений.

\* Часто употребляются также термины «продольная волна» и «поперечная волна» потому, что в первом случае частицы сплошной среды совершают движение в направлении распространения упругой волны, а во втором — в перпендикулярном к ней направлении. Ниже будут употребляться термины «волна сжатия или растяжения» и «волна сдвига».



В случае неустановившегося процесса область, занятая распространяющимся возмущением, ограничена замкнутой цилиндрической поверхностью (кривой) в плоскости  $xOy$ , которая движется в направлении своей нормали со скоростью  $c_1$  или  $c_2$ . При движении на ней должны выполняться некоторые условия кинематического и динамического характера\*. Из условий неразрывности следует, что вектор смещений на этой поверхности должен быть равен нулю.

Если упругая волна одного типа встречается со свободной границей, возникают отраженные волны обоих типов\*\*.

Если граница является линией (поверхностью) раздела двух сред с различными упругими свойствами, во второй среде появляются упругие волны также обоих типов.

Для расходящихся волн, отраженных и преломленных, должны выполняться некоторые условия, исключающие возможность появления волн, приходящих из бесконечности. Для неустановившихся движений это условие затухания возмущений на бесконечности. Для установившихся же они состоят в следующем.

Представим вектор смещений  $\vec{u}$  в виде суммы его потенциальной  $\vec{u}_R$  и соленоидальной  $\vec{u}_S$  частей:

$$\vec{u} = \text{Re} [(\vec{u}_R + \vec{u}_S) e^{-i\omega t}].$$

Тогда как компонент векторов  $\vec{u}_R$ ,  $\vec{u}_S$  при  $r \rightarrow \infty$ , где  $r$  — радиус-вектор, проведенный из начала координат, должны выполняться следующие условия\*\*\*:

$$\begin{aligned} u_R &= O\left(\frac{1}{Vr}\right), & \frac{\partial u_R}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_1} u_R &= O\left(\frac{1}{Vr}\right), \\ u_S &= O\left(\frac{1}{Vr}\right), & \frac{\partial u_S}{\partial r} - i \frac{\omega}{c_2} u_S &= O\left(\frac{1}{Vr}\right), \end{aligned} \quad (\text{XI.6})$$

которые ниже будем называть «условиями излучения». Здесь  $O\left(\frac{1}{Vr}\right)$  — функция, имеющая при  $r \rightarrow +\infty$  оценку  $\left|O\left(\frac{1}{Vr}\right)\right| \leq M \frac{1}{Vr}$ ,  $M = \text{const}$ , а  $O\left(\frac{1}{Vr}\right)$  — функция, для которой отношение  $O\left(\frac{1}{Vr}\right) : \frac{1}{Vr}$  стремится к нулю равномерно относительно направления радиуса-вектора  $\vec{r}$ .

Распространение волн в срединной плоскости тонких пластин удовлетворительно описывается уравнениями обобщенного плоского напряженного состояния в случае длин волн, больших по сравнению с толщиной пластин. В терминах частоты это означает, что теория обоб-

\* См. А. Ляв [1], стр. 308—310.

\*\* См. Н. Kolsky [2].

\*\*\* См. В. Д. Купрадзе [2].

щенного плоского напряженного состояния дает хорошие результаты для частот, которые на много ниже, чем частота основного тона колебаний по толщине. Частоты первых видов колебаний по толщине определяются формулами

$$\omega = \frac{\pi}{2h} \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{g}}, \quad \omega = \frac{\pi}{h} \sqrt{\frac{\mu}{g}},$$

где  $h$  — толщина пластинки;  $g$  — плотность материала пластинки.

## § 2. Круговое отверстие. Осесимметричные задачи

Если к контуру кругового отверстия радиуса  $a$ , находящегося в бесконечной упругой плоскости, приложено изменяющееся во времени равномерное давление или сдвиг, то в этой плоскости возникнет цилиндрическая упругая волна соответственно сжатия или сдвига. В данном случае удобно решать задачу в перемещениях, так как вследствие осевой симметрии один из компонентов вектора смещений будет равен нулю.

Остановимся на случае динамического давления.

В полярных координатах  $r, \theta$ , центр которых совпадает с центром отверстия, получим уравнение для радиального смещения  $u$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{c_1^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (\text{XI.7})$$

В случае установившихся колебаний общее решение уравнения (XI.7) имеет вид

$$u(r, t) = \left[ AH_1^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_1} r\right) + BH_1^{(2)}\left(\frac{\omega}{c_1} r\right) \right] e^{-i\omega t},$$

где  $H_1^{(1)}, H_1^{(2)}$  — функции Ханкеля I и II рода;  $A, B$  — неопределенные постоянные.

Из условий излучения (XI.6) следует, что  $B = 0$ . Удовлетворяя граничному условию

$$\sigma_r|_{r=a} = -\sigma_0 e^{-i\omega t}, \quad (\text{XI.8})$$

получаем

$$u(r, t) = \text{Re} \left\{ -\sigma_0 \frac{H_1^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_1} r\right) e^{-i\omega t}}{\frac{\nu-1}{a} H_1^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_1} a\right) + \frac{\omega}{c_1} H_0^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_1} a\right)} \right\}. \quad (\text{XI.9})$$

Для упругой волны иной конфигурации можно воспользоваться суперпозицией решений (XI.9), взяв искомое решение в виде ряда или интеграла Фурье. Эффективным оказывается также преобразование

Лапласа \*. Если уравнение (XI.7) помножить на  $e^{-pt}$  ( $\text{Re} p > 0$ ) и результат проинтегрировать по времени от нуля до бесконечности, получим в области изображений по Лапласу при нулевых начальных условиях следующее уравнение \*\*:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU}{dr} - \left( \frac{p}{c_1^2} + \frac{1}{r^2} \right) U = 0. \quad (\text{XI.10})$$

Здесь  $U(r, p)$  есть изображение  $u(r, t)$ , имеющее вид

$$U(r, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(r, t) dt \rightarrow u(r, t). \quad (\text{XI.11})$$

Если материал пластинки цилиндрически анизотропен, так что ось анизотропии проходит через центр отверстия, распространение цилиндрической волны сжатия в пространстве изображений описывается уравнением \*\*\*

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dU}{dr} - \left( \frac{k}{r^2} U + \frac{p^2}{c_1^2} \right) U = 0, \quad (\text{XI.12})$$

где

$$c_1^2 = \frac{E_1}{(1 - \nu_r \nu_\theta) g}, \quad k = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\nu_r}{\nu_\theta}.$$

Если к тому же материал непрерывно неоднороден, так что модули Юнга есть степенные функции радиальной координаты  $r$ , т. е.

$$E_r = E_1 r^m, \quad E_\theta = E_2 r^m, \quad \nu_r \nu_\theta = \text{const}, \quad (\text{XI.13})$$

то для изображения смещения  $U$  имеем следующее уравнение\*\*\*\*:

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{m+1}{r} \cdot \frac{dU}{dr} + \frac{m\nu_\theta - k}{r^2} U = \frac{g(1 - \nu_r \nu_\theta)}{E_1} r^{-m} p^2 U. \quad (\text{XI.14})$$

Уравнения (XI.10), (XI.12) и (XI.14) сводятся к уравнению Бесселя. Остановимся на уравнении (XI.14), частным случаем которого являются уравнения (XI.10) и (XI.12). Вводя безразмерные величины

$$\bar{r} = \frac{r}{a}, \quad \bar{t} = \frac{c_0 t}{a}, \quad \bar{c}_0^2 = \frac{E_1 a^m}{(1 - \nu_r \nu_\theta) g}, \quad \bar{u} = \frac{E_1 a^{m-1}}{(1 - \nu_r \nu_\theta) \sigma_0} u,$$

$$\bar{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad \bar{\sigma}_\theta = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_0},$$

\* См. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат [1].

\*\* См. А. Кромм [1, 2]; I. Miklowitz [1].

\*\*\* См. G. Eason [1].

\*\*\*\* См. В. Д. Кубенко [1, 2].

запишем в пространстве изображений общее решение уравнения (XI.14):

$$\bar{U}(\bar{r}, p) = \bar{r}^{-\frac{m}{2}} \left[ A(p) K_n \left( \frac{p}{1-\frac{m}{2}} \bar{r}^{1-\frac{m}{2}} \right) + B(p) I_n \left( \frac{p}{1-\frac{m}{2}} \bar{r}^{1-\frac{m}{2}} \right) \right], \quad (\text{XI.15})$$

$$n = \frac{1}{2-m} \sqrt{m^2 + 4(k - mv_0)}.$$

В решении (XI.15)  $K_n$  — функция Макдональда;  $I_n$  — модифицированная функция Бесселя\*.

При  $m = 2$  решение уравнения (XI.14) имеет вид

$$\bar{U}(\bar{r}, p) = A_1(p) \bar{r}^{d_1} + B_1(p) \bar{r}^{d_2}, \quad (\text{XI.16})$$

$$d_{1,2} = -1 \mp \sqrt{p^2 + k + 1 - 2v_0}.$$

Граничные условия состоят в задании  $\bar{\sigma}_r$  на контуре отверстия и в условии затухания возмущений на бесконечности, т. е.

$$\bar{\sigma}_r = \begin{cases} -H(\bar{t}), & \bar{r} = 1; \\ 0, & \bar{r} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (\text{XI.17})$$

Здесь  $H(t)$  — функция Хевисайда

$$H(\bar{t}) = \begin{cases} 0, & \bar{t} < 0; \\ 1, & \bar{t} \geq 0. \end{cases}$$

В пространстве изображений условия (XI.17) будут иметь вид

$$\int_0^\infty e^{-pt} \bar{\sigma}_r(\bar{r}, \bar{t}) d\bar{t} = \begin{cases} -\frac{1}{p}, & \bar{r} = 1; \\ 0, & \bar{r} \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (\text{XI.18})$$

В случае  $m < 2$  решение уравнения (XI.14) при условиях (XI.18) имеет вид\*\*

$$\bar{U}(\bar{r}, p) = \bar{r}^{\alpha-1} \frac{\frac{1}{p^2} K_n \left( \frac{p}{\alpha} \bar{r}^\alpha \right)}{\frac{1-\alpha+n\alpha-v_0}{p} K_n \left( \frac{p}{\alpha} \right) + K_{n-1} \left( \frac{p}{\alpha} \right)}, \quad (\text{XI.19})$$

где

$$\alpha = 1 - \frac{m}{2}.$$

Переход в пространство оригиналов можно осуществить различными способами\*\*\*. Например, используя представление функции  $K_n$  через

\* См. М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат [1].

\*\* Из второго условия (XI.18) следует, что  $B=0$ .

\*\*\* См. Н. Л. Selberg [1]; I. Miklowitz [1].

интеграл Лапласа и теорему о свертывании оригиналов, получаем\*, что смещение, скорость и напряжения удовлетворяют интегральному уравнению Вольтерра I рода:

$$\int_0^{\bar{t}} s(\bar{r}, \tau) K(\bar{t} - \tau) d\tau = R_s(\bar{r}, \bar{t}). \quad (\text{XI.20})$$

Здесь под  $s(\bar{r}, \tau)$  подразумеваются функции  $\bar{u}, \dot{\bar{u}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}$ ,  $\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta$ . Ядро  $K$  для всех уравнений (XI.20) будет одним и тем же:

$$K(x) = \frac{1 - \alpha + \alpha n - \nu_0}{2n} [(ax + 1 + \sqrt{(ax + 1)^2 - 1})^n - (ax + 1 - \sqrt{(ax + 1)^2 - 1})^n] + \frac{(ax + 1 + \sqrt{(ax + 1)^2 - 1})^{n-1} + (ax + 1 - \sqrt{(ax + 1)^2 - 1})^{n-1}}{2\sqrt{(ax + 1)^2 - 1}}.$$

Правая часть (XI.20) имеет вид

$$\begin{aligned} R_{\bar{u}} &= z(\bar{z}, \bar{t}) \bar{r}^{\alpha-1}, \\ R_{\bar{\sigma}_r} &= (\alpha + \nu_0 - 1) z(\bar{r}, \bar{t}) \bar{r}^{-\alpha} + z'(\bar{r}, \bar{t}) \bar{r}^{1-\alpha}, \\ R_{\bar{\sigma}_\theta} &= (\alpha \nu_0 + k - \nu_0) z(\bar{r}, \bar{t}) \bar{r}^{-\alpha} + \nu_0 z'(\bar{r}, \bar{t}) \bar{r}^{1-\alpha}, \\ R_{\dot{\bar{u}}} &= \dot{z}(\bar{r}, \bar{t}) \bar{r}^{\alpha-1}, \end{aligned} \quad (\text{XI.21})$$

где

$$z(\bar{r}, \bar{t}) = H\left(\bar{t} - \frac{\bar{r}^\alpha - 1}{\alpha}\right) \frac{\bar{r}^\alpha}{2\alpha n (n^2 - 1)} \left\{ \left( \frac{\alpha \bar{t} + 1}{\bar{r}^\alpha} + \sqrt{\frac{(\alpha \bar{t} + 1)^2}{\bar{r}^{2\alpha}} - 1} \right)^{n-1} \times \right.$$

$$\left. \left[ \left( \frac{\alpha \bar{t} + 1}{\bar{r}^\alpha} + \sqrt{\frac{(\alpha \bar{t} + 1)^2}{\bar{r}^{2\alpha}} - 1} \right) - 2n \right] - \right.$$

$$\left. - \left( \frac{\alpha \bar{t} + 1}{\bar{r}^\alpha} - \sqrt{\frac{(\alpha \bar{t} + 1)^2}{\bar{r}^{2\alpha}} - 1} \right)^{n-1} \left[ (n-1) \frac{\alpha \bar{t} + 1}{\bar{r}^\alpha} \times \right. \right. \quad (\text{XI.22})$$

$$\left. \times \left( \frac{\alpha \bar{t} + 1}{\bar{r}^\alpha} + \sqrt{\frac{(\alpha \bar{t} + 1)^2}{\bar{r}^{2\alpha}} - 1} \right) - 2n \right] \}; \quad z' = \frac{\partial z}{\partial \bar{r}}; \quad \text{3д1}$$

при  $n = 1$

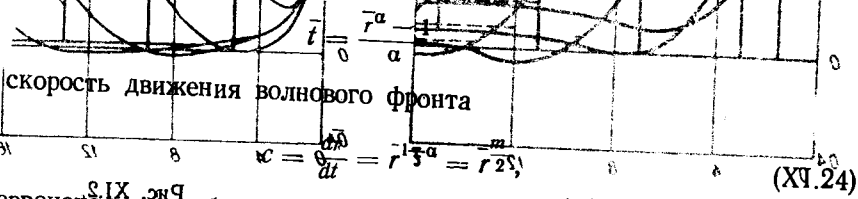
$$z(\bar{r}, \bar{t}) = H\left(\bar{t} - \frac{\bar{r}^\alpha - 1}{\alpha}\right) \left[ \frac{\alpha \bar{t} + 1}{\bar{r}^\alpha} \sqrt{\frac{(\alpha \bar{t} + 1)^2}{\bar{r}^{2\alpha}} - 1} - \frac{\alpha \bar{t} + 1}{\bar{r}^\alpha} \ln \frac{\alpha \bar{t} + 1 + \sqrt{(\alpha \bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^{2\alpha}}}{\alpha \bar{t} + 1 - \sqrt{(\alpha \bar{t} + 1)^2 - \bar{r}^{2\alpha}}} \right]. \quad (\text{XI.23})$$

\* См. А. Котт [1]; В. Д. Кубенко [1].

В интервале времени

$$0 < t < \frac{r^a - 1}{a}$$

правые части (XI.20) на основании (XI.22), (XI.23) равны нулю.  
На фронте волны имеем



Отсюда скорость движения волнового фронта

$$c = \frac{dr}{dt} = r^{-1/a} = \frac{1}{r^{1/a}}$$

(XI.24)

или в первоначальных обозначениях:

Рис. XI.1

$$c = \sqrt{\frac{E_1 r^m}{(1 - \nu_r \nu_\theta) g}}$$

Подставляя в интегральные уравнения (XI.20)  $t = \frac{r^a - 1}{a} + \epsilon$  и устремляя  $\epsilon$  к нулю, получаем следующие соотношения на волновой поверхности:

$$\sigma_r = -\nu_\theta \frac{m-1}{4} \frac{1}{u} = r^{-\frac{m-1}{2}}, \quad \sigma_\theta = -\nu_r \frac{m-1}{4} \frac{1}{u} = r^{-\frac{m-1}{2}} \quad (XI.25)$$

Из (XI.25) следует, что скачок напряжений на фронте волны зависит от показателя неоднородности  $m$  и не зависит от анизотропии материала.

Уравнения (XI.20) можно решать численно путем сведения к системе алгебраических уравнений. На рис. XI.1—XI.3 показаны вычисленные таким путем в работе А. Кротт [1] напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в зависимости от времени и радиальной координаты для однородной изотропной среды, т. е. при  $m=0$ . При этих подсчетах было принято  $\nu_r = \nu_\theta = 0,25$ .

Если порядок цилиндрических функций, которые входят в (XI.15), равен целому числу  $n$  половиной, существует возможность перехода в пространство оригиналов при помощи контурного интегрирования и теоремы о вычетах\*. В результате выражения для смещения и напряжений можно получить в замкнутом виде. На рис. XI.4—XI.6 показаны некоторые из полученных таким образом результатов.

При  $m=2$  имеем решение (XI.16). Удовлетворяя граничным условиям (XI.18), получаем

$$U(r, R) = \frac{e^{-\ln r \sqrt{\rho^2 + h^2}}}{r \rho (b + \sqrt{\rho^2 + h^2})^2} \quad (XI.26)$$

где

$$h^2 = \frac{2\nu_\theta}{\kappa + 1}$$

\* Подробнее см. G. Eason [1]; В. Д. Кудбенко [1].

Рис. XI.2

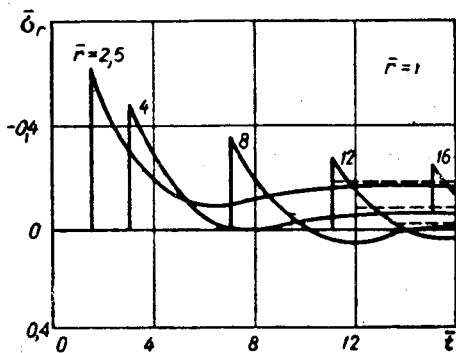


Рис. XI.1.

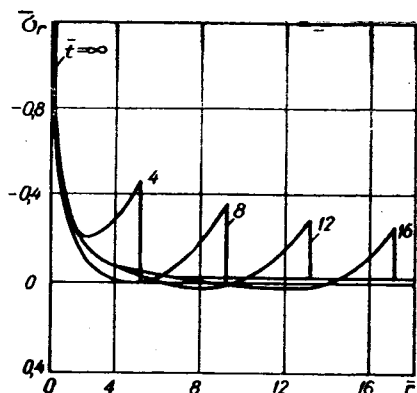


Рис. XI.2.

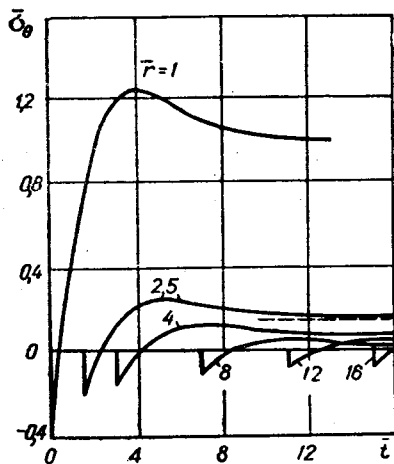


Рис. XI.3.

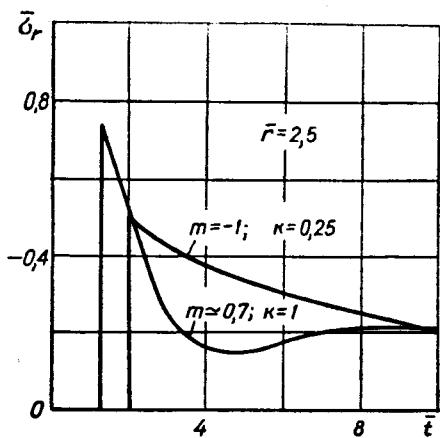


Рис. XI.4.

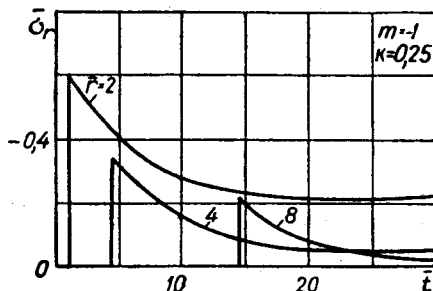


Рис. XI.5.

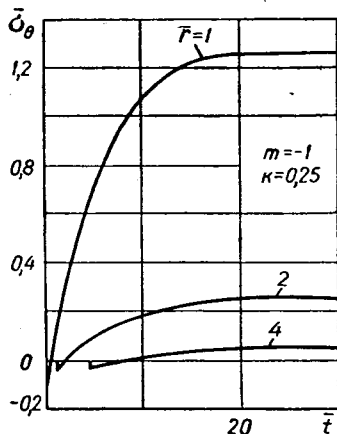


Рис. XI.6.

Переходя к оригиналу, получим\*

$$\bar{u}(\bar{r}, \bar{t}) = H(\bar{t} - \ln \bar{r}) \frac{1}{\bar{r}} \left[ \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \bar{r}^{-b} e^{-b\bar{t}} - \bar{r}^{-b} \int_{\ln \bar{r}}^{\bar{t}} d\tau \int_0^{\bar{t}} e^{-\frac{b}{h} \sqrt{h^2 \tau^2 - \ln^2 r}} J_1(z) dz \right];$$

$$\bar{\sigma}_r(\bar{r}, \bar{t}) = H(\bar{t} - \ln \bar{r}) \left[ -1 + h \ln \bar{r} \int_{\ln \bar{r}}^{\bar{t}} \frac{J_1(h \sqrt{\tau^2 - \ln^2 r})}{\sqrt{\tau^2 - \ln^2 r}} d\tau \right];$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\theta(\bar{r}, \bar{t}) = H(\bar{t} - \ln \bar{r}) & \left[ \frac{b-1+k}{b} + \frac{(b-1)^2 - k}{b} \bar{r}^{-b} e^{b\bar{t}} + \right. \\ & + (b^2 - 2b - k + 1) \bar{r}^{-b} \int_{\ln \bar{r}}^{\bar{t}} d\tau \int_0^{\bar{t}} e^{-\frac{b}{h} \sqrt{h^2 \tau^2 - \ln^2 r}} J_1(z) dz - \\ & \left. - h(b-1) \ln \bar{r} \int_{\ln \bar{r}}^{\bar{t}} \frac{J_1(h \sqrt{\tau^2 - \ln^2 r})}{\sqrt{\tau^2 - \ln^2 r}} d\tau \right]. \end{aligned} \quad (\text{XI.27})$$

Фронт волны распространяется со скоростью  $c = \bar{r}$ , причем на фронте

$$\bar{u} = 0, \quad \dot{\bar{u}} = \bar{r}^{-1}, \quad \bar{\sigma}_r = -1, \quad \bar{\sigma}_\theta = -v_\theta. \quad (\text{XI.28})$$

Итак, скачок напряжений на фронте волны при ее распространении остается постоянным. На рис. XI.7 показано изменение  $\bar{\sigma}_r$  со временем. При вычислениях принято  $v_\theta = 1/4$ ,  $v_r = 1/14$ .

Наконец, в случае  $m > 2$  волна достигает бесконечно удаленной точки за некоторый конечный интервал времени

$$\bar{t}_\infty = -\frac{1}{1 - \frac{m}{2}}.$$

В работе В. Д. Кубенко [2] показано, что это обстоятельство требует принятия вместо условия затухания возмущений\*\* иное условие, а именно допустить отсутствие смещения на бесконечности, так как в соответствии с (XI.13) при  $r \rightarrow \infty$  материал (в бесконечно удаленных точках) становится жестким. Тогда полученное при этих новых условиях решение будет со временем сходиться к статическому\*\*\*.

В случае, когда плотность среды также изменяется по степенному закону в зависимости от  $r$ , решение задачи принципиально не отличается от рассмотренного.

\* См. В. Д. Кубенко [2].

\*\* Второе условие в (XI.18).

\*\*\* См. С. Г. Лехницкий [1].



Если зависимость граничного условия от времени определяется не функцией Хевисайда, а некоторой функцией  $P(t)$ , то для определения решения в этом случае можно воспользоваться формулой Дюамеля. Если через  $f_H(r, t)$  обозначить решение, обусловленное функцией Хевисайда, то для функции  $P(t)$  будем иметь

$$f(\bar{r}, \bar{t}) = P(0) f_H(\bar{r}, \bar{t}) + \int_0^{\bar{t}} \frac{dP(\tau)}{d\tau} f_H(\bar{t} - \tau, \bar{r}) d\tau. \quad (XI.29)$$

Аналогично изложенному выше решаются задачи и в случае, когда на контуре кругового отверстия действует внезапно приложенное равномерное сдвигающее усилие или точкам контура сообщается радиальная

или окружная скорость. В работе E. A. Steenberg, I. C. Chakraborty [1] рассмотрена задача о распространении цилиндрической волны сдвига в упругой среде, модуль сдвига которой есть степенная функция радиальной координаты.

### § 3. Круговое отверстие.

#### Падающая плоская гармоническая волна

Важное значение в приложениях имеет задача, являющаяся динамическим аналогом задачи концентрации напряжений возле отверстия при двухосном основном напряженном состоянии. Последнее в динамическом случае реализуется при помощи плоской упругой волны\*\*, падающей на отверстие, расположенное в начале координат. Падающая волна порождает отраженные волны, и суммарное волновое поле определяет напряженное состояние в упругой плоскости.

В работах Y. H. Rao [1], Y. H. Rao, C. C. Mow [1], C. C. Mow, E. J. Meitzner [1] рассмотрены динамические задачи о концентрации напряжений около кругового свободного отверстия или впадины жесткого включения (рис. XI.8) в тонкой бесконечной пластинке, в которой движется плоская волна сжатия или сдвига (установившиеся колебания). Предлагается обобщенное плоское напряженное состояние, т. е. рассматривается случай тонкой пластинки.

На контуре отверстия возникают отраженные волны как сжатия, так и сдвига. Их потенциалы  $\phi$  и  $\psi$  удовлетворяют уравнениям Гельм-

\* См. A. Kromm [2]; I. N. Godier, W. E. Johsman [1].

\*\* См. Ф. М. Морс, Г. Фешбах [1].

гольца (XI.5), общее решение которых в полярных координатах  $(r, \theta)$  можно представить в виде

$$\Phi^*(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) H_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_1} r\right), \quad (XI.30)$$

$$\Psi^*(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta) H_m^{(1)}\left(\frac{\omega}{c_2} r\right).$$

Здесь  $A_m, B_m, C_m, D_m$  — неопределенные (постоянные) коэффициенты;  $\alpha = \frac{\omega}{c_1}$ ,  $\beta = \frac{\omega}{c_2}$  — волновые числа;  $H_m^{(1)} = J_m + iN_m$  — функция Ханкеля I рода  $m$ -го порядка;  $\omega$  — круговая частота. В формулах (XI.30) функция Ханкеля II рода отброшена как не удовлетворяющая условиям излучения (XI.6). Звездочка у функций  $\Phi$  и  $\Psi$  в (XI.30) указывает, что это потенциалы отраженных волн.

**Падающая волна сжатия. Свободное отверстие.** Плоская гармоническая волна сжатия, движущаяся в направлении возрастающих значений  $x$ , задается следующими потенциалами:

$$\begin{aligned} \Phi^I &= \Phi_0 e^{i(\alpha x - \omega t)}, \\ \Psi^I &= 0. \end{aligned} \quad (XI.31)$$

Индекс I у функций  $\Phi$  и  $\Psi$  (XI.31) указывает, что эти функции характеризуют основное напряженное состояние

$$\begin{aligned} \sigma_x^I &= -\beta^2 \mu \Phi_0 e^{i(\alpha x - \omega t)}, \\ \sigma_y^I &= -\left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2\right) \mu \alpha^2 \Phi_0 e^{i(\alpha x - \omega t)}, \\ \tau_{xy}^I &= 0. \end{aligned} \quad (XI.32)$$

Плоская волна в полярных координатах представляется\* в виде

$$e^{i(\alpha x - \omega t)} = \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m J_m(\alpha r) \cos m\theta e^{-i\omega t}, \quad (XI.33)$$

где  $J_m$  — функция Бесселя;

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 2, & m \geq 1. \end{cases}$$

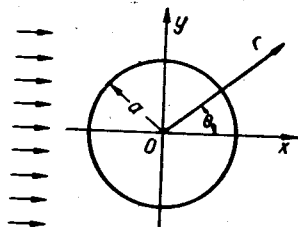


Рис. XI.8.

\* См. Ф. М. Морс, Г. Фешбах [1].

В случае свободного кругового отверстия радиуса  $a$  граничные условия на контуре отверстия

$$(\sigma_r^I + \sigma_r^*)_{r=a} = 0, \quad (XI.34)$$

$$(\tau_{r\theta}^I + \tau_{r\theta}^*)_{r=a} = 0.$$

Из (XI.30), (XI.32) — (XI.34) получим системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $A_m, B_m, C_m, D_m$ .

В результате выражения для напряжений и смещений получаются в виде рядов Фурье—Бесселя. Например, напряжение  $\sigma_\theta$  на контуре отверстия

$$\sigma_\theta|_{r=a} = -2 \left( \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 1 \right) \mu \alpha^2 \Phi_0 \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m S_m \cos m\theta e^{-i\omega t},$$

$$S_m = i \frac{2}{\pi} [\alpha a H_{m-1}(\alpha a) - H_m(\alpha a)] q_m(\beta a)^{-1}, \quad (XI.35)$$

$$q_m(\beta a)^{-1} = \frac{(m^2 - 1) \beta a H_{m-1}(\beta a) - \left( m^3 - m + \frac{\beta^2 \alpha^2}{2} \right) H_m(\beta a)}{\left( m^3 - m + \frac{\beta^2 \alpha^2}{2} \right) \beta a H_{m-1}(\beta a) - \left( m^2 + m - \frac{\beta^2 \alpha^2}{4} \right) \beta^2 \alpha^2 H_m(\beta a)}.$$

Если в формулах (XI.35) устремить  $\alpha$  к нулю и воспользоваться асимптотикой функций Ханкеля для малых значений аргумента, то в пределе получим известное статическое решение соответствующей задачи.

Для всех волн, кроме «очень длинных» и «очень коротких» (с ростом частоты сходимость рядов ухудшается), напряжения определяются суммированием рядов (XI.35). В результате получаем для  $\sigma_\theta$  на контуре отверстия выражение

$$\sigma_\theta|_{r=a} = \operatorname{Re} \{ (R + iI) e^{-i\omega t} \} = \sqrt{R^2 + I^2} \operatorname{Re} e^{-i(\omega t - \delta)},$$

$$\delta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{I}{R}. \quad (XI.36)$$

За полный период колебания ( $0, T = 2\pi/\omega$ ) вещественная часть  $R$  представляет напряжение в момент  $t=0$ ; в этот момент напряжения в падающей волне достигают максимума при  $\theta = \pi/2$ . Мнимая часть  $I$  дает напряжение в момент  $t=T/4$ ; в падающей волне в этот момент при  $\theta = \pi/2$  напряжения равны нулю. Абсолютная величина  $\sqrt{R^2 + I^2}$  дает максимальное значение напряжения  $\sigma_\theta$ .

Из (XI.32) следует, что максимальные напряжения в падающей волне

$$\sigma_x^I = \sigma^I = -\frac{\beta^2}{\alpha^2} P; \quad \sigma_y^I = -\left( \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2 \right) P; \quad P = \mu \alpha^2 \Phi_0.$$

Отношение  $\left( \frac{\sigma_\theta}{\sigma^I} \right)_{r=a} = \bar{\sigma}_\theta$  можно рассматривать как динамический коэффициент концентрации напряжений.

На рис. (XI.9) представлена зависимость от частоты ( $\alpha = \omega/c_1$ ) коэффициента концентрации на контуре кругового отверстия при  $\theta = \pi/2$  для падающей волны сжатия при различных значениях коэффициента Пуассона.

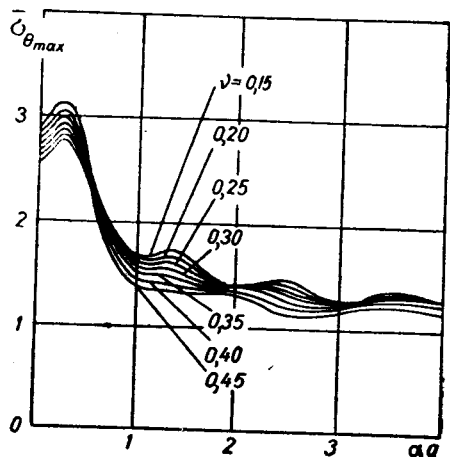


Рис. XI.9.

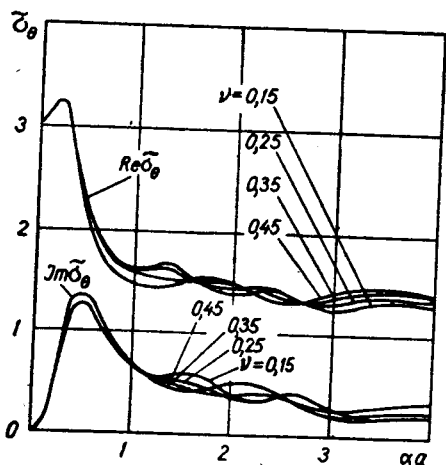


Рис. XI.10.

Если на поле напряжений (XI.32) наложить дополнительное поле, так что суммарная волна вызовет основное напряженное состояние вида

$$\begin{aligned} \sigma_x^I &= -P \left[ \frac{\beta^2}{\alpha^2} e^{i\alpha x} - \left( 1 - 2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \left( \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2 \right) e^{i\alpha y} \right] e^{-i\omega t}, \\ \sigma_y^I &= -P \left[ \left( \frac{\beta^2}{\alpha^2} - 2 \right) e^{i\alpha x} - \left( 1 - \frac{2\alpha^2}{\beta^2} \right) \frac{\beta^2}{\alpha^2} e^{i\alpha y} \right] e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (XI.37)$$

то из (XI.37) при  $\alpha \rightarrow 0$  будем иметь одноосное напряженное состояние

$$\sigma_{x\text{ст}}^I = -4 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) P, \quad \sigma_{y\text{ст}}^I = 0.$$

Зависимость коэффициента концентрации от частоты в этом случае представлена на рис. XI.10.

Распределение  $\sigma_\theta$  по контуру свободного кругового отверстия для различных значений  $\alpha a$  при основном напряженном состоянии (XI.32) показано на рис. XI.11 ( $\nu = 0,35$ ).

Приведенные графики показывают, что напряженное состояние существенно зависит от соотношения между длиной волны и размером отверстия и от значения коэффициента Пуассона. В некотором диапазоне волновых чисел коэффициент концентрации выше, чем в статическом случае примерно на 10%.

**Падающая волна сжатия. Жесткое включение.** В работе У. Н. Рао, С. С. Мов [1] рассматривается динамическая картина распределения

напряжений в пластине с жестким впаянным круговым ядром при действии плоской гармонической волны сжатия (XI.31).

Как известно, в статических задачах граничные условия состоят в том, что по границе спая пластины и жесткого включения смещения равны нулю. В динамике это условие справедливо только тогда, когда включение фиксировано в пространстве соответствующими внешними

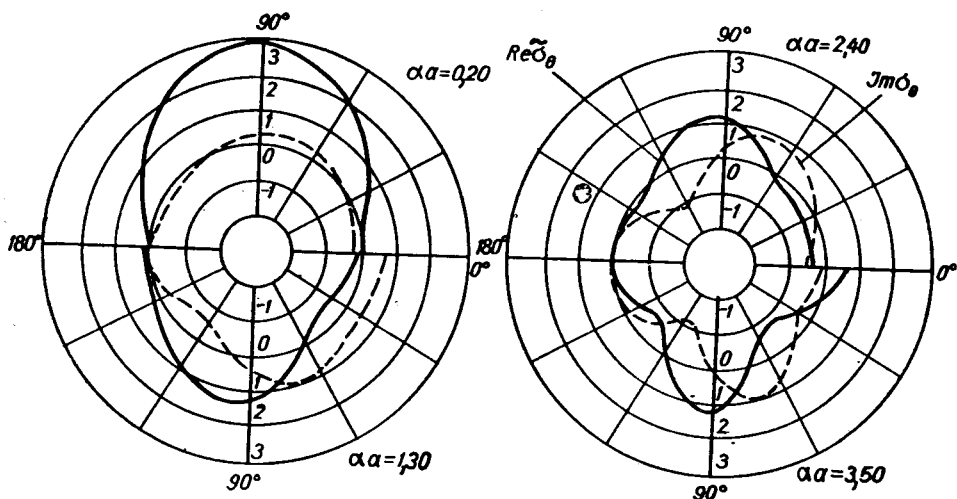


Рис. XI.11.

усилиями или обладает бесконечно большой плотностью. Если же эти два фактора отсутствуют, включение, находясь под действием падающей волны, будет перемещаться в пространстве — осциллировать как жесткое целое. В этом случае кинематические условия на границе состоят в том \*, что смещения, обусловленные падающей и отраженной волнами, вызывали линейное перемещение и поворот включения, движущегося как жесткое целое.

**Фиксированное жесткое включение.** Для напряжений на границе  $r=a$  спая получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=a} &= \frac{2}{\pi} \mu \Phi_0 \beta^2 \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^{m-1} \frac{\beta a H'_m(\beta a)}{\Delta_m} \cos m\theta e^{-i\omega t}, \\ \tau_{r\theta}|_{r=a} &= \frac{2}{\pi} \mu \Phi_0 \beta^2 \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^{m-1} \frac{m H_m(\beta a)}{\Delta_m} \sin m\theta e^{-i\omega t}, \\ \sigma_\theta|_{r=a} &= \left(1 - 2 \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \sigma_r|_{r=a}, \end{aligned} \quad (\text{XI. 38})$$

\* См. Н. Lamb [1], К. Sezawa [1].

$$\Delta_m = \alpha \beta a^2 H'_m(\alpha a) H'_m(\beta a) - m^2 H_m(\alpha a) H_m(\beta a),$$

$$H'_m = \frac{dH_m}{dr}, \quad (\text{XI.38})$$

поскольку  $0 < \nu < \frac{1}{2}$  и  $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1-\nu}{2}$ ,  $\sigma_{\theta|r=a}$  всегда меньше  $\sigma_{r|r=a}$ .

*Нефиксированное жесткое включение.* Если  $u$  и  $v$  радиальная и тангенциальная составляющие вектора смещения, то граничные условия будут иметь вид

$$u|_{r=a} = u^I + u^* = U \cos \theta,$$

$$v|_{r=a} = v^I + v^* = -U \sin \theta, \quad (\text{XI.39})$$

где  $U$  — перемещение ядра в направлении распространения волны — определяется из уравнения движения при  $r=a$

$$\pi a^2 g_1 \ddot{U} = \int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) a d\theta, \quad (\text{XI.40})$$

где  $g_1$  — плотность материала ядра.

Поскольку искомые напряжения представлены в виде рядов по  $\sin m\theta$ ,  $\cos m\theta$ , то, подставляя их в (XI.40) и пользуясь ортогональностью тригонометрических функций, получим

$$U = \eta \frac{1}{a} [2i\Phi_0 J_1(\alpha a) + A_1 H_1(\alpha a) + B_1 H_1(\beta a)], \quad (\text{XI.41})$$

$$\eta = \frac{g}{g_1}.$$

Здесь  $g$  — плотность среды.

В результате получаем для смещений и напряжений на границе следующие выражения:

$$u|_{r=a} = \frac{4\Phi_0}{a\pi\delta_1} \eta [2H_1(\beta a) - \beta a H_0(\beta a)] \cos \theta,$$

$$v|_{r=a} = -\frac{4\Phi_0}{a\pi\delta_1} \eta [2H_1(\beta a) - \beta a H_0(\beta a)] \sin \theta,$$

$$\sigma_r|_{r=a} = \frac{2\mu\Phi_0\beta^2}{\pi} \left\{ \frac{i}{\alpha a H_1(\alpha a)} - 2[(1+\eta)H_1(\beta a) - \beta a H_0(\beta a)] \frac{1}{\delta_1} \cos \theta + 2 \sum_{m=2}^{\infty} i^{m-1} \frac{\beta a H'_m(\beta a)}{\Delta_m} \cos m\theta \right\}, \quad (\text{XI.42})$$

$$\tau_{r\theta}|_{r=a} = \frac{2\mu\Phi_0\beta^2}{\pi} \left[ 2(1-\eta)H_1(\beta a) \frac{1}{\delta_1} \sin \theta + 2 \sum_{m=2}^{\infty} i^{m-1} \frac{m H_m(\beta a)}{\Delta_m} \sin m\theta \right],$$

$$\sigma_{\theta}|_{r=a} = \left( 1 - 2 \frac{\alpha^2}{\beta^2} \right) \sigma_r|_{r=a}.$$

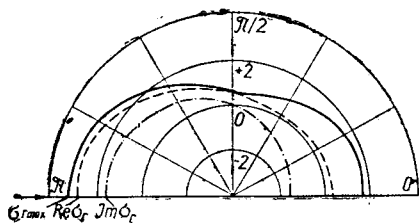


Рис. XI.12

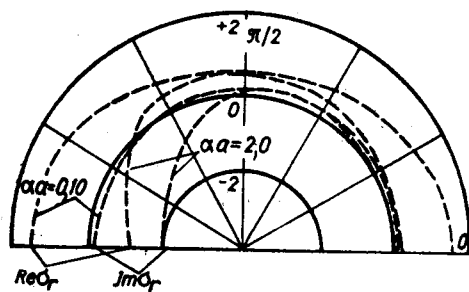


Рис. XI.13.

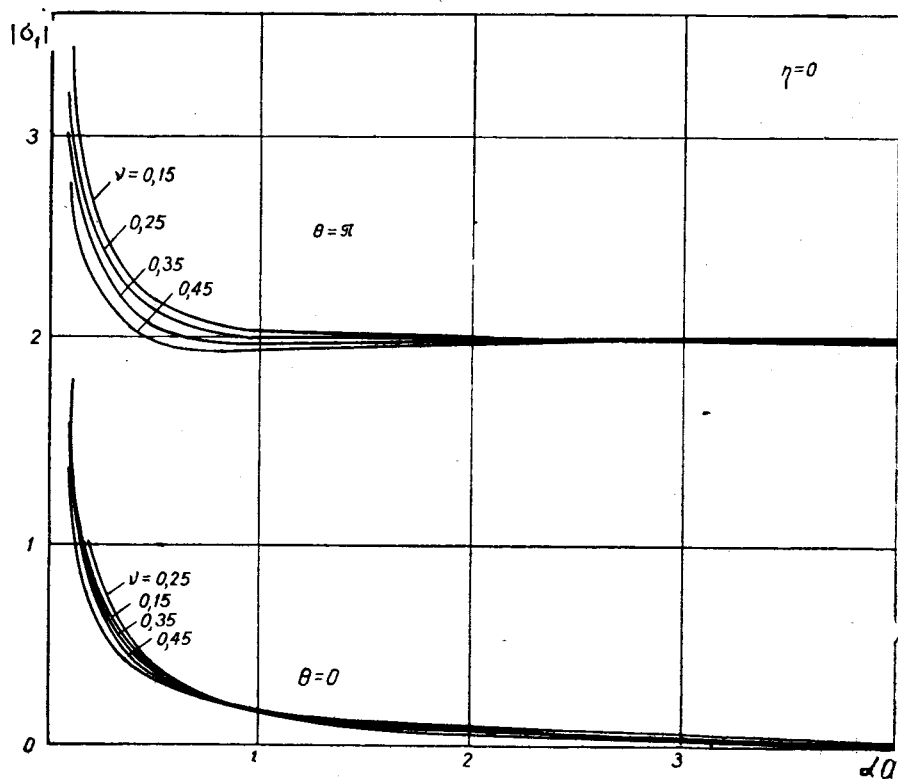


Рис. XI.14.

На рис. XI.12 показано распределение напряжения  $\sigma_r$  по границе  $r=a$  для  $\eta=0$ ,  $\nu=0,25$ ,  $\alpha a=0,10$ , найденное по формулам (XI.38), а на рис. XI.13 — найденное по формулам (XI.42) при  $\eta=0,5$ ,  $\alpha a=0,10$  и  $\alpha a=2,0$ ,  $\nu=0,25$ .

На рис. XI.14 и XI.15 показано изменение главного напряжения  $\sigma_1$ , вычисленного по формуле

$$\sigma_{1,2} = \frac{1}{2} (\sigma_r + \sigma_\theta) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + \tau_{r\theta}^2}$$

в зависимости от  $\alpha a$  в точках  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$  для случая  $\eta=0$  и  $\eta=0,5$ .

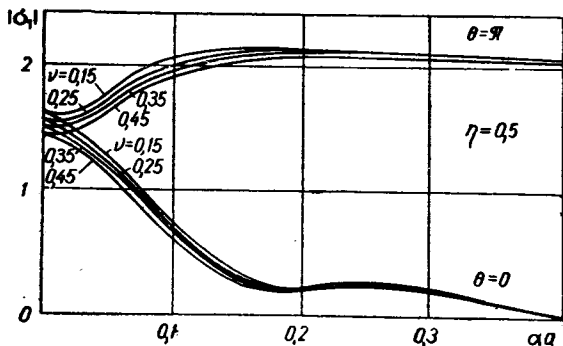


Рис. XI.15.

Из рис. XI.14 видим, что в случае включения, фиксированного в пространстве, при устремлении волнового числа к нулю в точках  $\theta=0$  и  $\theta=\pi$  напряжения  $\sigma_r$  получают бесконечно большие значения.

Если на основании (XI.38) вычислить силу, приложенную к границе  $r=a$  и направленную по оси  $Ox$ , получим

$$\begin{aligned} X &= \int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) a d\theta = \\ &= 4\mu\Phi_0\beta^2 [ \beta a H_1'(\beta a) - H_1(\beta a) ] \frac{1}{\Delta_1}. \end{aligned} \quad (XI.43)$$

При устремлении  $\alpha a$  к нулю имеет место следующая асимптотика:

$$\frac{\beta a H_1'(\beta a)}{\Delta_1} \rightarrow \frac{1}{\left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2}\right) \alpha a}, \quad \frac{H_1(\beta a)}{\Delta_1} \rightarrow -\frac{1}{\left(1 + \frac{c_1^2}{c_2^2}\right) \alpha a}.$$

Эти выражения показывают, что при малых значениях  $\alpha a$  сила, которая удерживает включение неподвижным, должна быть большой. В случае стоячих волн это явление не наблюдается, поскольку там не ставится \* вопрос о том, будет включение двигаться или нет. Стоячие волны реализуются следующим образом.

\* Вследствие симметрии относительно оси  $y$ .



Если на волновое поле (XI.31) наложить волну с той же амплитудой и частотой, но движущуюся в противоположном направлении, получим потенциалы смещений

$$\begin{aligned}\varphi^I &= 2\Phi_0 \cos \alpha x e^{-i\omega t}, \\ \psi^I &= 0.\end{aligned}\quad (\text{XI. 44})$$

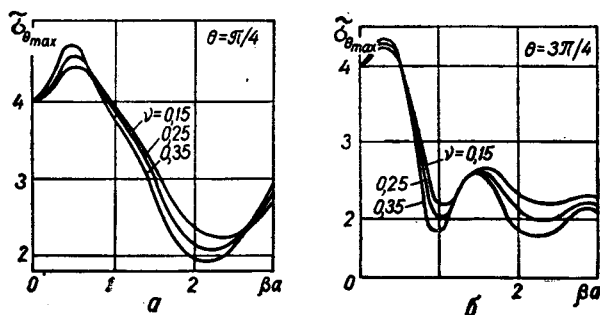


Рис. XI.16.

Это и есть стоячие волны. В данном случае в разложении плоской волны (XI.33) остаются только члены, соответствующие четному  $m$ . Напряжения и смещения определяются формулами (XI.35), (XI.38) и (XI.42), в которых члены с нечетным  $m$  опущены.

**Падающая волна сдвига. Свободное отверстие.** Плоская гармоническая волна сдвига, движущаяся в направлении оси  $x$ , задается волновыми потенциалами

$$\begin{aligned}\varphi^I &= 0, \\ \psi^I &= \Psi_0 e^{i(\beta x - \omega t)}.\end{aligned}\quad (\text{XI. 45})$$

В случае кругового отверстия определение напряженного и деформированного состояния проводится так же, как и для падающей волны сжатия. В результате для напряжения  $\sigma_{\theta}$  на контуре отверстия получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}|_{r=a} &\approx -\frac{8}{\pi} \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) \beta^2 \mu \Psi_0 \sum_{m=1}^{\infty} i^m S_m \sin m\theta e^{-i\omega t}, \\ S_m &= im \left(m^2 - 1 - \frac{1}{2} \beta^2 a^2\right) H_m(\alpha a) \Delta_m^{-1}, \\ \Delta_m &= \beta^2 \alpha^2 \left(m^2 + m - \frac{\beta^2 a^2}{4}\right) H_m(\alpha a) H_m(\beta a) + \\ &+ \alpha \beta a^2 (m^2 - 1) H_{m-1}(\alpha a) H_{m-1}(\beta a) + \left(m - m^3 - \frac{\beta^2 a^2}{2}\right) \beta a H_m(\alpha a) \times \\ &\times H_{m-1}(\beta a) + \alpha a H_{m-1}(\alpha a) H_m(\beta a).\end{aligned}\quad (\text{XI. 46})$$

На рис. XI. 16 представлены значения  $\sigma_\theta|_{r=a} = \frac{\sigma_\theta^{\max}}{\mu\beta^2\Psi_0} = \tilde{\sigma}_\theta^{\max}$  в зависимости от параметра  $\beta a$  при  $\theta = \pi/4$  (рис. XI. 16, а) и  $\theta = 3\pi/4$  (рис. XI. 16, б) для различных значений  $\nu$ .

**Падающая волна сдвига. Жесткое включение.** В случае жесткого впаянного ядра (включения) произвольной плотности результирующие силы и крутящий момент, действующие по контуру спая  $r=a$  на включение со стороны падающей и отраженных волн, определяются формулами

$$\begin{aligned} X &= \int_0^{2\pi} (\sigma_r \cos \theta - \tau_{r\theta} \sin \theta) a d\theta, \\ Y &= \int_0^{2\pi} (\sigma_r \sin \theta + \tau_{r\theta} \cos \theta) a d\theta, \\ M_{кр} &= \int_0^{2\pi} \tau_{r\theta} a^2 d\theta. \end{aligned} \quad (XI. 47)$$

Из второго закона Ньютона

$$\begin{aligned} \pi a^2 g_1 \ddot{U}_x &= X, \\ \pi a^2 g_1 \ddot{U}_y &= Y, \\ \frac{\pi a^4 g_1}{2} \ddot{\phi} &= M_{кр} \end{aligned} \quad (XI. 48)$$

(где  $\phi$  — поворот ядра) и соотношений

$$\begin{aligned} u &= u_x \cos \theta + u_y \sin \theta, \\ v &= -u_x \sin \theta + u_y \cos \theta + a\phi \end{aligned} \quad (XI. 49)$$

получим условия для определения постоянных в общем решении (XI.30). Полученный ряд вследствие его громоздкости здесь не выписываем\*. На рис. XI.17 показано изменение  $\tau_{r\theta}$  на границе  $r=a$  спая при  $\theta=\pi/2$  и  $\theta=\pi$  в зависимости от частоты для различных  $\eta=g/g_1$  при  $\nu=0,25$ .

**Нестационарные несимметричные задачи. Круговое отверстие.** Я. М. Миндлиным [1] построен интеграл волнового уравнения, являющийся обобщением формулы Лэмба—Даламбера на случай несимметричной задачи:

$$\Phi = \int_0^\infty \left[ A_n^{(1)} \left( t - \frac{r}{c} \operatorname{ch} \xi \right) + A_n^{(2)} \left( t + \frac{r}{c} \operatorname{ch} \xi \right) \right] \operatorname{ch} n \xi d\xi e^{in\theta}, \quad (XI. 50)$$

где  $n$  — целое положительное число или нуль, а функция  $\Phi(r, \theta)$  удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \quad (XI. 51)$$

\* См. С. С. Мов, Л. I. Менте [1].

Функции  $A_n^{(1)}$ ,  $A_n^{(2)}$  подчинены условиям

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu^{n+\varepsilon} A_n^{(1)}(\mu) = 0, \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu^{n+\varepsilon} A_n^{(2)}(\mu) = 0,$$

где  $\varepsilon$  — любая положительная величина. В работе Я. А. Миндлина [2] решение в виде (XI.50) применяется к задаче плоской теории упругости, когда на границе кругового отверстия заданы смещения, представленные в виде ряда Фурье по угловой координате. При удовлетворении начальных и граничных условий для функций  $A_n$  получаются интегральные уравнения \* Вольтерра I рода.

В некоторых работах плоская задача с нестационарным внешним воздействием для кругового отверстия (полости) рассматривается с применением интегральных преобразований. Кратко суть метода решения заключается в следующем.

В пространстве изображений по Лапласу уравнения (XI.51) принимают вид

$$\nabla^2 \Phi - \frac{p^2}{c_1^2} \Phi = 0, \quad (XI.52)$$

$$\nabla^2 \Psi - \frac{p^2}{c_2^2} \Psi = 0,$$

где

$$\Phi(r, \theta, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \Phi(r, \theta, t) dt,$$

$$\Psi(r, \theta, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \Psi(r, \theta, t) dt.$$

Уравнения (XI.52) в полярных координатах обладают затухающим на бесконечности решением следующего вида:

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \left( \frac{p}{c_1} r \right) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta). \quad (XI.53)$$

$$\Psi = \sum_{n=0}^{\infty} K_n \left( \frac{p}{c_2} r \right) (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta),$$

где  $K_n$  — функция Макдональда.

\* Этим же методом М. М. Сидляр [1] рассмотрел аналогичную задачу в напряжениях.

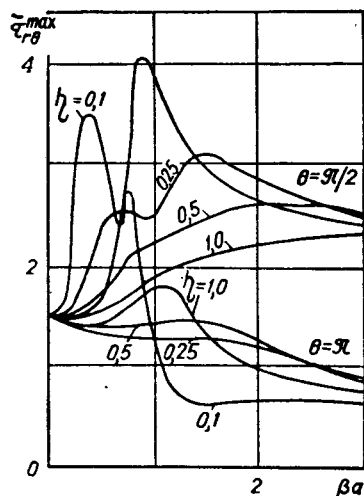


Рис. XI.17.

Уравнениям (XI.52) должны удовлетворять как потенциалы отраженных на отверстии волн, так и потенциалы, описывающие основное напряженное состояние, т. е. состояние, обусловленное приложенной нагрузкой.

Основное напряженное состояние представляется в виде ряда Фурье

$$\sigma_r = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(r, t) \cos n\theta + b_n(r, t) \sin n\theta], \quad (\text{XI.54})$$

$$\tau_{r\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} [c_n(r, t) \cos n\theta + d_n(r, t) \sin n\theta].$$

Из граничных условий, подвергнутых преобразованию Лапласа, находятся  $A_n, B_n, C_n, D_n$  как функции  $p$ , после чего необходимо перейти в пространство оригиналов. Как известно, функция  $f(t)$  определяется через свое изображение  $F(p)$  при помощи оператора:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt} F(p) dp \quad (\gamma > 0).$$

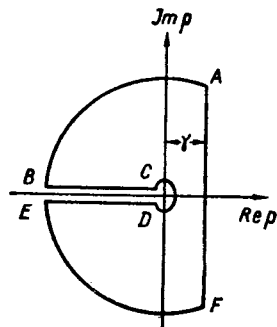


Рис. XI.18.

В рассматриваемых задачах \* имеем точку ветвления подынтегральной функции в начале координат и полюсы в левой полуплоскости, так как с течением времени напряженное состояние асимптотически должно стремиться к статическому. Поэтому в качестве контура интегрирования можно выбрать контур, представленный на рис. XI.18. С увеличением радиуса дуг  $AB$  и  $EF$  подынтегральные функции равномерно относительно  $\arg p$  стремятся к нулю. Тогда значение интеграла по прямой  $AF$  равно его значениям, вычисленным по берегам разреза  $BC$  и  $ED$ , сумме вычетов подынтегральной функции в ее полюсах и интегралу по бесконечно малой окружности в начале координат.

В работах М. Л. Вагон, А. Т. Matthews [1, 2] изучается напряженное и деформированное состояние в окрестности круговой плоскости \*\*, когда в среде движется плоская волна напряжений ступенчатого вида (в точках среды, которых достигает волновой фронт, напряжения внезапно возрастают и в дальнейшем остаются постоянными). Разложение основного напряженного состояния на контуре отверстия в ряд Фурье показывает, что с момента, когда волновой фронт минует полость, в формулах (XI.54) не равными нулю остаются гармоники с  $n=0$  и  $n=2$ . Проведенные указанными выше авторами подсчеты показывают, что в некоторые моменты времени (после того, как волна прошла полость) концентрация напряжений превышает статическое значение на 9—11% и с течением времени приближается к нему.

\* См. М. М. Сидляр [2].

\*\* Т. е. в случае плоской деформации.

#### § 4. Криволинейное отверстие с достаточно гладким контуром

Задачи, рассмотренные в предыдущих параграфах этой главы, касались лишь кругового отверстия. Все они связаны с разделением переменных, которое в граничных задачах теории упругости проходит лишь в декартовых, цилиндрических (полярных) и сферических координатных системах. Поэтому при решении динамических задач для отверстий, форма которых отличается от круговой, приходится искать иных путей. Один из них\* состоит в переходе к системе интегральных уравнений для определения потенциалов смещения. Однако доведение этим методом решения задачи до конца, т. е. получение достаточно точных числовых результатов связано с необходимостью решения обширных систем алгебраических уравнений\*\*. В то же время для ряда отверстий, «близких» (в определенном смысле) к круговому, представляется возможным получить более или менее компактное приближенное решение, допускающее качественное исследование. Такое решение для установившегося процесса получено методом «возмущения формы границы» в работах В. Д. Кубенко [3—6].

**Метод решения.** Изложим кратко идею этого метода применительно к динамическим задачам\*\*\*.

Введем безразмерные величины

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{r}{a_0}, & \bar{\theta} &= \theta, & \bar{t} &= \frac{c_2 t}{a_0}, \\ \bar{\omega} &= \frac{a_0 \omega}{c_2}, & \vec{u} &= \frac{E}{2(1+\nu) a_0 Q_0} \vec{u}, \\ \{\bar{\sigma}_r, \bar{\sigma}_\theta, \bar{\tau}_{r\theta}\} &= \frac{1}{Q_0} \{\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}\}, \end{aligned} \quad (\text{XI.55})$$

где  $r, \theta$  — полярные координаты;  $\vec{u}(u, v)$  — вектор смещений;  $a_0$  — линейный размер (радиус кругового отверстия, близкого к рассматриваемому контуру);  $Q_0$  — интенсивность напряженного состояния.

В новых обозначениях, черточку над которыми опустим, получим, что потенциалы смещений удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + \omega^2 \xi^2) \varphi &= 0, \\ (\nabla^2 + \omega^2) \psi &= 0, \end{aligned} \quad (\text{XI.56})$$

где

$$\xi^2 = \frac{1-\nu}{2}.$$

\* См. В. Д. Купрадзе [2].

\*\* См. R. P. Vapaugh, W. Goldsmith [1].

\*\*\* Применение этого метода решения к статическим задачам изложено в гл. VI и X.

Напряжения в полярных координатах через функции  $\varphi$  и  $\psi$  определим по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -\nu\omega^2\varphi + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right), \\ \sigma_\theta &= -\omega^2\varphi - 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right), \\ \tau_{r\theta} &= -\omega^2\psi + 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\right).\end{aligned}\quad (\text{XI.57})$$

Рассмотрим бесконечную плоскость  $z$ , ослабленную отверстием с контуром  $\Gamma$ , центр тяжести которого совпадает с началом координат (рис. XI.19). Пусть функция

$$\begin{aligned}z &= \omega_1(\zeta) = \zeta + \varepsilon f(\zeta), & z &= r e^{i\theta}, \\ \zeta &= \varrho e^{i\vartheta} \quad (|\varepsilon| \ll 1),\end{aligned}\quad (\text{XI.58})$$

конформно отображает бесконечную плоскость  $\xi$  с отверстием в виде единичного круга на бесконечную плоскость  $z$  с отверстием  $\Gamma$ . Выбор функции  $f(\zeta)$  в (XI.58) позволяет получить отверстие довольно произвольного вида без угловых точек.

Из (XI.58) получаем следующие соотношения\*:

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{\zeta\bar{\zeta} + \varepsilon[\zeta\bar{f}(\bar{\zeta}) + \bar{\zeta}f(\zeta)] + \varepsilon^2 f(\zeta)\bar{f}(\bar{\zeta})}, \\ \theta &= \operatorname{arctg} \frac{\varrho \sin \vartheta + \varepsilon \operatorname{Im} f(\zeta)}{\varrho \cos \vartheta + \varepsilon \operatorname{Re} f(\zeta)}, & e^{i\alpha} &= \frac{\zeta\omega_1'(\zeta)\omega_1'(\bar{\zeta})}{|\zeta|\omega_1(\zeta)|\omega_1'(\bar{\zeta})|},\end{aligned}\quad (\text{XI.59})$$

где  $\alpha$  — угол между радиальным направлением в плоскости  $z$  и направлением внешней нормали к кривым, в которые преобразуются функцией  $\omega_1(\zeta)$  (XI.58) окружности, проведенные из начала координат в плоскости  $\zeta$ .

Граничные условия в случае первой основной задачи состоят в задании на  $\Gamma$  напряжений

$$\begin{aligned}\sigma_n|_\Gamma &= h(\vartheta, \varepsilon) e^{-i\omega t}, \\ \tau_{ns}|_\Gamma &= g(\vartheta, \varepsilon) e^{-i\omega t}.\end{aligned}\quad (\text{XI.60})$$

\* Подробный вывод этих соотношений дан в гл. VI

Как известно, общее решение уравнений (XI.56) (с учетом условий излучения) в полярных координатах  $r, \theta$  имеет вид

$$\varphi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (A_m \cos m\theta + B_m \sin m\theta) H_m(\omega \xi r), \quad (XI.61)$$

$$\psi(r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} (C_m \cos m\theta + D_m \sin m\theta) H_m(\omega r).$$

Напряжения  $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$  (XI.57) связаны с напряжениями  $\sigma_n, \sigma_s, \tau_{ns}$  известными формулами преобразования:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_r \cos^2 \alpha + \sigma_\theta \sin^2 \alpha + 2\tau_{r\theta} \sin \alpha \cos \alpha, \\ \sigma_s &= \sigma_r \sin^2 \alpha + \sigma_\theta \cos^2 \alpha - 2\tau_{r\theta} \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned} \quad (XI.62)$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_\theta - \sigma_r) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{r\theta} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha).$$

Представим решение уравнений (XI.56) и компоненты напряжений  $\sigma_n, \sigma_s$  и  $\tau_{ns}$  в виде рядов по параметру  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \varphi_j(r, \theta), & \psi(r, \theta) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \psi_j(r, \theta), \\ \sigma_n(r, \theta) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sigma_n^{(j)}(r, \theta), & \sigma_s(r, \theta) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \sigma_s^{(j)}(r, \theta), \\ \tau_{ns}(r, \theta) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \tau_{ns}^{(j)}(r, \theta). \end{aligned} \quad (XI.63)$$

Разложим функции  $h$  и  $g$  в (XI.60) по степеням малого параметра  $\varepsilon$ :

$$h(\vartheta, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(\vartheta), \quad g(\vartheta, \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j g_j(\vartheta). \quad (XI.64)$$

Подставляя (XI.63), (XI.64) в (XI.56), (XI.57) и (XI.62), а также разложения (XI.59) по  $\varepsilon$  и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем уравнения для  $j$ -го приближения

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + \omega^2 \xi^2) \varphi_j(r, \theta) &= 0, \\ (\nabla^2 + \omega^2) \psi_j(r, \theta) &= 0 \end{aligned} \quad (XI.65)$$

и граничные условия

$$\sigma_n^{(j)}|_{\Gamma} = h_j(\vartheta), \quad \tau_{ns}^{(j)}|_{\Gamma} = g_j(\vartheta). \quad (XI.66)$$

Общее решение (XI.65) согласно (XI.61) имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi_j(r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m(\omega \xi r) (A_m^{(j)} \cos m\theta + B_m^{(j)} \sin m\theta), \\ \psi_j(r, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} H_m(\omega r) (C_m^{(j)} \cos m\theta + D_m^{(j)} \sin m\theta).\end{aligned}\quad (\text{XI.67})$$

В  $j$ -м приближении напряжения определяются по формулам

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(j)} &= e^{-i\omega t} \sum_{\substack{k=0 \\ p=0 \\ s=0 \\ k+p+s=j}}^j [M_r^{(k)}(\Phi_s) l_1^{(p)} + M_\theta^{(k)}(\Phi_s) l_2^{(p)} + M_{r\theta}^{(k)}(\Phi_s) l_3^{(p)}], \\ \sigma_s^{(j)} &= e^{-i\omega t} \sum_{\substack{k=0 \\ p=0 \\ s=0 \\ k+p+s=j}}^j [M_r^{(k)}(\Phi_s) l_4^{(p)} + M_\theta^{(k)}(\Phi_s) l_5^{(p)} + M_{r\theta}^{(k)}(\Phi_s) l_6^{(p)}], \\ \tau_{ns}^{(j)} &= e^{-i\omega t} \sum_{\substack{k=0 \\ p=0 \\ s=0 \\ k+p+s=j}}^j [M_r^{(k)}(\Phi_s) l_7^{(p)} + M_\theta^{(k)}(\Phi_s) l_8^{(p)} + M_{r\theta}^{(k)}(\Phi_s) l_9^{(p)}],\end{aligned}\quad (\text{XI.68})$$

где через  $\Phi_s$  для сокращения записи обозначена пара функций  $\varphi_s(\rho, \vartheta)$  и  $\psi_s(\rho, \vartheta)$ , т. е.  $\Phi_s \sim \varphi_s(\rho, \vartheta)$ ,  $\psi_s(\rho, \vartheta)$ .

Дифференциальные операторы в (XI.68) имеют вид

$$\begin{aligned}M_r^{(k)}(\Phi_s) &= -\nu\omega^2 L_1^{(k)}(\Phi_s) + 2L_2^{(k)}(\Phi_s) + 2L_3^{(k)}(\Phi_s), \\ M_\theta^{(k)}(\Phi_s) &= -\omega^2 L_1^{(k)}(\Phi_s) - 2L_2^{(k)}(\Phi_s) - 2L_3^{(k)}(\Phi_s), \\ M_{r\theta}^{(k)}(\Phi_s) &= -\omega^2 L_1^{(k)}(\Phi_s) - 2L_2^{(k)}(\Phi_s) + 2L_3^{(k)}(\Phi_s), \\ k &= 0, 1, 2,\end{aligned}\quad (\text{XI.69})$$

где\*

$$\begin{aligned}L_1^{(0)} &= 1; \quad L_2^{(0)} = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2}; \quad L_3^{(0)} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho \partial \vartheta} - \frac{1}{\rho^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta}; \\ L_1^{(1)} &= \frac{\xi \bar{f} + \bar{\xi} f}{2\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} + \left( \frac{f - \bar{f}}{2i\rho} \cos \vartheta - \frac{f + \bar{f}}{2\rho} \sin \vartheta \right) \frac{\partial}{\partial \vartheta}; \\ L_2^{(1)} &= \frac{\xi \bar{f} + \bar{\xi} f}{2\rho} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \rho^3} + \left( \frac{f - \bar{f}}{2i\rho} \cos \vartheta - \frac{f + \bar{f}}{2\rho} \sin \vartheta \right) \frac{\partial^3}{\partial \rho^2 \partial \vartheta};\end{aligned}$$

\* Для упрощения записи в формулах (XI.70) вместо  $f(\xi)$  будем писать  $f$ .



$$\begin{aligned}
L_3^{(1)} &= \frac{\zeta\bar{f} + \bar{\zeta}f}{2q^2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial q^2 \partial \theta} + \frac{\zeta\bar{f} + \bar{\zeta}f}{q^4} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} + \left( \frac{f - \bar{f}}{2iq^2} \cos \theta - \frac{f + \bar{f}}{2q^2} \sin \theta \right) \frac{\partial^3}{\partial q \partial \theta^2} - \\
&\quad - \frac{\zeta\bar{f} + \bar{\zeta}f}{q^3} \cdot \frac{\partial^2}{\partial q \partial \theta} - \left( \frac{f - \bar{f}}{2iq} \cos \theta - \frac{f + \bar{f}}{2q} \sin \theta \right) \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}; \\
L_1^{(2)} &= \frac{(\zeta\bar{f} + \bar{\zeta}f)^2}{8q^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\zeta\bar{f} + \bar{\zeta}f}{q^2} \left( \frac{f - \bar{f}}{2i} \cos \theta - \frac{f + \bar{f}}{2} \sin \theta \right) \frac{\partial^2}{\partial q \partial \theta} + \\
&\quad + \frac{4if\bar{f} - 2i(f^2 + \bar{f}^2) \cos 2\theta - 2(f^2 - \bar{f}^2) \sin 2\theta}{8iq^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \\
&\quad - \frac{(\zeta\bar{f} - \bar{\zeta}f)^2}{8q^3} \cdot \frac{\partial}{\partial q} + \frac{(f^2 + \bar{f}^2) i \sin 2\theta - (f^2 - \bar{f}^2) \cos 2\theta}{4iq^2} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}; \\
L_2^{(2)} &= \frac{(\zeta\bar{f} + \bar{\zeta}f)^2}{8q^2} \cdot \frac{\partial^4}{\partial q^4} + \frac{\zeta\bar{f} + \bar{\zeta}f}{q^2} \left( \frac{f - \bar{f}}{2i} \cos \theta - \frac{f + \bar{f}}{2} \sin \theta \right) \frac{\partial^4}{\partial q^2 \partial \theta} + \\
&\quad + \frac{4if\bar{f} - 2i(f^2 + \bar{f}^2) \cos 2\theta - 2(f^2 - \bar{f}^2) \sin 2\theta}{8iq^2} \cdot \frac{\partial^4}{\partial q^2 \partial \theta^2} - \quad (XI.70) \\
&\quad - \frac{(\zeta\bar{f} - \bar{\zeta}f)^2}{8q^3} \cdot \frac{\partial^3}{\partial q^3} + \frac{(f^2 + \bar{f}^2) i \sin 2\theta - (f^2 - \bar{f}^2) \cos 2\theta}{4iq^2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial q^2 \partial \theta}; \\
L_3^{(2)} &= \frac{(\zeta\bar{f} + \bar{\zeta}f)^2}{8q^3} \cdot \frac{\partial^4}{\partial q^3 \partial \theta} + \frac{\zeta\bar{f} + \bar{\zeta}f}{2q^3} \left( \frac{f - \bar{f}}{2i} \cos \theta - \frac{f + \bar{f}}{2} \sin \theta \right) \frac{\partial^4}{\partial q^2 \partial \theta^2} + \\
&\quad + \frac{4if\bar{f} - 2i(f^2 + \bar{f}^2) \cos 2\theta - 2(f^2 - \bar{f}^2) \sin 2\theta}{8iq^3} \cdot \frac{\partial^4}{\partial q \partial \theta^3} + \\
&\quad + \frac{(f^2 + \bar{f}^2) \sin 2\theta + i(f^2 - \bar{f}^2) \cos 2\theta - 3(\zeta\bar{f} + \bar{\zeta}f) \left( \frac{f - \bar{f}}{2iq} \cos \theta - \frac{f + \bar{f}}{2q} \sin \theta \right)}{4q^3} \cdot \frac{\partial^3}{\partial q \partial \theta^2} - \\
&\quad - \frac{4if\bar{f} - 2i(f^2 + \bar{f}^2) \cos 2\theta - 2(f^2 - \bar{f}^2) \sin 2\theta}{8iq^4} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} - \\
&\quad - \frac{\zeta^2 \bar{f}^2 + \bar{\zeta}^2 f^2 + 6q^2 f \bar{f}}{8q^4} \cdot \frac{\partial^3}{\partial q^2 \partial \theta} + \frac{9\zeta^2 \bar{f}^2 + 9\bar{\zeta}^2 f^2 + 6q^2 f \bar{f}}{8q^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial q \partial \theta} + \\
&\quad - \frac{(f^2 + \bar{f}^2) \sin 2\theta + i(f^2 - \bar{f}^2) \cos 2\theta + (\zeta\bar{f} + \bar{\zeta}f) \left( \frac{f - \bar{f}}{iq} \cos \theta - \frac{f + \bar{f}}{q} \sin \theta \right)}{2q^4} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \\
&\quad + \frac{\zeta^2 \bar{f}^2 + \bar{\zeta}^2 f^2 + q^2 f \bar{f}}{q^6} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta}.
\end{aligned}$$

В (XI.68) через  $l_m^{(p)}$  обозначены величины

$$l_1^{(0)} = 1; \quad l_1^{(1)} = 0; \quad l_1^{(2)} = \frac{(\zeta\bar{f} - \bar{\zeta}f + q^2 \bar{f} - q^2 f)^2}{4q^4};$$

$$l_2^{(0)} = 0; \quad l_2^{(1)} = 0; \quad l_2^{(2)} = -l_1^{(2)};$$

$$l_3^{(0)} = 0; \quad l_3^{(1)} = \frac{\bar{\zeta}\bar{f} - \bar{\zeta}f + \varrho^2(\bar{f}' - \bar{f}')}{i\varrho^2}; \quad l_3^{(2)} = \frac{\bar{\zeta}^2\bar{f}^2 - \bar{\zeta}^2f^2 + \varrho^4(\bar{f}'^2 - \bar{f}'^2)}{2i\varrho^4};$$

$$l_4^{(0)} = 0; \quad l_4^{(1)} = 0; \quad l_4^{(2)} = -l_1^{(2)};$$

$$l_5^{(0)} = 1; \quad l_5^{(1)} = 0; \quad l_5^{(2)} = l_1^{(2)};$$

$$l_6^{(0)} = 0; \quad l_6^{(1)} = -l_3^{(1)}; \quad l_6^{(2)} = -l_3^{(2)};$$

$$l_7^{(0)} = 0; \quad l_7^{(1)} = -\frac{1}{2}l_3^{(1)}; \quad l_7^{(2)} = -\frac{1}{2}l_3^{(2)};$$

$$l_8^{(0)} = 0; \quad l_8^{(1)} = \frac{1}{2}l_3^{(1)}; \quad l_8^{(2)} = \frac{1}{2}l_3^{(2)};$$

$$l_9^{(0)} = 1; \quad l_9^{(1)} = 0; \quad l_9^{(2)} = 2l_1^{(2)}.$$

Как следует из (XI.68), в  $j$ -ом приближении остаются неизвестными только функции  $\varphi_j(\varrho, \vartheta)$  и  $\psi_j(\varrho, \vartheta)$ .

Сравнивая (XI.68) с (XI.57), видим, что все величины  $j$ -го порядка определяются через функции  $\varphi_j(\varrho, \vartheta)$  и  $\psi_j(\varrho, \vartheta)$  так же, как и в (XI.57), если в них формально заменить  $r$  на  $\varrho$  и  $\theta$  на  $\vartheta$ . Сами функции  $\varphi_j(\varrho, \vartheta)$  и  $\psi_j(\varrho, \vartheta)$  получаются простой заменой  $r, \theta$  на  $\varrho, \vartheta$  в функциях  $\varphi_j(r, \theta), \psi_j(r, \theta)$ , которые являются решениями уравнений (XI.65).

Таким образом, в каждом из последовательных приближений задача сводится к отысканию решения для внешности отверстия в виде единичного круга, что позволяет воспользоваться методом разделения переменных.

Рассмотрим некоторые конкретные задачи.

**Осциллирующее давление, приложенное к контуру отверстия.** Пусть к контуру отверстия  $\Gamma$  в бесконечной упругой пластине приложено равномерное давление, гармонически изменяющееся во времени. Граничные условия на отверстии имеют вид

$$\sigma_n|_{\Gamma} = -e^{-i\omega t}, \quad \tau_{ns}|_{\Gamma} = 0. \quad (\text{XI.71})$$

Раскладывая правую часть (XI.71) по  $\varepsilon$ , будем иметь согласно (XI.60) и (XI.64)

$$h_0 = -1, \quad h_1 = h_2 = \dots = h_m = \dots = g_0 = g_1 = \dots = g_m = \dots = 0. \quad (\text{XI.72})$$

Таким образом, граничные условия:

в нулевом приближении

$$\sigma_n^{(0)}|_{\varrho=1} = -e^{-i\omega t}, \quad \tau_{ns}^{(0)}|_{\varrho=1} = 0; \quad (\text{XI.73})$$

в первом приближении

$$\sigma_n^{(1)}|_{\varrho=1} = 0, \quad \tau_{ns}^{(1)}|_{\varrho=1} = 0; \quad (\text{XI.74})$$

во втором приближении

$$\sigma_n^{(2)}|_{\varrho=1} = 0, \quad \tau_{ns}^{(2)}|_{\varrho=1} = 0. \quad (\text{XI.75})$$

В граничных условиях (XI.73) — (XI.75) левые части представляются разложениями (XI.68).

Функцию  $f(\zeta)$  в (XI.58) возьмем в наиболее простом \* виде:

$$f(\zeta) = \frac{1}{\zeta^N}, \quad (\text{XI.76})$$

где  $N$  — целое положительное число.

Функция (XI.76) позволяет получить различные отверстия с закругленными углами \*\*. Так, при  $N=1$  имеем эллиптическое отверстие с полуосями  $a$  и  $b$ , т. е.

$$\varepsilon = \pm \frac{a-b}{a+b};$$

при  $N=3$  и  $\varepsilon = \pm 1/9$  или  $\varepsilon = \pm 1/6$  — квадратное отверстие с закругленными углами; при  $N=2$  и  $\varepsilon = \pm 1/4$  — треугольное отверстие с закругленными углами. Знак при параметре  $\varepsilon$  определяет ориентацию отверстия относительно осей  $x, y$ .

Переходя к решению задачи, видим, что в нулевом приближении достаточно в качестве решения уравнений (XI.65) взять

$$\varphi_0 = A_0^{(0)} H_0(\omega \xi r), \quad \psi_0 = 0. \quad (\text{XI.77})$$

В нулевом приближении решение поставленной задачи при граничных условиях (XI.65) есть решение осесимметричной задачи для кругового отверстия.

В первом приближении потенциалы смещений следует взять в виде

$$\varphi_1 = A_{N+1}^{(1)} H_{N+1}(\omega \xi r) \cos(N+1)\theta, \quad (\text{XI.78})$$

$$\psi_1 = D_{N+1}^{(1)} H_{N+1}(\omega r) \sin(N+1)\theta.$$

Из (XI.78) видим, что уже в первом приближении появляется волна сдвига.

Наконец, потенциалы смещений во втором приближении имеют вид

$$\varphi_2 = A_0^{(2)} H_0(\omega \xi r) + A_{2N+2}^{(2)} H_{2N+2}(\omega \xi r) \cos 2(N+1)\theta, \quad (\text{XI.79})$$

$$\psi_2 = D_{2N+2}^{(2)} H_{2N+2}(\omega r) \sin 2(N+1)\theta.$$

Граничные условия (XI.73) — (XI.75) служат для определения постоянных  $A_0^{(0)}, A_{N+1}^{(1)}, D_{N+1}^{(1)}, A_0^{(2)}, A_{2N+2}^{(2)}$  и  $D_{2N+2}^{(2)}$ .

На рис. XI.20 показано напряжение  $\sigma_n(\rho)^{\max}$  вдоль оси  $x$  при  $\nu = 0,28$  для кругового (кривая 1), эллиптического (кривая 2)  $\varepsilon = 1/5$  и квадратного (кривая 3)  $\varepsilon = 1/9$  отверстий при  $\omega = 1$ . Как видим, криво-

\* Более сложные выражения для функции  $f(\zeta)$  не вносят принципиально нового, а лишь усложняют математические выкладки.

\*\* В статье Г. Н. Савина и Н. А. Шульги [1] для этих же форм отверстий предложен метод решения аналогичных динамических задач для материала, упругое состояние которого характеризуется несимметричным тензором напряжений (гл. VI).

линейность отверстия сказывается на напряжениях лишь вблизи контура.

На рис. XI.21 представлено напряжение  $\sigma_s^{\max}$  в зависимости от частоты  $\omega$  по контуру кругового (кривая 1), эллиптического (кривая 2)  $\epsilon=1/5$  и квадратного (кривая 3)  $\epsilon=1/9$  отверстий в точке с максимальной концентрацией напряжений. Как видим, в некотором диапазоне ча-

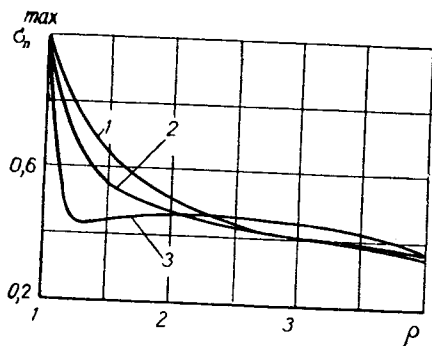


Рис. XI.20

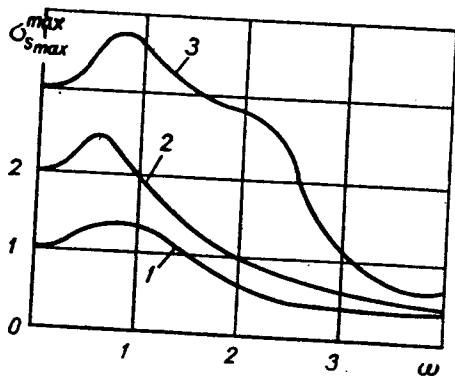


Рис. XI.21

стот напряжение  $\sigma_s$  превышает свое статическое значение в среднем на 15%.

Сходимость последовательных приближений для эллиптического  $\epsilon=1/5$  и квадратного  $\epsilon=1/9$  отверстий иллюстрируется табл. XI.1.

Таблица XI.1

	Отверстие	$\omega$	Приближение			Точное решение
			Нулевое	Первое	Второе	
$\sigma_s^{\max}$	Эллиптическое	0	1,000	1,800	1,960	2,000
		0,6	1,261	2,215	2,395	—
	Квадратное	0	1,000	2,333	2,777	3,000
		0,8	1,307	2,894	3,637	—

**Падающая волна сжатия.** Эллиптическое и квадратное свободное отверстие. Зададим плоскую гармоническую волну потенциалами смещений \*

$$\varphi^I = -\frac{1}{\omega^2} e^{i\omega(\xi x - t)},$$

$$\psi^I = 0,$$

$$(XI.80)$$

\* См. В. Д. Кубенко [4, 5].

которым соответствует основное напряженное состояние вида:

$$\begin{aligned}\sigma_x^I &= e^{i\omega(\xi x - t)}, \\ \sigma_y^I &= \nu e^{i\omega(\xi x - t)}, \\ \tau_{xy}^I &= 0.\end{aligned}\quad (\text{XI.81})$$

Звездочкой будем обозначать потенциалы отраженных волн и напряжения, им соответствующие.

Граничные условия на контуре свободного отверстия имеют вид

$$(\sigma_n^I + \sigma_n^*)_{\Gamma} = 0, \quad (\tau_{ns}^I + \tau_{ns}^*)_{\Gamma} = 0. \quad (\text{XI.82})$$

Потенциалы  $\Phi^*$ ,  $\Psi^*$  есть решения уравнений Гельмгольца (XI.5).

Согласно методу решения, изложенному выше, представим  $\sigma_n^I$ ,  $\sigma_s^I$ ,  $\tau_{ns}^I$  в виде рядов по параметру  $\varepsilon$ . Для этого следует воспользоваться разложением плоской волны в полярных координатах (XI.32) и разложением функций  $r$ ,  $\theta$  и  $e^{i\alpha}$  (XI.59) по  $\varepsilon$ . Получим формулы для  $\sigma_n^I$  и  $\tau_{ns}^I$  с учетом нулевого, первого и второго приближений:

$$\begin{aligned}\sigma_n^I|_{\Gamma} &= h(\vartheta, \varepsilon) = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \left\{ J_m(\omega \xi) \left[ \frac{1}{2} \cos m\vartheta + \frac{1}{4} \cos(m-2)\vartheta + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{4} \cos(m+2)\vartheta \right] + \varepsilon [k_m^{(0)} \cos(m-N-3)\vartheta + k_m^{(1)} \cos(m-N-1)\vartheta + \\ &+ k_m^{(2)} \cos(m-N+1)\vartheta + k_m^{(3)} \cos(m+N-1)\vartheta + \\ &+ k_m^{(4)} \cos(m+N+1)\vartheta + k_m^{(5)} \cos(m+N+3)\vartheta] + \\ &+ \varepsilon^2 [K_m^{(0)} \cos(m-2N-4)\vartheta + K_m^{(1)} \cos(m-2N-2)\vartheta + \\ &+ K_m^{(2)} \cos(m-2N)\vartheta - K_m^{(3)} \cos(m-2)\vartheta - K_m^{(4)} \cos m\vartheta + \\ &+ K_m^{(5)} \cos(m+2)\vartheta + K_m^{(6)} \cos(m+2N)\vartheta + \\ &+ K_m^{(7)} \cos(m+2N+2)\vartheta + K_m^{(8)} \cos(m+2N+4)\vartheta] + \dots \left. \right\}; \\ \tau_{ns}^I|_{\Gamma} &= g(\vartheta, \varepsilon) = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m i^m \left\{ J_m(\omega \xi) \left[ \frac{1}{4} \sin(m-2)\vartheta - \right. \right. \\ &- \left. \frac{1}{4} \sin(m+2)\vartheta \right] + \varepsilon [k_m^{(0)} \sin(m-N-3)\vartheta - k_m^{(1)} \sin(m-N+1)\vartheta + \\ &+ k_m^{(3)} \sin(m+N+1)\vartheta - k_m^{(5)} \sin(m+N+3)\vartheta] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \varepsilon^2 [K_m^{(0)} \sin(m - 2N - 4) \vartheta - K_m^{(2)} \sin(m - 2N) \vartheta - \\
& - K_m^{(3)} \sin(m - 2) \vartheta - K_m^{(5)} \sin(m + 2) \vartheta + \\
& + K_m^{(6)} \sin(m + 2N) \vartheta - K_m^{(8)} \sin(m + 2N + 4) \vartheta] + \dots \};
\end{aligned} \tag{XI.83}$$

$$\begin{aligned}
(\sigma_n + \sigma_s)_\Gamma = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \{ J_m(\omega \xi) \cos m\vartheta (1 + \nu) + \\
+ \varepsilon 2 [k_m^{(1)} \cos(m - N - 1) \vartheta + k_m^{(4)} \cos(m + N + 1) \vartheta] + \\
+ \varepsilon^2 2 [-K_m^{(4)} \cos m\vartheta + K_m^{(1)} \cos(m - 2N - 2) \vartheta + \\
+ K_m^{(7)} \cos(m + 2N + 2) \vartheta] + \dots \},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
k_m^{(0)} &= (1 - \nu) \left[ \frac{\omega \xi}{8} J_{m-1} + \frac{N}{4} J_m \right], \\
k_m^{(1)} &= (1 + \nu) \frac{\omega \xi}{4} J_{m-1}, \\
k_m^{(2)} &= (1 - \nu) \left[ \frac{\omega \xi}{8} J_{m-1} - \frac{N}{4} J_m \right], \\
k_m^{(3)} &= (1 - \nu) \left[ \frac{\omega \xi}{8} J_{m-1} - \frac{m + N}{4} J_m \right], \\
k_m^{(4)} &= (1 + \nu) \left[ \frac{\omega \xi}{4} J_{m-1} - \frac{m}{2} J_m \right], \\
k_m^{(5)} &= (1 - \nu) \left[ \frac{\omega \xi}{8} J_{m-1} - \frac{m - N}{4} J_m \right], \\
K_m^{(0)} &= (1 - \nu) \left[ \frac{m + 2N - 1}{16} \omega \xi J_{m-1} + \frac{8N^2 - \omega^2 \xi^2}{32} J_m \right], \\
K_m^{(1)} &= (1 + \nu) \left[ \frac{m - 1}{8} \omega \xi J_{m-1} - \frac{\omega^2 \xi^2}{16} J_m \right], \\
K_m^{(2)} &= (1 - \nu) \left[ \frac{m - 2N - 1}{16} \omega \xi J_{m-1} - \frac{\omega^2 \xi^2}{32} J_m \right], \\
K_m^{(3)} &= \frac{4N(m + N) + \omega^2 \xi^2}{16} J_m (1 - \nu), \\
K_m^{(4)} &= (1 + \nu) \frac{\omega^2 \xi^2}{8} J_m, \\
K_m^{(5)} &= \frac{4N(m - N) + \omega^2 \xi^2}{16} J_m (1 - \nu),
\end{aligned} \tag{XI.84}$$

$$K_m^{(6)} = \left[ -\frac{m+2N+1}{16} \omega \xi J_{m-1} + \frac{4m(m+2N+1) - \omega^2 \xi^2}{32} J_m \right] (1-\nu),$$

$$K_m^{(7)} = (1+\nu) \left[ -\frac{m+1}{8} \omega \xi J_{m-1} + \frac{4m(m+1) - \omega^2 \xi^2}{16} J_m \right],$$

$$K_m^{(8)} = (1-\nu) \left[ -\frac{m-2N-1}{16} \omega \xi J_{m-1} + \right. \\ \left. + \frac{4m(m-2N+1) + 8N^2 - \omega^2 \xi^2}{32} J_m \right],$$

$$J_m = J_m(\omega \xi).$$

Подставляя (XI.83) в (XI.82) и учитывая, что  $\sigma_n^{(j)}$ ,  $\tau_{ns}^{(j)}$  определяются формулами (XI.68), получаем системы алгебраических уравнений для определения коэффициентов  $A_m^{(j)}$ ,  $B_m^{(j)}$ ,  $C_m^{(j)}$ ,  $D_m^{(j)}$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ;  $j=0, 1, 2, \dots$ ).

Напряжения  $\sigma_n$ ,  $\sigma_s$  и  $\tau_{ns}$  подсчитывались по формулам (XI.63). При этом в каждом из приближений вычислялись вещественные и мнимые части, физический смысл которых был объяснен в § 3. При вычислениях ряды (XI.83) обрывались на 17-м члене, чем обеспечивалась достаточная точность ( $10^{-4}$ ) в рассмотренном диапазоне частот. При вычислениях использовалась машина БЭСМ-2М и было принято  $\nu=0,28$ .

На рис. XI.22 показано изменение  $\sigma_s$  с частотой на контуре эллиптического отверстия с полуосями  $a=2$  и  $b=3$  при  $\theta=\pi/2$ . Штриховая

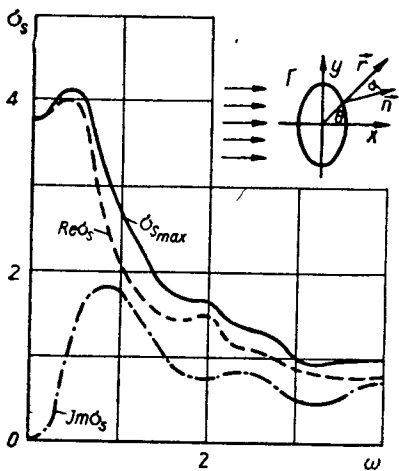


Рис. XI.22

Таблица XI.2

	$\omega$	Приближение			Точное решение
		Нулевое	Первое	Второе	
$\sigma_s^{\max}$	0	2,720	3,520	3,680	3,720
	0,4	2,944	3,914	4,106	

Таблица XI.3

	$\omega$	Приближение			Точное решение
		Нулевое	Первое	Второе	
$\sigma_s^{\max}$	0	2,720	4,053	4,498	4,720
	0,4	2,944	4,584	5,120	

кривая соответствует напряжениям в начале периода, штрих-пунктирная — напряжениям спустя четверть периода, сплошная — максимальным значениям  $\sigma_s$ . Как видим, в некотором диапазоне частот  $\sigma_s^{\max}$  превышает свое статическое значение. В частности, при  $\omega=0,4$  напряжение  $\sigma_s^{\max}=4,106$ , что на 8,2% превышает статическое значение.

Сходимость приближений для эллиптического отверстия при  $\epsilon = -1/5$  в точке  $\theta = \pi/2$  иллюстрируется табл. XI.2.

На рис. XI.23 показано распределение  $\sigma_s$  по контуру отверстия в начале периода (вещественная часть решения). Из приведенных графика-

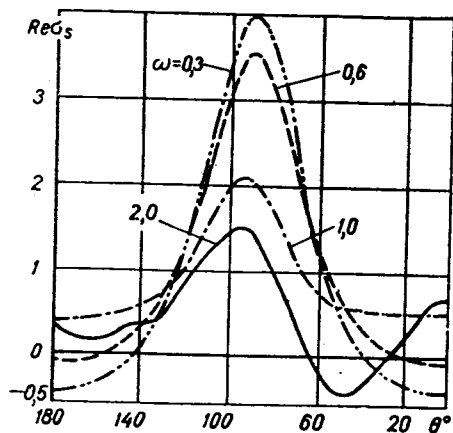


Рис. XI.23

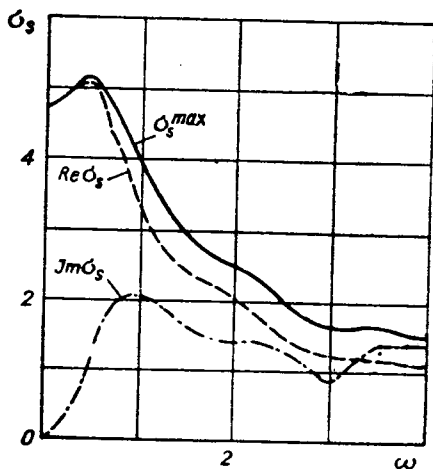


Рис. XI.24

ков можно заключить, что напряженное состояние с частотой существенно изменяется.

На рис. XI.24 представлено (так же, как и на рис. XI.23)  $\sigma_s$  в зависимости от  $\omega$  на контуре квадратного отверстия с  $\epsilon = 1/9$  при  $\theta = \pi/2$ . Здесь также имеется интервал частот, в котором напряжение превышает свое статическое значение. Значения последовательных приближений для квадратного отверстия ( $\epsilon = 1/9$ ,  $\theta = \pi/2$ ) приведены в табл. XI.3.

**Падающая волна сдвига. Квадратное свободное отверстие.** Пусть в пластине реализуется основное напряженное состояние при помощи плоской гармонической волны сдвига, потенциалы смещений которой имеют вид

$$\varphi^I = 0, \tag{XI.85}$$

$$\psi^I = -\frac{1}{\omega^2} e^{-i\omega(x-t)}.$$

Этим потенциалам соответствует напряженное состояние

$$\sigma_x^I = \sigma_y^I = 0,$$

$$\tau_{xy}^I = e^{-i\omega(x-t)}. \tag{XI.86}$$



Как и в предыдущем случае, для граничных условий (XI.82) получим представление основного напряженного состояния в виде ряда

$$\begin{aligned} \sigma_{n\Gamma}^I = h(\vartheta, \varepsilon) = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \left\{ \frac{1}{2} J_m(\omega) [\sin(m+2)\vartheta - \right. \\ \left. - \sin(m-2)\vartheta] + \varepsilon 2 [-\bar{k}_m^{(0)} \sin(m-N-3)\vartheta + \right. \\ \left. + \bar{k}_m^{(2)} \sin(m-N+1)\vartheta - \bar{k}_m^{(3)} \sin(m+N-1)\vartheta + \right. \\ \left. + \bar{k}_m^{(5)} \sin(m+N+3)\vartheta] + \varepsilon^2 2 [-\bar{K}_m^{(0)} \sin(m-2N-4)\vartheta + \right. \\ \left. + \bar{K}_m^{(2)} \sin(m-2N)\vartheta - \bar{K}_m^{(3)} \sin(m-2)\vartheta + \right. \\ \left. + \bar{K}_m^{(5)} \sin(m+2)\vartheta - \bar{K}_m^{(6)} \sin(m+2N)\vartheta + \right. \\ \left. + \bar{K}_m^{(8)} \sin(m+2N+4)\vartheta] + \dots \right\}; \quad (XI.87) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{ns\Gamma}^I = g(\vartheta, \varepsilon) = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m i^m \left\{ \frac{1}{2} J_m(\omega) [\cos(m+2)\vartheta + \right. \\ \left. + \cos(m-2)\vartheta] + \varepsilon 2 [\bar{k}_m^{(0)} \cos(m-N-3)\vartheta + \bar{k}_m^{(2)} \cos(m-N+1)\vartheta + \right. \\ \left. + \bar{k}_m^{(3)} \cos(m+N-1)\vartheta + \bar{k}_m^{(5)} \cos(m+N+3)\vartheta] + \right. \\ \left. + \varepsilon^2 2 [\bar{K}_m^{(0)} \cos(m-2N-4)\vartheta + \bar{K}_m^{(2)} \cos(m-2N)\vartheta - \right. \\ \left. - \bar{K}_m^{(3)} \cos(m-2)\vartheta + \bar{K}_m^{(5)} \cos(m+2)\vartheta + \right. \\ \left. + \bar{K}_m^{(6)} \cos(m+2N)\vartheta + \bar{K}_m^{(8)} \cos(m+2N+4)\vartheta] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Величины  $\bar{k}_m^{(s)}$ ,  $\bar{K}_m^{(s)}$  ( $s = 0, 1, \dots, 8$ ;  $m = 0, 1, 2, \dots$ ) определены формулами (XI.84), в которых  $\omega\xi$  должно быть заменено на  $\omega$ , а множители  $1 + \nu$ ,  $1 - \nu$  опущены.

Подставляя (XI.87) и (XI.68) в (XI.82), получаем системы уравнений для определения произвольных постоянных. Вычисления проводились так же, как и для случая волны сжатия. На рис. XI.25 и XI.26 приведены графики для  $\sigma_s$  на контуре квадратного отверстия при  $\varepsilon = -1/6$  в точках  $\vartheta = \pi/4$  и  $\vartheta = 3\pi/4$ . На этом примере хорошо видна несимметричность в распределении напряжений в «теневого» и «освещенной» об-

ластях\*. Так, если при  $\theta=3\pi/4$  и  $\omega=1$  значение  $\sigma_s$  падает до 4, то при  $\theta=\pi/4$  и  $\omega=1$  оно превышает 7. В «тене­вой» области диапазон частот с высоким коэффициентом концентрации более растянут, чем в «осве­

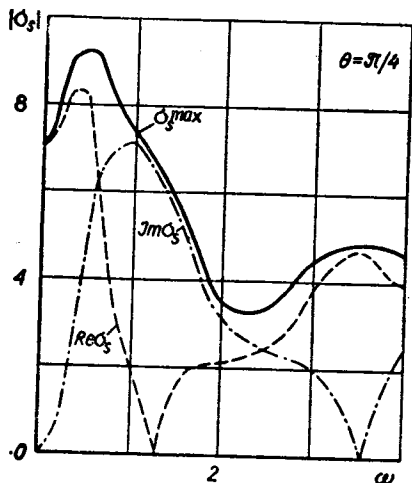


Рис. XI.25.

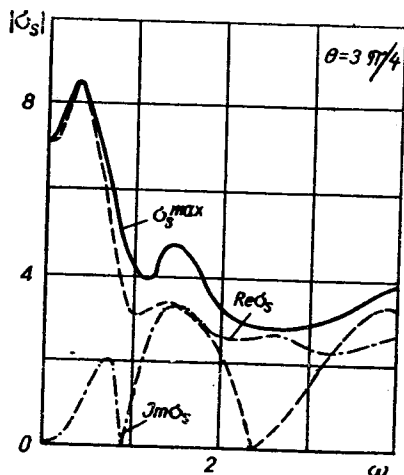


Рис. XI.26.

щенной». Еще более заметно это различие при сравнении вещественных или мнимых значений  $\sigma_s$  в этих точках. В частности, при  $\theta=\pi/4$  и  $\omega=0,4$  напряжения  $\sigma_s^{\max}=9,234$ , что на 15,4% превышает статическое значение.

## § 5. Некоторые замечания о задачах для многосвязных областей

Решение задач об установившихся колебаниях упругого тела, занимающего многосвязную область, содержится в монографии В. Д. Купрад­зе [2] и в статье Д. И. Шермана [1]. В монографии В. Д. Купрад­зе [2] все основные граничные задачи упругих колебаний сведены к интегральным уравнениям. В работе Д. И. Шермана [1] рассматривается лишь первая граничная задача. Решение получено в виде системы двух интегральных уравнений Фредгольма второго ряда.

В статьях А. Н. Гузя [1, 2] приводится решение динамической плос­кой задачи для бесконечной многосвязной области, ограниченной круговыми контурами, при заданных смещениях точек границы. Для по­стоянных решения, представленного в виде ряда, получена бесконечная система алгебраических уравнений. После замены неизвестных послед-

\* «Освещенная» часть контура отделяется от «тене­вой» наибольшим диаметром отверстия, перпендикулярного к направлению распространения падающей волны.

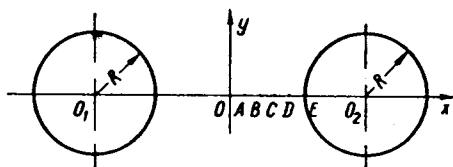


Рис. XI.27.

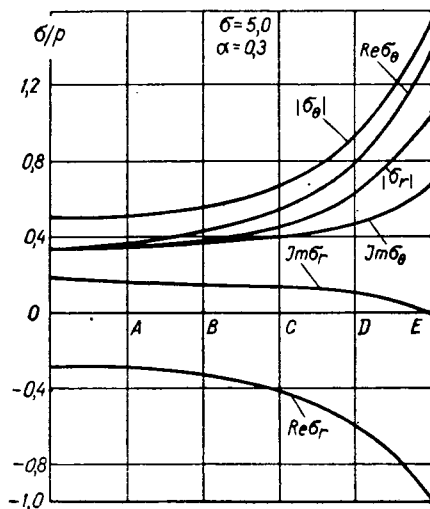


Рис. XI.28.

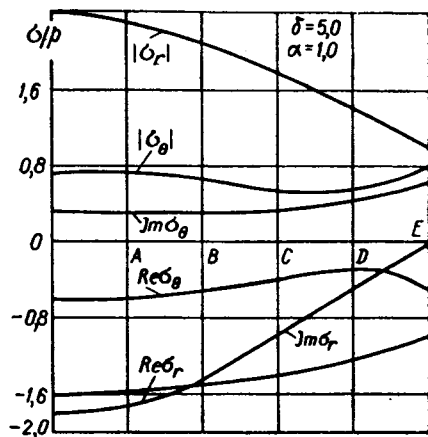


Рис. XI.29.

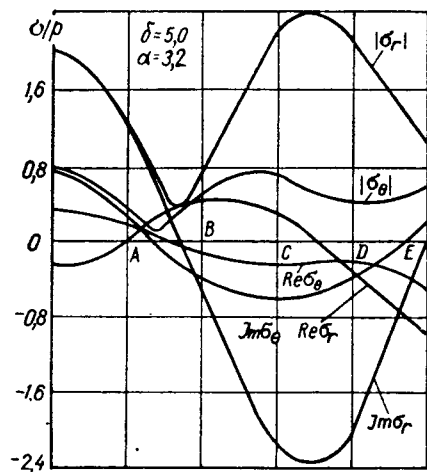


Рис. XI.30.

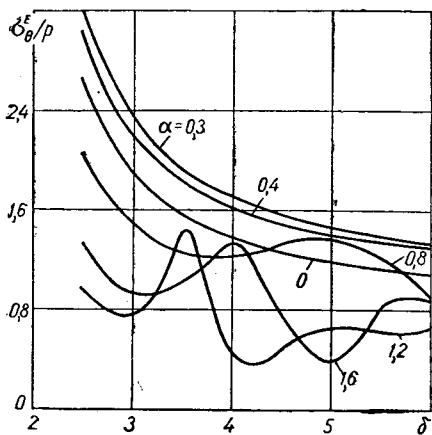


Рис. XI.31.

няя преобразуется в бесконечную квазирегулярную систему с определителем нормального типа.

Аналогичным методом в статье В. Т. Головчана [1] решены основные плоские граничные задачи теории установившихся колебаний для конечной многосвязной области.

При использовании метода, изложенного в работе А. Н. Гузя [1], приближенное решение бесконечных систем алгебраических уравнений может быть найдено методом редукции. Применение ЭЦВМ позволяет получить решение, удовлетворяющее граничным условиям с необходимой степенью точности.

Таким путем В. Т. Головчаном [2, 3] решена задача о динамической концентрации напряжений в бесконечной пластинке с двумя одинаковыми круговыми отверстиями, рис. XI.27, контуры которых загружены гармоническим давлением. В статьях приведены многочисленные графики для напряжений в точках на линии центров отверстий в зависимости от расстояния между отверстиями и параметра  $\alpha = 2\pi R/L$ , где  $R$  — радиус отверстий, а  $L$  — длина волны продольного типа.

Полученные результаты показывают, что характер распределения

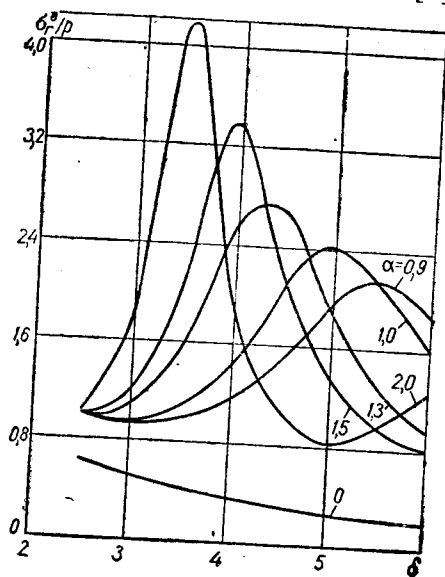


Рис. XI.32.

напряжений в пластинке при данном  $\delta$  ( $\delta = \frac{O_1 O_2}{R}$ ) — относительное расстояние; (см. рис. XI.27) существенным образом зависит от значения параметра  $\alpha$ , т. е. от длины распространяющейся в пластинке продольной волны. На рис. XI.28, XI.30 показаны графики напряжений, отнесенных на  $p$ , на половине перемычки между отверстиями для  $\delta = 5$ , при некоторых характерных значениях параметра  $\alpha$ . Указанные значения  $\alpha$  близки к тем, при которых  $|\sigma_\theta^E|$  (рис. XI.28) или  $|\sigma_r^0|$  (рис. XI.29 и XI.30) принимают в диапазоне  $0 \leq \alpha \leq 3,2$  максимальные значения. На рис. XI.31 и XI.32 представлены кривые изменения амплитуды напряжений  $\sigma_\theta^E$  и  $\sigma_r^0$  как функции  $\delta$ .

Из приведенных графиков следует, что напряженное состояние в пластинке возле отверстий при динамическом нагружении существенно образом отличается как качественно, так и количественно от статического нагружения, соответствующего случаю  $\alpha = 0$ .

## ЛИТЕРАТУРА

- Головчан В. Т. [1] О решении граничных задач установившихся колебаний для конечной многосвязной области.— Прикл. мех., 1967, 3, 3.  
 [2] О концентрации динамических напряжений в пластинке с двумя круговыми отверстиями.— Прикл. мех., 1967, 3, 11.  
 [3] О распределении динамических напряжений между отверстиями в бесконечной пластинке.— Прикл. мех., 1968, 4, 4.
- Грузь А. Н. [1] О решении второй плоской динамической задачи теории упругости для многосвязных областей.— Прикл. мех., 1966, 2, 8.  
 [2] О решении динамических задач для нескольких параллельных цилиндрических полостей.— В кн.: Пробл. мех. горн. пород. Изд-во АН КазССР, Алма-Ата, 1966.
- Кубенко В. Д. [1] Распространение упругих волн от кругового отверстия в анизотропной неоднородной пластине.— Прикл. мех., 1965, 1, 2.  
 [2] Распространение упругой волны расширения от кругового отверстия в цилиндрически анизотропной неоднородной пластине.— В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.  
 [3] Напряжения около эллиптического отверстия, подверженного осциллирующему давлению.— Прикл. мех., 1965, 1, 5.  
 [4] Динамічна концентрація напружень біля еліптичного отвору.— ДАН УРСР, 1967, 1.  
 [5] Динамическая концентрация напряжений около квадратного отверстия (установившиеся волновые движения).— Прикл. мех., 1966, 2, 12.  
 [6] О распространении плоской гармонической волны сдвига в пластине с квадратным отверстием.— Прикл. мех., 1968, 4, 2.  
 [7] Некоторые динамические задачи концентрации напряжений около отверстий. Автореферат канд. диссерт., Ин-т механики АН УССР, К., 1966.
- Купрадзе В. Д. [1] Основные задачи математической теории дифракции. ОНТИ, Л.— М., 1935.  
 [2] Методы потенциала в теории упругости. Физматгиз, М., 1963.
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. [1] Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.
- Лехницкий С. Г. [1] Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М.— Л., 1957.
- Ляв А. [1] Математическая теория упругости. ОНТИ, Л.— М., 1935.
- Миндлин Я. А. [1] О распространении волн в двух измерениях.— ДАН СССР, 1939, 25, 4.  
 [2] О распространении упругих волн в двух измерениях.— ДАН СССР, 1939, 24, 4.
- Морс Ф. М., Фешбах Г. [1] Методы теоретической физики, т. 1 и 2. ИЛ, М., 1958.
- Ольшак В., Мруз З., Пежина П. [1] Современное состояние теории пластичности. «Мир», М., 1964.
- Рахматулли Х. А., Демьянов Ю. М. [1] Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. Физматгиз, М., 1961.
- Рахматуллин Х. А., Шапиро Г. С. [1] Распространение возмущений в нелинейно-упругой и неупругой среде.— Изв. АН СССР, ОТН, 1955, 2.  
 [2] Современные задачи динамики упруго-вязко-пластического тела.— В кн.: Вопросы динамики и динамической прочности, 3. Изд-во АН ЛатвССР, Рига, 1955.
- Савин Г. Н., Шульга Н. А. [1] Динамическая плоская задача моментной теории упругости. Прикл. мех., 1967, 3, 6.
- Сидляр М. М. [1] Концентрація динамічних напруг навколо кругового отвору в пластівці, що знаходиться під дією поздовжніх зусиль, прикладених на її краях.— В кн.: Математичн. зб. КГУ, 4. Вид-во КГУ, 1950.  
 [2] Про одну динамічну задачу визначення напруг поблизу отвору.— В кн.: Математичн. зб. КГУ, 10. Вид-во КГУ, 1957.
- Шерман Д. И. [1] Об установившихся упругих колебаниях при заданных смещениях на границе среды.— ПИММ, т. X, 1946, 10.
- Banough R. P., Goldsmith W. [1] Diffraction of steady elastic waves by surfaces of arbitrary shape, Journla of Applied Mechanics, ASME, E, N 4, 1963.

- Baron M. L., Mathews A. T. [1] Diffraction of pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium.— *Journal of Applied Mechanics*, ASME, E, N 3, 1961, E, 8.  
[2] Diffraction of shear wave by a cylindrical cavity in an elastic medium.— *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1962, E, 1.
- Baron M. L., Parnes R. [1] Displacements and velocities produced by the diffraction of a pressure wave by a cylindrical cavity in an elastic medium.— *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1962, E, 2.
- Eason G. [1] Propagation of waves from spherical and cylindrical cavities.— *ZAMP*, 1963, 1.
- Goodier J. N., Johsman W. E. [1] Propagation of a sudden rotary disturbance in an elastic plate in plane stress.— *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1956, E, 2.
- Kolsky H. [1] Stress waves in solids, Clarendon Press, 1953.  
[2] Propagation of stress waves in viscoelastic solids, *Applied Mechanics Reviews*, N 9, 1958.
- Kömm A. [1] Zur Ausbreitung von Stoßwellen in Kreislochscheiben, *ZAMM*, N 4, 1948.  
[2] Zur Ausbreitung von Stoßwellen in Kreislochscheiben.— *ZAMM*, 1948, 10.
- Lamb H. [1] Problems relating to the impact of waves on a spherical obstacle in an elastic medium, *Proceeding of the London Mathematical Society*, vol. 32, 1900, p. 120.
- Miklowitz J. [1] Plane-stress unloading waves emanating from a suddenly punched hole in a stressed elastic plane.— *Journal Applied Mechanics*, ASME, 1960, E, 1.
- Mindlin R. D., Medick M. A. [1] Extensional vibrations of elastic plates.— *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1959, E, 4.
- Now C. C., Mente L. J. [1] Dynamic stresses and displacements around cylindrical discontinuities due to plane harmonic waves.— *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1963, E, 4.
- Pao Y. H. [1] Dynamical stress concentration in an elastic plate.— *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1962, E, 2.
- Pao Y. H., Mow C. C. [1] Dynamic stress concentration in an elastic plate with rigid circular inclusion, *Proceeding of the 4-th U. S. National Congress of Applied Mechanics*, Berkeley, California, Pergamon Press, 1962, 335—346.
- Selberg H. L. [1] Transient compression Waves from spherical and cylindrical cavities.— *Arkiv for Fysik*, 1952, 2.
- Sternberg E., Chakraborty I. C. [1] On the propagation of shock wave in a non-homogeneous elastic medium.— *Journal of Applied Mechanics*, ASME, 1959, E, 4.

# ВЛИЯНИЕ ВЯЗКО-УПРУГИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА НА РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЙ

## § 1. Основные соотношения линейной теории вязко-упругих сред

**Постановка задачи.** Многочисленные эксперименты показывают, что фактор времени играет существенную роль в процессе деформации таких материалов, как бетон, дерево, высокополимеры, а также металлов, в особенности при повышенных температурах. В телах из таких материалов, если после приложения нагрузки не произойдет разрушение, стационарное состояние достигается по истечении определенного промежутка времени, который в зависимости от способа нагружения и других причин может длиться от нескольких секунд до многих лет.

За период, соизмеримый со сроком службы машины или сооружения, напряженное состояние в деталях этих машин или элементах сооружений будет значительно изменяться и поэтому не может рассматриваться стационарным. Фактор времени влияет на процесс деформации в целом, т. е. на все три стадии—упругую, пластическую и разрушения.

Отсюда вытекает необходимость применения вместо известных соотношений упругости в виде обобщенного закона Гука, предполагающих мгновенное установление в теле вполне определенного и неизменного во времени напряженного и деформированного состояния, таких соотношений-законов, которые связывали бы величины напряжений и деформаций со временем.

Наиболее совершенными для описания процесса деформирования во времени являются соотношения, содержащие временные интегральные операторы с ядрами релаксации и последствия. Такие зависимости были впервые предложены V. Volterra [1], а затем Ю. Н. Работновым [1], М. И. Розовским [1], Н. Х. Арутюняном [1] и др.

Для ряда материалов удовлетворительное описание процессов деформирования во времени возможно на основе линейных теорий вязко-упругих сред, из которых особое внимание заслуживает теория вязко-упругой наследственности В. Вольтерра.

Уравнения наследственной теории упругости В. Вольтерра получают\* заменой в соотношениях классической теории упругости упругих констант  $E$ ,  $G$  и  $\nu$  интегральными операторами  $\bar{E}$ ,  $\bar{G}$  и  $\bar{\nu}$ :

$$\bar{E}e_x = \sigma_x - \bar{\nu}(\sigma_y + \sigma_z), \quad (\text{XII.1})$$

$$\tau_{xy} = 2G\bar{e}_{xy} \quad (x, y, z), \quad (\text{XII.2})$$

\* См. Ю. Н. Работнов [1].

где

$$\begin{aligned} \bar{G}f &= G_0 (1 - \dot{R}_1) f; \\ \bar{E}f &= E_0 (1 - \dot{R}_2) f; \end{aligned} \tag{XII.3}$$

$$\bar{\nu}f = \nu_0 (1 + \dot{R}_3) f.$$

Интегральные операторы  $\dot{R}_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) с ядрами релаксации  $R_i(t, s)$ , действующие на некоторую функцию  $f(x, y, z, t)$  координат  $(x, y, z)$  и времени  $t$ , имеют вид

$$\dot{R}_i f = \int_0^t R_i(t, s) f(x, y, z, s) ds \quad (i = 1, 2, 3). \tag{XII.4}$$

В соотношениях (XII.3)  $G_0$  и  $E_0$  — соответственно мгновенные модули сдвига и нормальной деформации;  $\nu_0$  — мгновенный коэффициент Пуассона. Символ  $(x, y, z)$  показывает, что остальные зависимости в (XII.1) и (XII.2) между составляющими напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{xy}$  и деформации  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots, \varepsilon_{xy}$  получаются круговой перестановкой букв  $x, y$  и  $z$ .

Операторы  $\bar{G}$  и  $\bar{E}$  называются операторами релаксации. Операторы ползучести  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$  определяются соответственно как операторы, обратные операторам  $\bar{G}$  и  $\bar{E}$ :

$$\bar{P}_1 = \frac{1}{\bar{G}} = \frac{1}{G_0(1 - \dot{R}_1)} = \frac{1}{G_0} (1 + \dot{P}_1), \tag{XII.5}$$

$$\bar{P}_2 = \frac{1}{\bar{E}} = \frac{1}{E_0(1 - \dot{R}_2)} = \frac{1}{E_0} (1 + \dot{P}_2), \tag{XII.6}$$

где

$$\frac{1}{1 - \dot{R}_i} = 1 + \dot{R}_i + \dot{R}_i^2 + \dot{R}_i^3 + \dots + \dot{R}_i^{n-1} + \dots \quad (i = 1, 2). \tag{XII.7}$$

В разложении (XII.7) степени оператора  $\dot{R}_i$  выражаются через повторные ядра исходного ядра  $\dot{R}_i$  следующим образом:

$$\dot{R}_i^{n-1} f = \int_0^t R_{i;n-1}(t, s) f(s) ds, \tag{XII.8}$$

где

$$R_{i;n-1}(t, s) = \int_s^t R_i(t, u) R_{i;n-2}(u, s) du. \tag{XII.9}$$

Ядро  $P_1(t, s)$  интегрального оператора  $\dot{P}_1$  и ядро  $R_1(t, s)$  интегрального оператора  $\dot{R}_1$  определяются из опытов на кручение образцов: пер-



вое — по кривой ползучести, второе — по кривой релаксации. Ядро  $P_1(t, s)$  есть резольвента ядра  $R_1(t, s)$ . Ряд (XII.7), как известно \*, сходится равномерно для всякого конечного промежутка изменения аргументов  $t$  и  $s$  при регулярном или слабо сингулярном \*\* ядре.

В выражении (XII.6) ядра  $P_2(t, s)$  и  $R_2(t, s)$  интегральных операторов  $\bar{P}_3$  и  $\bar{R}_2$  в отличие от указанных выше ядер определяются из опытов на растяжение или чистый изгиб образцов: первое — по кривой ползучести, второе — по кривой релаксации.

Оператор  $\bar{v}$  может быть выражен через указанные интегральные операторы. Так, пренебрегая влиянием фактора времени (наследственности) при всестороннем сжатии, т. е. считая объемную деформацию упругой, Ю. Н. Работнов [2] получил формулу

$$\bar{v} = v_0 \left( 1 + \frac{1-2v_0}{2v_0} \bar{R}_2 \right). \quad (\text{XII.10})$$

Выразить оператор  $\bar{v}$  через оператор  $\bar{R}_1$  нельзя. Согласно М. И. Розовскому [2] будем иметь

$$\bar{v} = v_0 + (1 + v_0) \bar{H}, \quad (\text{XII.11})$$

где ядро  $H(t, s)$  интегрального оператора  $\bar{H}$  представляет собой резольвенту ядра  $0,5(1-2v_0)R_1(t, s)$ .

Использование ядер  $R_1(t, s)$  и  $R_2(t, s)$  для выражения оператора  $\bar{v}$  в общем случае, т. е. с учетом влияния фактора времени на дилатацию, требует расшифровки отношения операторов \*\*\*  $\bar{E}$  и  $\bar{G}$ .

Временные интегральные операторы  $\bar{G}$ ,  $\bar{E}$  и  $\bar{v}$  (XII.3) и пространственные операторы дифференцирования и интегрирования по координатам при умножении обладают свойством переместительности. Поэтому любую \*\*\*\* задачу с учетом влияния фактора времени (наследственной упругости) можно решать как задачу обычной теории упругости, и лишь в окончательном результате следует заменить упругие константы  $G$ ,  $E$  и

\* См. Н. Н. Долинина [1].

\*\* Т. е. для ядер вида (XII.12)—(XII.14).

\*\*\* См. М. И. Розовский [2].

\*\*\*\* Кроме тех задач, в которых границы изменяются с течением времени. См., например А. Б. Ефимов [1] и Г. А. С. Graham [1]. В частности, это изменение границ будет иметь место в случае так называемых «контактных задач концентрации напряжений» — задач о концентрации напряжений возле подкрепленных отверстий, — когда подкрепляющее кольцо без «натяга» просто вложено (и не припаяно!) в отверстие упругой плоскости. При одноосном, например, растяжении плоскости с подкрепленным таким способом отверстием материал упругой плоскости будет в некоторых частях отходить от кольца, и в этом случае область контакта между кольцом и упругой плоскостью будет заранее неизвестна; вследствие ползучести материала она будет изменяться с течением времени. Последняя (область контакта) должна быть определена в результате решения задачи.

в операторах  $\bar{G}$ ,  $\bar{E}$  и  $\bar{\nu}$ , определенными соотношениями (XII.3). Основная трудность, возникающая при использовании принципа В. Вольтерра, состоит в расшифровке различных функций операторов, появляющихся в результате указанной замены упругих постоянных  $E$ ,  $G$  и  $\nu$  в решении пространственной (или плоской) задачи для идеально упругого

тела, операторами  $\bar{E}$ ,  $\bar{G}$  и  $\bar{\nu}$ .

**Выбор ядер интегральных операторов.** В качестве ядер интегральных операторов выбирают характерные для рассматриваемого материала функции, которые отражают влияние единичного напряжения, действующего в единичный промежуток времени  $\tau$ , на деформацию в момент времени  $t$ . Вид этих функций устанавливается на основе анализа данных экспериментальных исследований на ползучесть или релаксацию. Экспериментально определенные таким путем ядра последствия и релаксации обладают особенностью при  $t - \tau = 0$ .

Приведем аналитические выражения ядер для некоторых материалов, полученных на основе экспериментов.

Экспериментируя над ремнями, G. Duffing [1] установил, что ядро последствия следует брать в виде

$$A(t - \tau)^{-\alpha}, \quad (\text{XII.12})$$

где  $\alpha = 4/5$ ;  $A$  — постоянная.

В результате обработки кривых релаксации резины А. П. Бронский [1] нашел, что искомое ядро целесообразно представить в виде

$$A(t - \tau)^\alpha \exp[-(t - \tau)^{1-\alpha}], \quad \alpha > 0. \quad (\text{XII.13})$$

Резольвенту ядра (XII.13) найти не удалось.

Для учета влияния возрастного изменения бетона Н. Х. Арутюнян [1] предложил ядро вида

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( C + \frac{A}{\tau} \right) (1 - e^{-\gamma(t-\tau)}), \quad (\text{XII.14})$$

где  $A$ ,  $C$  и  $\gamma$  — постоянные.

Интегральный оператор (XII.14) не является инвариантом при изменении начала отсчета времени, что позволяет при помощи этого оператора отражать влияние физико-химических процессов в некоторых «стареющих» материалах и в частности в бетоне, протекающих во времени, на их механические характеристики.

Чтобы сделать принцип В. Вольтерра эффективным средством решения задач с учетом влияния фактора времени, Ю. Н. Работнов [2] предложил при построении оператора релаксации применять экспоненциальную функцию дробного порядка

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta; t - \tau) = (t - \tau)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n (t - \tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]} \quad (0 > \alpha > -1). \quad (\text{XII.15})$$

Ряд (XII.15) сходится при всяком конечном значении  $t-\tau$ . Ядро типа (XII.15) обладает той же особенностью, что и ядро (XII.13), и заключает в себе как частный случай ядро (XII.12).

Ю. Н. Работнов [2] показал, что интегральные операторы с ядрами типа (XII.15) обладают следующими свойствами:

$$\dot{\mathcal{A}}_{\alpha}(x)\dot{\mathcal{A}}_{\alpha}(y) = \frac{\dot{\mathcal{A}}_{\alpha}(x) - \dot{\mathcal{A}}_{\alpha}(y)}{x-y} \quad \text{при } x \neq y, \quad (\text{XII.16})$$

$$\dot{\mathcal{A}}_{\alpha}^2 = \frac{\partial \dot{\mathcal{A}}_{\alpha}(x)}{\partial x} \quad \text{при } x = y;$$

$$\frac{1}{1 - \kappa \dot{\mathcal{A}}_{\alpha}(\beta)} = 1 + \kappa \dot{\mathcal{A}}_{\alpha}(\kappa + \beta) + \dots; \quad (\text{XII.17})$$

М. И. Розовским [3,5] установлено, что

$$\frac{1}{1 - \sum_{k=1}^m \xi_k \dot{\mathcal{A}}_{\alpha}(x_k)} = 1 + \sum_{k=1}^m a_k \dot{\mathcal{A}}_{\alpha}(\mu_k), \quad (\text{XII.18})$$

где  $\mu_k$  ( $k = 1, 2, 3, \dots, m$ ) являются корнями уравнения

$$1 + \sum_{n=1}^m \frac{\xi_n}{x_n - \mu} = 0, \quad (\text{XII.19})$$

а коэффициенты  $a_k$  определяются из системы  $m$  линейных алгебраических уравнений

$$1 + \sum_{k=1}^m \frac{a_k}{x_n - \mu_k} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (\text{XII.20})$$

$$\prod_{i=1}^n \dot{\mathcal{A}}_{\alpha}^{m_i}(x_i) = \frac{1}{\prod_{i=1}^n (m_i - 1)!} \frac{\partial^{m_1+m_2+\dots+m_n-n}}{\partial x_1^{m_1-1} \partial x_2^{m_2-1} \dots \partial x_n^{m_n-1}} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\dot{\mathcal{A}}_{\alpha}(x_i)}{\prod_{k=1}^n (x_i - x_k)} \right]. \quad (\text{XII.21})$$

Формула (XII.21) позволяет выразить произведение различных степеней операторов через производные по параметрам  $x_i$  исходного ядра  $\dot{\mathcal{A}}_{\alpha}(x_i)$ .

При окончательной расшифровке искомых напряжений и деформаций как функций координат и времени в практических расчетах можно

воспользоваться аппроксимацией  $\dot{\mathcal{E}}_\alpha$ -оператора \* в виде

$$\dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\beta) 1 \approx \frac{1}{\beta} (1 - e^{-\beta \gamma t^{(1+\alpha)}}), \quad (\text{XII.22})$$

где

$$\gamma = (1 + \alpha)^{(1+\alpha)}; \quad -1 < \alpha < 0; \quad \text{Re } \beta > 0.$$

При воздействии на единицу  $\dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\beta)$ -оператор может быть выражен\*\* через функцию Миттаг — Леффлера порядка  $(1 + \alpha)$  в виде

$$\dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\beta) 1 = \frac{1}{\beta} [1 - E_{1+\alpha}(-\beta t^{1+\alpha})]. \quad (\text{XII.23})$$

Числовые значения\*\*\* функции  $E_{1+\alpha}(-\xi)$  ( $\xi = \beta t^{1+\alpha}$ ), входящей в (XII.23) при  $\alpha = -0,7$ , приведены ниже:

$\xi$	$E_{0,3}(-\xi)$	$\xi$	$E_{0,3}(-\xi)$
0	1	0,6	0,5882
0,1	0,8985	0,7	0,5504
0,2	0,8149	0,8	0,5112
0,3	0,7450	0,9	0,4922
0,4	0,6782	1,0	0,4904
0,5	0,6246		

В предельном случае  $\alpha = 0$  функция  $\mathcal{E}_\alpha(\beta, t - \tau)$  (XII.15) переходит в обычную экспоненциальную функцию.

Экспоненциальные ядра вида

$$e^{-b_k(t-\tau)} \dots \quad (\text{XII.24})$$

являются наиболее простыми, но они, как видно, не обладают особенностью при  $t - \tau = 0$ .

Простым дифференцированием нетрудно показать, что при некоторых ограничениях, накладываемых на постоянные  $b_k$  и начальные условия, интегральные операторы с экспоненциальными ядрами эквивалентны дифференциальным операторам\*\*\*\* вида

$$\sum_{k=0}^n a_k \frac{\partial^k \sigma}{\partial t^k} = \sum_{s=0}^m b_s \frac{\partial^s e}{\partial t^s}. \quad (\text{XII.25})$$

**Экспериментальное определение реологических параметров.** Обработка экспериментальных кривых ползучести (последействия) и релак-

\* См. М. И. Розовский [4], а также Б. Д. Аннин [1].

\*\* См. М. И. Розовский [2].

\*\*\* См. М. И. Розовский [6].

\*\*\*\* При соотношениях вида (XII. 25) J. R. Radok [1] изучена концентрация напряжений возле кругового (как свободного, так и с впаянной упругой или абсолютно жесткой шайбой) отверстия в условиях плоской деформации в несжимаемом материале типа Фойгта и Максвелла.

сация может быть осуществлена при помощи аппроксимации (XII.22) или точного представления (XII.23).

Наиболее просто такая обработка выполняется, если воспользоваться аппроксимацией (XII.22). В этом случае кривая простой ползучести обрабатывается по формуле

$$\frac{\varepsilon(t) - \varepsilon_0}{\varepsilon_0} = a[1 - \exp(-b\gamma t^{1+a})], \quad (\text{XII.26})$$

где  $\varepsilon(t)$  — деформация (при растяжении или чистом изгибе) в момент времени  $t$ ;  $\varepsilon_0$  — мгновенная деформация;  $a$  и  $b$  — параметры ползучести.

Кривые релаксации обрабатываются по аналогичным формулам. Если кривая релаксации отсутствует, то параметры релаксации  $\tau$  и  $\lambda$  могут быть подсчитаны по формулам

$$\lambda_2 = \frac{a}{1+a} \quad \text{и} \quad \tau_2 = \left[ \frac{\gamma}{(1+a)b} \right]^{\frac{1}{1-a}} \quad (\text{XII.27})$$

при известных значениях параметров ползучести  $a$  и  $b$ .

Кривые ползучести и релаксации, полученные из опытов на кручение образцов, обрабатываются аналогично изложенному выше.

## § 2. Распределение напряжений возле отверстия в однородных вязко-упругих материалах

**Распределение изгибающих моментов около отверстий при кручении тонких плит.** Пусть тонкая изотропная пластинка (плита) толщиной  $h$  находится под действием крутящих моментов  $\mathcal{H} = \text{const}$ , приложенных по всему краю плиты. Если к четырем граням прямоугольной плиты приложены распределенные крутящие моменты  $\mathcal{H}$ , то \* распределение моментов по контуру эллиптического, квадратного или треугольного отверстия можно представить в виде

$$M_\theta = \varphi(\nu) \psi(\theta). \quad (\text{XII.28})$$

Выделение функции  $\psi(\theta)$ , характеризующей распределение изгибающих моментов  $M_\theta$  по контуру отверстия, в виде сомножителя означает, что распределение  $M_\theta$  по контуру отверстия будет для последовательных фиксированных моментов времени геометрически подобным.

Рассмотрим в качестве примера зависимость от времени  $M_\theta$  по контуру квадратного отверстия. Для упрощения дальнейших выкладок в формуле \*\*

$$M_\theta = \frac{48(1+\nu)}{19+5\nu} \cdot \frac{\mathcal{H} \sin 2\theta}{5+4\cos \theta}, \quad (\text{XII.29})$$

\* См. Г. Н. Савин [1], гл. VI § 4.

\*\* См. Г. Н. Савин [1], формула (6.96), а также фиг. 152.

определяющей распределение изгибающих моментов  $M_\theta$  при  $t=0$  (упруго-мгновенное состояние), целесообразно выделить из правой части (XII.29) слагаемое, не зависящее от  $v$ :

$$M_\theta = \left(1 - \frac{14}{5v + 19}\right) \psi(\theta), \quad (\text{XII.30})$$

где

$$\psi(\theta) = \frac{48\mathcal{E} \sin 2\theta}{25 + 20\cos 4\theta}.$$

Подставляя в (XII.30) вместо  $v$  оператор

$$\bar{v} = v_0 [1 + \delta \dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\beta)], \quad (\text{XII.31})$$

где  $v_0$  — значение коэффициента Пуассона при  $t=0$ ,  $\delta$  и  $\beta$  — реологические характеристики, найдем

$$M_\theta(t) = M_\theta(0) \left[1 + \frac{14v_0\delta}{(1+v_0)(19+5v_0)} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\beta_1)\right]; \quad (\text{XII.32})$$

здесь

$$\beta_1 = \beta + \frac{5v_0\delta}{19+5v_0}.$$

Обращение операторов выполнено по формуле (XII.17).

Интегрируя с учетом формулы (XII.22), получаем

$$M_\theta(t) \approx M_\theta(0) \left\{1 + \frac{14v_0\delta [1 - \exp(-\gamma\beta_1 t^{1+\alpha})]}{(1+v_0)[19\beta + 5v_0(\beta + \delta)]}\right\}. \quad (\text{XII.33})$$

Значения параметров  $\beta$ ,  $\delta$ ,  $\alpha$  и  $v_0$  из экспериментальных данных, полученных при условии простой релаксации медных и алюминиевых образцов при комнатной температуре\*, приведены в табл. XII.1.

Таблица XII.1

Материал	$v_0$	$\alpha$	$\beta$	$\delta$
Алюминий	0,25	-0,50	$6,65 \cdot 10^{-3} \text{сек}^{-0,5}$	$6,15 \cdot 10^{-3} \text{сек}^{-0,5}$
Медь	0,25	-0,50	$9,2 \cdot 10^{-3} \text{сек}^{-0,5}$	$6,65 \cdot 10^{-3} \text{сек}^{-0,5}$

Результаты подсчетов, выполненных по формуле (XII.33) при значениях реологических характеристик, приведенных в табл. XII.1, показывают, что в установившемся (предельном) состоянии изгибающие моменты для алюминиевой плиты увеличивается на 12, а для медной — на 10%. При  $t \geq 300$  ч напряженное состояние в плите возле отверстия можно практически считать установившимся.

\* См. Б. М. Ровинский и В. Г. Лютцау [1].

Устремляя в (XII.33)  $t \rightarrow \infty$ , находим

$$(M_\theta)_\infty = M_\theta(0) \left\{ 1 + \frac{14\nu_0\delta}{(1+\nu_0)[19\beta + 5\nu_0(\beta + \delta)]} \right\}. \quad (\text{XII.34})$$

**Изгиб треугольной плиты, ослабленной круговым отверстием.** Рассмотрим измерение во времени напряженного состояния возле кругового отверстия при изгибе тонкой плиты формы равностороннего треугольника \*. Пусть на внешнем контуре плиты приложены равномерно-распределенные изгибающие моменты  $M$ . Выражение для изгибающих моментов в операторной форме будет иметь вид

$$M_\theta(t) = M_\theta(0) \left[ 1 + \bar{\nu} - \frac{2R}{C} \left( \bar{\nu} - 3 + \frac{8}{\bar{\nu} + 3} \right) \cos 3\theta \right]. \quad (\text{XII.35})$$

Отсюда, принимая во внимание формулу (XII.31), найдем

$$M_\theta(t) = M_\theta(0) [1 + a_1 \dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\beta) + a_2 \dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\beta_1)], \quad (\text{XII.36})$$

где

$$a_1 = \frac{1 - \psi(\theta)}{M_\theta(0)} \nu_0 \delta; \quad a_2 = \frac{2(5 - \nu_0)\psi(\theta)}{(3 + \nu_0)^2 M_\theta(0)} \nu_0 \delta;$$

$$\beta_1 = \beta + \frac{\nu_0 \delta}{3 + \nu_0}; \quad \psi(\theta) = \frac{2R}{C} \cos 3\theta.$$

Обращение операторов выполнено по формуле (XII.17).

Легко заметить, что геометрическое подобие распределения изгибающих моментов  $M_\theta$  (XII.36) по контуру отверстия уже не будет иметь места, так как со временем изменение  $M_\theta$  зависит от  $\theta$ .

Расшифровывая в (XII.36) операторы  $\dot{\mathcal{E}}_\alpha$  подобно изложенному выше для случая кручения тонких плит и производя вычисления при тех же реологических характеристиках, приняв  $R/C = 0,1$ , получим, что максимальное значение  $M_\theta$ , которое достигается при  $\theta = 0$ , увеличивается для алюминия при  $t \rightarrow \infty$  на 16%, а минимальное (при  $\theta = 180^\circ$ ) увеличивается при  $t \rightarrow \infty$  на 20%. Таким образом, разность между наибольшим и наименьшим значениями  $M_\theta$  с течением времени уменьшается.

**Плита с треугольным отверстием.** При чистом цилиндрическом изгибе плиты, ослабленной треугольным отверстием, изгибающие моменты на контуре отверстия \*\*

$$M_\theta(t) = M \left\{ \psi(\theta) + \frac{2}{3 + \bar{\nu}} [1 - \psi(\theta)] \right\}, \quad (\text{XII.37})$$

где

$$\psi(\theta) = \frac{5 + 12 \cos \theta - 18 \cos 3\theta}{13 - 12 \cos 3\theta}.$$

\* См. Г. Н. Савин [1], гл. VI, § 5, формула (6.108).

\*\* См. Г. Н. Савин [1], гл. VI, § 3, формула (6.84).

Принимая во внимание выражение (XII.31) и выполняя обращение по формуле (XII.17), найдем

$$M_{\theta}(t) = M_{\theta}(0) \left\{ 1 - \frac{2\delta [1 - \psi(\theta)]}{(3 + \nu_0)^2 M_{\theta}(0)} \mathfrak{A}_{\alpha}^* (-\beta_1) \right\}, \quad (\text{XII.38})$$

где

$$\beta_1 = \beta + \frac{\nu_0 \delta}{3 + \nu_0}.$$

Отсюда на основании аппроксимации (XII.22) получим

$$M_{\theta}(t) = M_{\theta}(0) \left\{ 1 - \frac{2\delta [1 - \psi(\theta)] [1 - \exp(-\gamma \beta_1 t^{1+\alpha})]}{(3 + \nu_0) [3\beta + \nu_0(\delta + \beta)] M_{\theta}(0)} \right\}. \quad (\text{XII.39})$$

В табл. XII.2 даны экстремальные значения  $M_{\theta}/M$ , найденные по формуле (XII.39) для алюминия при реологических значениях параметров, приведенных в табл. XII.1.

Из табл. XII.2 видим, что разность между наибольшей и наименьшей величиной изгибающих моментов  $M_{\theta}$  (XII.39) по контуру отверстия с течением времени увеличивается\*. «Критические» значения угла  $\theta_{\text{кр}}$ , при которых  $M_{\theta}(t)$  будет\*\* равно  $M_{\theta}(0)$  при любом значении  $t$ , как это видно из формулы (XII.39), определяются из условия

$$1 - \psi(\theta_{\text{кр}}) = 0. \quad (\text{XII.40})$$

**Одноосное растяжение пластинки, ослабленной круговым отверстием с впаянной круговой шайбой.** Если в круговое отверстие неограниченной вязко-упругой изотропной пластинки, растягиваемой «на бесконечности» напряжениями  $p$ , впаяна круговая шайба из другого (упругого) материала, то напряжения на контуре спая при  $r=R$  согласно принципа В. Вольтерра будут иметь вид\*\*\*

Таблица XII.2

$\theta^{\circ}$	$M_{\theta}(0)/M$	$M_{\theta}(\infty)/M$
0	0,23	0,15
4	0,38	0,31
120	3,90	4,23

$$\frac{2\sigma_r}{p} = 1 - \frac{R^2}{r^2} + \left( 1 - 4 \frac{R^2}{r^2} + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta + (1 + \bar{\kappa}) \frac{R^2}{r^2} \left( \frac{1}{b_1} + \frac{4}{b_2} \cos 2\theta \right) - 3 \frac{R^4}{r^4} \cdot \frac{1 + \bar{\kappa}}{b_2} \cos 2\theta; \quad (\text{XII.41})$$

$$\frac{2\sigma_{\theta}}{p} = 1 + \frac{R^2}{r^2} - \left( 1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta - (1 + \bar{\kappa}) \frac{R^2}{r^2} \left( \frac{1}{b_1} - \frac{3}{b_2} \cdot \frac{R^4}{r^4} \cos 2\theta \right);$$

\* Поскольку наибольшее значение  $M_{\theta}$  (XII.39) с течением времени увеличивается, а наименьшее — уменьшается.

\*\* При которых уменьшение  $M_{\theta}$  (XII.39) прекращается и начинается его увеличение.

\*\*\* См. Г. Н. Савин [1], гл. V, § 2, формулы (5.15) и (5.20).



$$\frac{2\tau_{r\theta}}{\rho} = - \left[ 2 \frac{R^2}{r^2} + 1 - 3 \frac{R^4}{r^4} - 2 \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{1 + \bar{\kappa}}{\bar{b}_2} \left( 1 - 1,5 \frac{R^2}{r^2} \right) \right] \sin 2\theta,$$

где

$$\bar{\kappa} = \kappa_0 [1 - q \dot{\mathcal{A}}_\alpha(-\eta)], \quad \bar{\kappa}_1 = \kappa_{10} [1 - q_1 \dot{\mathcal{A}}_\alpha(-\eta_1)]; \quad (\text{XII.42})$$

$$\bar{G} = G_0 [1 - Q \dot{\mathcal{A}}_\alpha(-\eta^*)], \quad \bar{G}_1 = G_{10} [1 - Q_1 \dot{\mathcal{A}}_\alpha(-\eta_1^*)]; \quad (\text{XII.43})$$

$$\bar{b}_1 = \frac{\bar{G}}{G_1} - \bar{\kappa}_1 \frac{\bar{G}}{G_1} - 2, \quad \bar{b}_2 = \bar{\kappa} + \frac{\bar{G}}{G_1}. \quad (\text{XII.44})$$

Параметры  $q$ ,  $Q$ ,  $\eta$ ,  $\eta^*$  выразим через  $\beta$  и  $\delta$ , численные значения для которых даны в табл. XII.1. Рассмотрим тонкую пластинку с впаиванной упругой (стальной) шайбой, для которой  $\mu = G = 8,10 \cdot 9,81 \cdot 10^9$  н/м<sup>2</sup>;

$$\kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu} = 2,08; \quad \nu = 0,3.$$

Применяя формулу (XII.17), получаем

$$\bar{\kappa} = \frac{3-\bar{\nu}}{1+\bar{\nu}} = \kappa_0 \left[ 1 - \frac{4\nu_0\delta}{(1+\nu_0)(3-\nu_0)} \dot{\mathcal{A}}_\alpha \left( -\beta - \frac{\nu_0\delta}{1+\nu_0} \right) \right]. \quad (\text{XII.45})$$

Из сопоставления (XII.42) и (XII.43) следует

$$q = \frac{4\nu_0\delta}{(1+\nu_0)(3-\nu_0)}, \quad \eta = \beta + \frac{\nu_0\delta}{1+\nu_0}.$$

Для нахождения  $Q$  и  $\eta^*$  воспользуемся известным соотношением

$$\bar{G} = \frac{\bar{E}}{2(1+\bar{\nu})}, \quad (\text{XII.46})$$

а также, считая объемную деформацию материала пластинки упругой, — соотношением

$$K_0 = \frac{1-2\nu_0}{E_0} = \frac{1-2\bar{\nu}}{\bar{E}}. \quad (\text{XII.47})$$

Тогда

$$\bar{G} = G_0 \left[ 1 - \frac{3\nu_0\delta}{(1-2\nu_0)(1+\nu_0)} \dot{\mathcal{A}}_\alpha^* \left( -\beta - \frac{\nu_0\delta}{1+\nu_0} \right) \right]$$

и, следовательно,

$$Q = \frac{3\nu_0\delta}{(1-2\nu_0)(1+\nu_0)}, \quad \eta^* = \eta.$$

Аналогично

$$\eta = \beta_1 + \frac{\nu_{10}\delta_1}{1+\nu_{10}}, \quad \eta_1^* = \eta_1,$$

$$q_1 = \frac{4\nu_{10}\delta_1}{(1+\nu_{10})(3-\nu_{10})}, \quad Q_1 = \frac{3\nu_{10}\delta_1}{(1-2\nu_{10})(1+\nu_{10})}.$$

Подставляя (XII.42) и (XII.43) в (XII.44), получаем

$$\bar{b}_1 = b_{10} [1 - a_1 \dot{\mathcal{A}}_\alpha(-\eta) + a_2 \dot{\mathcal{A}}_\alpha(Q_1 - \eta_1)], \quad (\text{XII.48})$$

где

$$a_1 = \frac{G_0 Q [(\eta_1 - \eta)(1 - \kappa_{10}) + q_1 \kappa_{10}]}{G_{10} b_{10} (\eta_1 - \eta - Q_1)},$$

$$a_2 = \frac{G_0 [Q_1 - \kappa_{10} (Q_1 - q_1)] (\eta_1 - \eta - Q_1 + Q)}{G_{10} b_{10} (\eta_1 - \eta - Q_1)};$$

$$b_{10} = \frac{G_0}{G_{10}} - \kappa_{10} \frac{G_0}{G_{10}} - 2, \quad (\text{XII.49})$$

Здесь

$$\bar{b}_2 = b_{20} [1 - a_3 \dot{\mathcal{A}}_\alpha(-\eta) + a_4 \dot{\mathcal{A}}_\alpha(Q_1 - \eta_1)].$$

$$a_3 = \frac{q \kappa_0}{b_{20}} + \frac{G_0 Q (\eta_1 - \eta)}{b_{20} G_{10} (\eta_1 - \eta - Q_1)};$$

$$a_4 = \frac{G_0 Q_1 (\eta_1 - \eta - Q_1 + Q)}{G_{10} b_{20} (\eta_1 - \eta - Q_1)};$$

$$b_{20} = \kappa_0 + \frac{G_0}{G_{10}}.$$

Для обращения агрегата операторов (XII.28) и (XII.29) применим формулы (XII.18) — (XII.20), согласно которым

$$\frac{1}{\bar{b}_1} = \frac{1}{b_{10}} [1 + A_1 \dot{\mathcal{A}}_\alpha(\mu_1) + A_2 \dot{\mathcal{A}}_\alpha(\mu_2)],$$

$$\frac{1}{\bar{b}_2} = \frac{1}{b_{20}} [1 + A_3 \dot{\mathcal{A}}_\alpha(\mu_3) + A_4 \dot{\mathcal{A}}_\alpha(\mu_4)]. \quad (\text{XII.50})$$

Здесь  $\mu_i$  — корни квадратных уравнений

$$\mu_i^2 + p_1 \mu_i + T_1 = 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$\mu_i^2 + p_2 \mu_i + T_2 = 0 \quad (i = 3, 4),$$

где

$$p_1 = \eta_1 + \eta + a_2 - a_1 - Q_1, \quad T_1 = (\eta_1 - Q_1)(\eta - a_1) + a_2 \eta,$$

$$p_2 = \eta_1 + \eta + a_4 - a_3 - Q_1, \quad T_2 = (\eta_1 - Q_1)(\eta - a_3) + a_4 \eta.$$

Коэффициенты  $A_i$  находим из системы алгебраических уравнений

$$1 - \sum_{i=j}^{j+1} \frac{A_i}{r_i + \mu_i} = 0 \quad (j = 1, 3), \quad r_1 = \eta, \quad r_2 = \eta_1 - Q_1.$$

$$(n = 1, 2)$$

Тогда

$$A_i = \frac{(-1)^{i+1} (\eta + \mu_i) (\eta_1 - Q_1 + \mu_i)}{\mu_1 - \mu_2} \quad (i = 1, 2),$$

$$A_i = \frac{(-1)^{i+1} (\eta + \mu_i) (\eta_1 - Q_1 + \mu_i)}{\mu_3 - \mu_4} \quad (i = 3, 4).$$

Подставляя (XII. 50) и (XII. 42) в (XII. 41) и применяя формулы умножения операторов  $\dot{\mathcal{E}}_\alpha$  (XII. 16), получаем

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma_r(t)}{\rho} &= \frac{2\sigma_r(0)}{\rho} + \frac{R^2 \kappa_0 q}{r^2} \left[ \frac{1}{b_{10}} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{\eta + \mu_i} - 1 \right) + \frac{1}{b_{20}} \left( 4 - 3 \frac{R^2}{r^2} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left( \sum_{i=3}^4 \frac{A_i}{\eta + \mu_i} - 1 \right) \cos 2\theta \right] \dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\eta) + \frac{R^2(1 + \kappa_0)}{r^2} \left[ \sum_{i=1}^2 N_{i1} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mu_i) + \right. \\ &\left. + \left( 4 - 3 \frac{R^2}{r^2} \right) \sum_{i=3}^4 N_{i2} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mu_i) \cos 2\theta \right]; \\ \frac{2\sigma_\theta(t)}{\rho} &= \frac{2\sigma_\theta(0)}{\rho} - \frac{R^2 \kappa_0 q}{r^2} \left[ \frac{1}{b_{10}} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{\eta + \mu_i} - 1 \right) - \frac{3R}{b_{20} r^2} \left( \sum_{i=3}^4 \frac{A_i}{\eta + \mu_i} - 1 \right) \times \right. \\ &\times \left. \cos 2\theta \right] \dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\eta) + \frac{R^2(1 + \kappa_0)}{r^2} \left[ \sum_{i=1}^2 N_{i1} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mu_i) - 3 \frac{R^2}{r^2} \sum_{i=3}^4 N_{i2} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mu_i) \cos 2\theta \right]; \\ \frac{2\tau_{r\theta}(t)}{\rho} &= \frac{2\tau_{r\theta}(0)}{\rho} + \frac{R^2}{r^2} \left( 2 - 3 \frac{R^2}{r^2} \right) \left[ \frac{\kappa_0 q}{b_{20}} \left( \sum_{i=3}^4 \frac{A_i}{\eta + \mu_i} - 1 \right) \dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\eta) + \right. \\ &\left. + (1 + \kappa_0) \sum_{i=3}^4 N_{i2} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mu_i) \right] \sin 2\theta. \end{aligned}$$

По контуру сая, т. е. при

$$\begin{aligned} \frac{2\sigma_r(t)}{\rho} &= \frac{2\sigma_r(0)}{\rho} + (1 + \kappa_0) \left[ (N_0 + N_1 \cos 2\theta) \dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\eta) + \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^2 N_{i1} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mu_i) + \cos 2\theta \sum_{i=3}^4 N_{i2} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mu_i) \right], \\ \frac{2\sigma_\theta(t)}{\rho} &= \frac{2\sigma_\theta(0)}{\rho} - (1 + \kappa_0) \left[ (N_0 - 3N_1 \cos 2\theta) \dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\eta) + \right. \quad \text{(XII. 51)} \\ &\left. + \sum_{i=1}^2 N_{i1} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mu_i) - 3 \cos 2\theta \sum_{i=3}^4 N_{i2} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mu_i) \right], \\ \frac{2\tau_{r\theta}(t)}{\rho} &= \frac{2\tau_{r\theta}(0)}{\rho} - (1 + \kappa_0) \left[ N_1 \dot{\mathcal{E}}_\alpha(-\eta) + \sum_{i=3}^4 N_{i2} \dot{\mathcal{E}}_\alpha(\mu_i) \right] \sin 2\theta, \end{aligned}$$

где

$$N_0 = \frac{\kappa_0 q}{(1 + \kappa_0) b_{10}} \left( \sum_{i=1}^2 \frac{A_i}{\eta + \mu_i} - 1 \right), \quad N_1 = \frac{\kappa_0 q}{(1 + \kappa_0) b_{20}} \left( \sum_{i=3}^4 \frac{A_i}{\eta + \mu_i} - 1 \right),$$

$$N_{ij} = A_i b_{j0}^{-1} \left[ 1 - \frac{\kappa_0 q}{(1 + \kappa_0)(\eta + \mu_i)} \right] \quad (i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2).$$

Для облегчения подсчетов целесообразно использовать представление  $\dot{\mathcal{E}}_{\alpha 1}$ , позволяющее выразить решение (XII. 52) через конечное число табулированных функций:

$$\dot{\mathcal{E}}_{\alpha}(-\beta) = \dot{J}_{\alpha} \beta_1 \beta^{-1} [1 - \beta_1 \dot{\mathcal{E}}_0(-\beta_1)] \sum_{k=0}^{m-1} \sum_{l=1}^n B_k a_{kl} \dot{J}_0^{l-1}, \quad (\text{XII. 52})$$

где

$$\beta_1 = -(-\beta)^{n/m}, \quad B_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{m-1} (r_{k0} - r_{j0})^{-1},$$

$$\sum_{l=1}^n a_{kl} \dot{J}_0^{l-1} = \prod_{l=1}^{n-1} (J_0^{l/n} - r_{kl}) \quad (k = 0, 1, \dots, m-1),$$

$$r_{kl} = |\beta|^{-\frac{1}{m}} \exp \left[ \left( \frac{n\varphi_{k0} + 2\pi l}{n} \right) i \right], \quad \varphi_{k0} = [\pi(2k-1) - \varphi] m^{-1},$$

Здесь

$$\varphi = \arg \beta, \quad J_{\alpha}(t - \tau) = (t - \tau)^{\alpha} / \Gamma(1 + \alpha), \quad i = \sqrt{-1}.$$

$$\dot{J}_{\alpha} \dot{J}_0^{l-1} [1 - \beta_1 \dot{\mathcal{E}}_0(-\beta_1)] 1 = \frac{\exp(-\beta_1 t)}{\Gamma(s+1)} \int_0^t z^s e^{\beta_1 z} dz,$$

$$s = (m + l - n - 1) n^{-1} \quad (l = 1, 2, \dots, n). \quad (\text{XII. 53})$$

Предельное (при  $t \rightarrow \infty$ ) значение решения (XII. 51) может быть получено\* при

$$\frac{a_i}{r_1} - \frac{a_{i+1}}{r_2} < 1 \quad (i = 1, 3) \quad (\text{XII. 54})$$

заменой в (XII. 41)  $\bar{\kappa}$ ,  $\bar{\kappa}_1$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{b}_1$  их предельными значениями при  $t \rightarrow \infty$ . Если условия (XII. 54) не выполняются, решение (XII. 51) будет при  $t \rightarrow \infty$  неустойчивым.

В качестве примера рассмотрим, какое влияние оказывает фактор времени на напряжения  $\sigma_r(t)$  на контуре спая, т. е. при  $r=R$ , в алюминиевой плите со впаянной медной шайбой. Значения реологических параметров приведены в табл. XII.1. Отношение коэффициента сдвига

\* См. И. И. Круш [1]

для меди  $G_{01}$  к коэффициенту сдвига для алюминия  $G_0$  принято 1,62. При  $\alpha = -0,5$  из (XII.52) найдем

$$\dot{\varepsilon}_\alpha(-\beta)1 = \frac{1}{\beta} \left\{ 1 - \exp(\beta^2 t) [1 - \Phi(\beta \sqrt{t})] \right\}, \quad (\text{XII. 55})$$

где  $\Phi(\beta \sqrt{t})$  — интеграл вероятностей.

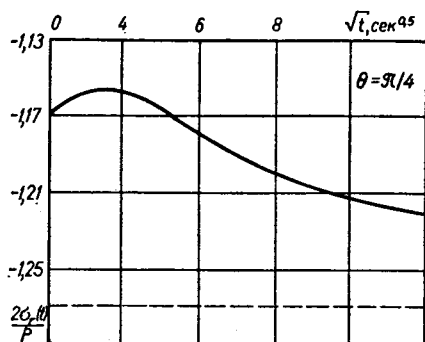


Рис. XII.1.

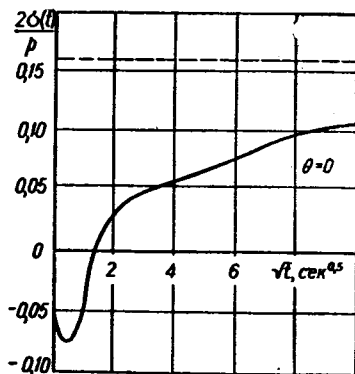


Рис. XII.2.

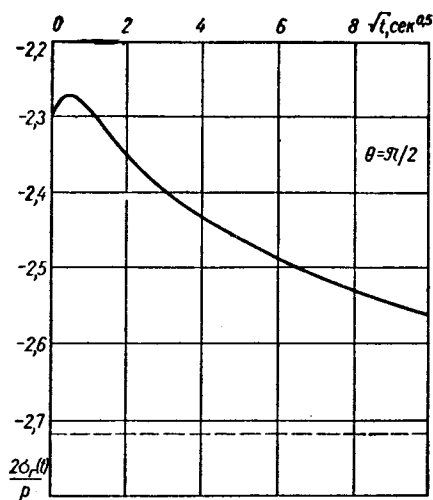


Рис. XII.3.

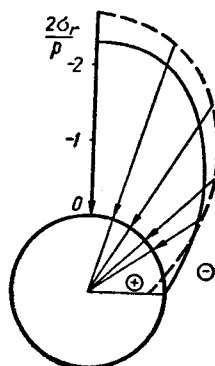


Рис. XII.4.

На рис. XII.1—XII.4 приведены результаты подсчетов величины  $2\sigma_r(t)/\rho$  для  $\theta = \pi/4$  (рис. XII.1);  $\theta = 0$  (рис. XII.2);  $\theta = \pi/2$  (рис. XII.3) и величины  $2\sigma_z(0)/\rho$  по контуру отверстия, т. е. в функции от угла  $\theta$  (рис. XII.4). На рис. XII.1—XII.3 по оси ординат отложена (безразмерная) величина  $2\sigma_r(t)/\rho$ , а по оси абсцисс — время в степени 0,5, изме-

ренное в секундах. Пунктирными линиями на рис. XII.1—XII.4 показаны предельные значения величины  $2\sigma_r(\infty)/p$ .

Приведенные данные на этих рисунках показывают существенное влияние ползучести материала как на характер, так и величину (наибольших значений) напряженного состояния возле отверстия\*.

### § 3. Распределение напряжений около отверстий в анизотропных и неоднородных материалах

#### Распределение напряжений в структуре неоднородных материалов.

Синтетические материалы на основе стекловолокон и полимерных смол, а также других композиций обладают разнообразнейшими физико-механическими свойствами и находят все большее применение в качестве конструкционных материалов во всех областях техники.

Особого внимания заслуживают ориентированные стеклопластики, структура которых составлена из выпрямленных волокон. На основе этой «волоконистой» структуры представляется благоприятная возможность создавать силовые конструкции с оптимальными (в некотором смысле) механическими свойствами. К такого рода конструкционным материалам относятся материалы, полученные на основе стекловолокна или стеклонитей (так называемые «волоконистые» материалы), стеклолент, — «слоистые» материалы.

Физико-механические характеристики стекловолокон, такие как модуль упругости, прочность на разрыв, тепловое расширение и др. на один-два порядка отличаются от таковых у полимерных связующих, поэтому стеклопластики представляют собой гетерогенную систему, свойства которой существенно зависят от ориентации стеклонеполнителя (стекловолокна или стеклонитей), вида полимерного связующего и технологии изготовления.

Проведенные исследования показывают\*\*, что в неоднородных материалах типа стеклопластиков целесообразно выделить два рода напряжений — напряжения в структуре материала, возникающие вследствие взаимодействия жесткого стеклонеполнителя и сравнительно мягкого полимерного связующего, и средние напряжения, распределение которых обусловлено геометрией рассматриваемого изделия. Поэтому в стеклопластиках и других неоднородных материалах концентрация средних напряжений, возникающая вследствие наличия отверстия, выточек и галтелей в детали, накладывается на возмущения в напряженном состоянии в самом материале.

\* Большое число примеров применительно к горному делу о перераспределении напряженного состояния возле как подкрепленных, так и свободных отверстий, вызванных ползучестью горных пород, рассмотрено в монографии Ж. С. Ержанова [1], а также в статьях Ш. М. Айтиалиева и Ж. С. Ержанова [1]; В. С. Куксина [1].

\*\* См. Г. А. Ван Фо Фы [1]; Г. А. Ван Фо Фы, Г. Н. Савин [1, 2].

Экспериментальные и теоретические исследования\* внутреннего поля напряжений в линейно-ориентированном стеклопластике указывают на существование концентрации напряжений около волокон. Коэффициент концентрации структурных напряжений в стеклопластиках зависит от свойств и объемного содержания наполнителя и связующего, взаимного сближения волокон и технологии изготовления.

Исследования внутреннего поля напряжений в линейно-ориентированных стеклопластиках с гексагональной структурой\*\* показали, что локальные напряжения на контуре волокон превосходят средние напряжения.

Рассмотрим кратко\*\*\* задачу об определении макроскопических характеристик и концентрации напряжений около волокон в структуре линейно-армированного стеклопластика, основу которого составляют пряди выпрямленных одинаковых волокон, расположенных в узлах правильной треугольной сетки, и пространство между которыми заполнено однородным полимерным связующим.

При комнатной температуре стекловолокна являются упругим материалом, свойства которого следуют закону Гука вплоть до разрыва.

Термореактивные полимерные смолы, применяемые в стеклопластиках, являются вязко-упругим материалом, рост деформаций в котором происходит с запаздыванием. Свойства таких полимеров удовлетворительно могут быть описаны теорией упруго-наследственных сред, кратко изложенной в § 1.

В рассматриваемом случае волокна образуют двоякопериодическую структуру, поэтому решение задачи проводится с помощью теории эллиптических функций комплексного переменного  $x_2 + ix_3$ , где ось  $Ox_1$  совпадает по направлению с ориентацией волокон.

Если элемент объема расположен вдали от края, напряженное и деформированное состояние его исследуются на основе разложений комплексных потенциалов Колосова—Мусхелишвили:

$$\begin{aligned} \Phi_s(z, t) &= \Phi_0(z) + c_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+2}(t) \frac{\lambda^{2k+2} \zeta_1^{2k+1}(z)}{(2k+1)!}; \\ \Psi_s(z, t) &= \Psi_0(z) + d_0(t) + \sum_{k=0}^{\infty} d_{2k+2}(t) \frac{\lambda^{2k+2} \zeta_1^{2k+1}(z)}{(2k+1)!} - \\ &\quad - \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+2}(t) \frac{\lambda^{2k+2} \zeta_2^{2k+2}(z)}{(2k+1)!}; \end{aligned} \quad (\text{XII. 56})$$

\* См. Г. А. Ван Фо Фы и Г. Н. Савин [2]; Г. А. Ван Фо Фы [4].

\*\* При гексагональной структуре волокна в стеклопластике расположены в узлах правильной сетки.

\*\*\* Более подробно см. Г. А. Ван Фо Фы [5].

$$\Phi_a(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(t) z^{2n};$$

$$\Psi_a(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n}(t) z^{2n},$$

где индексами  $s$  и  $a$  отмечены функции, относящиеся соответственно к области, занимаемой связующим и стеклонаполнителем;

$$\zeta_1(z) = \frac{1}{z} + \sum'_{m,n} [(z - \rho)^{-1} + \rho^{-1} + z\rho^{-2}];$$

$$\zeta_2(z) = \sum'_{m,n} \rho [(z - \rho)^{-1} + z^2\rho^{-3} + z\rho^{-2}]; \quad (\text{XII.57})$$

$\rho = m\omega_1 + n\omega_2$ ,  $\omega_2 = \omega_1 e^{i\alpha}$ ;  $\alpha = \pi/3$ ;  $\omega_1, \omega_2$  — периоды сетки.

Неизвестные параметры  $a_{2n}(t)$ ,  $b_{2n}(t)$ ,  $c_{2n}(t)$  и  $d_{2n}(t)$  находятся из условий равенства напряжений и перемещений на границе  $r=r_0$  контакта волокон со связующим — смолой ( $z = \tau = r_0 e^{i\theta}$ ).

Для регулярных структур вследствие двойкой периодичности задаче краевые условия

$$\begin{aligned} \Phi_a(\tau, t) + \overline{\Phi_a(\tau, t)} - e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi'_a(\tau, t) + \Psi_a(\tau, t)] = \\ = \Phi_s(\tau, t) + \overline{\Phi_s(\tau, t)} - e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi'_s(\tau, t) + \Psi_s(\tau, t)]; \end{aligned} \quad (\text{XII.58})$$

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{G}{G_a}\right) \Phi_a(\tau, t) + \left(1 + \kappa_a \frac{G}{G_a}\right) \overline{\Phi_a(\tau, t)} - \\ - \left(1 - \frac{G}{G_a}\right) e^{2i\theta} [\overline{\tau} \Phi'_a(\tau, t) + \Psi_a(\tau, t)] = (\kappa + 1) \overline{\Phi_s(\tau, t)} \end{aligned}$$

достаточно выполнить на одном произвольном взятом контуре (поперечного сечения) волокна.

Условия на контуре элементарной ячейки сводятся к заданию средних напряжений  $\langle \sigma_{ik} \rangle$  или деформаций  $\langle \varepsilon_{ik} \rangle$ , где

$$\langle \sigma_{ik} \rangle = \frac{1}{F} \int_F \sigma_{ik} dF; \quad \langle \varepsilon_{ik} \rangle = \frac{1}{F} \int_F \varepsilon_{ik} dF; \quad F = \omega_1 \omega_2 \sin \alpha. \quad (\text{XII.59})$$

Обозначим через  $\xi = \pi r_0^2 / F$  и  $\eta = 1 - \xi$  относительное объемное содержание стекла и связующего в стеклопластике.

Распределение касательных напряжений в структуре композиционного материала для гексагональной (наиболее плотной) упаковки волокон в стеклопластиках при сдвиге в плоскостях  $(x_1, x_2)$  и  $(x_1, x_3)$  (рис. XII.5) иллюстрируется кривыми, представленными на рис. XII.6.



Для сравнения на рис. XII.6 приведены также штриховые кривые, характеризующие распределение напряжений при малом объеме количества стекловолокна ( $\xi=0,23$ ). Здесь по оси ординат отложены значения коэффициентов концентрации касательных напряжений  $\tau_{r\theta}$  (по сечению  $\theta=0$ ) в структуре материала, а по оси абсцисс — относительное расстояние между волокнами. Напряжения вычислены на площадках, перпендикулярных к оси  $Ox_2$ .

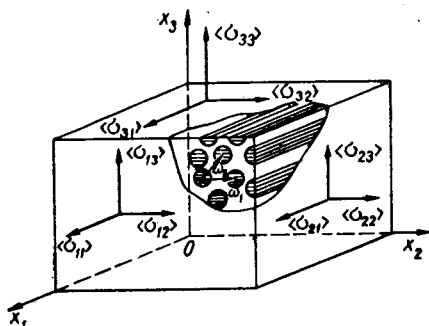


Рис. XII.5.

Распределение нормальных  $\sigma_r$  и касательных  $\tau_{r\theta}$  напряжений на контуре волокна ( $\xi=0,74$ ) при сдвиге стеклопластика в плоскости ( $x_2, x_3$ ) представлено рис. XII.7. Значения коэффициента концентрации напряжений на площадках, перпендикулярных к радиусу, отсчитываются, как обычно, от контурной линии, т. е. от окружности  $r=r_0$ .

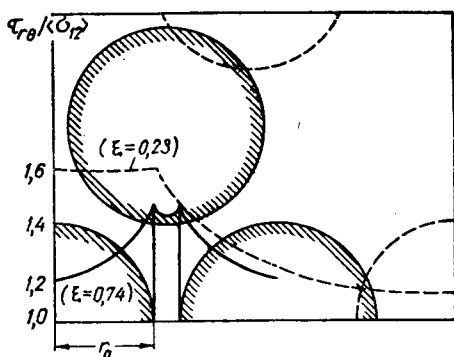


Рис. XII.6.

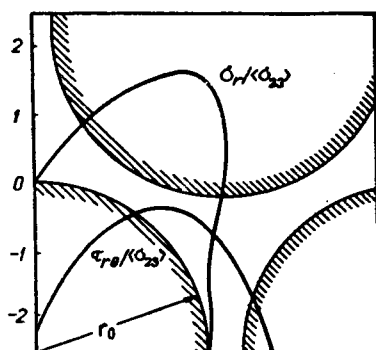


Рис. XII.7.

При растяжении стеклопластиков вдоль армирования, т. е. вдоль стекловолокон, распределение нормальных  $\sigma_r$  и касательных  $\tau_{r\theta}$  напряжений ( $\xi=0,74$ ) на контуре волокон на радиальных площадках иллюстрируется кривыми на рис. XII.8.

Распределение касательных  $\tau_{r\theta}$  и нормальных  $\sigma_\theta$  напряжений на контуре волокна как на радиальных, так и на тангенциальных площадках при растяжении армированных пластиков напряжениями  $\langle \sigma_{22} \rangle$  или  $\langle \sigma_{33} \rangle$  представлено кривыми на рис. XII.9.

Как видим, концентрация напряжений  $\sigma_\theta$  на границе волокон со связующим не существенна, если обеспечена адгезия волокон к смоле.

Вследствие вязко-упругих свойств полимерного связующего в композиционном материале между наполнителем и связующим происходит перераспределение напряжений во времени.

Проведенные исследования\* показывают, что при ползучести связующего перераспределение напряжений в структуре композиционного материала таково, что не превышает 10% от мгновенного.

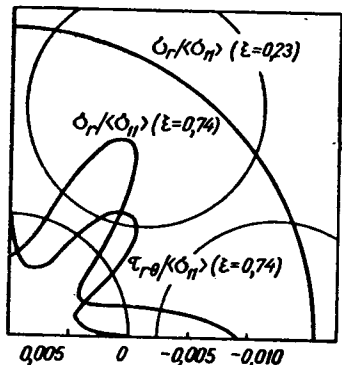


Рис. XII.8.

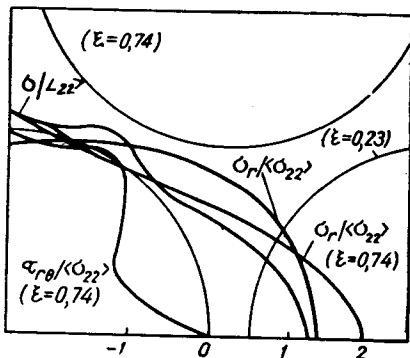


Рис. XII.9.

При постоянной деформации стеклопластика происходит заметная релаксация напряжений на границе волокон. При этом оказывается, что релаксация структурных напряжений пропорциональна релаксации осредненных напряжений.

Истинные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \sigma_{xy}$  в случае гексагональной структуры (рис. XII.5) связаны со средними напряжениями  $\langle \sigma_{ik} \rangle$  ( $i, k=1, 2, 3$ ) соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_x = & k_{c1}^{(x)} \langle \sigma_{11} \rangle + k_{c2}^{(x)} \langle \sigma_{22} \rangle + k_{c3}^{(x)} \langle \sigma_{33} \rangle + k_{c4}^{(x)} \langle \sigma_{23} \rangle + \\ & + k_{c5}^{(x)} \langle \sigma_{31} \rangle + k_{c6}^{(x)} \langle \sigma_{12} \rangle \end{aligned} \quad (\text{XII.60})$$

(и аналогично для  $\sigma_y, \dots, \tau_{xy}$ ), где  $k_{ci}^{(x)}, k_{ci}^{(y)}, \dots, k_{ci}^{(xy)}$  ( $i=1, 2, 3, \dots, 6$ ) — коэффициенты концентрации структурных напряжений.

**Основные соотношения теории упругой наследственности для неоднородных материалов.** Основу неоднородных волокнистых материалов типа ориентированных стеклопластиков составляет линейно-армированный слой, состоящий из выпрямленных волокон.

Если ось (рис. XII.5) направить вдоль ориентации волокон, то связь средних напряжений  $\langle \sigma_{ik} \rangle$  со средними деформациями  $\langle \epsilon_{ikh} \rangle$  для

\* См. Г. А. Ван Фо Фы [4].

линейно-армированного слоя, волокна в котором образуют гексагональную структуру, имеет вид

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{11} \rangle &= \frac{1}{E_{11}} \langle \sigma_{11} \rangle - \frac{\nu_{21}}{E_{11}} [\langle \sigma_{22} \rangle + \langle \sigma_{33} \rangle]; \\ \langle \varepsilon_{22} \rangle &= \frac{1}{\bar{E}_{22}} \langle \sigma_{22} \rangle - \frac{\nu_{21}}{E_{11}} \langle \sigma_{11} \rangle - \frac{\bar{\nu}_{23}}{\bar{E}_{22}} \langle \sigma_{33} \rangle; \\ \langle \varepsilon_{33} \rangle &= \frac{1}{E_{22}} \langle \sigma_{33} \rangle - \frac{\nu_{21}}{E_{11}} \langle \sigma_{11} \rangle - \frac{\bar{\nu}_{23}}{\bar{E}_{22}} \langle \sigma_{22} \rangle; \end{aligned} \quad (\text{XII.61})$$

$$\langle \varepsilon_{12} \rangle = \frac{1}{\bar{G}_{12}} \langle \sigma_{12} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{13} \rangle = \frac{1}{\bar{G}_{12}} \langle \sigma_{13} \rangle; \quad \langle \varepsilon_{23} \rangle = \frac{2(1 + \bar{\nu}_{23})}{E_{22}} \langle \sigma_{23} \rangle.$$

Если волокна образуют более сложную структуру, то \* число упругих констант увеличивается и в общем случае достигает 13.

Гексагональное расположение волокон наиболее вероятное, поэтому приведенные выше соотношения положим в основу теории ориентированных стеклопластиков.

В формулах (XII.61) чертой сверху отмечены операторные модули; остальные величины при вязко-упругих деформациях полимерного связующего с точностью до 5% можно считать константами материала\*\*.

Операторные и обычные модули в соотношениях (XII.61) можно выразить через физико-механические характеристики наполнителя и связующего. Приближенные (с точностью до 7—10%) формулы для операторов и констант композиционного материала:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{1}{G_{012}} \left[ 1 + \frac{a}{\left[ \eta + (1 + \xi) \frac{G_0}{G_a} \right] \eta} \dot{\mathcal{J}}_{\alpha}(-\omega_{\infty}) \right];$$

$$\frac{1}{\bar{E}_{22}} = \frac{1}{E_{22}^0} \left[ 1 + \left( \frac{a\omega_0}{\omega_0 - b_1} \cdot \frac{1}{1+c} + \frac{a\omega_0}{\omega_0 - b_2} \cdot \frac{c}{1+c} \right) \dot{\mathcal{J}}_{\alpha}(-\omega_{\infty}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\omega_0 - a - b_1}{\omega_0 - b_1} \cdot \frac{b_1}{1+c} \dot{\mathcal{J}}_{\alpha}(-\omega + b_1) + \frac{\omega_0 - a - b_2}{\omega_0 - b_2} \cdot \frac{b_2 c}{1+c} \dot{\mathcal{J}}_{\alpha}(-\omega + b_2) \right];$$

(XII.6 2)

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\nu}_{23}}{\bar{E}_{22}} \approx & -\frac{1}{E_{22}} + \frac{1}{2G} - \frac{\xi(1 - \nu_0) b_2 \left(1 - \frac{G_0}{G_a}\right)}{(1 - 2\nu_0) \omega_0 G_0} \left[ 1 + \frac{a\omega_0}{\omega_0 + b_2} \dot{\mathcal{J}}_{\alpha}(-\omega_{\infty}) - \right. \\ & \left. - b_2 \frac{\omega_0 - a + b_2}{\omega_0 + b_2} \dot{\mathcal{J}}_{\alpha}(-\omega - b_2) \right] + \dots, \end{aligned}$$

\* См. Г. А. Ван Фо Фы [2].

\*\* См. Г. А. Ван Фо Фы [3].

где

$$\begin{aligned} \kappa &= 3 - 4\nu; \\ a &= \frac{3\omega_0}{2 + 2\nu_0}; \quad b_1 = \frac{2(1 - 2\nu_0)\omega_0\xi}{1 + \eta + \xi\kappa_0 + \eta(\kappa_a - 1)\frac{G_0}{G_a}}; \\ b_2 &= \frac{2(1 - 2\nu_0)\omega_0}{\xi + \kappa_0 + \eta_0\frac{G_0}{G_a}}; \quad c = -\frac{2\xi^2 b_2 \left(1 - \frac{G_0}{G_a}\right)}{b_1 \left[2 + (\kappa_a - 1)\frac{G_0}{G_a}\right]}. \end{aligned} \quad (\text{XII.63})$$

Здесь индексами 0 и  $a$  отмечены мгновенные упругие константы соответственно связующего и стекловолокон;  $\omega_0$ ,  $\omega_\infty$  — параметры, характеризующие реологические свойства полимерного связующего.

В случае неустойчивого процесса ползучести  $\omega_\infty \rightarrow 0$ . Для полимеров на основе эпоксидно-малеиновой композиции при  $t = 25^\circ \text{C}$  можно принять  $\omega_0 = 0,052 \text{ ч}^{1+\alpha}$ ;  $\alpha = -0,5$ ;  $\omega_\infty = 0,12 \text{ ч}^{1+\alpha}$ ;  $\nu_0 = 0,382$ ;  $E_0 = 0,981 \times 10^{10} \text{ н/м}^2$ . Для алюборосиликатных стекловолокон при той же температуре  $\nu_a = 0,2$ ;  $E_a = 0,981 \cdot 7,0 \cdot 10^{10} \text{ н/м}^2$ .

Формулу для оператора  $\frac{1}{\bar{E}_{22}}$  удобно представить в виде

$$\frac{1}{\bar{E}_{22}} = \frac{1}{E_{22}^0} \left[ 1 - \sum_{k=1}^3 A_k \dot{\mathcal{E}}_a(-\kappa_k) \right]. \quad (\text{XII.64})$$

Мгновению-упругие значения констант композиционного материала

$$\frac{1}{E_{22}^0} = \frac{\nu_{21}^2}{E_{11}} - \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} \left[ \frac{2 + (\kappa_a - 1)\frac{G_0}{G_a}}{1 + \eta + \xi\kappa_0 + \eta(\kappa_a - 1)\frac{G_0}{G_a}} - 2\xi \frac{1 - \frac{G_0}{G_a}}{\xi + \kappa_0 + \eta\frac{G_0}{G_a}} \right];$$

$$\nu_{12} = \nu_{21} \frac{E_{22}^0}{E_{11}};$$

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\eta + (1 + \xi)\frac{G_0}{G_a}}{1 + \xi + \eta\frac{G_0}{G_a}} \cdot \frac{1}{G_0} + \dots; \quad (\text{XII.65})$$

$$E_{11} = \xi E_a + \eta E_0 + \dots;$$

$$\nu_{21} \approx \nu_0 - \frac{(\nu_0 - \nu_a)(\kappa_0 + 1)}{2 + (\kappa_0 - 1)\xi + \eta(\kappa_a - 1)\frac{G_0}{G_a}} + \dots;$$

$$\nu_{32} \approx 1 - 2\nu_{21}\nu_{12} - \frac{1 - \nu_0^2}{E_0} E_{22}^0 \left[ \frac{1 - 2\nu_0}{1 - \nu_0} - 2\xi \frac{\kappa_0 - 1 - (\kappa_a - 1)\frac{G_0}{G_a}}{1 + \eta + \xi\kappa_0 + \eta(\kappa_a - 1)\frac{G_0}{G_a}} \right].$$

Для исследования процессов релаксации напряжений необходимы операторы

$$\bar{G}_{12} = G_{12}^0 \left[ 1 - \frac{a}{\left[ \eta + (1 + \xi) \frac{G_0}{G_a} \right] \eta} \dot{\mathcal{J}}_a \left( -\omega_\infty - \left[ \eta + (1 + \xi) \frac{G_0}{G_a} \right] \eta \right) \right], \quad (\text{XII.66})$$

$$\bar{E}_{22} = E_{22}^0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^3 f_k \dot{\mathcal{J}}_a(p_k) \right],$$

где  $p_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ) — корни уравнения

$$1 + \sum_{k=1}^3 \frac{A_k}{x_k - p} = 0, \quad (\text{XII.67})$$

а  $f_k$  находится из решения системы трех уравнений

$$1 + \sum_{k=1}^3 \frac{f_k}{x_l - p_k} = 0 \quad (l = 1, 2, 3). \quad (\text{XII.68})$$

**Концентрация напряжений около кругового и эллиптического отверстий в пластинке из волокнистых материалов.** Рассмотрим концентрацию средних напряжений  $\langle \sigma_{ih} \rangle$  около кругового и эллиптического отверстий в тонкой линейно-армированной пластинке из стеклопластика на основе эпоксидно-маленового связующего при простом растяжении ее напряжениями  $\langle \sigma_\alpha \rangle$ .

Пусть волокна ориентированы по оси  $Ox_1$ , система декартовых координат  $(x_1, x_2)$  расположена в срединной плоскости пластинки, а начало координат — в центре отверстия.

Из условия равновесия, если пренебречь напряжениями  $\langle \sigma_{33} \rangle$ ,  $\langle \sigma_{23} \rangle$  и  $\langle \sigma_{13} \rangle$ ,

$$\frac{\partial \langle \sigma_{11} \rangle}{\partial x_1} + \frac{\partial \langle \sigma_{12} \rangle}{\partial x_2} = 0, \quad (\text{XII.69})$$

$$\frac{\partial \langle \sigma_{12} \rangle}{\partial x_1} + \frac{\partial \langle \sigma_{22} \rangle}{\partial x_2} = 0$$

и уравнений неразрывности следует, что функция напряжений  $U$  должна удовлетворять бигармоническому уравнению с операторными коэффициентами:

$$\frac{1}{E_{22}} \cdot \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + \frac{1 - 2\nu_{21}}{E_{11}} \cdot \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{1}{E_{11}} \cdot \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = 0. \quad (\text{XII.70})$$

Функция  $U$  должна быть построена так, чтобы контур отверстия был свободен от внешних усилий, а «на бесконечности» напряжения, даваемые этой функцией, стремились к заданному напряженному состоянию\*.

\* См. гл. II, § 1.

Решение этой задачи дано в § 1 гл. III с помощью функций комплексных переменных  $z_1 = x_1 + s_1 x_2$  и  $z_2 = x_1 + s_2 x_2$ , где

$$s_1 s_2 = -\sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}}}; \quad s_1 + s_2 = i \sqrt{2 \left( \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}} - \nu_{21}} \right) + \frac{E_{11}}{G_{12}}}. \quad (\text{XII.71})$$

Применив принцип В. Вольтерра, определим \* перераспределение напряжений во времени около эллиптического (и в частности кругового) отверстия.

Пусть  $\alpha$  — угол наклона направления напряжений растяжений  $\langle \sigma_\alpha \rangle$  к оси  $Ox_1$ ; средние напряжения в пластинке подсчитаем по формулам \*\*

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{11} \rangle &= \langle \sigma_\alpha \rangle \cos^2 \alpha + 2 \langle \sigma_\alpha \rangle \operatorname{Re} [s_1^2 \varphi'_0(z_1) + s_2^2 \psi'_0(z_2)]; \\ \langle \sigma_{12} \rangle &= \langle \sigma_\alpha \rangle \sin \alpha \cos \alpha - 2 \langle \sigma_\alpha \rangle \operatorname{Re} [s_1 \varphi'_0(z_1) + s_2 \psi'_0(z_2)]; \\ \langle \sigma_{22} \rangle &= \langle \sigma_\alpha \rangle \sin^2 \alpha + 2 \langle \sigma_\alpha \rangle \operatorname{Re} [\varphi'_0(z_1) + \psi'_0(z_2)], \end{aligned} \quad (\text{XII.72})$$

где функции

$$\varphi_0(z_1) = -\frac{i(a - is_1 b)}{4(s_1 - s_2)} \left[ \frac{b(s_2 \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} + \frac{ia(2s_2 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_1 + \sqrt{z_1^2 - (a^2 + s_1^2 b^2)}} \right]; \quad (\text{XII.73})$$

$$\psi_0(z_2) = \frac{i(a - is_2 b)}{4(s_1 - s_2)} \left[ \frac{b(s_1 \sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} + \frac{ia(2s_1 \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha)}{z_2 + \sqrt{z_2^2 - (a^2 + s_2^2 b^2)}} \right];$$

здесь  $a$  и  $b$  — соответственно большая и малая полуоси эллипса.

Наибольший интерес представляет распределение нормальных напряжений  $\langle \sigma_\phi \rangle$ , действующих на площадках, перпендикулярных к касательной к контуру отверстия, и касательных напряжений  $\langle \sigma_{12} \rangle$  между волокнами.

На контуре отверстия

$$\begin{aligned} \langle \sigma_\phi \rangle &= \langle \sigma_\alpha \rangle \left\{ \frac{\sin^2 \phi}{\sin^2 \phi + k^2 \cos^2 \phi} + \right. \\ &+ \left. \frac{k}{\sin^2 \phi + k^2 \cos^2 \phi} \operatorname{Re} \left[ \frac{e^{i\phi}}{s_1 - s_2} \left( \frac{(s_1 \sin \phi + k \cos \phi)^2}{\sin \phi - ks_1 \cos \phi} - \frac{(s_2 \sin \phi + k \cos \phi)^2}{\sin \phi - ks_2 \cos \phi} \right) \right] \right\}, \quad (\text{XII.74}) \end{aligned}$$

где  $k = b/a$ ,  $x_2 = a \cos \phi$ ;  $x_3 = b \sin \phi$ .

Из (XII.74) следует:

при  $\phi = 0$

$$\langle \sigma_\phi \rangle = -\langle \sigma_\alpha \rangle \sqrt{\frac{E_{22}}{E_{11}}}; \quad (\text{XII.75})$$

при  $\phi = \pi/2$

$$\langle \sigma_\phi \rangle = \langle \sigma_\alpha \rangle \left[ 1 + k \sqrt{2 \left( \sqrt{\frac{E_{11}}{E_{22}} - \nu_{21}} \right) + \frac{E_{11}}{G_{12}}} \right]. \quad (\text{XII.76})$$

\* См. Г. А. Ван Фо Фы [1]; Г. А. Ван Фо Фы, Г. Н. Савин [2].

\*\* См. формулу (III.23).

На рис. XII.10 приведены напряжения \*  $\langle \sigma_\phi \rangle$  по контуру кругового отверстия, которые подсчитаны по формуле (XII.74) при  $a=b$  и  $\alpha=0$ , т. е. при растяжении вдоль стекловолокон \*\* напряжениями  $\langle \sigma_\alpha \rangle$ . Кривые 1 и 2 характеризуют распределение этих нормальных напряжений соответственно для упругого изотропного и анизотропного

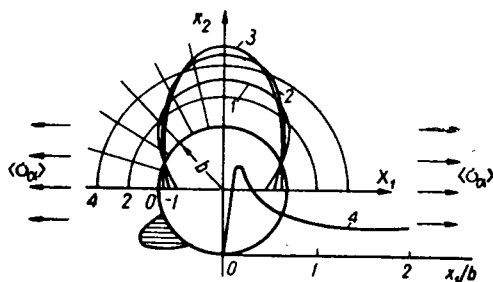


Рис. XII.10.

материалов пластинки. Перераспределение средних напряжений  $\langle \sigma_\phi \rangle$  (XII.74) при длительном ( $t \rightarrow \infty$ ) действии внешних напряжений  $\langle \sigma_\alpha \rangle$  при устойчивом процессе ползучести представлено кривой 3. Из этой кривой видно, что напряжения  $\langle \sigma_\phi \rangle$  (XII.74) со временем возрастают на площадках, усиленных стекловолокном; средние напряжения на площадках, параллельных ориентации волокон, вследствие развития вязко-упругих деформаций

в полимерном связующем уменьшаются.

Для исследования напряженного состояния в пластинке возле отверстия в произвольный момент времени целесообразно воспользоваться формулой

$$\sqrt{1 + a\dot{\epsilon}_\alpha(-\omega)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-3)!}{(2k)!} \cdot \frac{\omega^k}{(k-1)!} \cdot \frac{\partial^{k-1}}{\partial \omega^{k-1}} \dot{\epsilon}_\alpha(-\omega). \quad (\text{XII.77})$$

Распределение касательных напряжений  $\langle \sigma_{12} \rangle$  на площадке ( $x_2=b, x_1$ ) представлено кривой 4 (рис. XII.10).

Истинные касательные напряжения на площадках, параллельных волокнам ( $\xi=0,74$ ),

$$\sigma_{12} = k_c k_0 \langle \sigma_{12} \rangle = 0,81 \langle \sigma_\alpha \rangle. \quad (\text{XII.78})$$

Прочность полимерного связующего на срез ниже, чем на растяжение, поэтому несущая способность пластинки после достижения касательными напряжениями  $\langle \sigma_{12} \rangle$  предельных значений определяется прочностью неослабленной части стеклопластика на разрыв. Заштрихованная на рис. XII.11 часть пластинки выключается из работы вследствие среза связующего по линии  $aa'$ , а оставшаяся часть материала находится в однородном напряженном состоянии.

Изменение коэффициента концентрации  $k_0$  напряжений  $\langle \sigma_\phi \rangle$  (XII.74) по контуру эллиптического отверстия, большая ось которого

\* Точнее, коэффициенты концентрации  $k_0$  этих напряжений.

\*\* На рис. XII.10 (слева в третьем квадранте), а на рис. XII.12—XII.15 (справа в четвертом квадранте) указано направление стекловолокон.

параллельна ориентации волокон\* (при  $a/b=2$ ), представлено кривой 1 на рис. XII.12. Кривая 2 характеризует перераспределение напряжений  $\langle \sigma_\phi \rangle$  на контуре отверстия при длительном нагружении пластинки.

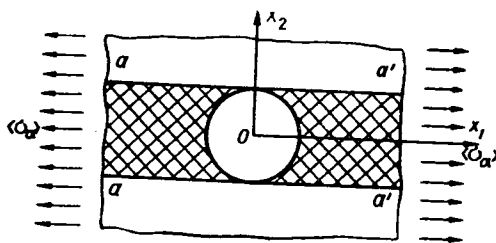


Рис. XII.11.

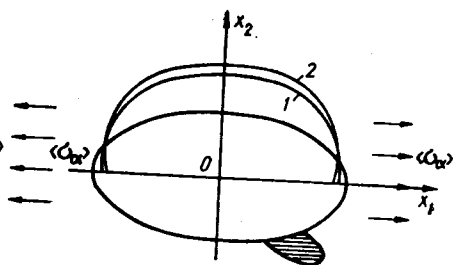


Рис. XII.12.

На рис. XII.13 приведено изменение коэффициента концентрации напряжений  $\langle \sigma_\phi \rangle$  в той же пластинке, но при расположении большей оси эллиптического отверстия перпендикулярно к направлению растяжения, направленному вдоль стекловолокон. Кривая 1 соответствует начальному напряженному состоянию в пластинке, а кривая 2 — состоянию после длительного нагружения (около 500 ч), т. е. когда релаксационные процессы практически окончены.

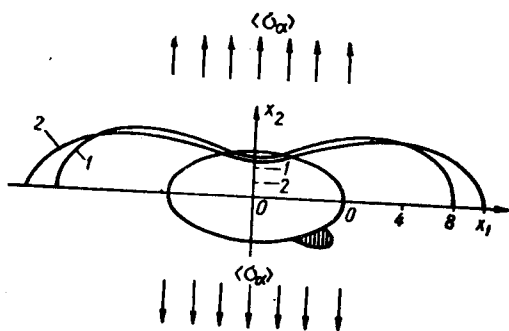


Рис. XII.13.

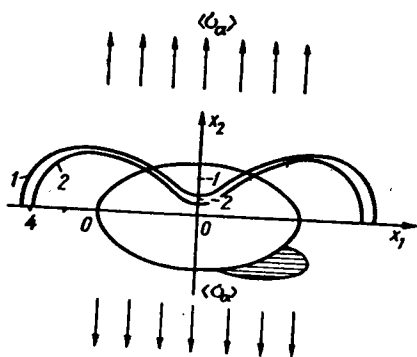


Рис. XII.14.

Изменение во времени коэффициента концентрации напряжений  $\langle \sigma_\phi \rangle$  в пластинке, армированной вдоль большой оси эллипса (при  $a/b=2$ ), при растяжении перпендикулярно к ориентации волокон после длительного нагружения иллюстрируется кривой 2 на рис. XII.14. Кривая 1 соответствует мгновенному напряженному состоянию в начальный момент времени. Вследствие перераспределения напряжений на-

\* См. штриховку в четвертом квадранте части пластинки у контура.



блюдается уменьшение максимального коэффициента концентрации напряжений  $k_0$  во времени.

Максимальный коэффициент концентрации истинных напряжений ( $\xi=0,74$ )

$$k_{\max} = k_c k_0 = 1,9 \cdot 4,6 = 8,74. \quad (\text{XII.79})$$

Если пластинка состоит из перекрестно-армированных слоев стеклотекстолита \* равной толщины и расположенных симметрично относительно ее срединной плоскости, то приведенные механические характеристики нетрудно определить для всего пакета в целом.

Из условий совместности деформаций слоев

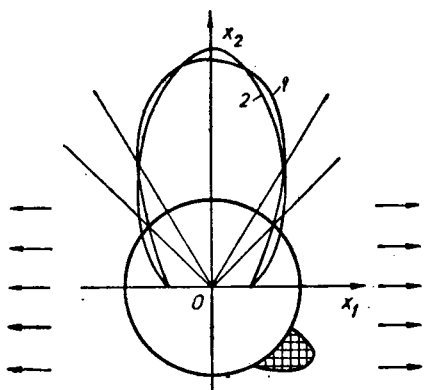


Рис. XII.15.

$$\bar{G}_{12}^* = G_{12}; \quad \bar{\nu}_{21} = \nu_{21} \frac{2 \frac{\bar{E}_{22}}{E_{11}}}{1 + \frac{\bar{E}_{22}}{E_{11}}}; \quad (\text{XII.80})$$

$$\bar{E}_{11} = \bar{E}_{22} = \frac{E_{11}}{2} \frac{\left(1 + \frac{\bar{E}_{22}}{E_{11}}\right)^2 - 4\nu_{21}^2 \left(\frac{\bar{E}_{22}}{E_{11}}\right)^2}{\left(1 + \frac{\bar{E}_{22}}{E_{11}}\right) \left(1 - \nu_{21}^2 \frac{\bar{E}_{22}}{E_{11}}\right)}.$$

Операторные модули сдвига  $\bar{G}_{12}$ , а также  $\bar{E}_{22}$ ,  $\bar{E}_{11}$ ,  $\nu_{21}$  вычисляются по приведенным выше формулам.

Пусть слоистая равнопрочная пластинка ослаблена круговым отверстием радиуса  $b$  и растянута вдоль одного из главных направлений анизотропии.

Распределение средних напряжений  $\langle \sigma_\phi \rangle$  по контуру отверстия определяется по формуле (XII.74), в которой необходимо положить

$$s_1 s_2 = -1; \quad s_1 + s_2 = i \sqrt{2(1 - \bar{\nu}_{21}) + \frac{\bar{E}_{11}}{G_{12}}}. \quad (\text{XII.81})$$

Как следует из (XII.75), напряжения  $\langle \sigma_\phi \rangle$  при  $\phi=0$  не изменяются во времени.

Распределение напряжений  $\langle \sigma_\phi \rangle$  (XII.74) по контуру отверстия в начальный момент времени (кривая 1) можно проследить по изменению коэффициента концентрации напряжений  $k_0$ , приведенному на рис. XII.15. Кривая 2 показывает изменение  $k_0$  при длительном нагружении.

Интересно отметить, что при неустойчивом процессе ползучести полимерного связующего напряжения на площадке  $\phi=0$  не изменяются во времени, а на площадке  $\phi=\pi/2$  — растут.

\* См. штриховку в четвертом квадранте части пластинки у контура на рис. XII.15.

Таким образом, приведенные на рис. XII.10—XII.15 кривые показывают, что в композиционных материалах типа стеклопластиков, вследствие существенного различия в механических характеристиках составляющих компонент, концентрация структурных напряжений около жестких включений является дополнительным источником возмущения напряженного состояния.

## ЛИТЕРАТУРА

- Айталиев Ш. М., Ержанов Ж. С. [1] Об определении напряжений и перемещений вокруг выработки в условиях ползучести горных пород.— В кн.: Реологические вопросы механики горных пород. Изд-во АН КазССР, Алма-Ата, 1964, 47—61.
- Аннин Б. Д. [1] Асимптотическое разложение экспоненциальной функции дробного порядка.— ПММ, 1961, 25, 4.
- Арутюнян Н. Х. [1] Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, М., 1952.
- Блейд Д. [1] Теория линейной вязко-упругости. «Мир», М., 1965.
- Бронский А. П. [1] Явление последействия в твердом теле.— Прикл. мат. и мех., 1941, 5, 1.
- Ван Фо Фы Г. А. [1] О концентрации напряжений в стеклопластиках.— В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1966.
- [2] Упругие постоянные и тепловое расширение некоторых тел с неоднородной регулярной структурой.— ДАН СССР, 1966, 166, 4.
- [3] К теории анизотропной ползучести стеклоленты.— Мех. полимеров, 1965, 2.
- [4] Напряженное и деформированное состояние синтетических материалов при сдвиге.— Прикл. мех., 1965, 5.
- [5] Упругие постоянные и напряженное состояние стеклоленты.— Мех. полимеров, 1966, 2.
- Ван Фо Фы Г. А., Савин Г. Н. [1] Об основных соотношениях в теории ориентированных стеклопластиков.— Мех. полимеров, 1965, 1.
- [2] Распределение напряжений около эллиптического отверстия в пластинке из волокнистых материалов.— Прикл. мех., 1966, 5.
- Галин Л. А., Черепанов Г. П. [1] О напряженном состоянии вблизи отверстий в пластинках из полимерных материалов. ДАН УССР, 1966, 167, 1.
- Динник А. Н., Моргаевский А. Б., Савин Г. Н. [1] Распределение напряжений вокруг выработок.— В кн.: Совец. по управлению горным давлением. Изд-во АН СССР, М., 1938.
- Долинина Н. Н. [1] Теория ползучести горных пород и ее приложения. Изд-во концентрацию напряжений около круглого отверстия со впаянной шайбой.— Прикл. мех., 1966, 2, 4.
- Долинина Н. Н. [1] Интегрально-операторный метод в теории колебаний анизотропных тел при повзучости.— ДАН УССР, 1966, 10.
- Ержанов Ж. С. [1] Теория ползучести горных пород и ее приложения. Изд-во АН КазССР, Алма-Ата, 1964.
- Ефимов А. Б. [1] Контактная задача для линейно-вязко-упругих тел. Автореферат канд. диссерт., МГУ, 1966.
- Круш И. И. [1] О применении метода интегральных операторов для изучения установившегося состояния упруго-наследственных систем.— ДАН СССР, 1964, 158, 4.
- Куксин В. С. [1] О неустановившемся горном давлении в породном массиве вблизи горизонтальных горных выработок.— В кн.: Тр. Всес. н.-и. института горн. геомехан. и маркшейд. дела, 59, 1965, 21—248.
- Лехницкий С. Г. [1] Анизотропные пластинки. ГТТИ, М., 1957.
- Работнов Ю. Н. [1] Расчет деталей на ползучесть.— Изв. АН СССР, ОТН, 1948, 6.
- [2] Равновесие упругой среды с последействием.— Прикл. мат. и мех., 1948, 12, 1.

- Розовский М. И. [1] О нелинейных уравнениях ползучести и релаксации материалов при сложном напряженном состоянии — ЖТФ, 1955, 25, 13.
- [2] О некоторых особенностях упруго-наследственных сред.— Изв. АН СССР ОТН, мех. и маш., 1962, 2.
- [3] Об одном интегральном уравнении с сингулярным ядром.— УМЖ, 1962, 14, 2.
- [4] Обработка кривых ползучести на основе интегральных уравнений.— Изв. вузов, маш., 1960, 3.
- [5] Интегрально-операторный метод в наследственной теории ползучести.— ДАН СССР, 1965, 160, 4.
- [6] Об уравнениях плоской деформации при линейном упрочнении с временными интегральными операторами.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1960, 5.
- Ровинский Б. М., Лютцау В. Г. [1] Коэффициент Пуассона при релаксации напряжений.— Известия АН СССР, ОТН, 1953, 10.
- Савин Г. Н. [1] Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТЛ, М.— Л., 1951.
- Фабрикант В. И. [1] О концентрации напряжений в пластинке из стеклопластика с круговым отверстием. Доклады Научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964—65 г., Моск. энерг. ин-т, секция энергомашиностр., М., 1965, 63—76.
- Хорошун Л. П. [1] Влияние ползучести материала на концентрацию напряжений около кругового отверстия в пластинке.— В кн.: Концентрация напряжений, 1. «Наукова думка», К., 1965.
- Duffing G. [1] Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, 1931, Bd. 2, Nr. 3.
- Graham G. A. C. [1] On the use of stress functions for solving problems in linear viscoelasticity theory that involve moving boundaries.— Proc. Roy. Soc. Edinbrgh.— 1963—1965, A67, N 1.
- Radok J. R. M. [1] Vc. Effects of Stress Raisers in Linear Viscoelastic Bodies. Fracture Processes in Polymeric Solids. Phenomena and Theory. Interscience Publishers a division of John Wiley and Sons. New York. London, Sydney, 1964.
- Volterra V. [1] Theory of Functionals and of Integrals and Integrodifferential Equations, London, 1931.

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ НАПРЯЖЕНИЙ ВОЗЛЕ ОТВЕРСТИЯ

### § 1. Общие замечания

В предыдущих главах при теоретическом решении вопроса о влиянии различных отверстий на картину напряженного состояния в неоднородном поле делалось одно важное допущение, упрощающее поставленную задачу, — предполагалось, что в достаточно удаленных от отверстия частях пластинки или оболочки напряженное состояние остается таким же, как и в пластинке (полосе — балке) или оболочке без отверстия.

Очевидно, что полученные в этих главах теоретические решения будут тем точнее характеризовать картины напряжений в конечных пластинках или оболочках, ослабленных тем или иным отверстием, чем меньше размеры отверстий в сравнении с размерами пластинок и оболочек. Однако теоретическое решение соответствующих задач для двусвязных областей связано с большими математическими трудностями и допускает, как правило, приближенное решение, поэтому экспериментальный путь оказывается во многих случаях предпочтительней. Экспериментальные исследования нужны и в тех случаях, когда нет возможности оценить степень приближенности найденного теоретического решения. Подавляющее число экспериментальных исследований о концентрации напряжений возле отверстий в пластинках и оболочках выполнено методами фотоупругости\* и фотоупругих покрытий\*\*. В меньшей степени для этой цели применялись методы тензометрии\*\*\* и лаковых покрытий\*\*\*\*.

В настоящем приложении мы не ставим себе целью дать сводку всех экспериментальных исследований по концентрации напряжений возле отверстий в пластинках и оболочках, а приводим лишь те из них, которые позволяют установить границы применимости полученных выше теоретических решений к пластинкам и оболочкам конечных размеров, и те работы, которые дают возможность оценить степень погрешности найденных приближенных решений. Для многих случаев приведены изоклины, соответствующие им изостаты и картина интерференционных полос\*\*\*\*\*. Изостаты и интерференционные полосы дают наглядное представление о размерах области, на которую распространяется влияние отверстия на напряженное состояние в рассматриваемой пластинке или полосе, и этим самым позволяют судить об области применимости теоретических решений, полученных в предыдущих главах, к конечным областям.

Числовые значения напряжений, полученные теоретическим путем, целесообразно сравнивать с теми экспериментальными результатами, которые были получены при условиях, аналогичных теоретическому решению. При этом за основу для сравнения не следует брать величины напряжений в угловых точках отверстий и надрезов. Возле указанных точек поле напряжений очень быстро изменяется. В этих местах небольшие изменения кривизны контура, которые практически трудно учесть, значительно отражаются на результатах. Поэтому при сравнении теоретических и экспериментальных данных будут приведены эпюры напряжений по некоторым сечениям, а также величины напряжений в неугловых точках контуров отверстий.

\* См. М. М. Фрохт [1, 2]; Л. Кокер, Э. Файлон [1]; А. М. Пригоровский [1]; Н. Т. Jessop, С. Snell, J. M. Alisson [1].

\*\* См. А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов, А. С. Ракин [1].

\*\*\* См. F. J. Mehlinger, W. E. Cooper [1]; М. А. Лошкарев [1].

\*\*\*\* См. К. Финк, X. Рорбах [1].

\*\*\*\*\* Изоклина — кривая, проходящая через точки с одинаковыми направлениями главных напряжений. Изостата — кривая, касательная к которой имеет направление главного напряжения в данной точке. Интерференционная полоса имеет в средних точках одинаковые наибольшие касательные напряжения.

## § 2. Растяжение пластинки с отверстиями

**Круговое отверстие.** На рис. П.67 были приведены экспериментальные результаты для растянутой полосы с центральным круговым отверстием. Приведем также экспериментальные данные, полученные методом фотоупругости на бакелитовых моделях (см. М. М. Фрохт [1, 2]).

На рис. П.1 представлена картина изоклин и изостат для полосы, растянутой равномерными усилиями  $p$  вдоль оси  $Oy$ . Ширина пластинки составляет 3,3 диаметра отверстия (ширина пластинки 26,4 мм, диаметр кругового отверстия 8 мм). Изоклина с параметром  $5^\circ$  (или  $85^\circ$ ) проходит через точки, в которых главные напряжения повернуты относительно главных направлений однородно-напряженного поля всего на  $5^\circ$ . Наибольшее расстояние этой изоклины от центра отверстия не превышает  $2,5 d$  ( $d$  — диаметр отверстия). Следовательно, можно считать, что на расстоянии, большем  $2,5 d$  от центра кругового отверстия, последнее практически не влияет на поле напряжений. Это подтверждается также картиной изостат, представленной в верхней части рисунка. Сравнивая приведенные изостаты для полосы с центральным круговым отверстием, полученные экспериментальным путем, с картиной изостат, представленной рис. П.37, полученной теоретически для бесконечной пластинки с круговым отверстием, видим, что если ширина растянутой полосы будет более чем  $5d$  ( $d$  — диаметр отверстия), то при теоретическом решении задачи полосу можем считать бесконечной пластинкой.

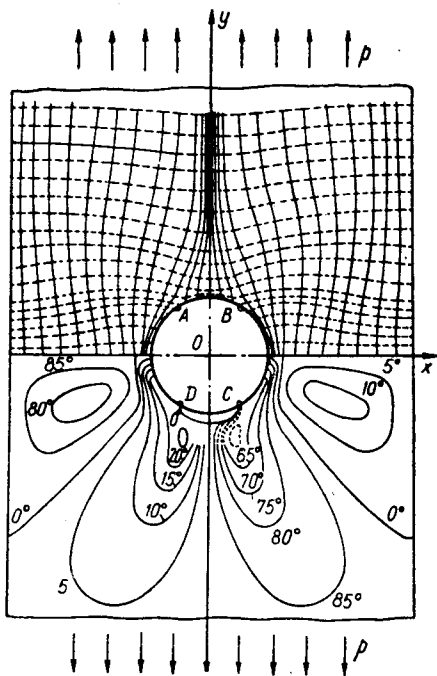


Рис. П.1.

На рис. П.2 изображены интерференционные полосы, дающие представление о распределении наибольших касательных напряжений  $\tau_{\max}$  в указанной полосе с круговым отверстием. Сравнивая картину интерференционных полос с линиями равных  $\tau_{\max}$ , приведенных на рис. П.36 и полученных теоретически для растянутой неограниченной пластинки, ослабленной круговым отверстием, видим очень большое сходство между ними. Так, отношение  $(\sigma_\theta)_{\max}$  на контуре кругового отверстия в растянутой полосе к напряжению  $\sigma^{(\infty)} = p$  в удаленных от отверстия точках равно 3,36. В табл. П.22 для  $\lambda = 0,3$  и  $\beta = 90^\circ$  это отношение равно 3,36.

**Эллиптическое отверстие.** На рис. П.3 приведены изоклины и изостаты для растянутой пластинки с эллиптическим отверстием\* ( $b/a = 2/3$ ). Отношение ширины пластинки к большей оси эллипса равно 4,23. Отношение осей эллипса  $a/b = 3/2$ . Растяжение производилось вдоль меньшей оси. Сравнивая линии главных напряжений (изостаты), полученные экспериментально, с линиями главных напряжений, представленных на рис. П.34, видим, во-первых, их хорошее совпадение и, во-вторых, что на расстоянии, равном  $2,5 a$  от начала координат, возмущение, вызванное эллиптическим отверстием, практически не сказывается.

**Квадратное отверстие.** На рис. П.4 в верхней половине чертежа представлены изоклины, а в нижней части — изостаты\*\* для одноосно-растянутой полоски с квадратным отверстием.

\* См. Э. Кокер и Л. Файлон [1], стр. 457.

\*\* Там же, стр. 556.

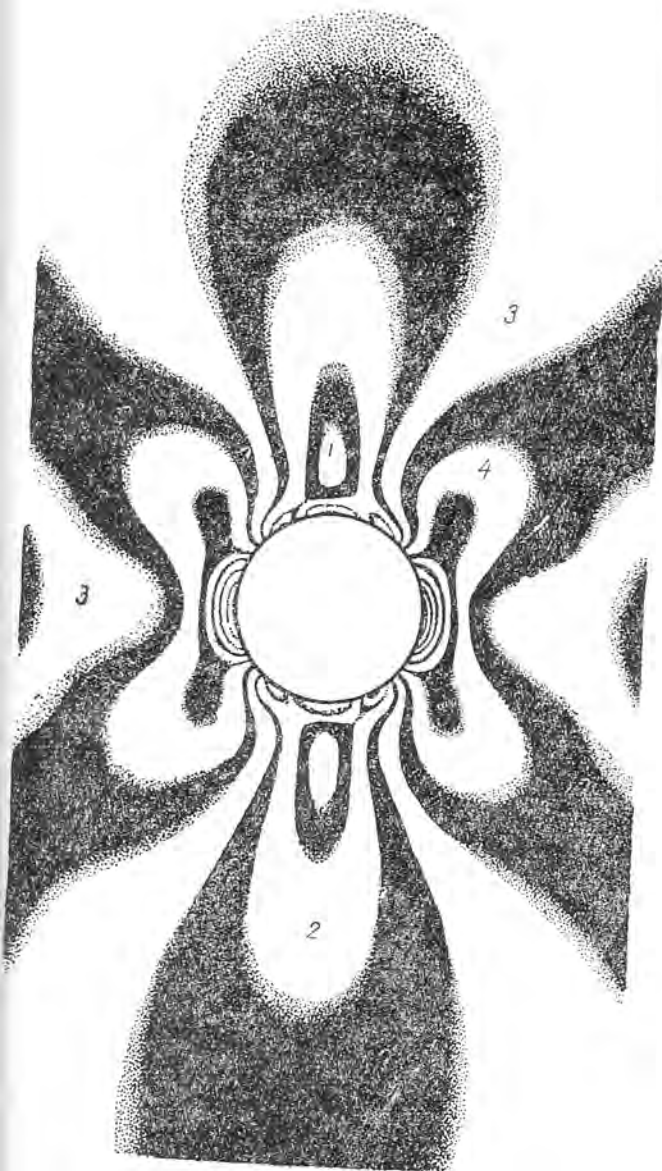


Рис. П.2.

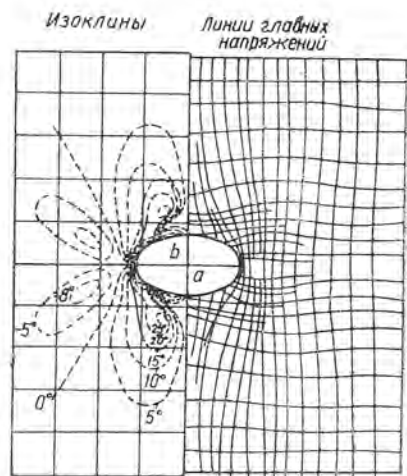


Рис. П.3.

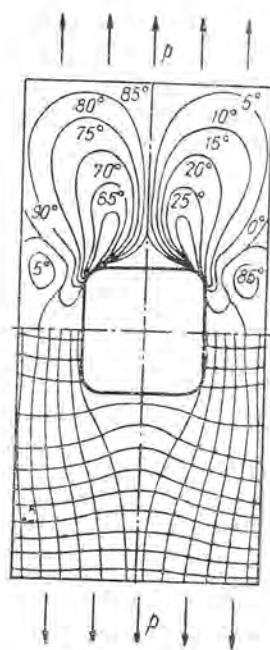


Рис. П.4.



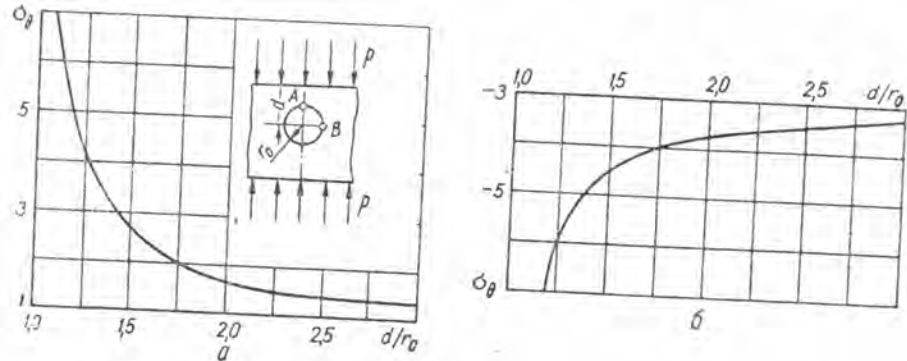


Рис. П.8.

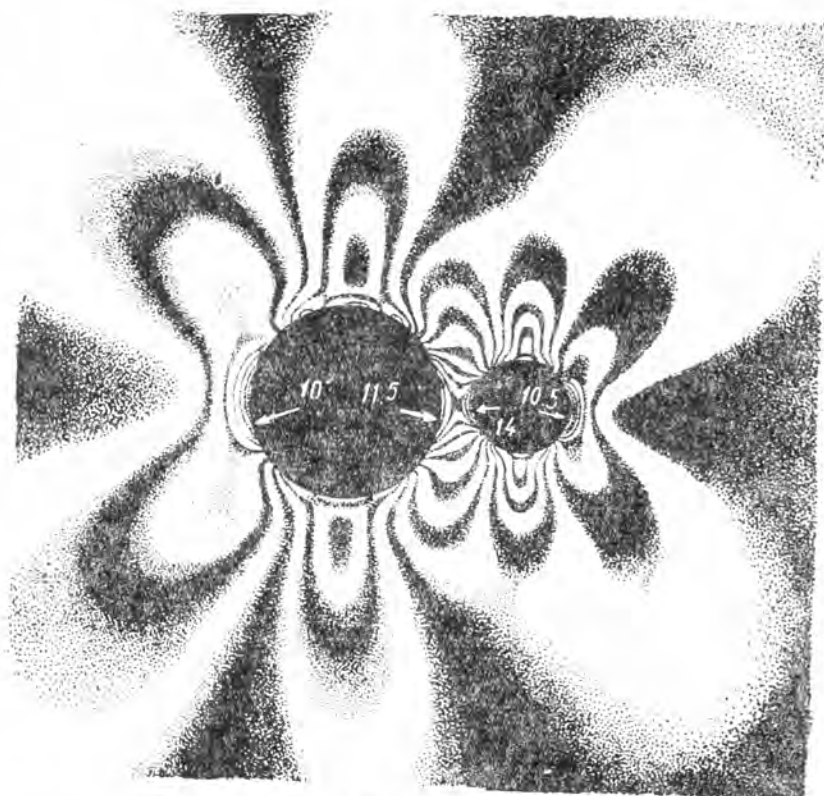


Рис. П.9.



от отверстия точках, равных  $p$  и  $q=1/4p$ , картина изостат изображена \* на рис. П.6. Отношение сторон прямоугольника  $a/b=1/8$ , причем большая ось прямоугольника составляет угол  $20^\circ$  с направлением усилий  $p$ . Как видим, величина возмущающей зоны, вызванная рассматриваемым прямоугольным отверстием, не выходит из круговой области (с центром в центре тяжести прямоугольного отверстия) радиуса  $r_0=1,5a$ .

**Поперечное сжатие широкой полосы с круговым отверстием у края.** На рис. П.7 приведены эпюры напряжений  $\sigma_\theta$  вдоль контура кругового отверстия, найденные

Р. Д. Вагальцовым и О. И. Шишориной [1] методом фотоупругости, когда центр отверстия расположен на расстоянии  $d/r_0=1,34$  (кривая 1),  $1,54$  (кривая 2) и  $2,58$  (кривая 3) от верхнего края полосы. Штриховая кривая 4 соответствует неограниченной пластинке, т. е.  $d/r_0=\infty$ .

На рис. П.8 даны напряжения  $\sigma_\theta$  соответственно в точках А (рис. П.8, а) и В (рис. П.8, б) в зависимости от  $d/r_0$ , где  $d$  — расстояние центра кругового отверстия от верхнего края полосы, а  $r_0$  — его радиус. Как видим, возмущенная зона возле рассматриваемого отверстия для  $d/r_0 \geq 3$  незначительно отличается от аналогичной зоны возле кругового отверстия для бесконечной пластинки.

Из представленных на рис. П.2—П.8 данных можно определить (при заданной точности подсчетов) то наименьшее расстояние  $d$  центра тяжести отверстия в виде эллипса или правильного многоугольника (а также прямоугольника) с закругленными углами от края полосы, когда можно пользоваться соответствующим (данному отверстию)

решением для бесконечной пластинки, приведенным в гл. II.

**Два круговых отверстия.** Напряженное состояние возле двух неравных круговых отверстий в случае растяжения пластинки «на бесконечности» усилиями  $p=\text{const}$  в направлении, перпендикулярном к их линии центров, рассматривалось в работах Р. Д. Вагальцова, О. И. Шишориной и Л. А. Хрипиной [1—3].

На рис. П.9 приведена характерная картина изохром в случае двух неравных круговых отверстий, когда радиус большего отверстия  $r=14$  мм, а меньшего —  $r=6,97$  мм при ширине перемычки  $\delta=5,2$  мм. Установлено, что в случае двух неравных круговых отверстий при растяжении пластинки так, как указано на рис. П.9, когда одно из отверстий значительно меньше другого, т. е. при  $r_1 \gg r_2$ , наибольшее напряжение  $\sigma_\theta$  (на контурах этих отверстий) будет на контуре меньшего отверстия в точке  $A_2$  (рис. П.10). При сближении отверстий, т. е. при уменьшении перемычки  $\delta$ , на контуре большего отверстия в окрестности точки  $A_1$  происходит разгрузка \*\*. На рис. П.10 даны значения коэффициентов концентрации  $k_2=\sigma_\theta/p$  в точке  $A_2$  в функции от  $\delta/r_1$ . Сплошная и штриховая кривые построены по приближенному теоретическому решению, найденному указанными выше авторами (которое очень хорошо согласуется с точным решением, приведенным в § 9 гл. II) для  $r_2/r_1=1$  (сплошная кривая) и  $r_2:r_1=1:30$  (штриховая кривая). Различные точки на рис. П.10 соответствуют коэффициентам концентрации  $k_2=\sigma_\theta/p$  в точке  $A_2$ , найденным методом фотоупругости для значений  $\delta/r_1$ . Как видим,

\* См. Л. Г. Афендик и А. М. Ершов [†].

\*\* Этим можно воспользоваться для разгрузки сильно напряженных участков возле отверстий.

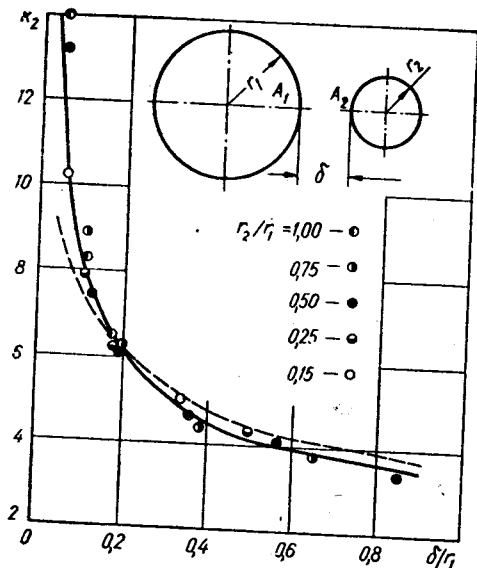


Рис. П.10.

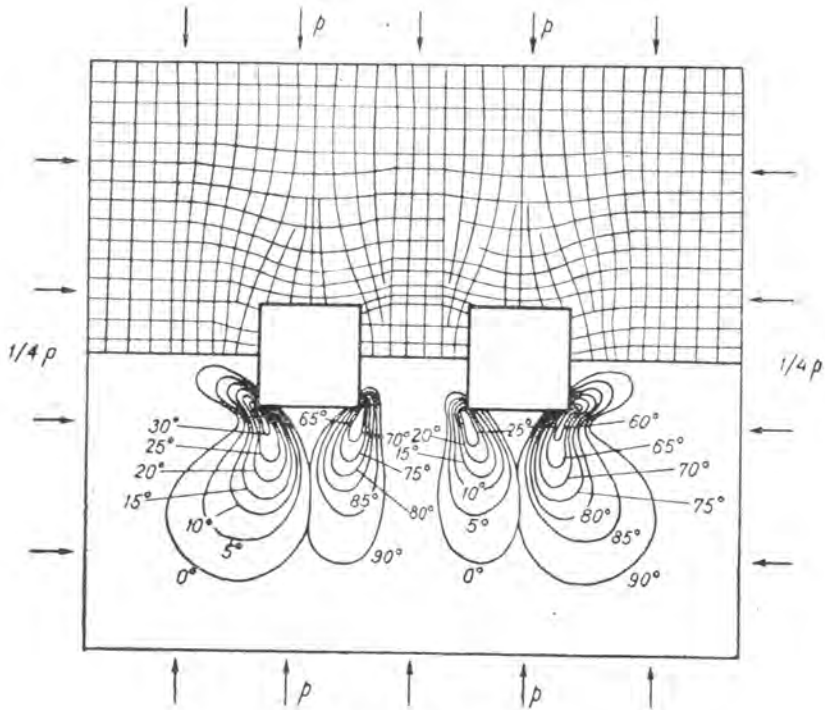


Рис. П.11.

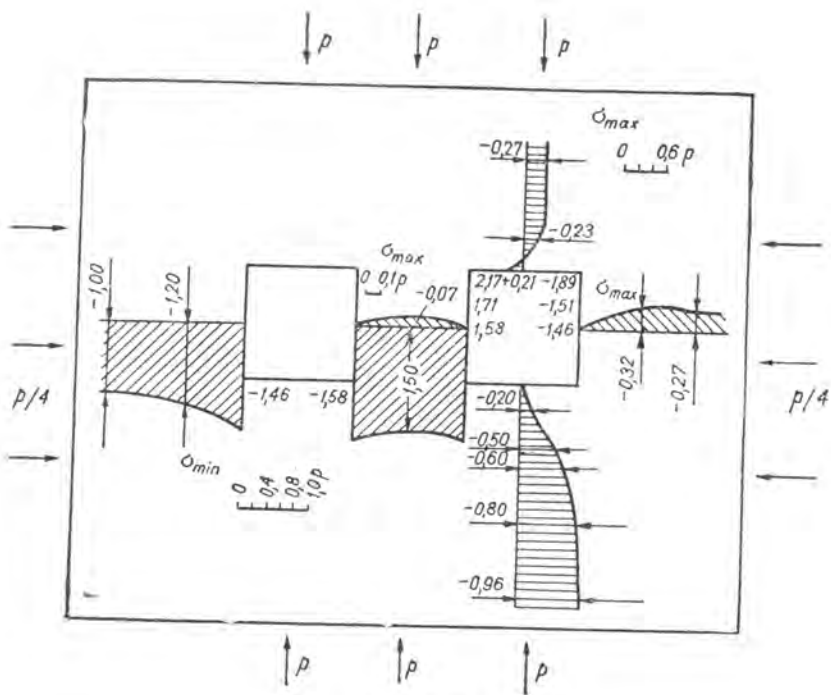


Рис. П.12.

все экспериментальные точки тесно ложатся возле теоретических кривых для  $r_2/r_1=1$  и  $r_2:r_1=1:30$ , которые, в свою очередь, очень близко располагаются одна возле другой. Отсюда следует, что в очень широком диапазоне  $\frac{1}{30} \leq \frac{r_2}{r_1} \leq 1$  можно с большой степенью точности пользоваться коэффициентами концентрации для  $r_2/r_1=1$ .

Два квадратных отверстия. На рис. П.11 представлены изоклины и изостаты для пластинки с двумя квадратными отверстиями, расположенными на расстоянии, равном

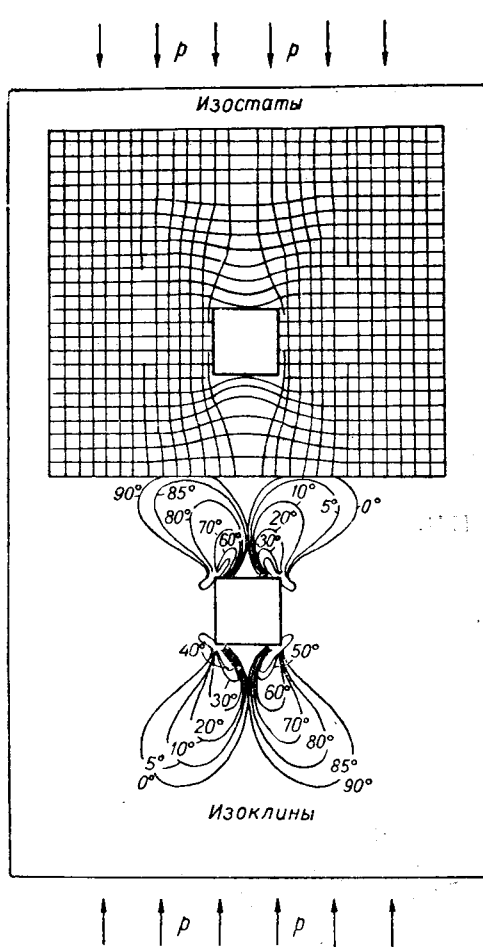


Рис. П.13.

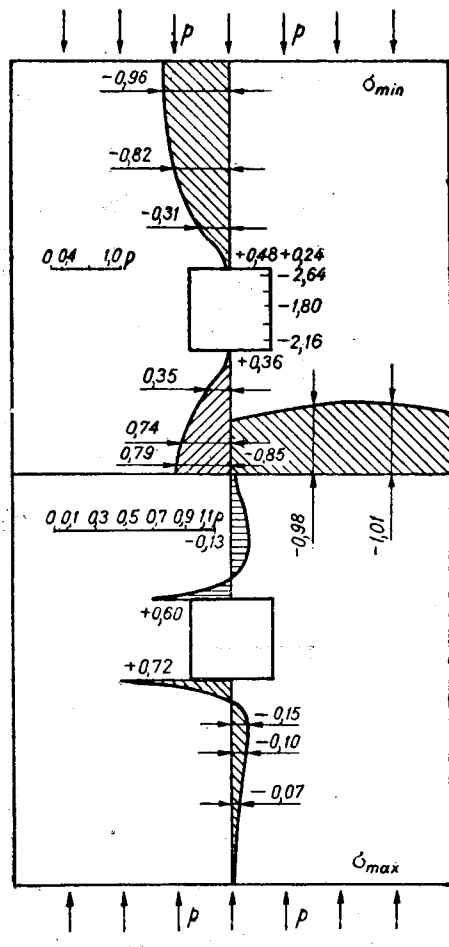


Рис. П.14.

длине стороны квадрата друг от друга. Пластика сжата в двух направлениях усилиями  $p$  и  $q=1/4p$ . На рис. П.12 изображена картина распределения напряжений по двум сечениям для этого случая\*.

Изоклины и изостаты для пластинки, ослабленной двумя одинаковыми квадратными отверстиями и сжатой в одном направлении усилиями  $p$ , показаны на рис. П.13, а распределение главных напряжений по осям симметрии на рис. П.14. Длина пластинки

\* См. Л. Г. Афендик [1].

взята в 10 раз больше, чем сторона квадрата. Расстояние между квадратными отверстиями равно утроенной длине стороны квадрата. При выбранном расстоянии между центрами квадратов, равном трем сторонам квадрата (см. рис. П.14), влияние одного квадратного отверстия на поле напряжений возле другого квадратного отверстия сравнительно невелико. Так, напряжения на серединах сторон, перпендикулярных к направлению сжимающих усилий  $p$ , относятся как 0,60/0,72.

### § 3. Чистый изгиб полосы с отверстием

**Круговое отверстие.** На рис. П.15 показана схема приспособления, при помощи которого создавался чистый изгиб полосы с круговым отверстием, а также указаны размеры полосы и положение отверстия.

На рис. П.16 даны \* эпюры напряжений  $\sigma_\theta$  по контуру кругового отверстия радиуса  $a$ . Штриховые линии соответствуют напряжениям  $\sigma_\theta$ , определенным по формуле (П.105). Наибольшее значение  $\sigma_\theta$  при  $a=$

$=6$  мм равно 12,9, а при  $a=5$  мм — 10,77. Сплошные линии с точками соответствуют значениям  $\sigma_\theta$ , найденным экспериментально, по контурам этих отверстий. Здесь  $\sigma_\theta=13,7$  для  $a=6$  мм и  $\sigma_\theta=10,5$  для  $a=5$  мм. Приведенные значения  $\sigma_\theta$  отличаются от значений, которые дает формула (П.105), не более чем на 7%.

На рис. П.17 даны эпюры напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  по сечению  $x=0$ , когда радиус кругового отверстия  $a=6$  мм. Сплошные линии — данные эксперимента, а штриховые линии соответствуют теоретическим данным, подсчитанным по формулам (П.104), т. е. для неограниченной полосы.

На рис. П.18 показаны эпюры напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$  по сечению  $x=7,5$  мм, когда радиус кругового отверстия  $a=6$  мм. Сплошные линии получены экспериментально, штриховые — из теоретического решения (П.104).

На рис. П.19 представлены траектории главных напряжений в полосе с круговым отверстием радиуса  $a=6$  мм.

Из данных, приведенных на рис. П.16—П.19, видим, что диаметр кругового отверстия в полосе может быть и не малым, достигая  $2/3$  ее высоты, и при этом теоретическое решение (П.104) в пределах обычной точности оказывается вполне применимым.

**Квадратное и прямоугольное отверстие.** Методом фотоупругости\*\* на целлулоидных моделях было исследовано влияние квадратного и прямоугольного отверстия на картину напряженного состояния в полосе (балке) при чистом ее изгибе. Высота отверстия составляла  $1/3$  высоты балки (рис. П.20).

На рис. П.20 представлено поле изостат для квадратного отверстия. Как видим, возмущение, вызванное квадратным отверстием, простирается вдоль нейтральной оси балки на расстояние, равное удвоенной стороне квадрата, считая от контура отверстия, а в перпендикулярном направлении — на расстояние равное лишь  $1/3$  длины стороны квадрата, также считая от контура отверстия.

Аналогичные эксперименты были проведены для прямоугольного отверстия с соотношением сторон  $a/b=3$  и высотой, равной  $1/3$  высоты поперечного сечения балки. Поле изостат для этого случая показано на рис. П.21.

Приведенные на рис. П.20 и П.21 экспериментальные данные дают возможность легко установить область применимости теоретических решений § 2 и 3 гл. II к конечным областям.

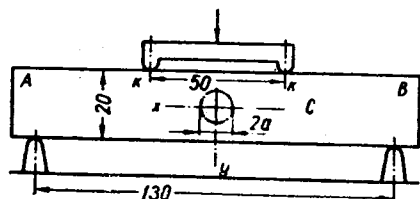


Рис. П.15.

\* См. Z. Tuzi [1].

\*\* См. Г. Н. Савин [1].

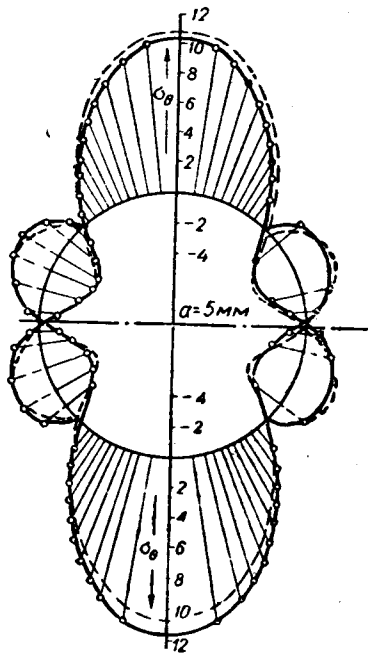
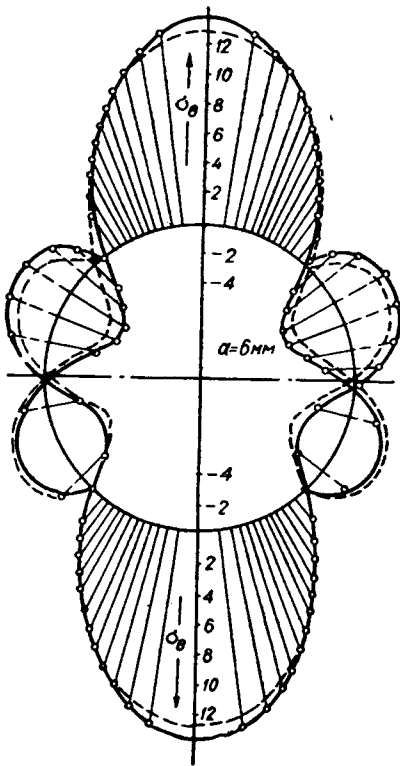


Рис. П.16.

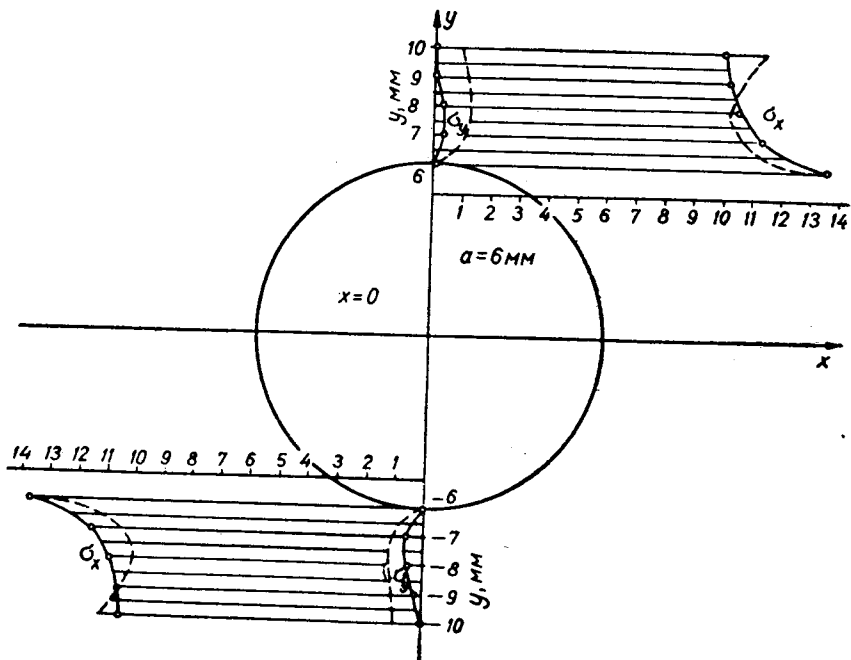


Рис. П.17.

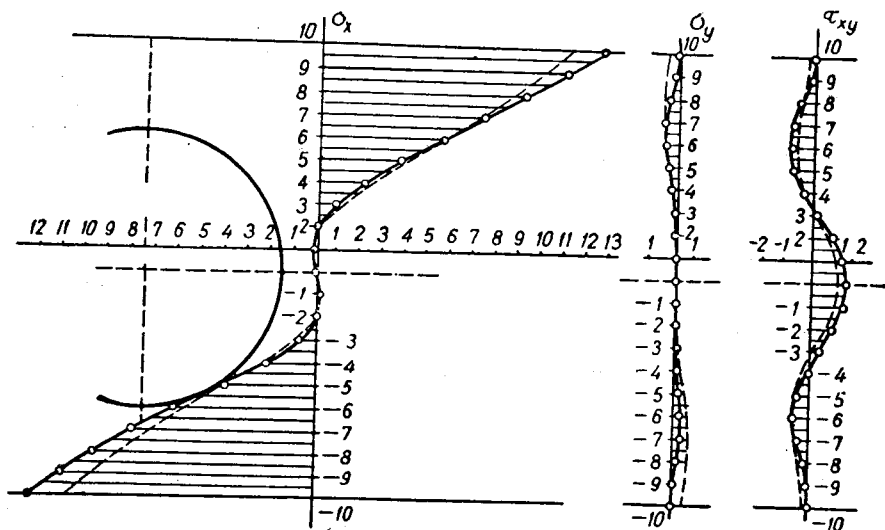


Рис. П.18.

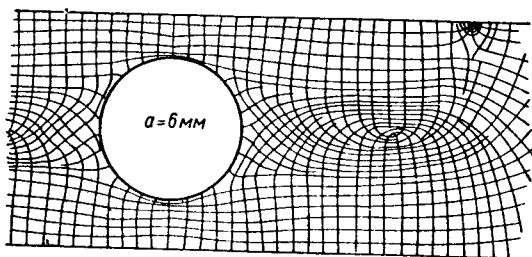


Рис. П.19.

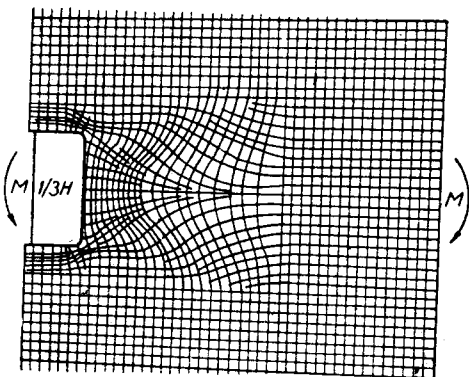


Рис. П.20

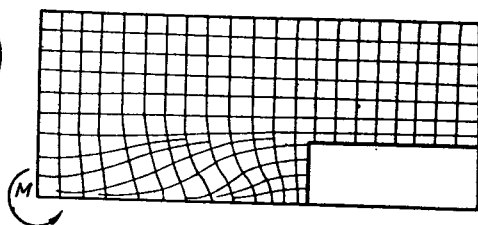


Рис. П.21.

### § 4. Изгиб консольной балки, ослабленной круговыми отверстиями

Исследования распределения напряжений в консоли, ослабленной одним или двумя круговыми отверстиями, проводились методом фотоупругости С. П. Шихобаловым [1]. Балка (полоса) изгибалась сосредоточенной силой, расположенной на свободном конце. Модели изготовлялись из отожженного зеркального стекла толщиной 7,5 мм. Расчетная длина балки  $l=100$  мм, высота  $h=24$  мм, диаметр отверстий  $d=12$  мм.

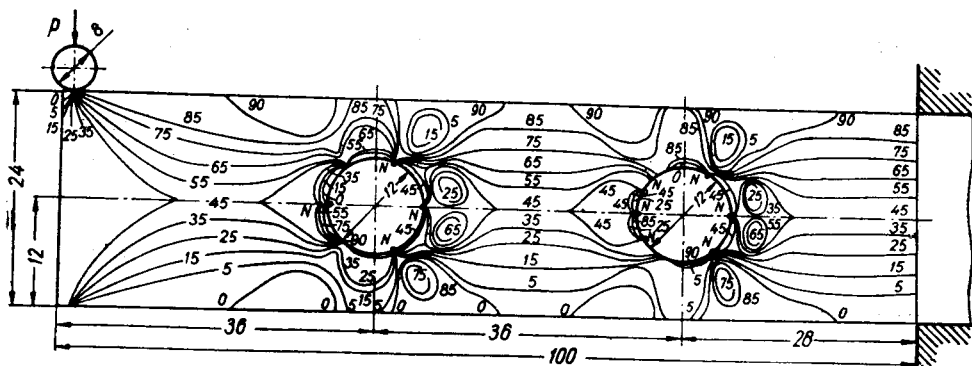


Рис. П.22.

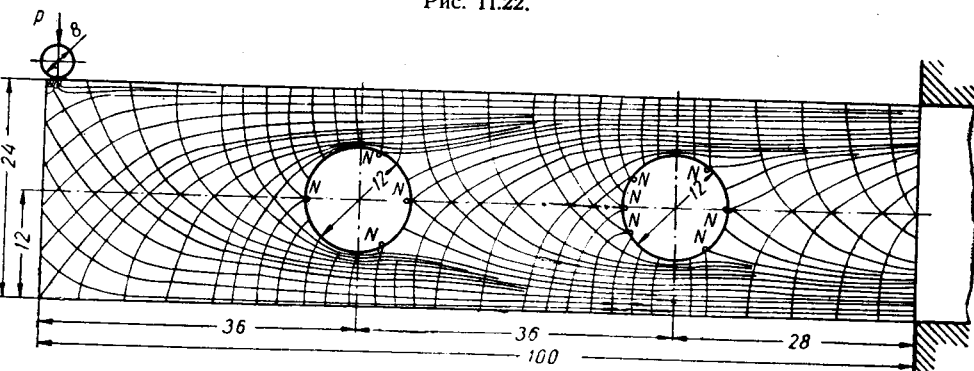


Рис. П.23.

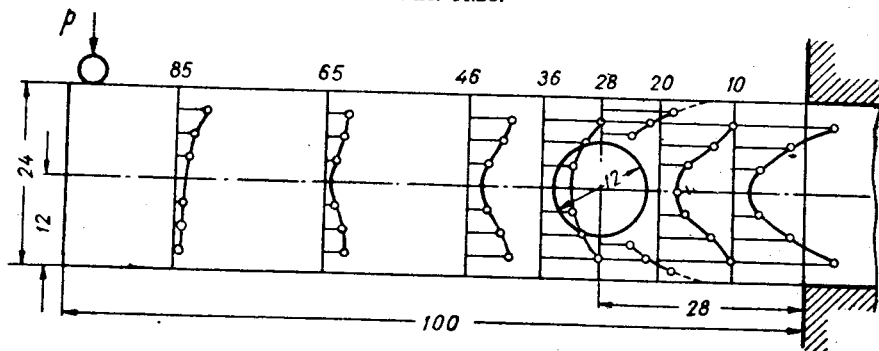


Рис. П.24.

На рис. П.22 и П.23 приведены изоклины и изостаты в балке с двумя одинаковыми круговыми отверстиями ( $d=12$  мм), находящимися на расстоянии 36 мм друг от друга; при этом расстоянии взаимное влияние их друг на друга оказывается незначительным.

Распределение наибольших касательных напряжений по некоторым сечениям и напряжений  $\sigma_\theta$  по контуру отверстия для балки с одним отверстием дано на рис. П.24 и П.25, где штриховые линии — теоретические кривые, а сплошные линии — данные экспериментов.

Анализ изоклин показывает, что влияние каждого отверстия распространяется по оси балки на расстояние не многим более 0,75—0,80 диаметра отверстия, отсчитывая от контура отверстия.

Из приведенных данных на рис. П.22—П.25 следует, что:

1) наибольшее напряжение  $\sigma_\theta$  на контуре отверстия будет в верхней точке контура — в зоне растяжения;

2) коэффициент концентрации напряжений \* в консольных балках с круговыми отверстиями, центры которых расположены на нейтральной оси (при данных соотношениях размеров) равен двум;

3) напряжения  $\sigma_x$  на внешнем контуре балки (полосы) превосходят соответствующие напряжения на контуре отверстия;

4) наиболее опасным сечением является не ослабленное отверстием сечение, а сечение, расположенное по месту заземления;

5) главные нормальные напряжения достигают наибольшего значения в месте заземления;

6) даже для отношения  $h/d=2$  (где  $h$  — высота балки, а  $d$  — диаметр отверстия) напряжения по контуру кругового отверстия можно подсчитывать по формуле (П.105).

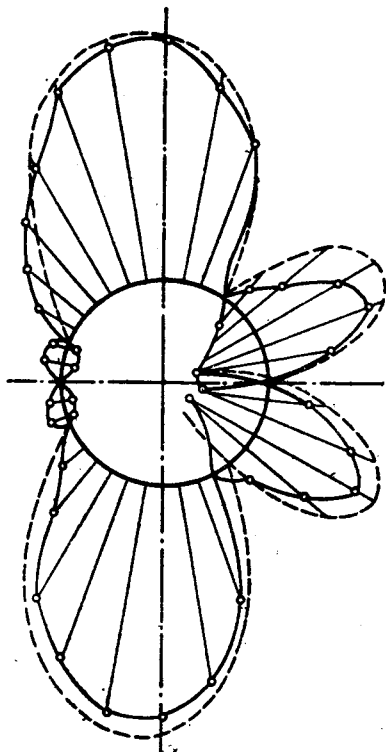


Рис. П.25.

### § 5. Одноосное растяжение пластинки, ослабленной круговым отверстием, край которого подкреплен упругим кольцом

Часто отверстия подкрепляют так, как показано на рис. П.26. При расчете таких колец считают \*\*, что все поперечное сечение утолщения, т. е. вся высота кольца  $H$ , участвует в работе пластинки. Однако напряженное состояние в кольце изменяется по его высоте. Ясно, что чем больше высота кольца  $H$  в сравнении с толщиной  $h$  пластинки, тем значительней будет отличаться напряженное состояние в крайних его сечениях от напряженного состояния в сечении, лежащем в срединной плоскости пластинки.

Экспериментальному исследованию данного вопроса методом фотоупругости по-

\* Отношение напряжений  $\sigma_\theta$  в верхней точке отверстия к соответствующему напряжению  $\sigma_x$  в балке без отверстия в той же точке.

\*\* См. С. П. Тимошенко [1].



связаны работы М. Сейка, М. Исии, Й. Куруцү [1]; М. Сейка, М. Исии [1]; М. Сейка [1], а также М. Reiner, Н. Lerchental [1].

На рис. П.27 для  $b/D=1$  приведены значения коэффициентов концентрации напряжений  $k_1=\sigma_1/\sigma_0$  и  $k_3=\sigma_3/\sigma_0$  в точке А (см. рис. П.26) в зависимости от  $H/h$ , изменяю-

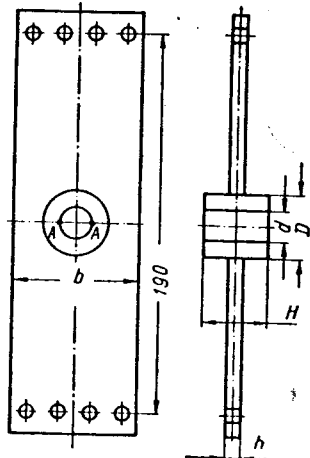


Рис. П.26.

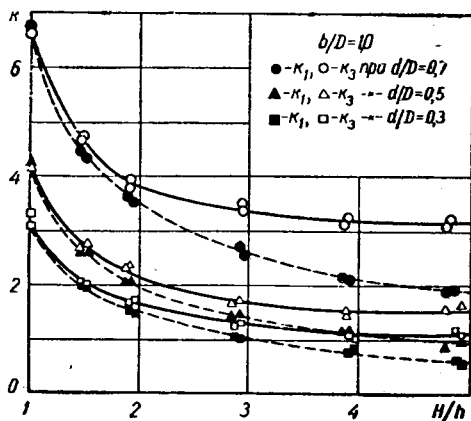


Рис. П.27.

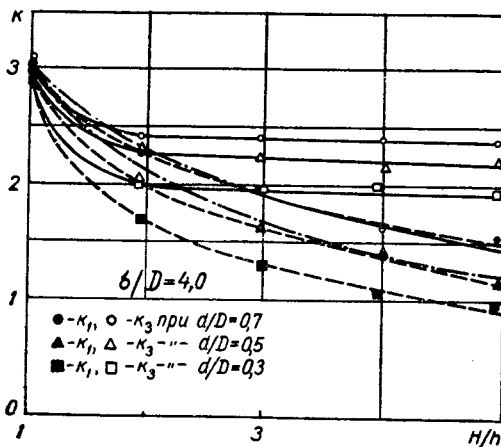


Рис. П.28.

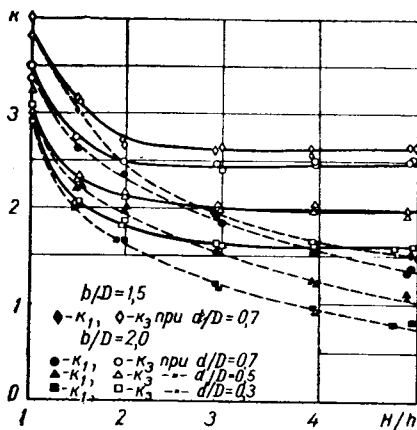


Рис. П.29.

щегося в интервале  $1 \leq \frac{H}{h} \leq 5$ , для трех соотношений  $d/D$ . Здесь  $\sigma_0$  — номинальное напряжение в неослабленной пластинке;  $\sigma_1$  — максимальное (среднее по высоте  $H$ ) напряжение в кольце;  $\sigma_3$  — среднее напряжение по толщине пластинки  $h$ .

Напряжения  $\sigma_0$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  определены просвечиванием поляризованным светом в направлении, перпендикулярном к срединной плоскости «замороженной» пластинки с подкрепленным отверстием. Просвечивание в точке А (рис. П.26) по толщине  $H$  дает напряжение  $\sigma_1$ , а по толщине  $h$ , т. е. после снятия выступающей части кольца (удаления

части кольца величины  $H-h$ ), — напряжение  $\sigma_3$ , которое по сравнению с одноименным напряжением для пластинки без кольца, найденным тем же методом просвечивания «замороженной» пластинки с неподкрепленным отверстием того же размера, будет значительно меньше, так как часть усилия кольцо «берет на себя». На рис. П.27—П.29 приведены кривые для  $k_1$  и  $k_3$  при  $b/D$ , равном соответственно 1,0; 1,5; 2,0 и 4,0. Штрихпунктирная кривая на рис. П.28 — данные С. Currey [1], подсчитанные теоретически в предположении, что напряжения распределяются равномерно по толщине кольца. На рис. П.29 верхние две кривые — сплошная для  $k_3$  и штриховая для  $k_1$  — соответствуют  $b/D=1,5$ , а остальные три пары кривых  $b/D=2,0$ .

На рис. П.27—П.29 светлые кружки, треугольники и квадраты с точками внутри, лежащие на оси ординат, т. е. соответствующие  $H/h=1$ , представляют собой данные, найденные по приближенной формуле Р. В. Neuwood [1], которая получена упрощением точной, но неудобной в приложениях формулы Хауланда, приведенной в § 6 гл. II. Из рисунков видим хорошее совпадение этих точек с экспериментальными данными.

Кривые на рис. П.27 показывают, что существенное влияние на величину  $k_3$  оказывает отношение  $d/D$ . Так, при  $H/h=1,5$  коэффициент концентрации  $k_3=2,0$  при  $d/D=0,3$  и  $k_3=4,5$  при  $d/D=0,7$ . Сопоставляя кривые, приведенные на рис. П.28 и П.29, для одних и тех же значений  $d/D$ , можно легко получить представление о влиянии ширины пластинки  $b$  на коэффициент концентрации  $k_3$ .

Как видим из рис. П.27—П.29, для каждого значения отношения  $d/D$  кривые для  $k_3$ , начиная с некоторого значения  $H/h$ , становятся почти параллельными оси абсцисс. Это показывает, что, начиная с некоторых значений  $H/h$  дальнейшее увеличение высоты кольца  $H$  практически бесполезно, так как незначительно снижает величину коэффициента концентрации  $k_3$ . Так, для  $b/D=1$  (рис. П.27), начиная с  $H/h=3$  все кривые для  $k_3$  становятся почти параллельными оси абсцисс; для  $b/D=1,5$  и 2,0 (рис. П.29) эта параллельность наблюдается с  $H/h=2,5$ , а для  $b/D=4,0$  (рис. П.28) — со значения  $H/h=2,0$ . Исходя из этих экспериментальных данных, можно легко указать эффективную высоту подкрепляющего кольца. Заметим, что кривые для  $k_3$  при  $b/D=4,0$  практически совпадают с одноименными кривыми, построенными для «бесконечной» пластинки\*.

На рис. П.30 приведены графики для величины  $k_3$  в функции от  $b/D$  для рассмотренных выше значений  $d/D$ , равных 0,7 (кривая 1), 0,5 (кривая 2) и 0,3 (кривая 3) при  $H/h=3,0$ .

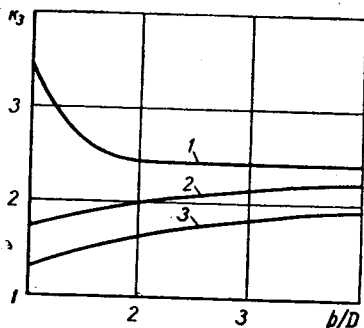


Рис. П.30.

## § 6. Прямоугольные отверстия в поле сил собственного веса

Во многих задачах техники, в частности в задачах горного дела, силами, вызывающими концентрацию напряжений возле отверстий, являются силы собственного веса материала  $\gamma = \text{const}$ .

На рис. П.31 и П.32 приведены картины изостат соответственно для двух и четырех прямоугольных отверстий, взятые из работы П. М. Цимбаревича [1]. Исследование распределения напряжений возле указанных отверстий в тяжелой плоскости было им проведено на оптически активном материале — игдантине — упругие постоянные которого  $E=1045 \text{ г/см}^2$ ,  $\nu=0,34$  и  $\gamma=1,175 \text{ г/см}^3$ . Из этих рисунков отчетливо видна величина возмущенной зоны возле отверстий, т. е. влияние отверстий на распределение напряжений в плоском поле, находящемся под действием сил собственного веса.

\* См. М. Сейка, М., Исин, И. Куруцу [1].

### § 7. Влияние гауссовой кривизны на величину возмущенной зоны возле отверстия

Экспериментальные исследования напряженного состояния возле достаточно гладких отверстий (контуры которых не имеют угловых точек) показывают, что возмущенная напряженная зона возле отверстия в оболочке имеет местный характер\*, занимая небольшой (охватывающий отверстие) участок оболочки.

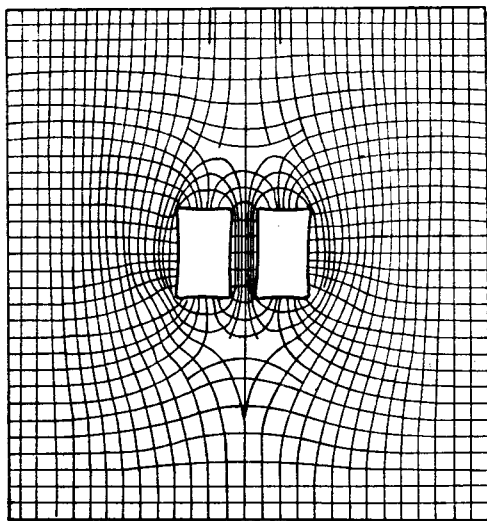


Рис. П.31.

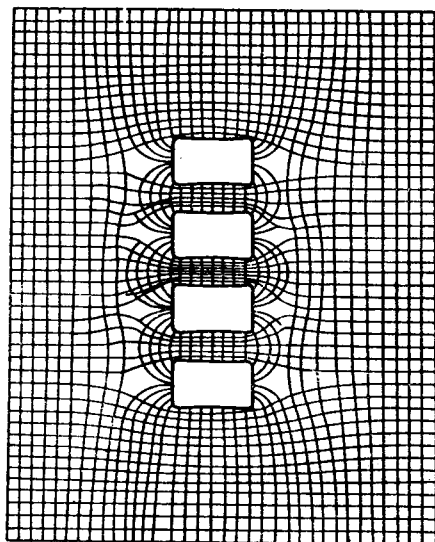


Рис. П.32.

На рис. П.33—П.35 показаны картины возмущенных зон возле «кругового» отверстия\*\* в круговом торе, которое располагалось соответственно как в зоне положительной (рис. П.36, I) нулевой (рис. П.36, II), так и отрицательной (рис. П.36, III) гауссовой кривизны. Тор находился под действием внутреннего гидростатического давления  $p=0,45$  атм. Размеры тора: внешний диаметр — 850 мм, диаметр поперечного сечения — 200 мм, толщина стенки (оболочки) — 2 мм. Диаметр (внешний) кругового цилиндра, при помощи которого на поверхности тора вырезалось «круговое» отверстие, — 32 мм. Это отверстие было заклеено тонкой резиновой пленкой размерами  $110 \times 110$  мм и толщиной 0,6 мм.

Таким образом, из приведенных рисунков видим, что во всех случаях возмущенная зона возле отверстия имеет местный характер, однако размеры этих зон зависят от знака гауссовой кривизны оболочки. Так, если максимальный размер возмущенной зоны для случая I (рис. П.36) взять за единицу, то для случая II он будет порядка 1,5 и для случая III — порядка 2,0.

Оболочка в виде тора дает возможность одновременно наблюдать возмущенные зоны возле одного и того же\*\*\* (до деформации) отверстия, находящегося в зонах с различной гауссовой кривизной.

\* См. Г. Н. Савин [3].

\*\* Полученного в пересечении тора и кругового цилиндра, ось которого направлена по нормали к поверхности тора в соответствующей его точке.

\*\*\* Т. е. возле отверстия, полученного в пересечении одних и тех же поверхностей: тора и (кругового) цилиндра.

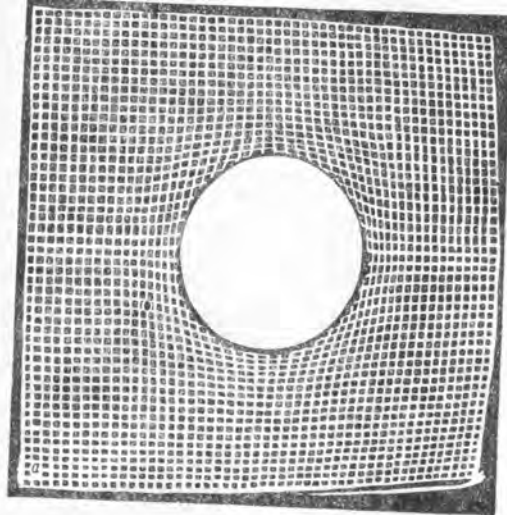


Рис. П.33.

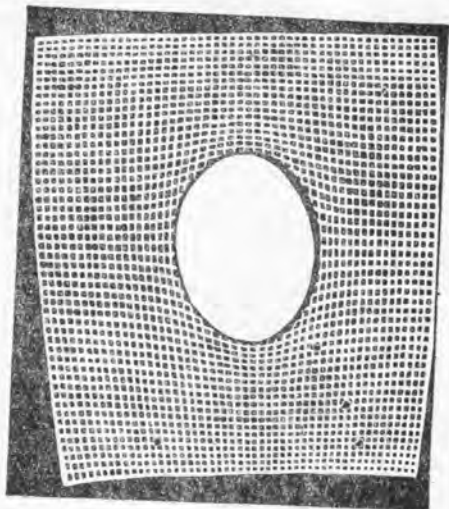


Рис. П.34.

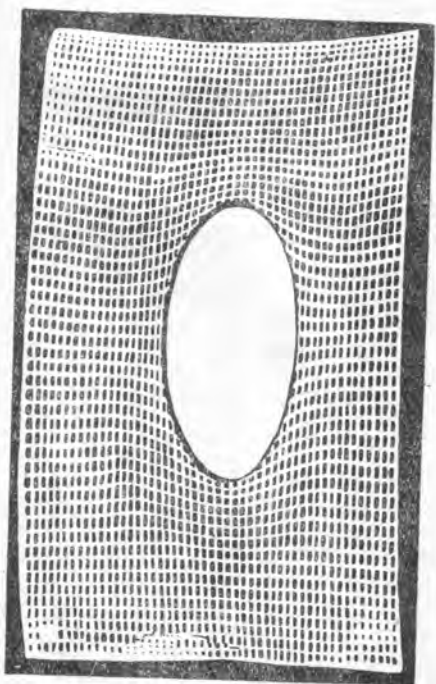


Рис. П.35.

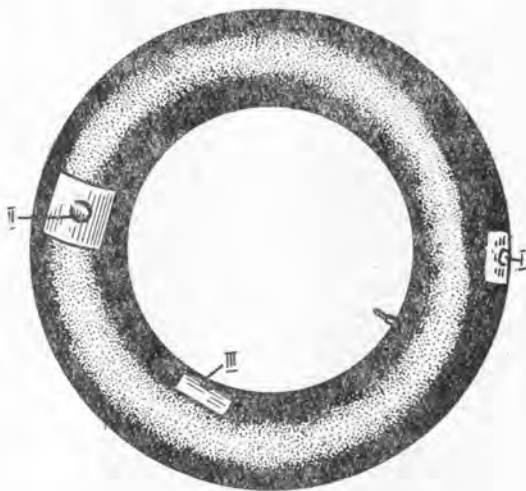


Рис. П.36.

### § 8. Цилиндрическая оболочка, ослабленная одним отверстием

**Круговое отверстие. Осевое сжатие.** Экспериментальные исследования концентрации напряжений возле круговых отверстий в цилиндрических (круговых) оболочках, проведенные методом фотоупругости\* на моделях оболочек из оптически-активного материала, а также на моделях оболочек из металла методом фотоупругих покрытий\*\*, показывают, что для малых отверстий, для которых справедливо неравенство

$$\omega = \frac{r_0^2}{Rh} < 1,$$

экспериментальные данные хорошо согласуются с решением А. И. Лурье [1]. Здесь  $r_0$  — радиус отверстия в оболочке;  $R$  — радиус срединной поверхности оболочки;  $h$  — толщина оболочки.

Коэффициенты концентрации напряжений  $k = \frac{\sigma_{\theta}}{\sigma_0}$  ( $\sigma_{\theta}$  — максимальные напряжения на контуре отверстия, а  $\sigma_0$  — нормальные напряжения в оболочке в зоне однородного напряженного состояния) принимают наибольшие значения в точках  $A$  (см. рис. П.50) при растяжении оболочки вдоль образующих цилиндра равномерно-распределенными усилиями  $p = \sigma_0 h$ .

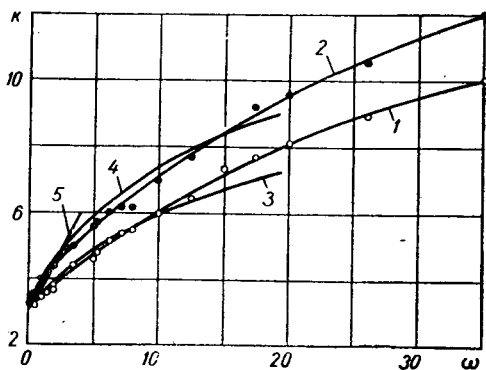


Рис. П.37.

Зависимость максимальных коэффициентов концентрации  $k$  от величины параметра  $\omega$  представлена на рис. П.37 кривыми 1 и 2, построенными по экспериментальным данным соответственно для срединной и внутренней поверхностей. Как видим, эти кривые не совпадают, что и следовало ожидать, так как в зоне концентрации напряжений возле отверстия в оболочке возникают кроме тангенциальных компонент усилий моменты, вызывающие изгибные напряжения, зависящие от параметра  $\omega$  оболочки. Кривые 3 и 4 построены по решениям А. К. Приварникова, В. Н. Чехова, Ю. А. Шевлякова\*\*\* и J. G. Lekkerkerker [1], найденным для больших отверстий. Кривая 5 соответствует решению А. И. Лурье [1] для малых круговых отверстий. Как видим, теоретические решения для больших отверстий очень хорошо согласуются с экспериментальными данными до значений параметра  $\omega = 12$ .

Из указанной выше работы А. Я. Александрова и др. [1] следует, что возмущенная зона возле отверстия даже при  $\omega = 12,5$  распространяется от края отверстия на расстояние, не превышающее 3,5 радиуса отверстия  $r_0$ . По данным Н. А. Флеровой [1], эта зона возмущения еще меньше и распространяется от края отверстия на расстояние, не превышающее одного радиуса  $r_0$  отверстия.

Приведенные результаты экспериментальных исследований показывают, что возмущенная зона даже возле немого отверстия имеет локальный характер. Благодаря этому при теоретическом решении задачи во многих случаях отверстие можно считать «малым», а область — бесконечной.

**Эллиптическое отверстие. Осевое сжатие.** В работе Ю. И. Вологжанинова и С. Г. Шокоцько [1] методом фотоупругости с применением «замораживания» деформаций исследована картина напряженного состояния возле неподкрепленных эллиптических отверстий в круговых цилиндрических оболочках\*\*\*\* при осевом их сжатии (рис. П.38) для четырех оболочек с параметрами, приведенными в табл. П.1.

\* См. Н. А. Флерова [1]; D. S. Houghton [1]; D. S. Houghton, A. Rothwell [1]; Н. Т. Jessop, C. Snell, J. M. Allison.

\*\* См. А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов, А. С. Ракин [1].

\*\*\* Там же.

\*\*\*\* См. также D. S. Houghton [1].

В табл. П.1 обозначено:  $R$  — радиус срединной поверхности оболочки;  $H$  — высота оболочки;  $a$  и  $b$  — полуоси эллиптического отверстия (см. рис. П.38) (все линейные размеры даны в мм).

В рассмотренных случаях возмущенная зона возле эллиптического отверстия занимала небольшую область, вытянутую вдоль образующих цилиндра (рис. П.38). Расстояние, на которое распространялось возмущение, не превосходило двух больших осей эллипса от края отверстия. При этом возмущение от отверстий, вытянутых вдоль образующих ( $a > b$ ), распространялось на меньшее расстояние.

На рис. П.39 показано распределение коэффициентов концентрации, равных отношению контурных

Таблица П.1

Параметры оболочки и отверстия	Номер оболочки			
	1	2	3	4
$R$	38,0	50,5	50,5	50,5
$h$	1,5	2,25	2,0	2,0
$H$	100,0	130,0	120,0	120,0
$a$	3,0	6,1	4,0	6,0
$b$	4,5	4,6	6,0	4,0
$h/R$	0,039	0,044	0,039	0,039
$r_0/\sqrt{Rh}$	0,5	0,5	0,5	0,5

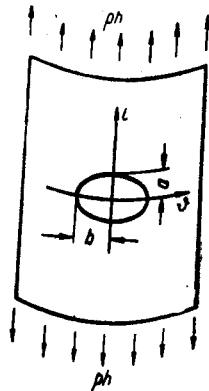


Рис. П.38.

усилий  $T_s$  к усилиям основного напряженного состояния  $T_l$ . Сплошные линии построены по экспериментальным данным, а штриховые — по формуле (X.165).

Для рассматриваемого случая формула (X.165) имеет вид

$$k_{теор} = \frac{T_s}{T_l} = \frac{1}{2} \{ (2 - \varepsilon \pi \beta^2) + [4\varepsilon - (4 + \pi \beta^2) - \varepsilon^2(2 + 3\pi \beta^2)] \cos 2\vartheta + [4\varepsilon^2 - (4 + \pi \beta^2) \varepsilon] \cos 4\vartheta - (2 + \pi \beta^2) \varepsilon^2 \cos 6\vartheta \}, \quad (П.1)$$

где

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}; \quad \beta = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{2} \cdot \frac{r_0}{\sqrt{Rh}}$$

При сопоставлении экспериментальных результатов с теоретическими, определяемыми формулой (П.1), следует учитывать зависимость между углом  $\varphi$  плоской системы координат, начало которой совпадает с геометрическим центром (тяжести) отверстия, и параметром  $\vartheta$ . Угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $l$  (см. рис. П.38):

$$\varphi = \arctg \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg} \vartheta.$$

Для данных, приведенных в четвертом столбце табл. П.1, формула (П.1) при  $\nu=0,5$  (коэффициент Пуассона при «замораживании») будет иметь вид

$$k_{теор} = 0,97 - 1,805 \cos 2\vartheta - 0,349 \cos 4\vartheta - 0,046 \cos 6\vartheta. \quad (П.2)$$

В табл. П.2 приведены значения коэффициентов концентрации  $k$  в точках пересечения контура отверстия с осью  $l$  ( $\vartheta=0$ ) (см. рис. П.38) и осью  $\vartheta$  ( $\vartheta=\pi/2$ ). Величина  $k_{эксп}$  и  $k_{теор}$  подсчитаны по формуле (П.2). Для сопоставления приведена величина  $k_{пласт}$  — коэффициент концентрации усилий  $T_s$ , найденный по формуле (П.63) при  $\sigma_x^{(\infty)}=0$ ,  $\sigma_y^{(\infty)}=-p$ .

Приведенные на рис. П.39 и в табл. П.2 данные показывают, что максимальное расхождение экспериментальных данных с соответствующим приближенным теоретическим решением гл. X не превышает 3—5%.

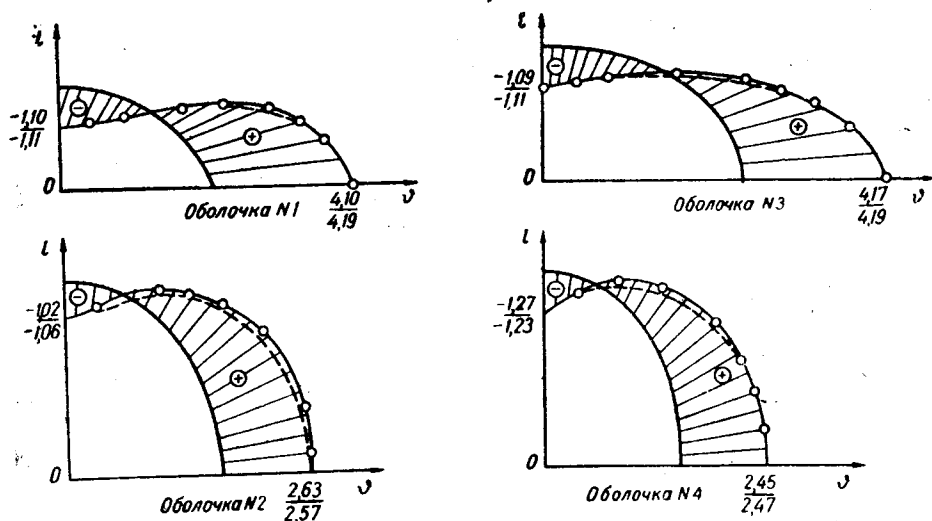


Рис. П.39.

Для цилиндрической оболочки на основании (теоретических) исследований ряда задач\* был сделан вывод, что при определении максимальных значений коэффициентов концентрации напряжений в цилиндрической оболочке около малых отверстий (контур которых свободен от внешних усилий) произвольной формы, но не имеющих угловых точек при растяжении — сжатии цилиндрической оболочки вдоль образующей, можно, ограничиваясь точностью 7—10%, пользоваться соответствующими решениями плоской задачи, изложенной в гл. II.

Таблица П.2

Коэффициенты концентрации	$\phi$	Номер оболочки			
		1	2	3	4
$k$ (эксп)	0	1,10	1,02	1,09	1,27
	$\pi/2$	4,10	2,63	4,17	2,45
$k$ (теор)	0	1,11	1,06	1,11	1,23
	$\pi/2$	4,19	2,57	4,19	2,47
$k$ (пласт)	0	1,00	1,00	1,00	1,00
	$\pi/2$	4,00	2,51	4,00	2,33

**Квадратное отверстие с закругленными углами. Осевое сжатие.** В оболочке вначале вырезалось круговое отверстие радиуса  $r_0$ , а затем это отверстие постепенно от эксперимента к эксперименту превращалось в квадратное с заданным радиусом закругления\*\* углов.

На (рис. П.40) представлены кривые для величины  $k$  в функции от  $r/r_0$  ( $r$  — радиус закругления угла) для двух параметров:  $\omega_0=5,08$  и  $\omega_0=8,0$  при  $\omega_0=r_0^2/Rh$ .

Сплошные кривые соответствуют значению  $k$  на внутренней поверхности, а штриховые — в срединной поверхности оболочки. Как видим, вначале с уменьшением радиуса закругления угла величина  $k$  уменьшается, достигая минимума при  $r/r_0=0,45 \div 0,50$ . Дальней-

\* См. Г. Н. Савин, А. Н. Гузь [1], а также Г. Н. Савин [2].

\*\* См. А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов, А. С. Ракин [1].

шее же уменьшение радиуса закругления углов приводит к увеличению значения  $k$ . Максимальные напряжения  $\sigma_0$  на контуре отверстия сосредотачиваются в местах сопряжения прямолинейных участков контура отверстия с кривыми закруглениями углов на сторонах квадрата, параллельных оси растяжения.

Закон изменения величины  $k$  вдоль контура отверстия при  $\omega_0=8,0$  и  $r/r_0=0,5$  и растяжении оболочки вдоль оси  $x$  показан на рис. П.41. Штриховая кривая соответ-

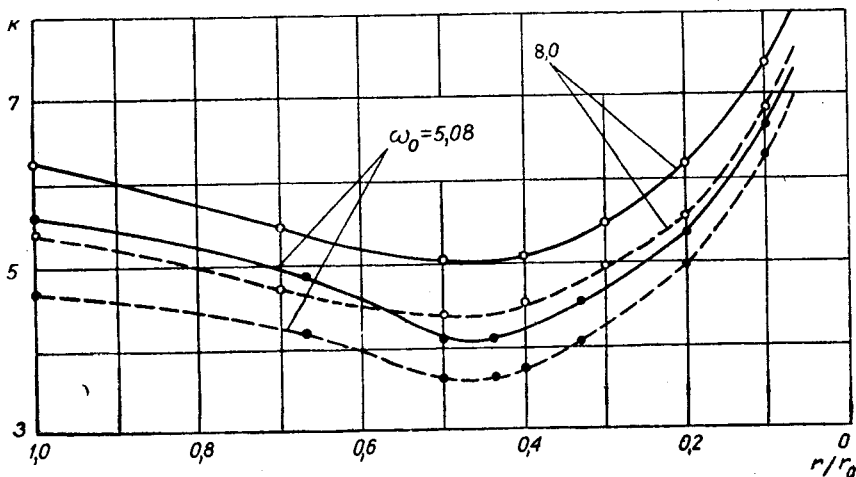


Рис. П.40.

ствует значению  $k$  для срединной поверхности, а сплошная — для внутренней поверхности оболочки. Положительные значения  $k$  соответствуют растягивающим напряжениям и отложены с внешней стороны контура отверстия.

**Круговое отверстие. Кручение цилиндрической оболочки.** На рис. П.42 кривые 1 и 2 построены по данным экспериментов\* и соответствуют напряжениям в срединной и на внутренней поверхностях оболочки. Прямая 5 построена по решению Ю. А. Шевлякова, Ф. С. Зигеля [1] для срединной поверхности оболочки. Кривые 3 и 4 построены по данным работы J. G. Lekkerkerker [1], а кривая 6, соответствующая напряжениям на внутренней поверхности оболочки, — по данным D. Withum [1]. Лучшее согласие с экспериментальными результатами имеет решение J. G. Lekkerkerker [1] для параметров  $\omega_0 \leq 10$ .

Распределение напряжений  $\sigma_0$  по контуру кругового отверстия для четырех параметров  $\omega$ , равных 1,0; 7,1; 15,0 и 20,0, приведено на рис. П.43, где сплошными линиями показано распределение напряжений в срединной поверхности оболочки, а штриховыми — изгибные напряжения на внутренней поверхности оболочки.

**Растяжение и кручение цилиндрической оболочки с подкрепленными отверстиями.** На рис. П.44 приведены кривые для величины  $k_{\max}$  в функции от величины утолщения  $v=H/h$  для точек, лежащих на внутреннем контуре отверстия, в срединной поверхности. Эти кривые найдены экспериментально при помощи полосок из оптически-активного материала, которые наклеивались на уровне срединной поверхности в торец к отверстию. Кривые 1 и 2 соответствуют круговому отверстию при  $\omega=4,0$  и  $r_0/r=0,6$ . Кривые 3 и 4 — прямоугольному отверстию с параметрами  $ab/Rh=13,3$ ;  $a/b=1,5$ ;  $c/b=0,48$  и  $r'_0/b=0,20$ . Кривые 5 и 6 — квадратному отверстию с параметрами  $a^2/Rh=8,85$ ;  $c/a=0,48$  и  $r'_0/a=$

\* См. А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов, А. С. Ракин [1].



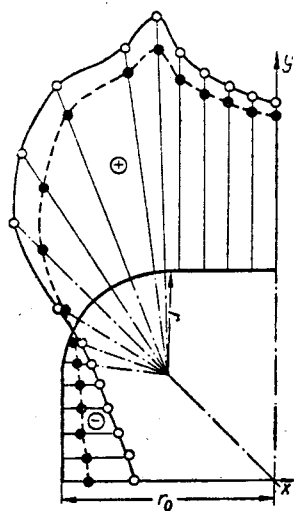


Рис. П.41.

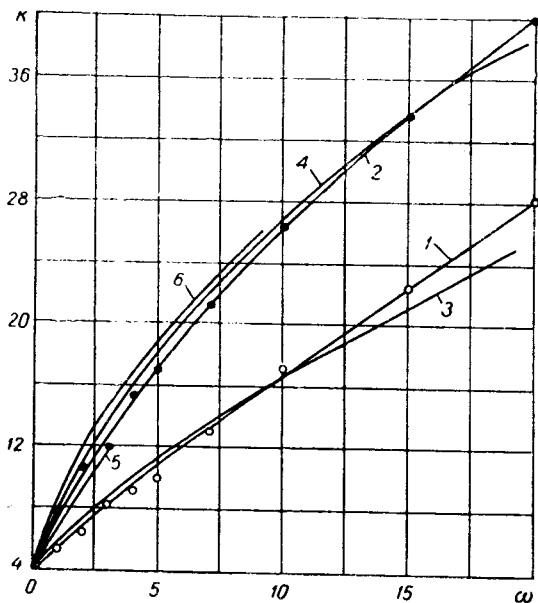


Рис. П.42.

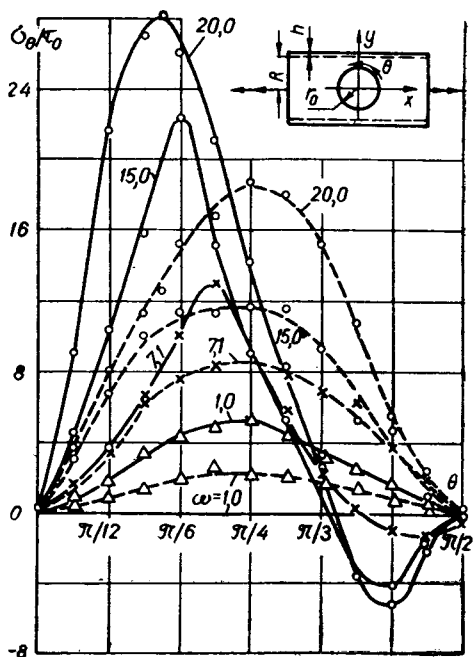


Рис. П.43.

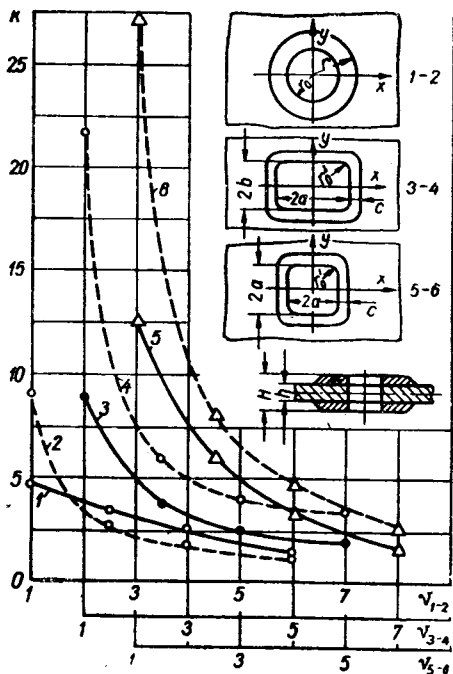


Рис. П.44.

$=0,12$ . Здесь сплошные линии соответствуют растяжению, а штриховые — кручению. Как видим\*, с увеличением параметра  $\nu = H/h$  концентрация максимальных напряжений на контуре отверстия вначале резко уменьшается\*\*, а затем, начиная примерно с  $\nu = 5,0$ , это уменьшение замедляется. Отсюда следует, что для каждой формы отверстия можно подобрать оптимальную величину высоты кольца  $H$ .

**Напряжения возле кругового отверстия в цилиндрической оболочке при упруго-пластической стадии деформации.** В работе А. Я. Александрова, М. Х. Ахметзянова, А. С. Ракина [1] методом фотоупругих покрытий изучена концентрация напряжений возле свободного от внешних усилий кругового отверстия в дюралюминиевых и стальных\*\*\* оболочках при растяжении их усилиями  $p = \sigma_0 h$  вдоль образующих.

Экспериментальные исследования показывают, что по мере возрастания параметра нагружения  $\lambda = \sigma_0 / \sigma_{0,2}$  коэффициенты концентрации напряжений  $k$  в точках срединной поверхности оболочки резко снижаются. Здесь  $\sigma_0$  — номинальное напряжение в достаточно удаленных от отверстия частях оболочки, т. е. в зоне однородного напряженного состояния оболочки;  $\sigma_{0,2}$  — условный предел текучести материала оболочки.

На рис. П.45 кривые 1, 2 и 3 соответствуют дюралюминиевым оболочкам с параметрами  $\omega_1 = 0,142$ ,  $\omega_2 = 2,0$  и  $\omega_3 = 4,0$ , а кривые 4 и 5 — стальным оболочкам с параметрами  $\omega_4 = 4,0$  и  $\omega_5 = 10,0$ .

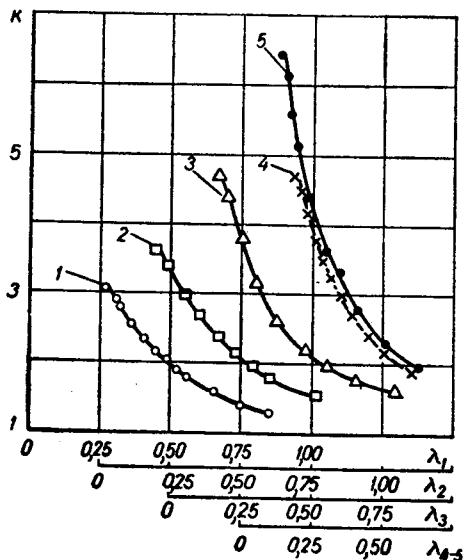


Рис. П.45.

### § 9. Коническая оболочка, ослабленная одним отверстием

**Осевое сжатие оболочки с круговым отверстием.** В работе Ю. И. Вологжанинова [1] исследованы две конические оболочки из оптически-активного материала ЭД-6М.

На рис. П.46 показано меридиональное сечение, проходящее через центр отверстия и элемент оболочки, содержащей круговое отверстие радиуса  $r_0$ . Значения параметров (в мм) рассмотренных оболочек приведены в табл. П.3, где сила  $P$  дана в ньютонах, а угол  $\alpha$  — в градусах.

Таблица П.3

Номер оболочки	$r_0$	$R_1$	$R_2$	$H$	$h$	$\alpha^\circ$	$P$	$\nu$
1,	5,25	17	32	90	3	9,5	50,2	0,5
2	3,0	20	31	70	2	9,0	50,0	0,5

\* Аналогичную картину мы наблюдали и для подкрепленного кругового отверстия в случае плоской пластинки (см. рис. П.26—П.29).

\*\* На рис. П.44 и П.45 для большей наглядности шкалы по оси абсцисс несколько смещены друг относительно друга.

\*\*\* Диаграмма растяжения рассматриваемой стали не имела площадки текучести.

Напряженное состояние в оболочке фиксировалось «замораживанием». Расшифровка напряженного состояния приведена нормальным сквозным просвечиванием, что позволяло получить усилия  $T_s$  вдоль контура отверстия и разность  $T_l - T_\theta$  окружных и меридиональных усилий вне области

влияния отверстия, т. е. в зоне основного напряженного состояния.

Основное напряженное состояние в конической оболочке № 1 (табл. П.3), находящейся под действием сжимающих сил  $P$  (рис. П.46), найденное\* с помощью численного интегрирования на БЭСМ-2М, в основной части оболочки, не примыкающей к краям, т. е. при  $0,2 a < l < 0,7 a$ , будет практически безмоментным, т. е.  $M_l$ ,  $M_\theta$  и  $T_\theta$  в этой части оболочки будут отсутствовать.

Таким образом, экспериментально определяемая разность  $T_l - T_\theta$  в средней части оболочки на параллели, проходящей через центр отверстия, но в достаточном удалении от него, будет практически соответствовать усилию  $T_l$ .

Распределение усилий  $T_s$  (н/см)

по контуру отверстий оболочек № 1 и 2 приведено соответственно на рис. П.47, а и б. Сплошная линия на рис. П.47, а соответствует верхней половине контура отверстия ( $t_0 \geq 0$ ), а штриховая — нижней половине (рис. П.46) контура отверстия ( $t_0 < 0$ ).

В табл. П.4 приведены значения усилия  $T_s$  на контуре отверстий в наиболее характерных точках А, В и С (рис. П.46), а также значения  $T_l - T_\theta$  основного напряжен-

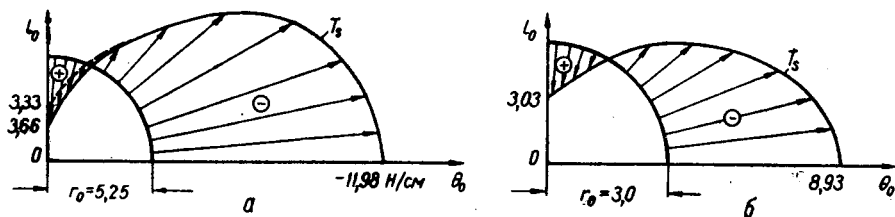


Рис. П.47.

Таблица П. 4

Номер оболочки	Точка контура	$T_s$	$T_l - T_\theta$	$K_{\text{экс}} = \frac{T_s}{T_l - T_\theta}$	$K_{\text{теор}}$
1	А	3,66	-3,16	-1,16	-1,275
	В	-11,98		3,79	3,206
	С	3,33		-1,05	-1,137
2	А	3,03	-2,94	-1,03	-1,135
	В	-8,93		3,04	3,098
	С	3,03		-1,03	-1,061

\* См. А. Д. Коваленко, Я. М. Григоренко, Л. А. Ильин [1].

ного состояния на параллели, проходящей через центр отверстий, и величины коэффициента концентрации  $k^{\text{экс}}$  усилий, вычисленных по этим данным; здесь даны также величины  $k^{\text{теор}}$ , подсчитанные при условии, что коническая оболочка с круговым отверстием растягивается соответствующими усилиями вдоль образующих.

Из приведенных в табл. П.4 данных видим довольно хорошее совпадение  $k^{\text{экс}}$  и  $k^{\text{теор}}$  для меньшего отверстия (оболочка № 2). Это можно объяснить приведенными выше соображениями, а именно большей степенью точности соблюдения при эксперименте безмоментности основного напряженного состояния в средних частях оболочек\*. Большое расхождение  $k^{\text{экс}}$  и  $k^{\text{теор}}$  для большего отверстия (оболочка № 1) можно объяснить тем, что возмущенная зона возле отверстия в этом случае выходила из средней зоны оболочки, в которой с определенной степенью точности соблюдалось условие безмоментности основного напряженного состояния.

## § 10. Оболочки отрицательной гауссовой кривизны

**Круговое отверстие. Осевое сжатие оболочки.** В работах Ю. И. Вологжанинова, В. И. Савченко, М. Д. Фенчака [1] и Ю. И. Вологжанинова [1] исследуется концентрация напряжений возле «кругового» отверстия\*\* методом фотоупругости с применением «замораживания» деформаций.

В первой из этих работ исследуется однополостный гиперболоид, внешняя поверхность которого определяется уравнением  $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ , где  $a$  — радиус (внешний) шейки гиперболоида ( $z=0$ ), равный 55 мм.

Во второй — исследуется оболочка, внешняя поверхность которой образована вращением вокруг оси  $z$  (рис. П.48) части дуги окружности радиуса 115 мм. Внешний радиус шейки гиперболоида  $a=40$  мм.

Толщина оболочки в обоих случаях была постоянна —  $h=5$  мм, высоты этих оболочек были также одинаковы —  $H=116$  мм, радиусы (внешние) цилиндров  $r_0=4$  мм, в пересечении которых с указанными поверхностями на шейке были образованы «круговые» отверстия. Это дает возможность сопоставить результаты экспериментальных исследований для двух оболочек.

При исследовании меридиональных  $l_n$  и ортогональных им срезов  $\theta_n$  «замороженного» основного напряженного состояния показано (во второй работе), что распределение напряжений  $\sigma_l, \sigma_\theta$  вдоль линий, нормальных к срединной поверхности (линии  $C_1D_1$  на рис. П.48), т. е. по толщине оболочки, имеет линейный характер. Аналогичный вывод был получен и при исследовании однополостного гиперболоида в первой из указанных выше работ.

В табл. П.5 приведены значения напряжений  $\sigma_l^{Di}, \sigma_\theta^{Di}, \sigma_\theta^{Ci}, C_l^{Ci}$  для внутренней и внешней поверхности, а для оболочки № 2 при различных  $z_i$  (рис. П.48). По этим напряжениям ( $n/cm^2$ ) вычислены усилия ( $n/cm$ ) в направлении образующей  $T_l$  и в окружном направлении  $T_\theta$ .

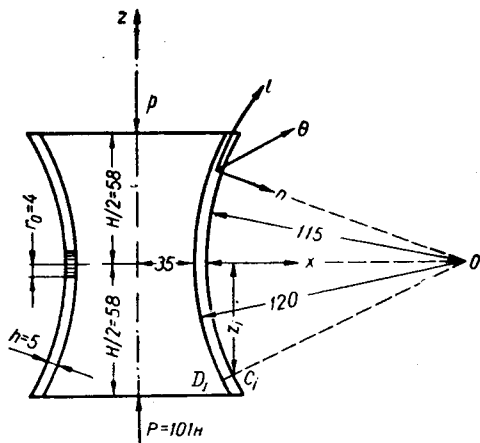


Рис. П.48.

\* Напомним, что при теоретическом решении этой задачи было принято, что оболочка растягивалась усилиями  $ph$  вдоль образующих.

\*\* Это отверстие получается пересечением каждой из указанных ниже поверхностей с круговым цилиндром, ось которого направлена по нормали к поверхности (рис. П.48).

Анализ данных, приведенных в табл. П.5, показывает, что изгибающие моменты  $M_i$ , определяемые напряжениями  $\sigma_i$ , незначительны при  $z=0$  и растут с увеличением  $z$ . Моменты  $M_\theta$ , наоборот, при  $z=0$  наибольшие и затем с увеличением  $z$  уменьшаются. Усилия  $T_i$  и  $T_\theta$  при  $-20 \leq z \leq 20$  постоянны. С приближением к краям оболочки усилия  $T_i$  продолжают оставаться практически постоянными, а  $T_\theta$  меняют знак. Это показывает, что часть оболочки, прилегающая к опорным краям, при сжатии (рис. П.48) оболочки растягивается в окружном направлении.

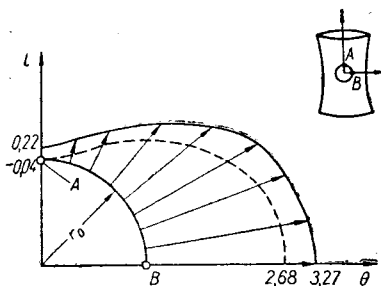


Рис. П.49.

Таблица П. 5

$z^i, \text{мм}$	$\sigma_i^{Di}$	$\sigma_i^{Ci}$	$\sigma_\theta^{Di}$	$\sigma_\theta^{Ci}$	$T_i$	$T_\theta$
0	-7,85	-8,14	-5,2	0	-4,0	-1,27
$\pm 10$	-7,55	-8,44	-5,1	-0,10	-4,0	-1,27
$\pm 20$	-6,28	-9,70	-4,02	-1,18	-4,0	-1,27
$\pm 30$	-2,35	-13,1	-1,86	-2,45	-3,92	-1,08
$\pm 40$	+0,98	-16,5	+1,96	-2,75	-3,92	-0,20

Контурные усилия  $T_s$  определялись нормальным (к срединной поверхности оболочки) сквозным просвечиванием в ряде точек контура отверстия. Сплошная линия на рис. П.49 соответствует коэффициентам концентрации  $k = T_s/T_i$  оболочки № 2, где  $T_s$  — усилия вдоль контура отверстия, а  $T_i$  — меридиональное усилие основного напряженного состояния на параллели, проходящей через центр отверстия ( $z=0$ ). Штриховой линией показаны коэффициенты концентрации  $k_{\text{пласт}}$  для пластинки с тем же круговым отверстием, нагруженной «на бесконечности» взаимно перпендикулярными усилиями, соответствующими усилиям  $T_i$  и  $T_\theta$  основного напряженного состояния оболочки при  $z=0$  (см. табл. П.5).

Для оболочки, рассматриваемой в первой работе, соотношение усилий  $T_i$  и  $T_\theta$  при  $z=0$  было равно 3,15, а для оболочки, рассмотренной во второй работе, это соотношение равнялось лишь 1,15. Несмотря на такую большую разницу, в обоих случаях характер распределения коэффициентов концентрации по контуру отверстия для оболочек и для пластинок совпадал. Однако численные значения коэффициентов концентрации  $k$  для оболочек несколько выше.

На основании указанных выше экспериментальных исследований оболочек с отверстиями отрицательной гауссовой кривизны можно сделать такие выводы:

1) возмущенная зона возле отверстия имеет локальный (охватывая отверстие) характер и распространяется от края отверстия на расстояние, не превосходящее трех радиусов отверстия;

2) максимальный коэффициент концентрации усилий  $T_s$  в оболочке с отверстием будет (при свободном отверстии) на контуре отверстия и не более чем в 1,3 раза превышать коэффициент концентрации для пластинки с тем же отверстием, нагруженной «на бесконечности» усилиями, соответствующими основному напряженному состоянию оболочки в точке  $z=0$  (см. рис. П.48).

### § 11. Влияние ползучести материала на концентрацию напряжений возле кругового отверстия

Концентрация напряжений с учетом ползучести материала в точках кругового отверстия (рис. П.50), находящегося в пластинке, растягиваемой усилиями  $\sigma_x^{(\infty)} = p$ ,  $\sigma_y^{(\infty)} = q$  ( $p \geq q$ ), изучалась оптическим методом И. И. Бугаковым [1].

Методом фотоползучести на моделях из двух различавшихся «возрастом» сортов технически прозрачного целлулоида исследовалось во времени изменение напряжений  $\sigma_0$  в точке  $A$  (рис. П.50). Первая модель изготовлялась из целлулоида с «возрастом» в полтора года, а вторая — с «возрастом» в полгода.

Экспериментально было установлено, что для этих целлулоидов для двухосного напряженного состояния в условиях установившейся, точнее, квазистационарной ползучести справедлива зависимость

$$\varepsilon_i = s_i \varphi(t) e^{bs_i} \quad \left( s_i = \frac{3}{2} \sqrt{s_{\alpha\beta} s_{\alpha\beta}} \right), \quad (\text{П.3})$$

где  $t$  — время;  $b$  — постоянная материала;  $s_i$  — интенсивность касательных напряжений;  $s_{\alpha\beta}$  — компоненты девиатора напряжений;  $\varepsilon_i$  — интенсивность деформаций сдвига.

Для небольших интервалов изменения напряжений удобнее пользоваться более простой зависимостью:

$$\varepsilon_i = Bs_i^m, \quad (\text{П.4})$$

где  $B$  — функция времени  $t$ .

Испытание образцов при одноосном растяжении из этих материалов при температуре  $20^\circ\text{C}$  (при этой же температуре проводились и основные исследования) показало, что для материала первой модели постоянная  $b=0,011$ , когда  $s_i$  изменяется в пределах  $85\text{--}210 \text{ кг/см}^2$ , и  $m=2,2$ . Для материала же второй модели постоянная  $b=0,016$ , когда  $s_i$  изменяется  $100\text{--}180 \text{ кг/см}^2$ , и  $m=3,0$ .

Обе модели были взяты в форме креста толщиной  $4 \text{ мм}$ . В средней части крестов, которые имели размеры  $60 \times 60 \text{ мм}$ , было сделано круговое отверстие диаметром  $7 \text{ мм}$ .

В опытах для параметров  $p$ ,  $q$  и  $\alpha$  были приняты значения, приведенные в табл. П.6.

Интенсивность касательных напряжений на «бесконечности»  $s_i^{(\infty)} = \sqrt{p^2 - pq + q^2}$  во всех опытах была равна  $100 \text{ кг/см}^2$ .

Коэффициент концентрации напряжений  $k$  в точке  $A$  (рис. П.50) определялся по формуле  $k = \sigma/p$ , где  $\sigma$  — напряжения в точке  $A$ , найденные оптическим методом.

Таблица П. 6

	100	114	114	100
$q$	0	38	76	100
$\alpha=q/p$	0	1/3	2/3	1

Таблица П. 7

$\alpha$	0	1/3	2/3	1	Модель
$k$	2,00	1,82	1,67	1,50	Первая
$k$	1,72	1,57	1,43	1,30	Вторая

Исследования показали, что перераспределение напряжений возле отверстий практически заканчивается для первой модели примерно через  $25 \text{ ч}$ , а для второй — через  $5 \text{ ч}$  после их загрузки. По истечении указанного времени модели находились в условиях установившейся ползучести, для которых найдены значения  $k$ , приведенные в табл. П.7.

Для коэффициента концентрации  $k$  в точке  $A$  (рис. П.50) И. И. Бугаковым [1] получены простые (аппроксимационные) формулы:

$$k = 1 + \frac{2 - \alpha}{m}, \quad k = 1 + \frac{2 - \alpha}{1 + s_0},$$

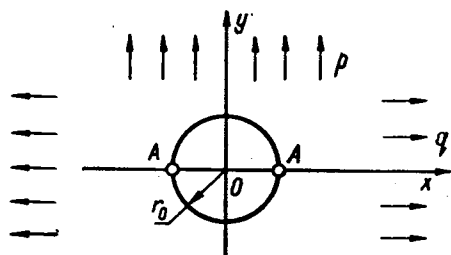


Рис. П.50.

из которых первая рекомендуется в случае применимости зависимости (П.3), а вторая — в случае применимости зависимости (П.4).

Наибольшие напряжения при двухосном растяжении пластинки с круговым отверстием, показанном на рис. П.50 ( $p \gg q$ ), не всегда, т. е. не при всех значениях  $s_0$  и  $m$ , будут в точке  $A$  контура отверстия. Исследования показывают, что, начиная с некоторых значений  $s_0$  и  $m$ , наиболее напряженные точки смещаются с контура отверстия во

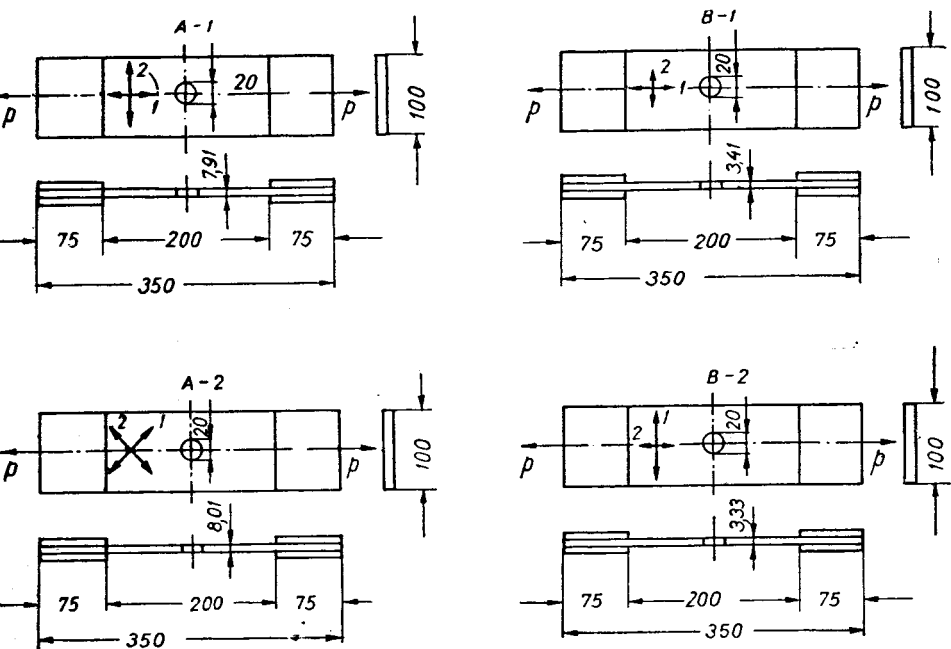


Рис. П.51.

внутри области в направлении оси  $Ox$  (рис. П.50). По-видимому, эти наибольшие растягивающие напряжения будут незначительно отличаться от напряжений  $\sigma_0$  в точке  $A$ . Так, в осесимметричном случае ( $p=q$ ) для «предельного состояния ползучести» наиболее напряженные точки возле отверстия будут \* расположены на окружности с радиусом  $r=2,07r_0$  (где  $r_0$  — радиус отверстия), и действующее в них (наибольшее — главное) напряжение будет больше напряжения  $\sigma_0$  в точке  $A$  на 15%. При экспериментальном определении значений  $k$ , приведенных в табл. П.7, наибольшие растягивающие напряжения были в точке  $A$  (рис. П.50).

## § 12. Пластика из стеклопластика, ослабленная круговым отверстием \*\*

Геометрические размеры испытуемых образцов и ориентация главных направлений анизотропии по отношению к направлению растяжения приведены на рис. П.51. Стрелками с цифрами 1 и 2 показаны главные направления анизотропии, причем для образцов типа  $A$  модули упругости вдоль обоих главных направлений анизотропии почти равны (табл. П.8), а для образцов типа  $B$  соотношение модулей — 3,5 (табл. П.9). Уп-

\* См. Л. М. Качанов [1], стр. 227.

\*\* Данные взяты из работ Т. Hayashi [1, 2].

ругие постоянные этих образцов, данные в табл. П.10, определялись методом тензометрирования на растянутых образцах.

Образцы вырезались из материала, изготовленного из 10 параллельно наложенных кусков стеклоткани, пропитанных полистирольной смолой, причем для образцов типа А применялся ориентированный стеклопластик, имеющий в японской промышленности

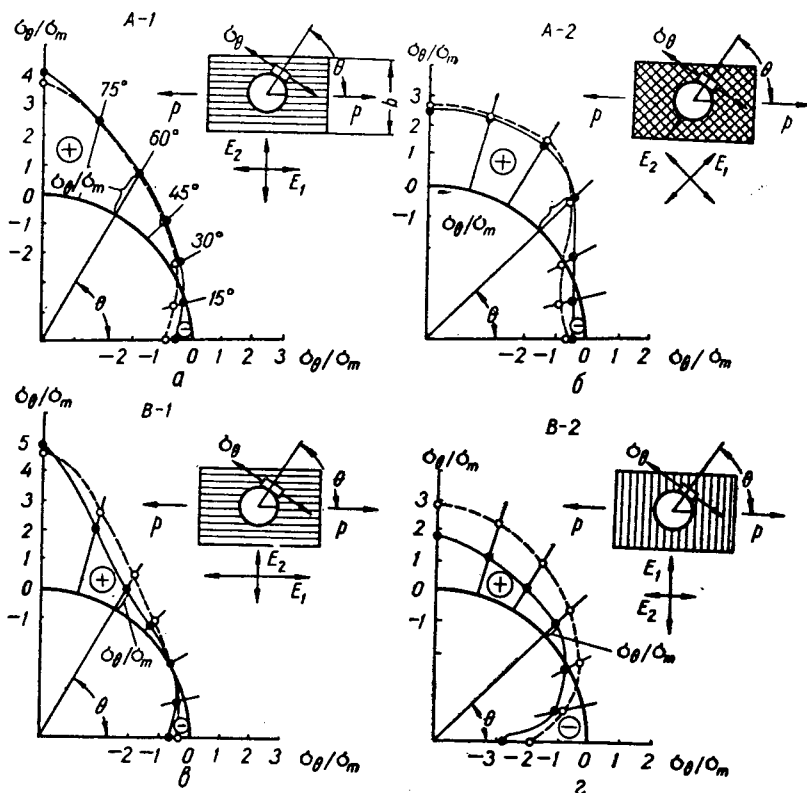


Рис. П.52.

марку ВНVT ЕС-181, а для образцов типа В—неориентированный стеклопластик марки ВНААХ ЕСF-18. В обоих случаях в качестве связующего применялась полистирольная смола типа Rigolac 1553z. Близкие коэффициенты преломления стеклоткани и связую-

Таблица П. 8

Действие силы	Модули Юнга, кг/мм <sup>2</sup>	Коэффициенты Пуассона
В направлении 1 (0°) . . . . .	$E_1=971$	$\nu_1=0,188$
В направлении 2 (90°) . . . . .	$E_2=957$	$\nu_2=0,171$
Под углом 45° . . . . .	$E_{45}=519$	$\nu_{45}=0,547$

Таблица П. 9

Действие силы	Модули Юнга, кг/мм <sup>2</sup>	Коэффициенты Пуассона
В направлении 1 (0°) . . . . .	$E_1=2110$	$\nu_1=0,260$
В направлении 2 (90°) . . . . .	$E_2=604$	$\nu_2=0,104$
Под углом 45° . . . . .	$E_{45}=602$	$\nu_{45}=0,421$



щего создавали хорошую прозрачность при исследовании, причем стеклоткань, создающая ортотропные свойства, не влияла на оптическую активность связующего.

На рис. П.52 приведены диаграммы распределения  $\sigma_\theta/\sigma_m$  по контуру\* кругового отверстия для 4 типов исследуемых образцов. Сплошная линия с темными кружками — данные эксперимента, штриховая линия с белыми кружками — теоретические значения  $\sigma_\theta/\sigma_m$ , подсчитанные Т. Hayashi [1] по формуле\*\*, взятой из работы А. Е. Green, G. J. Taylor [1]. Ценность этой работы состоит в том, что благодаря хорошей согласованности данных теории и эксперимента представляется возможность при исследовании более сложных задач концентрации напряжений возле отверстий в стеклопластках, для которых теоретические решения отсутствуют, применять метод фотоупругости.

Таблица П. 10

Упругие постоянные, кг/мм <sup>2</sup>	Для образца А	Для образца В
$E_1$	964	2120
$E_2$	964	604
$G$	166	210
$\nu_1$	0,188	0,260
$\nu_2$	0,188	0,074

Таим образом, из приведенных на рис. П.52 данных следует, что при определении средних значений компонент напряжений в стеклопластиках, армированных стекловолокном или стеклотканью, можно\*\*\* заменять их сплошным упругим анизотропным телом и применять к ним соответствующие формулы теории упругости анизотропной среды, приведенные в гл. III.

Таким образом, из приведенных на рис. П.52 данных следует, что при определении средних значений компонент напряжений в стеклопластиках,

армированных стекловолокном или стеклотканью, можно\*\*\* заменять их сплошным упругим анизотропным телом и применять к ним соответствующие формулы теории упругости анизотропной среды, приведенные в гл. III.

## ЛИТЕРАТУРА

- Александров А. Я., Ахметзянов М. Х., Ракин А. С. [1] Исследование упруго-пластического деформирования оболочек с вырезами и усилениями методом фотоупругих покрытий.— Прикл. мех., 1966, 2, 4.
- Афендик Л. Г. [1] Применение оптического метода для выяснения распределения напряжений возле некоторых горных выработок.— Горн. журн., 1938, 5.
- Афендик Л. Г., Ершов А. М. [1] Определение напряжений в пластинках с отверстиями оптическим методом.— Горн. журн., 1937, 14.
- Бугаков И. И. [1] Об исследовании оптическим методом концентрации напряжений в растягиваемой плоскости с круговым вырезом.— ПМТФ, 1965, 2.
- Вагапов Р. Д., Шишорина О. И. [1] Поперечное сжатие широкой полосы с отверстием у края.— В кн.: Пробл. прочн. в машиностр., 2. Изд-во АН СССР, М., 1959.
- Вагапов Р. Д., Шишорина О. И., Хрипина Л. А. [1] Упругая концентрация напряжений при взаимном влиянии вырезов и отверстий.— В кн.: Поляризационно-оптический метод иссл. напряжений. Изд-во ЛГУ, 1960.
- [2] Метод наложения известных контурных функций для оценки концентрации напряжений при нескольких вырезах равных радиусов.— В кн.: Пробл. прочн. в машиностр., 2. Изд-во АН СССР, М., 1959.
- [3] Приближенная оценка концентрации напряжений при взаимном влиянии вырезов неравных радиусов.— В кн.: Пробл. прочн. в машиностр., 2. Изд-во АН СССР, М., 1959.
- Вологжанинов Ю. И. [1] Исследование напряженного состояния возле круговых отверстий в конических оболочках методом фотоупругости. Автореферат канд. диссерт. К., 1967.
- [2.] Исследование ослабленных отверстиями оболочек отрицательной гауссовой кривизны, методом фотоупругости.— Прикл. мех., 1967, 3, 2.

\* Заметим, что  $\sigma_m = P/bh$ , где  $P$  — сила, растягивающая пластинку вдоль оси;  $b$  — ширина, а  $h$  — толщина пластинки.

\*\* Эта формула является частным случаем более общей формулы (III.25).

\*\*\* Разумеется, при условии, что как наполнитель, так и связующее должны быть достаточно прозрачны, а числовые значения их коэффициентов преломления — довольно близкими величинами.

- Вологжанинов Ю. И., Савченко В. И., Фенчак М. Д. [1] Исследование концентрации напряжений возле кругового отверстия в гиперболической оболочке методом фотоупругости.— В кн.: Концентрация напряжений, 1, «Наукова думка», К., 1965.
- Вологжанинов Ю. И., Шокотько С. Г. [1] Исследование напряженного состояния возле эллиптических отверстий в цилиндрических оболочках методом фотоупругости.— Прикл. мех., 1965, 1, 8.
- Гузь А. Н. [1] Напряженное состояние конической оболочки, ослабленной круговым отверстием.— Инж. журн., 1965, 5, 3.
- Качанов Л. М. [1] Основы теории пластичности. Гостехтеориздат, М.—Л., 1956.
- Коваленко А. Д., Григоренко Я. М., Ильин Л. А. [1] Теория тонких конических оболочек. Изд-во АН УССР, К., 1963.
- Кокер Л., Файлон Э. [1] Оптический метод исследования напряжений. ОНТИ, Л., 1936.
- Лошкарёв М. А. [1] Исследование напряженного состояния толстостенного цилиндра, ослабленного отверстием.— В кн.: Вопр. прочн. в хим. машиностр., 21. Машгиз, М., 1958.
- Лурье А. И. [1] Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, М.—Л., 1947.
- Пригоровский А. М. [1] Напряжения и деформации в деталях и узлах машин. ГНТИ машиностр. л-ры, М., 1961.
- Савин Г. Н. [1] Концентрация напряжений возле малых отверстий в неоднородно-напряженном плоском поле.— В кн.: Тр. Днепропетровск. ниж. строит. ин-та, 20, 1937.
- [2] Концентрация напряжений в оболочках и пластинках с отверстиями. Приложение теории функций в механике сплошной среды.— В кн.: Тр. межд. симпозиума, Тбилиси, 17—23 сент. 1963. «Наука», М., 1965.
- [3] Concentration of stresses around curvilinear holes in plates and shells. Proc. of the Eleventh Int. Congr. of App. Mech., Munich (Germany), 1964, Springer — Verlag, 1965.
- Савин Г. Н., Гузь А. Н. [1] О напряженном состоянии около криволинейных отверстий в оболочках.— Изв. АН СССР, ОТН, мех. и маш., 1964, 6.
- Тимошенко С. П. [1] Сопrotivление материалов, ч. II. ГТТИ, М., 1933, стр. 63.
- Финк К., Рорбах Х. [1] Измерение напряжений и деформаций. Перевод с немецк. Машгиз, М., 1960.
- Флерова Н. А. [1] Исследование оптическим методом концентрации напряжений в цилиндрической оболочке.— В кн.: Тр. НИИ им. А. Н. Крылова, 98, 1955.
- Фрохт М. М. [1] Фотоупругость, т. I. ГТТИ, М., 1948.
- [2] Фотоупругость, т. II, ГТТИ, М., 1950.
- Цимбаревич П. М. [1] К распределению напряжений в опорных целиках.— Изв. АН СССР, ОТН, 1949, 11.
- Шевляков Ю. А., Зигель Ф. С. [1] Кручения пологого цилиндра с отверстием на боковой поверхности.— ДАН УРСР, 1954, 1.
- Шихобалов С. П. [1] Исследование напряжений в ослабленных балках.— В кн.: Сб. работ ЛОМ НИИММ ЛГУ. Оптический метод изучения напряжений в деталях машин, Л., 1935.
- Gurney C. [1] An Analysis of the Stress in a Flat Plate with a Reinforced Circular Hole Under Edge Forces. Aeronautical Research Committee, R. and M. N 1834, London, 1938.
- Green A. E. and Taylor G. I. [1] Proc. Roy. Soc. A 181, 181 (1945) (Received on 5 November, 1940)
- [2] Proc. Roy. Soc. A. 173, 162 (1939).
- Jessop H. T., Snell C., Allison J. M. [1] The stress concentration factors in cylindrical tubes with transverse circular holes. Aeronaut, Quart., 1959, 10, 4.
- Heywood R. B. [1] Designing by Photoelasticity, Chapman and Hall, Ltd., London, England, 1952.
- Howland R. C. [1] On the Stresses in the Neighbourhood of a Circular Hole in a Strip Under Tension, Philosophical Transactions of the Royal Society, London, 1930, ser. A, 229, 49—86.

- Houghton D. S. [1] Stress Concentrations Around Cut-outs in a Cylinder.—Journ. of the Roy. Aeronautical Soc., 1961, 65, 603.
- Houghton D. S., Rothwell A. [1] The effect of curvature on the stress concentrations around holes in shells. Rept. Coll. Aeronaut. Cranfield, 1962, 156.
- Tsuyoshi Hayashi [1] Photoelastic Method of Experimentation for Ortotropic Materials, Oyo Buturi, Oct. 1962, 31, 10.  
[2] Photoelastic method of experimentation for stress analysis in ortotropic structures., 4 th Internat. Sympos. Space Technol. and Sci. Tokyo, 1962, Proc. Tokyo. (1963), 156—169.
- Lekkerkerker J. G. [1] On the stress distribution in a cylindrical shells weakened by a circular hole. Uitgeverij Waltman — Delft, 1965.
- Mehring F. J., Cooper W. E. [1] Experimental determinations of stresses in the vicinity of pipe appendages to a cylindrical shell. Proc. Soc. Exptl. Stress Analysis, 1957, 14, 2.
- Reiner M., Lercheuthal H. [1] A photoelastic investigation of stress concentration around reinforced cutouts in stressed sheets., Final Report Izrael Institute of Technology, septembre 1962, Technion City.
- Сейка Масантиро [1] Исследование методом фотоупругости максимального напряжения в растянутой пластинке с подкрепленным круглым отверстием.—Trans, Japan Soc. Mech. Engrs, 1964, 30, 212, 510—514.
- Сейка Масантиро (M. Seika), Исии Масамицу (M. Ishii) [1] Photoelastic Investigation of the Maximum Stress in a Plate With a reinforced Circular Hole Under Uniaxial Tension., Journal of Applied Mechanics — Transaction of the ASME, 1964, ser. E, 4.
- Сейка Масантиро, Исии Масамицу, Куруцу Йосио [1] Исследование методом фотоупругости максимального напряжения в растянутой бесконечной пластинке с круглым отверстием, подкрепленным жестким кольцом.— Trans. Japan, Soc. Mech. Engrs. 1963, 29, 200.
- Tuzi Z. [1] Effect of a Circular Hole on the Stress distribution in a Beam under uniform bending moment.— Phil. Mag. Feb. 1930, 9, 56.

# THE STRESS DISTRIBUTION AROUND HOLES

G. N. SAVIN

## *Summary*

The monograph consists of preface, 12 chapters, and appendix. Chapter 1 deals with the principal equations of the plane problem of the theory of elasticity in a linear formulation, valid both for the isotropic and anisotropic elastic media.

The method is presented for solving the principal plane boundary value problems for the simply connected domains. Some ways are shown for obtaining the mapping functions of the exterior (interior) of a single circle on the exterior of a curvilinear hole which contour is an arbitrary smooth curved line.

Chapter 2 deals with the methods of solving the problem of a stressed state of the isotropic medium weakened by one or several curvilinear holes.

The author considers a great number of examples for the medium with one curvilinear hole which forms correspond to the majority of those that find their direct application in the current practice. Various forces applied to the mentioned medium are accounted for.

Solutions are given of a large class of problems for the multiply connected domains.

Different problems are considered on the stress concentration in a beam of an infinite length and for a half-plane, weakened by a circular hole, and for an elastic plane with a finite series of identical circular and curvilinear holes as well as with two different holes. A case is also considered when the medium is weakened by the bi-periodical system of circular holes.

All the mentioned problems are illustrated by numerical results given in a form of tables and diagrams, clearly demonstrating the effect of the stress concentration around holes.

Chapter 3 deals with the anisotropic elastic medium.

Methods are given of solving the principle boundary value problems for the medium containing one or several elliptical holes, and for curvilinear holes discussed in chapter 2, the method of small parameter was used.

A great number of particular problems are given with the numerical results. All the results as in chapter 2 are presented in the forms of tables and diagrams, permitting to find out the effect of anisotropy on stress concentration around holes under different kinds of medium loading.

Chapter 4 deals with the basic equations of the plane problem of the theory of elasticity for physically non-linear materials slightly deviating from Hook's law. Complex representation of the principal problems are obtained and the nature of complex potentials for the multiply-connected domain was investigated.

Two methods are suggested for solving non-linear problems:

- 1) the method of conformal mappings combined with the iteration method;
- 2) the method of «boundary form perturbation».

A number of examples is discussed on the stress distribution near the circular, elliptical, and square with rounded corners, holes under different types of loads.

Chapter 5 is devoted to the investigation of stresses beyond the elastic limit.

Problems are considered here of the determination of plastic strain zones arising near holes, lines of sliding and of critical loads at the crack appearance.

Solutions are given of the elasto-plastic problems for a plane with a circular hole in the case of normal and tangential forces applied to at the hole contour: an effect is shown for the non-uniform stressed field on the size and configuration of the plastic-strain zone and also the distribution of the plastic zones in a plate with an infinite series of identical circular holes.

Solutions are also presented of the elasto-plastic problems for the plane generalized stressed state of a plate with circular hole. A case is also considered of the elasto-plastic problem for a thin plate with elliptic hole.

Chapter 6 deals with the influence of the couple-stresses of the theory of elasticity on the stress concentration near holes mentioned above. In particular, the closed solutions are given of the plane boundary value problems of the couple-stresses of the theory of elasticity for the domain with circular hole both free and reinforced.

To solve the problems on the stress concentration near the curvilinear holes such as the elliptic, square and triangular ones (the latter having rounded corners), the method of «boundary form perturbation» was applied. As an example, the problem is considered of the stress concentration near an elliptical hole.

It is shown that taking into account the couple-stresses leads to a decrease of the value of the stress concentration factor near the free hole.

Chapter 7 deals with the thermo-elastic problems of the theory of elasticity. Basic equations are derived for the plane thermo-elastic problem as well as for the problem of bending of the thin plates.

The stress concentration is studied near various curvilinear holes (of the same form as in the previous chapters) with uniform heat flow.

A case is also considered of a plate weakened by a bi-periodical system of circular holes having the same form and size.

Chapter 8 contains the principal statements of the theory of equilibrium crack in the case of a simplified brittle body model.

A large class of problems is considered on the determination of the critical load required for the beginning of development of the equilibrium cracks having various configurations. In particular, the critical loads are determined for one and two collinear rectilinear cracks emerging at the circular hole contour due to the prescribed loads on infinity. The cracks development is considered at the bending of a beam weakened by holes mentioned above.

In conclusion of the chapter, the diagram plot of the ultimate (with respect to strength) stresses for a body, subjected to the plane stressed state is presented. A comparison is given of the diagrams with the experimental results.

Chapter 9 is devoted to the formulation of the general non-linear (physical and geometrical non-linearity) plane problem of the theory of elasticity. Two methods of solutions are discussed.

The first method is based on the works of Adkins, Green and Zerna. The principal resolving equation systems are presented for the plane-strain and the plane-stressed state. The relation between stress and strains is postulated by assuming the existence of the elastic potential depending on three invariants. Special investigations were conducted on the particular type of the elasticity law (Mooney law).

The formulation and method are presented of solving problems on the stress concentration near the above mentioned forms of the curvilinear holes.

The basic boundary value problems are formulated. The method of small parameter is used to solve them. A solution is obtained for the particular set of problems which clearly show that the stress concentration near holes is dependent on the physical and geometrical non-linearity, form and location of the holes as well as on the elastic constants of the material and elements reinforcing holes.

The second method of formulating the two-dimensional problem of the theory of elasticity is based on the L. A. Tolokonnikov works. The formulation in complex variables is given of the problem on the stress concentration around holes, and solution of some particular problems is obtained.

In Chapter 10 the formulation of problems is given on the stress distribution near curvilinear holes in shells. For the stress concentration near holes, the basic equations and boundary conditions of the problem are considered.

In this chapter the solution is given of numerous problems on the stress concentration in the spherical and cylindrical shells near the circular, elliptic, square and triangular holes under different action of external forces (extension—compression, internal pressure, torsion) applied to the shell. Numerous tables, graphs, diagrams are presented here demonstrating the results obtained. Chapter 11 is devoted to the investigation of the stressed state in the vicinity of hole in the case of dynamic problems.

Problems are considered on distribution of the transient cylindrical elastic waves, generated on a circular hole in a thin infinite plate. The plate material was assumed to be both isotropic and anisotropic and non-uniform of special type. The stresses at the hole contour and wave front are determined. In case of the stationary wave movements, the author considers the action of the plane harmonic elastic wave of compression or shear on the hole or insertion into the hole of the infinite plate. The values of the stress concentration factors dependence on the length of the moving wave and Poisson coefficient are obtained. The holes considered are both circular and curvilinear and have the above mentioned form. It is shown that the stressed state near the hole depends significantly on frequency and exceeds the static value by 10—12% in a certain range of frequencies.

The diagrams are given, characterizing the stressed state around two circular holes at the contours of which the oscillating pressure is applied.

Chapter 12 shows the effect of the visco—elastic properties of the material on the stress distribution around holes. The general relations of the linear theory of the visco-elastic media and the boundary value problems are formulated.

Solutions of certain problems are obtained on the stress concentration near holes for the case of bending and torsion of a thin plate and also for the case of extension of the plate having a hole into which a disc is inserted.

The stress concentration is studied near the circular and elliptical holes in the anisotropic visco-elastic plate made of unidirectional glass-reinforced plastic.

Appendix contains the results of some experimental investigations on the stress concentration near curvilinear holes in the plates and shells for the problems discussed in the previous chapters.

These investigations concern the problems of the effect of hole forms, their number and location, the influence of the force field on the «infinity», the effect of holes located nearby as well as the effect of the Gaussian curvature of the middle surface of the shells on the stress concentration near holes.

These experimental data can serve as verification of the theoretical assumptions and hypotheses which were used for the analytical solutions of problems on the stress concentration near holes discussed in previous chapters.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
От автора . . . . .	7
Глава I. Основные уравнения плоской задачи теории упругости . . . . .	9
§ 1. Плоская задача линейной теории упругости изотропной среды . . . . .	9
§ 2. Отображающие функции . . . . .	17
§ 3. Основные уравнения линейной теории упругости анизотропной среды . . . . .	25
§ 4. Таблица некоторых интегралов типа Коши . . . . .	50
Литература . . . . .	54
Глава II. Распределение напряжений в плоском изотропном поле, ослабленном каким-либо отверстием или рядом отверстий . . . . .	58
§ 1. Метод решения . . . . .	58
§ 2. Одноосное растяжение или сжатие . . . . .	62
§ 3. Двухосное однородное напряженное состояние . . . . .	95
§ 4. Чистый изгиб . . . . .	100
§ 5. Учет влияния сил собственного веса на распределение напряжений в упругой плоскости с отверстием . . . . .	106
§ 6. Напряжения в полосе конечной ширины, ослабленной круговым отверстием . . . . .	112
§ 7. Концентрация напряжений в областях, ограниченных двумя окружностями или окружностью и прямой . . . . .	121
§ 8. Напряжения в упругой плоскости, ослабленной одинаковыми круговыми отверстиями . . . . .	138
§ 9. Напряжения в упругой плоскости, ослабленной двумя неодинаковыми отверстиями . . . . .	150
§ 10. Напряжения в упругой плоскости, ослабленной криволинейными отверстиями . . . . .	158
§ 11. Концентрация напряжений около двоякопериодической системы отверстий . . . . .	170
§ 12. Растяжение упругой плоскости с криволинейным отверстием, подкрепленным упругими стойками . . . . .	175
Литература . . . . .	196
Глава III. Влияние анизотропии материала на распределение напряжений возле свободных и подкрепленных отверстий . . . . .	209
§ 1. Решение первой основной задачи для области с эллиптическим отверстием . . . . .	209
§ 2. Решение второй основной задачи для области с эллиптическим отверстием . . . . .	249
§ 3. Анизотропная пластинка с впадиной круговой изотропной шайбой . . . . .	256

§ 4. Смешанная граничная задача для ортотропной пластинки с круговым отверстием . . . . .	269
§ 5. Давление жесткой шайбы на край кругового отверстия в ортотропной пластинке . . . . .	285
§ 6. Решение первой основной задачи для области с отверстием, мало отличающимся от эллиптического . . . . .	294
§ 7. Растяжение анизотропной пластинки с криволинейным отверстием частного вида . . . . .	298
§ 8. Чистый изгиб анизотропной пластинки с криволинейным отверстием . . . . .	313
§ 9. Решение второй основной задачи для области с отверстием, мало отличающимся от эллиптического . . . . .	321
§ 10. Растяжение анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, подкрепленным жестким кольцом . . . . .	323
§ 11. Чистый изгиб анизотропной пластинки с криволинейным отверстием, подкрепленным жестким кольцом . . . . .	332
§ 12. Напряженное состояние анизотропной пластинки вблизи криволинейного отверстия с упругим ядром . . . . .	337
§ 13. Напряжения в упругой анизотропной плоскости, ослабленной несколькими эллиптическими отверстиями . . . . .	343
Литература . . . . .	354
Глава IV. Влияние физической нелинейности материала на распределение напряжений возле отверстий . . . . .	358
§ 1. Основные уравнения плоской задачи физически нелинейной теории упругости . . . . .	359
§ 2. Метод последовательных приближений . . . . .	367
§ 3. Метод возмущения формы границы . . . . .	373
Литература . . . . .	396
Глава V. Образование пластических зон или равновесных трещин возле отверстий . . . . .	399
§ 1. Постановка задачи . . . . .	399
§ 2. Упруго-пластическая задача для бесконечной плоскости с круговым отверстием (плоская деформация) . . . . .	402
§ 3. Влияние неоднородности напряженного поля на пластическую зону возле кругового отверстия . . . . .	412
§ 4. Пластические зоны возле кругового отверстия при двусосном растяжении пластинки (точное решение) . . . . .	425
§ 5. Пластические зоны возле криволинейных отверстий (приближенное решение) . . . . .	430
§ 6. Упруго-пластическая задача для плоскости, ослабленной бесконечным рядом одинаковых круговых отверстий . . . . .	437
§ 7. Пластические зоны возле кругового отверстия при одноосном растяжении пластинки . . . . .	441
§ 8. О полосах скольжения возле эллиптического отверстия . . . . .	443
§ 9. О критических нагрузках, вызывающих начало развития трещин возле отверстия . . . . .	452
Литература . . . . .	460



Глава VI. Влияние несимметричности тензора напряжений на распределение напряжений возле отверстий . . . . .	464
§ 1. Общие замечания . . . . .	464
§ 2. Плоская задача моментной теории упругости изотропной среды . . . . .	467
§ 3. Применение теории функций комплексного переменного к решению граничных задач моментной теории упругости . . . . .	471
§ 4. Концентрация напряжений около кругового отверстия . . . . .	476
§ 5. Концентрация напряжений около произвольного криволинейного отверстия . . . . .	488
Литература . . . . .	518
Глава VII. Распределение температурных напряжений возле свободных и подкрепленных отверстий . . . . .	520
§ 1. Основные уравнения плоской температурной задачи теории упругости и задачи теории изгиба тонких плит . . . . .	520
§ 2. Основные уравнения теории теплопроводности . . . . .	525
§ 3. Температурные напряжения, обусловленные возмущением однородного теплового потока около отверстий . . . . .	532
§ 4. Осесимметричное температурное поле и температурные напряжения в бесконечной пластинке с круговым подкрепленным краем . . . . .	538
§ 5. Температурные напряжения при изгибе тонкой пластинки с круговым отверстием . . . . .	544
§ 6. Температурные напряжения в тонкой пластинке, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий . . . . .	548
Литература . . . . .	549
Глава VIII. Распределение напряжений возле трещин. Предельные нагрузки при хрупком разрушении материала . . . . .	551
§ 1. Вводные замечания . . . . .	551
§ 2. Задача Гриффитса . . . . .	553
§ 3. Условие предельного состояния для макроскопических трещин . . . . .	558
§ 4. Растяжение упругой плоскости, ослабленной двумя коллинеарными трещинами . . . . .	562
§ 5. О величине предельной нагрузки для упругой плоскости, ослабленной круговым отверстием с радиальными трещинами . . . . .	567
§ 6. Растяжение упругой плоскости с дугообразной или произвольно ориентированной прямолинейной трещиной . . . . .	573
§ 7. Изгиб полос (балок), ослабленных прямолинейными трещинами . . . . .	579
§ 8. О предельном состоянии упругого тела, ослабленного концентратором напряжений с малым радиусом кривизны . . . . .	587
§ 9. О крупном разрушении материала . . . . .	594
Литература . . . . .	606
Глава IX. Распределение напряжений возле отверстий в общем случае плоской нелинейной задачи теории упругости . . . . .	608
§ 1. Основные уравнения нелинейной плоской теории упругости . . . . .	609
§ 2. Влияние нелинейных эффектов второго порядка на распределение напряжений возле отверстий . . . . .	648

§ 3. Другой вариант решения задачи о распределении напряжений возле отверстий при плоской деформации несжимаемого материала	676
Литература	699
<b>Глава X. Распределение напряжений возле отверстий в оболочках</b>	<b>701</b>
§ 1. Постановка задачи	701
§ 2. Методы решения	712
§ 3. Сферическая оболочка с криволинейным отверстием	732
§ 4. Круговая цилиндрическая оболочка, ослабленная малым криволинейным отверстием	751
§ 5. Заключительные замечания	771
Литература	772
<b>Глава XI. Динамические задачи о распределении напряжений возле отверстий</b>	<b>780</b>
§ 1. Постановка задач	780
§ 2. Круговое отверстие. Осесимметричные задачи	783
§ 3. Круговое отверстие. Падающая плоская гармоническая волна	790
§ 4. Криволинейное отверстие с достаточно гладким контуром	802
§ 5. Некоторые замечания о задачах для многосвязных областей	815
Литература	818
<b>Глава XII. Влияние вязко-упругих свойств материала на распределение напряжений возле отверстий</b>	<b>820</b>
§ 1. Основные соотношения линейной теории вязко-упругих сред	820
§ 2. Распределение напряжений возле отверстия в однородных вязко-упругих материалах	826
§ 3. Распределение напряжений около отверстий в анизотропных и неоднородных материалах	835
Литература	847
<b>Приложение. Экспериментальные данные о распределении напряжений возле отверстий</b>	<b>849</b>
§ 1. Общие замечания	849
§ 2. Растяжение пластинки с отверстиями	850
§ 3. Чистый изгиб полосы с отверстием	857
§ 4. Изгиб консольной балки, ослабленной круговыми отверстиями	860
§ 5. Одноосное растяжение пластинки, ослабленной круговым отверстием, край которого подкреплён упругим кольцом	861
§ 6. Прямоугольные отверстия в поле сил собственного веса	863
§ 7. Влияние гауссовой кривизны на величину возмущенной зоны возле отверстия	864
§ 8. Цилиндрическая оболочка, ослабленная одним отверстием	866
§ 9. Коническая оболочка, ослабленная одним отверстием	871
§ 10. Оболочки отрицательной гауссовой кривизны	873
§ 11. Влияние ползучести материала на концентрацию напряжений возле кругового отверстия	874
§ 12. Пластинка из стеклопластика, ослабленная круговым отверстием	876
Литература	878
<b>Summary</b>	<b>881</b>

**ГУРИЙ НИКОЛАЕВИЧ САВИН**

**Распределение напряжений около отверстий**

*Печатается по постановлению ученого совета  
Института механики Академии наук Украинской ССР*

Редакторы

**В. И. ГИЛЕЛАХ  
И. Г. БОБРЫШЕВА**

Младший редактор  
**Л. Е. ЗБОРОВСКАЯ**

Оформление художника

**Р. К. ПАХОЛЮКА**

Художественный редактор

**И. П. АНТОНЮК**

Технический редактор

**М. А. ПРИТЫКИНА**

Корректоры

**С. А. ЕВЕЦКАЯ, В. В. ГАЛАТА**

БФ 02963. Зак. № 277. Изд. № 270. Тираж 2000. Бумага  
№ 1, 70×100<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Печ. физ. листов 55,5. Усл. печ. листов  
72,1. Учетно-изд. листов 63,85. Подписано к печати  
29.II 1968 г. Цена 4 руб. 25 коп.

Издательство «Наукова думка», Киев, Репина, 3.

Киевская книжная типография № 5 Комитета по печати  
при Совете Министров УССР, Киев, Репина, 4.